Phys. g. 529th
1
Wüllner

COMPENDIUM

DER

PHYSIK

FÜR

STUDIRENDE AN UNIVERSITÄTEN UND TECHNISCHEN HOCHSCHULEN

VON

Dr. ADOLPH WÜLLNER,

PROFESSOR DER PHYSIK AM KÖNIGL. POLYTECHNICUM ZU AACHEN;
MITGLIED DER KAISERL. LEOP.-CAR.-ACADEMIE DEUTSCHER NATURFORSCHER;
C. MITGLIED DER KÖNIGL. BAIERISCHEN ACADEMIE DER WISSENSCHAFTEN ZU MÜNCHEN;
AUSW. MITGLIED DER BRIT. ASSOC. FOR ADVANCEMENT OF SCIENCE;
EHRENMITGLIED DES PHYSIKALISCHEN VEREINS ZU FRANKFURT A. M. ETC.

ERSTER BAND:

ALLGEMEINE PHYSIK, AKUSTIK UND OPTIK.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1879.

490 D

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

Lehrbuch der Experimentalphysik

von Dr. **Adolf Wüllner,**

Professor der Physik an der polytechnischen Schule zu Aachen.

Dritte verbesserte und vermehrte Auflage.

Mit vielen Holzschnitten.

4 Bände. gr. 8. geh. Preis 41 Mk.

Einzeln:

I. Band: Mechanik und Akustik. (VIII u. 737 S.) gr. 8. 1874. geh. n. 9 Mk.

II. Band: Die Lehre vom Licht. Mit vielen Holzschnitten und 4 Spectraltafeln. (VIII u. 624 S.) gr. 8. 1875. geh. n. 9 Mk.

III. Band: Die Lehre von der Wärme. A. u. d. T.: Die Lehre von der Wärme vom Standpunkte der mechanischen Wärmetheorie. Mit vielen Holzschnitten. (VIII u. 717 S.) gr. 8. 1875. geh. n. 9 Mk.

IV. Band: Die Lehre vom Magnetismus und der Electricität. (VIII u. 1032 S.) gr. 8. 1875. geh. n. 14 Mk.

Beer, August, Einleitung in die mathematische Theorie der Elasticität und Capillarität. Herausgegeben von A. Giesen. (VI u. 196 S.) gr. 8. 1869. geh. n. 4 Mk.

Diese Schrift des verewigten Verfassers hat sich die Aufgabe gestellt, den Leser auf dem kürzesten Wege in die allgemeine Theorie der Elasticität und Capillarität einzuführen und über die Hauptresultate, zu denen bisher die mathematische Physik in diesen Disciplinen gelangte, zu orientiren.

Kahl, Dr. phil. Emil, mathematische Aufgaben aus der Physik nebst Auflösungen. Zum Gebrauche an höheren Schulanstalten und zum Selbstunterricht bearbeitet. Zweite gänzlich umgearbeitete, vermehrte und verbesserte Auflage, mit allseitiger Berücksichtigung des metrischen Maasssystems. Mit in den Text gedruckten Holzschnitten. (XII u. 311 S.) gr. 8. 1874. geh. n. 5 Mk.

Kirchhoff, Dr. Gustav, Professor in Berlin, Vorlesungen über mathematische Physik. Mechanik. Zweite Auflage. (VIII u. 466 S.) gr. 8. 1877. geh. n. 13 Mk.

Die zweite Auflage ist ein im Wesentlichen unveränderter Abdruck der ersten. Das Buch behandelt das ganze Gebiet der reinen Mechanik, d. h. die Lehre von denjenigen Erscheinungen, bei welchen ausschliesslich Bewegungen ins Auge zu fassen sind, insoweit, als die Körper als continuirlich aufgefasst werden dürfen, die Annahme von Molekülen also nicht nöthig ist. Näheres über den Inhalt in B. G. Teubner's Mittheilungen 1876. No. 6.

Kohlrausch, F., Professor in Würzburg, Leitfaden der praktischen Physik, mit einem Anhange: Das elektrische und magnetische absolute Maass-System. Dritte verbesserte Auflage. (XII u. 254 S.) gr. 8. 1877. geh. n. 5 Mk.

Dieser Leitfaden enthält in gedrängter Darstellung die Vorschriften für die Ausführung physikalischer Messungen. Da die Kenntniss der Apparate im Allgemeinen vorausgesetzt wird, so kann der Zweck des Buches nicht darin bestehen, ein Lehrbuch der Physik zu ersetzen. Allein abgesehen davon, dass in dem Letzteren nicht Alles enthalten sein kann, was für die praktische Ausführung der Arbeiten und besonders für die Berechnung der Resultate nothwendig ist, so bildet es für minder Geübte eine nicht ganz leichte Arbeit, aus der Fülle von Material das in dem einzelnen Falle Erforderliche herauszusuchen. Bei der immer vermehrten Häufigkeit physikalischer Arbeiten entsteht daher das Bedürfniss nach einem Lehrbuch der praktischen Physik, und als der Anfang zu einem solchen ist der vorliegende Leitfaden zu betrachten. Die vorausgesetzten mathematischen Kenntnisse sind elementar. Bezüglich der Grenze, bis zu welcher die Genauigkeit der Messung getrieben werden soll, sind nicht sowohl wissenschaftlich-physikalische Untersuchungen als die Anwendungen der Physik auf anderen Gebieten, besonders in der Chemie, massgebend gewesen.

Fortsetzung auf der dritten Seite des Umschlags.

COMPENDIUM

DER

PHYSIK

FÜR

STUDIRENDE AN UNIVERSITÄTEN UND TECHNISCHEN HOCHSCHULEN

VON

DR. ADOLPH WÜLLNER,

PROFESSOR DER PHYSIK AM KÖNIGL. POLYTECHNICUM ZU AACHEN;
MITGLIED DER KAISERL. LEOP.-CAR.-ACADEMIE DEUTSCHER NATURFORSCHER;
C. MITGLIED DER KÖNIGL. BAIERISCHEN ACADEMIE DER WISSENSCHAFTEN ZU MÜNCHEN;
AUSW. MITGLIED DER BRIT. ASSOC. FOR ADVANCEMENT OF SCIENCE;
EHRENMITGLIED DES PHYSIKALISCHEN VEREINS ZU FRANKFURT A. M. ETC.

ERSTER BAND:

ALLGEMEINE PHYSIK, AKUSTIK UND OPTIK.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1879.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

Das Recht der Uebersetzung in alle modernen Sprachen behalten Verfasser und Verleger sich vor.

Vorrede.

Durch die Herausgabe des vorliegenden Compendiums der Physik komme ich dem mir mehrfach und von verschiedenen Seiten ausgesprochenen Wunsche nach, ein kürzeres Lehrbuch für die Studirenden an Universitäten und technischen Hochschulen zu bearbeiten, welche zu ihren Fachstudien einer gründlichen Kenntniss der Physik bedürfen, wie Mediciner, Chemiker, Techniker der verschiedenen Richtungen etc. Der wissenschaftliche Standpunkt des Buches ist durch die gestellte Aufgabe gegeben; es soll dem Studirenden, der sich in der Regel in den ersten Semestern mit dem Studium der Physik beschäftigt, einen Ueberblick über den jetzigen Stand der Physik geben. Die mathematischen Vorkenntnisse, die ich voraussetze, sind deshalb diejenigen, welche Gymnasium und Realschule bei ernstlichem Studium der diesen Schulen zugewiesenen Aufgaben ihren Abiturienten geben. Davon ausgehend habe ich die wenigen Sätze der Differential- und Integral-Rechnung, welche bei einer wissenschaftlichen Behandlung der Physik unentbehrlich sind, an denjenigen Stellen des Buches, wo sie gebraucht werden, kurz abgeleitet.

Dem Zwecke des Buches entsprechend habe ich näheres Eingehen auf die Details vermieden, keine Zahlentabellen gegeben und die Methoden der Untersuchung nur so weit behandelt, dass der Studirende erkennen kann, wie die Resultate gewonnen worden sind.

Litteraturangaben habe ich nicht gemacht; wer diese sowie ein Eingehen auf die Details sucht, findet das Erforderliche in meinem Lehrbuche der Experimentalphysik.

Aachen den 8. Januar 1879.

A. Wüllner.

Inhaltsverzeichniss des I. Bandes.

Seite
Einleitung; Aufgabe der Physik . 1
Methode der Physik . 2
Die in der Physik gebräuchlichen Maasse 6

Erster Theil.

Die Lehre von dem Gleichgewicht und der Bewegung der Körper.

Erster Abschnitt.

Die Lehre von dem Gleichgewicht und der Bewegung der Körper als solcher.

Erstes Kapitel. Von der fortschreitenden Bewegung der Körper.

§. 1. Bewegung, Geschwindigkeit, Beschleunigung 8
§. 2. Kräfte . 14
§. 3. Atwood'sche Fallmaschine . 16
§. 4. Bewegung in Folge einer constanten Kraft 18
§. 5. Fundamentalgesetz der Kraftwirkung 23
§. 6. Das Kräfteparallelogramm . 24
§. 7. Bewegung geworfener Körper 28
§. 8. Verschiedene Maasse der Kraft; Arbeit; Princip der Erhaltung der Arbeit . 31
§. 9. Bewegung durch inconstante Kräfte 34

Zweites Kapitel. Von der drehenden Bewegung.

§. 10. Entstehung der drehenden Bewegung 36
§. 11. Abhängigkeit der drehenden Bewegung von der drehenden Kraft; statische Momente . 37
§. 12. Abhängigkeit der drehenden Bewegung von der Vertheilung der zu drehenden Masse; Trägheitsmoment 41
§. 13. Zusammensetzung verschieden gerichteter Drehungen 43
§. 14. Mittelpunkt paralleler Kräfte; Schwerpunkt 46
§. 15. Die Wage . 51
§. 16. Specifisches Gewicht und Dichtigkeit 57
§. 17. Das Pendel . 58
§. 18. Länge des physischen Pendels; Bestimmung von g 66
§. 19. Allgemeine Anwendung der Pendelgesetze 70
§. 20. Centripetalkraft und Centrifugalkraft 71
§. 21. Erhaltung der Rotationsebene 73
§. 22. Foucault's Pendelversuch . 76

Drittes Kapitel. Von der allgemeinen Gravitation.

§. 23. Allgemeine Anziehung. Keppler's Gesetze 78
§. 24. Entwicklung des Anziehungsgesetzes 79

Seite
§. 25. Identität der Schwere und der allgemeinen Anziehung 82
§. 26. Verschiedenheit von g in verschiedenen Breiten 89
§. 27. Anziehung von Massen an der Erdoberfläche; Dichtigkeit der Erde . 92

Zweiter Abschnitt.

Von dem Gleichgewicht und der Bewegung der Körper in ihren einzelnen Theilen.

Erstes Kapitel. Von den festen Körpern.

§. 28. Beschaffenheit der Materie 97
§. 29. Die Aggregatzustände . 104
§. 30. Elasticität durch Zug oder Druck 105
§. 31. Quercontraction und kubische Compressibilität 110
§. 32. Biegungselasticität . 114
§. 33. Torsionselasticität . 118
§. 34. Elastische Nachwirkung; Grenze der Elasticität; Festigkeit 126
§. 35. Vom Stoss der Körper . 129
§. 36. Adhäsion . 134
§. 37. Reibung . 136

Zweites Kapitel. Von den tropfbar flüssigen Körpern.

§. 38. Constitution der Flüssigkeiten 137
§. 39. Zusammendrückbarkeit der Flüssigkeiten 140
§. 40. Hydrostatischer Druck; hydraulische Presse 145
§. 41. Eingetauchte und schwimmende Körper 151
§. 42. Bestimmung des specifischen Gewichtes fester Körper 155
§. 43. Bestimmung des specifischen Gewichtes flüssiger Körper 158
§. 44. Molekularwirkungen zwischen festen und flüssigen Körpern 160
§. 45. Normaldruck und Oberflächenspannung in Flüssigkeiten 162
§. 46. Einfluss der Wände . 166
§. 47. Niveauänderungen durch die Molekularkräfte 170
§. 48. Grösse der Wirkungssphäre 175
§. 49. Auflösung . 176
§. 50. Mischung und Schichtung der Flüssigkeiten 177
§. 51. Diffusion; Endosmose . 180
§. 52. Ausfluss der Flüssigkeiten; Torricellischer Satz 183
§. 53. Hydraulischer Druck . 188
§. 54. Ausflussmenge . 189
§. 55. Reibung der Flüssigkeiten 191

Drittes Kapitel. Von den gasförmigen Körpern.

§. 56. Beschaffenheit der Gase 195
§. 57. Hydrostatischer Druck in Gasen 196
§. 58. Das Barometer . 199
§. 59. Das Mariotte'sche Gesetz 204
§. 60. Druckvertheilung in der Atmosphäre 210
§. 61. Manometer . 214
§. 62. Volumenometer . 216
§. 63. Die Luftpumpe . 218
§. 64. Quecksilberluftpumpen . 222
§. 65. Die Compressionspumpe 225
§. 66. Flüssigmachen der Gase 228
§. 67. Molekularwirkungen zwischen Gasen und festen Körpern 228
§. 68. Absorption der Gase in Flüssigkeiten 230
§. 69. Ausströmen der Gase . 232
§. 70. Reibung der Gase . 238
§. 71. Diffusion der Gase . 239
§. 72. Stoss und Widerstand der Luft 240

Dritter Abschnitt.
Von der Wellenbewegung.

Erstes Kapitel. Theoretische Principien der Wellenbewegung.

Seite
§. 73. Schwingende Bewegung eines Punktes 242
§. 74. Gesetze der schwingenden Bewegung eines Punktes 244
§. 75. Schwingung von Punktreihen. Entstehung der Wellen 247
§. 76. Mathematische Darstellung der Wellenbewegung einer Punktreihe . 251
§. 77. Zusammensetzung mehrerer Bewegungen; Interferenz 259
§. 78. Interferenz von Wellen, die sich in entgegengesetzter Richtung fortpflanzen; Bildung stehender Wellen 263
§. 79. Zusammensetzung von Schwingungen verschiedener Richtung . . . 266
§. 80. Zusammensetzung von Schwingungen verschiedener Wellenlänge . . 271
§. 81. Schwingungen eines räumlich ausgedehnten Punktsystems 277
§. 82. Huyghens'sches Princip . 280
§. 83. Fortpflanzung der Wellen in nicht homogenen Systemen; Reflexion der Wellen . 284
§. 84. Brechung der Wellen . 288

Zweites Kapitel. Von der Wellenbewegung der Körper.

§. 85. Schwingende Bewegung der Körper in ihren einzelnen Theilen in Folge der Elasticität . 290
§. 86. Fortpflanzung longitudinaler Wellen in Stäben 292
§. 87. Longitudinale Schwingungen begrenzter Stäbe 293
§. 88. Ausbreitung longitudinaler Wellen in Flüssigkeiten und Gasen . . . 299
§. 89. Stehende Wellen in Flüssigkeitscylindern 303
§. 90. Transversale Schwingungen von fadenförmigen gespannten Körpern . 304
§. 91. Stehende Schwingungen gespannter Saiten 306
§. 92. Transversalschwingungen von Stäben 309
§. 93. Transversale Schwingungen von Platten; Chladni's Klangfiguren . . 312
§. 94. Zusammengesetzte Schwingungen 315
§. 95. Transversale Flüssigkeitswellen 321

Vierter Abschnitt.
Vom Schalle.

Erstes Kapitel. Von der Erregung des Schalles.

§. 96. Entstehung des Schalles . 324
§. 97. Qualität des Schalles . 326
§. 98. Bestimmung der Schwingungszahlen 327
§. 99. Die Tonverhältnisse und Intervalle 330
§. 100. Die mehrfachen Accorde . 332
§. 101. Die Tonleiter . 333
§. 102. Die musikalische Temperatur 337
§. 103. Absolute Schwingungszahl der Töne 339
§. 104. u. 105. Analyse des Klanges 340
§. 106. Klänge durch Schwingungen fester Körper 346
§. 107. Klänge erregt durch schwingende Luftsäulen 351
§. 108. Zungenpfeifen . 357
§. 109. Die menschliche Stimme . 363
§. 110. Die menschliche Sprache . 367

Zweites Kapitel. Ausbreitung und Wahrnehmung des Schalles.

§. 111. Ausbreitung des Schalles in der Luft 370
§. 112. Geschwindigkeit des Schalles in festen Körpern 378
§. 113. Geschwindigkeit des Schalles in Flüssigkeiten 381
§. 114. Reflexion des Schalles . 383
§. 115. Uebergang des Schalles in andere Mittel; Resonanz 384

Seite
§. 116. Das Ohr . 387
§. 117. Interferenz des Schalles; Stösse 390
§. 118. Combinationstöne . 393
§. 119. Ursache der Consonanz und Dissonanz 395

Zweiter Theil.

Die Lehre vom Licht.

Erster Abschnitt.

Ausbreitung und Wahrnehmung des Lichtes.

Erstes Kapitel. Die ungestörte Ausbreitung des Lichtes.

§. 120. Ausstrahlung und geradlinige Fortpflanzung des Lichtes 397
§. 121. Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Fixsternlichtes 400
§. 122. Geschwindigkeit des von den Planeten zurückgeworfenen Lichtes . 403
§. 123. Geschwindigkeit des Lichtes irdischer Lichtquellen 405
§. 124. Abnahme der Lichtstärke bei der Ausbreitung. Messung der Lichtstärke . 408
§. 125. Hypothesen über die Natur des Lichtes 413

Zweites Kapitel. Die gestörte Ausbreitung des Lichtes; Reflexion und Brechung.

§. 126. Zurückwerfung des Lichtes an ebenen Flächen 417
§. 127. Physikalische Erklärung des Reflexionsgesetzes 419
§. 128. Anwendung der Spiegelung an ebenen Flächen 421
§. 129. Reflexion an krummen Flächen 424
§. 130. Kugelförmige Convexspiegel; Bilder 428
§. 131. Reflexion von kugelförmigen Hohlspiegeln 430
§. 132. Sphärische Aberration . 434
§. 133. 134. Brechung des Lichtes in ebenen Flächen 435
§. 135. Brechung des Lichtes in Prismen 439
§. 136. Abbildung von Punkten und Linien durch ein Prisma 443
§. 137. Zerstreuung des Lichtes 445
§. 138. Ableitung der Brechung und Zerstreuung des Lichtes aus der Undulationstheorie . 449
§. 139. Ableitung der Brechung aus der Emissionshypothese; Vergleich beider Theorieen . 454
§. 140. Darstellung eines reinen Spectrums; Fraunhofer'sche Linien. . . . 458
§. 141. Brechungsexponenten fester und flüssiger Körper; Prüfung der Dispersionstheorie . 462
§. 142. Brechungsexponenten der Gase 469
§. 143. Totale Reflexion . 471
§. 144. Achromatische Prismen und Prismen ohne Ablenkung 474
§. 145. Brechung des Lichtes in kugelförmigen Flächen 478
§. 146. Brechung in einem System zweier centrirter Kugelflächen 483
§. 147. Linsen und Linsenbilder 488
§. 148. Aplanatische Linsen und Linsencombinationen; achromatische Linsen 494

Drittes Kapitel. Absorption und Emission des Lichtes und die sie begleitenden Erscheinungen.

§. 149. Absorption in festen und flüssigen Körpern 497
§. 150. Absorption des Lichtes in Gasen 501
§. 151. Beziehung zwischen der Absorption und Emission des Lichtes; Kirchhoff'scher Satz . 502
§. 152. Emission des Lichtes; Spectralanalyse 506
§. 153. Abhängigkeit der Spectra von der Dicke und Temperatur der strahlenden Schicht . 511
§. 154. Fluorescenz . 514

Seite
§. 155. Phosphorescenz . 518
§. 156. Chemische Wirkung des Lichtes 519
§. 157. Anomale Dispersion . 524

Viertes Kapitel. Wahrnehmung des Lichtes.

§. 158. Das menschliche Auge . 526
§. 159. Monochromatische und chromatische Abweichung des Auges; Irradiation . 533
§. 160. Von den Gesichtsempfindungen 534
§. 161. Von den Gesichtswahrnehmungen 537
§. 162. Das Mikroskop . 541
§. 163. Das Fernrohr . 544

Zweiter Abschnitt.

Theoretische Optik.

Erstes Kapitel. Interferenz und Beugung des Lichtes.

§. 164. Fresnels Interferenzversuch 547
§. 165. Allgemeine Bedingungen der Interferenz des Lichtes 552
§. 166. Farben dünner Blättchen . 554
§. 167. Interferenz bei grossen Gangunterschieden 564
§. 168. Beugung des Lichtes . 566
§. 169. Fraunhofer'sche Beugungserscheinungen 572
§. 170. Beugungserscheinungen durch mehrere Spalten; Gitter 579

Zweites Kapitel. Polarisation des Lichtes.

§. 171. Polarisation des Lichtes . 586
§. 172. Erklärung der Polarisation; Nachweis der Querschwingungen . . . 589
§. 173. Polarisation des Lichtes durch Reflexion und Brechung 594
§. 174. Reflexion des polarisirten Lichtes 595
§. 175. Totale Reflexion; elliptisch polarisirtes Licht 602
§. 176. Elliptische Polarisation bei gewöhnlicher Reflexion 606
§. 177. Reflexion an Metallen . 608

Drittes Kapitel. Doppelbrechung des Lichtes.

§. 178. Doppelbrechung des Lichtes im Kalkspath 609
§. 179. Betrachtung einzelner Fälle 615
§. 180. Einaxige Krystalle . 619
§. 181. Physikalische Erklärung der Doppelbrechung 620
§. 182. Polarisationsapparate . 624
§. 183. Doppelbrechung in zweiaxigen Krystallen 627

Viertes Kapitel. Interferenz des polarisirten Lichtes.

§. 184. Fresnel-Arago's Gesetze der Interferenz des polarisirten Lichtes . . 635
§. 185. Farbenerscheinungen bei dem Durchgange polarisirten Lichtes durch Krystallplatten . 637
§. 186. Farbenringe in senkrecht zur Axe geschnittenen Platten einaxiger Krystalle . 640
§. 187. Erscheinungen in Blättchen und Platten, welche parallel der Axe aus einaxigen Krystallen geschnitten sind 644
§. 188. Farbenerscheinungen in zweiaxigen Krystallen 647
§. 189. Drehung der Polarisationsebene im Quarz 650
§. 190. Erklärung der Drehung der Polarisationsebene durch Circularpolarisation . 652
§. 191. Drehung der Polarisationsebene in andern Körpern. Saccharimetrie. 655
§. 192. Künstliche Doppelbrechung in gepressten und gekühlten Gläsern . 658

Einleitung.

Aufgabe der Physik.

Die uns umgebende Körperwelt, welche wir in dem Begriffe der Natur zusammenfassen, kann nach einer doppelten Richtung der Gegenstand unseres Studiums werden. Wir können einmal die Körper, welche wir vorfinden, im einzelnen kennen zu lernen, zu beschreiben und zu classificiren suchen. Diese Aufgabe haben sich die beschreibenden Naturwissenschaften gestellt. An diesen Naturkörpern nehmen wir dann aber eine ganze Reihe von Veränderungen wahr, die an denselben theils mit theils ohne unsere Einwirkung stattfinden, welche wir mit dem Namen Naturerscheinungen bezeichnen. Das Studium dieser Naturerscheinungen, der Bedingungen, unter denen sie stattfinden, der Gesetze, nach denen sie verlaufen und der Folgen, welche sie für die Naturkörper haben, an denen sie stattfinden, ist die Aufgabe des zweiten Zweiges der Naturwissenschaften, der Physik und der Chemie.

Die als Naturerscheinungen bezeichneten Veränderungen der Körper können sich entweder auf deren Form, diesen Begriff in seiner allgemeinsten Bedeutung genommen, oder auf deren Inhalt beziehen. Was der letztere eigentlich ist, wissen wir nicht, da wir den Inhalt der Körper nicht direkt wahrzunehmen im Stande sind. Wir nehmen die Körper nur wahr durch den Eindruck, den sie auf unsere Sinne machen, indem wir sie sehen oder auch bei der Berührung fühlen, das heisst indem wir durch unsern Gesichtssinn oder Gefühlssinn erkennen, dass ein gewisser Theil des uns umgebenden Raumes andere Eigenschaften hat, als der übrige Raum. Was das nun ist, was in diesem Raume sich befindet und bewirkt, dass er sich von seiner Umgebung unterscheidet, das wissen wir nicht; um diesen Inhalt aber allgemein bezeichnen zu können, hat man ihm den Namen Materie beigelegt. Die Materie ist also die Trägerin der Eigenschaften, welche die Körper besitzen, sie ist die Ursache der Eindrücke, welche sie auf unsere Sinne machen.

Die Naturerscheinungen, deren Studium den Inhalt der Physik und Chemie bilden, können wir also genauer dahin definiren, dass es Vorgänge und Veränderungen an und in der Materie sind.

Wir erkennen die Materie nur durch ihre Eigenschaften; gewisse Eigenschaften sind nun allen Körpern gemeinsam, sie zeigen höchstens ein mehr oder weniger, wie die schon oben erwähnte Sichtbarkeit und Fühlbarkeit; andere Eigenschaften dagegen kommen gewissen Körpern zu, andern nicht, es sind die einen Körper charakterisirenden d. h. ihn von andern unterscheidenden Eigenschaften. Aus letzterm Umstande müssen wir schliessen, dass es verschiedene Materien gibt. Unter den Erscheinungen können wir nun zu-

nächst solche unterscheiden, welche diese einer bestimmten Materie zukommenden und sie von andern unterscheidenden Eigenschaften bleibend ändern, die Materie also in eine andere verwandeln, indem sie ihr andere Eigenschaften beilegen. Es sind das vorzugsweise solche Erscheinungen, bei denen sich zwei oder mehrere Materien zu einer neuen vereinigen, oder aus einer Materie andere abgeschieden werden. Das Studium dieser Erscheinungen und ihrer Folgen für die einzelnen Materien ist die Aufgabe der Chemie. Die Chemie hat deshalb zunächst die den einzelnen Materien besondern Eigenschaften, durch welche sie sich von einander unterscheiden, aufzusuchen. Dabei hat sich herausgestellt, dass es eine gewisse Anzahl von Materien gibt, deren Eigenschaften sich durch Abscheiden von Materie nicht ändern lassen; man nennt dieselben deshalb einfache Materien oder Elemente. Man hat weiter erkannt, dass aus diesen einfachen Materien sich alle in der Natur vorhandenen Körper herstellen, indem zwei oder mehrere Materien zu einer neuen zusammentreten, dass somit die eine bestimmte Materie als solche charakterisirenden Eigenschaften durch die innere Zusammensetzung derselben bedingt ist. Wir können demnach die Aufgabe der Chemie als das Studium jener Erscheinungen bezeichnen, welche die innere Zusammensetzung der Körper ändern.

Die Physik lässt alle die Erscheinungen ausser Acht, welche die Zusammensetzung der Körper verändern; sie hat daher auch nicht die Eigenschaften kennen zu lehren, welche die einzelne Materie von der andern unterscheiden, sondern jene, welche allen den verschiedenen Materien gemeinsam sind, ihnen in grösserm oder geringerm Grade zukommen, je nach dem Zustande, in welchem wir sie vorfinden, dem festen, dem flüssigen oder luftförmigen, und unabhängig davon, welche von den durch die Chemie erkannten Materien den betreffenden Körper gerade bildet. Die Erscheinungen, welche die Physik zu studiren hat, sind dann solche, welche die innere Zusammensetzung der Körper ungeändert lassen, welche also an den Körpern im allgemeinen nicht dauernde, sondern vorübergehende Veränderungen bewirken. Die Erscheinungen dieser Art können wir, wie sich später zeigen wird, in fünf grosse Gruppen ordnen, in die Bewegungserscheinungen, die Erscheinungen des Lichtes, der Wärme, des Magnetismus und der Elektricität; wir kennen in der Natur keine Erscheinung, welche sich nicht in eine dieser Gruppen einordnen liesse. Die Betrachtung und Untersuchung dieser fünf Erscheinungsgruppen ist daher die Aufgabe der Physik.

Methode der Physik.

Aus der soeben definirten Aufgabe der Naturwissenschaften und speciell der Physik, Untersuchung der Naturerscheinungen nach ihrem Verlaufe, ihren Folgen und Ursachen, ergibt sich, dass die Grundlage und der Ausgangspunkt dieser Wissenschaften die Erfahrung sein muss, die Erfahrung von dem, was in der Natur geschieht. Zu dieser Erfahrung gelangen wir aber nur durch eine genaue, systematische und ins Einzelne gehende Beobachtung der Naturerscheinungen selbst. Diese Beobachtung muss sich über den ganzen Verlauf der Erscheinung erstrecken und über alle Umstände, von denen der Verlauf bedingt ist. Eine einfache Anschauung der

Natur genügt niemals dazu, uns von allen Einzelnheiten einer Erscheinung eine solche Kenntniss zu geben, dass uns dieselbe verständlich ist. Betrachten wir den gestirnten Himmel nur eine kurze Zeit, so scheinen uns alle Sterne gegen einander in derselben Lage zu bleiben; betrachten wir ihn häufiger zu verschiedenen Zeiten, so erkennen wir, dass die Planeten ihre Lage gegenüber andern Sternen im Laufe der Zeit in einer scheinbar sehr unregelmässigen Weise ändern, dass sie bald nach der einen bald nach der andern Seite sich verschieben. Erst eine genaue und die einzelnen Bewegungen der Planeten stetig verfolgende Beobachtung führt zu der Erkenntniss, dass sie und mit ihnen unsere Erde sich in nahezu kreisförmigen Bahnen um die Sonne bewegen.

Die Beobachtung der Naturerscheinungen genügt indess nur in seltenen Fällen, um uns dieselben so genau kennen zu lehren, wie es zu ihrem Verständniss nöthig ist, der Verlauf derselben ist meistens nicht so einfach und so übersichtlich, dass wir durch Beobachtung allein alle Einzelnheiten erkennen können. Fällt ein Stein aus einiger Höhe zu Boden, so erkennen wir bei genauer Beobachtung wohl, dass der Stein immer rascher und rascher fällt, wir sind aber nicht im Stande, die durchfallenen Strecken mit den Zeiten zu vergleichen, in denen sie durchfallen sind, und so zu bestimmen, wie die Geschwindigkeit des Steines wächst.

Neben der Beobachtung müssen wir deshalb den Versuch zu Hülfe nehmen, das Experiment, durch welches wir die Naturerscheinungen unter solchen Umständen hervorrufen, dass wir sie in ihren Einzelnheiten verfolgen können. Um die Gesetze des Falles erkennen zu können, müssen wir Gegenstände unter solchen Umständen fallen lassen, dass die Bewegung eine langsamere wird, und dass wir im Stande sind, die durchfallenen Räume mit den dazu gebrauchten Zeiten zu vergleichen. Die Kunst des Experimentirens muss uns die dazu erforderlichen Methoden und Apparate angeben, mit denen wir die Naturerscheinungen in solcher Weise verlaufen lassen, dass wir sie beobachten können.

Der Versuch lehrt uns aber nicht nur den genauern Verlauf der Erscheinungen kennen, die wir in der Natur beobachten können, er führt selbst zu der Erkenntniss neuer Naturerscheinungen, neuer Naturkräfte, indem er die Körper in solche Verhältnisse zusammenbringt, dass die in ihnen schlummernden Kräfte geweckt werden. Der weitaus grösste Theil unserer Kenntniss der Naturerscheinungen ist nur durch Versuche erhalten worden, welche in systematischer Weise diese Erscheinungen, meist von unscheinbaren, sehr oft nur zufällig beobachteten Wirkungen der Naturkräfte ausgehend, hervorriefen.

Beobachtung und Versuch lehren uns das Thatsächliche der Naturerscheinungen kennen, sie liefern uns so das Material, aus dem dann der combinirende Scharfsinn des menschlichen Verstandes die Gesetze ableitet, welche das Bedingende und das Bedingte in den Naturerscheinungen mit einander verknüpfen, welche also uns angeben, in welcher Weise der Verlauf einer Erscheinung von den Umständen abhängt, unter denen sie stattfindet. Ein Beispiel wird uns am besten zeigen, wie wir zu einem solchen Gesetze gelangen. Wenn ein Lichtstrahl in seiner Bahn auf eine glatte Fläche trifft, so wird er von derselben immer zurückgeworfen, und man sieht bald, dass die Richtung, nach welcher der Strahl zurückgeworfen

wird, verschieden ist, je nach der Richtung, in welcher wir den Strahl auf die Fläche auftreffen lassen. Die Richtung des einfallenden Strahles ist hier somit das Bedingende, die Richtung des zurückgeworfenen das Bedingte. Das Gesetz der Zurückwerfung des Lichtes muss uns also allgemein sagen, in welcher Weise die Richtung des zurückgeworfenen Strahles von der Richtung des einfallenden abhängig ist. Man findet dasselbe, indem man in einer Reihe von Versuchen die Richtung des einfallenden Strahles ändert, dann jedesmal diejenige des zurückgeworfenen Strahles messend bestimmt, und dann die zu einander gehörenden Richtungen mit einander vergleicht. Rechnet man die Richtung beider Strahlen von der Normale der Fläche in dem Punkte, in welchem der einfallende Strahl die Fläche trifft, so findet man erstens, dass der reflektirte Strahl stets in der Ebene liegt, welche durch den einfallenden Strahl und jene Normale, das Einfallsloth bestimmt ist, und dass in dieser die Winkel, welche der einfallende und der zurückgeworfene Strahl mit dem Einfallslothe bilden, einander immer gleich sind. Wir schliessen aus dieser sich stets im Versuche ergebenden Beziehung zwischen dem Winkel des einfallenden Strahles, dem Einfallswinkel, und dem des zurückgeworfenen Strahles, dem Zurückwerfungswinkel, als das die beiden verknüpfende Gesetz: „Der Zurückwerfungswinkel ist dem Einfallswinkel gleich.“

Man sieht dieses Gesetz, und so ist es mit allen physikalischen Gesetzen, ist eine mathematische Beziehung zwischen den eine Erscheinung bedingenden physikalischen Grössen; wir können deshalb jedes Gesetz durch eine Gleichung darstellen.

Die physikalischen Gesetze sind hiernach zunächst der gemeinsame Ausdruck einer Reihe einzelner Thatsachen, deren Gemeinsames sie eben in einem Satze zusammenfassen. Ihre Bedeutung ist aber eine noch sehr viel weitere, sie drücken nicht nur die Thatsachen aus, die wir zu ihrer Ableitung benutzten, sondern sie enthalten auch alle Erscheinungen, die aus jenen Thatsachen folgen. Man habe z. B. einen Spiegel von beliebiger aber geometrisch bestimmbarer Gestalt, und es fallen auf ihn Lichtstrahlen etwa von einer in bestimmter Entfernung aufgestellten Lichtflamme. Das eben ausgesprochene Gesetz gestattet uns dann die Erscheinungen der Reflexion in jedem Falle zu bestimmen, ohne dass wir den Versuch zu Hülfe nehmen, denn wir können auf Grund jenes Gesetzes für jeden einfallenden Strahl die Richtung des zurückgeworfenen mit Hülfe der analytischen Geometrie angeben. Wie hier, so können wir in allen Fällen aus jedem Gesetze mit Hülfe der Mathematik eine Reihe von Folgesätzen ableiten; man hat die Gesetze nur mathematisch zu formuliren und dann, indem man dieselben als Ausgangspunkt nimmt, durch mathematische Entwickelungen aus ihnen die Folgerungen zu ziehen.

Daraus erhellt, welch äusserst wichtige Rolle in der Entwickelung der Physik die Mathematik spielt; sie ist von derselben Bedeutung, wie Beobachtung und Versuch, denn sie dient dazu, diese zusammenzufassen und zu berechnen, die erhaltenen Gesetze auszudrücken und die in ihnen enthaltenen Folgerungen abzuleiten.

Wenn, wie wir eben sahen, aus einem physikalischen Gesetze sich eine Reihe von weitern Erscheinungen auf mathematischem Wege ableiten lassen, so bedarf es selbstverständlich, um diese und ihre Gesetze kennen

zu lernen, nicht mehr der Beobachtung und der Versuche; wir erhalten vielmehr diese Gesetze lediglich durch die mathematische Deduction, und die Versuche bieten nur noch die Controle, dass wir uns bei diesen Deductionen nicht geirrt haben. Dieser Weg der Deduction ist neben dem der Erfahrung der wichtigste, auf dem die Physik fortschreitet. Hat uns die Erfahrung die fundamentalen Gesetze einer Erscheinungsgruppe kennen gelehrt, so können wir aus diesen dann alle die zu dieser Gruppe gehörigen Erscheinungen ableiten. Da wir bei dieser Ableitung den innern Zusammenhang aller zu einer Gruppe gehörigen Erscheinungen unmittelbar erkennen, so können wir es als ein Ziel der Physik bezeichnen, die fundamentalen Sätze aufzufinden und aus diesen das ganze Gebiet der zusammengehörigen Erscheinungen zu deduciren. Wir werden sehen, dass auf einigen Gebieten dieses Ziel schon erreicht ist, so vorzugsweise in demjenigen der Bewegungserscheinungen.

Die Aufgabe der Naturwissenschaften ist indess damit noch nicht gelöst, dass wir die Erscheinungen in ihrem gesetzlichen Verlaufe kennen, sondern wir verlangen auch eine Erklärung derselben, das heisst die Angabe des Grundes, warum die Naturerscheinungen den von uns erkannten Verlauf haben. Da nun aber der Verlauf einer Erscheinung wesentlich von der Ursache bedingt wird, welche die Erscheinung bewirkt, so fällt die Frage nach dem Grunde, aus welchem die Erscheinungen den ihnen eigenthümlichen Verlauf haben, zusammen mit der Frage nach der Ursache der Erscheinungen. Die Ursache einer Veränderung in der Natur bezeichnet man allgemein als eine Kraft, wir können daher das Aufsuchen der Ursachen bezeichnen als das der Naturkräfte.

Gerade diese letzte Aufgabe der Naturwissenschaften ist aber die schwierigste, denn die Naturkräfte selbst können wir niemals direkt beobachten, wir nehmen sie nur wahr in ihren Wirkungen. Um also irgend etwas über die Naturkräfte auszusagen, müssen wir aus den Wirkungen auf die Ursachen zurückschliessen. Diese Art des Schlusses ist aber immer mit einer so grossen Unsicherheit behaftet, dass wir über die wirksamen Naturkräfte niemals eine ähnliche Sicherheit erhalten können, wie über die Gesetze, denen die Naturerscheinungen folgen. Denn eine und dieselbe Erscheinung, das zeigt uns ja schon die tägliche Erfahrung, kann aus sehr verschiedenen Ursachen hervorgehen, und von diesen möglichen Ursachen müssen wir bei jener Art des Schliessens eine auswählen; nichts bürgt uns aber dafür, dass wir bei dieser Wahl aus den möglichen Ursachen gerade die richtige wählen.

Wir können deshalb über die Naturkräfte als Ursachen der Naturerscheinungen keine sichern Schlüsse sondern nur Annahmen, Hypothesen bilden, welche einen geringern oder grössern Grad von Wahrscheinlichkeit haben, je nach der Vorsicht, mit welcher man bei der Auswahl der Hypothese verfuhr, und je nach der Menge von Naturerscheinungen, welche wir bei der Wahl berücksichtigen und welche sich dann als nothwendige Folgerungen aus dieser Hypothese ergeben. So lange man nur wenige Erscheinungen aus einem Gebiete in Betracht zieht, findet man stets, dass mehrere Hypothesen dieselben gleich gut erklären, das heisst als nothwendige Folgen aus der angenommenen Ursache hervorgehen lassen; je weiter aber unsere Kenntniss in einem Gebiete sich ausdehnt, um so geringer wird die

Anzahl der möglichen Hypothesen, bis schliesslich nur eine Hypothese übrig bleibt, aus welcher man sämmtliche experimentell und deductiv gefundenen Gesetze ableiten kann, und welche selbst zur Auffindung neuer Thatsachen führt. Diese Hypothese hat dann für uns den höchsten Grad der Wahrscheinlichkeit.

Eine solche Hypothese ist die jetzt der Lehre vom Licht zu Grunde gelegte Undulationstheorie. Seitdem man angenommen hat, die Ursache des Lichtes sei eine zitternde Bewegung des Aethers, wurden alle Gesetze der Lichterscheinungen nothwendige Folgerungen dieser Annahme, und mit ihr hat die Optik fast jene Stufe der Vollkommenheit erreicht, auf welcher die Beobachtung und der Versuch nur mehr Mittel sind, die Folgerungen der Theorie zu bestätigen, anstatt das Mittel zu sein, um die Gesetze der Erscheinungen aufzusuchen. Das ist das Charakteristische einer guten Hypothese.

Zunächst erhält man nun eine solche Hypothese für die verschiedenen Gruppen der unter sich gleichartigen Erscheinungen und muss dieselbe für gut erklären, wenn sie das Gesammtgebiet der Erscheinungen, für welche sie ersonnen ist, als nothwendige Folge erkennen lässt. Mit dem Fortschritt der Naturerkenntniss hat sich nun aber ergeben, dass die einzelnen Gruppen von unter sich gleichartigen Erscheinungen, welche scheinbar sich ganz fremd sind, wie die Bewegungserscheinungen, die Licht- oder Wärmeerscheinungen im innigsten Zusammenhange stehen. Bei der Abwägung der Hypothesen über die einer bestimmten Erscheinungsgruppe zu Grunde liegenden Naturkräfte darf man deshalb nicht nur diese Erscheinungsgruppe ins Auge fassen, sondern muss auch die übrigen in Erwägung ziehen, und sich die Frage stellen, ob es zur Erklärung der bestimmten Gruppe der Annahme einer besondern Naturkraft bedarf. Gerade durch diese Erwägung hat die neuere Physik die Zahl der von den ältern Forschern angenommenen Naturkräfte wesentlich beschränkt; wir werden sehen, wie sie immer mehr dahin strebt, die verschiedensten Erscheinungen auf ein und dieselbe Grundursache, auf Bewegung zurück zu führen, und an Stelle der früher angenommenen so mannigfachen Kräfte nur eine zu setzen, die Kraft, welche die Materie bewegen kann, welche sich als Anziehung und Abstossung der einzelnen Theile der Materie darstellt.

Aber selbst wenn es gelungen ist alle Erscheinungen auf diese eine, der Materie eigenthümliche und deshalb unveränderliche Kraft zurückzuführen, darf man immer nicht vergessen, dass es eine Hypothese ist, auf welche wir die Erklärung der Naturerscheinungen stützen, die allerdings den höchsten Grad der Wahrscheinlichkeit hat, der wir aber eine Gewissheit erst dann beilegen dürfen, wenn uns der Nachweis gelingt, dass die so angenommene Ursache der Naturerscheinungen die einzig mögliche ist. Dann erst wäre dieselbe nach einem Ausspruche von Helmholtz als die nothwendige Begriffsform der Naturauffassung bewiesen, es würde derselben alsdann objektive Wahrheit zuzuschreiben sein. Dahin zu gelangen, das können wir als das letzte Ziel der Naturwissenschaften bezeichnen, ob es erreicht werden kann, das lässt sich bis jetzt noch nicht übersehen.

Die in der Physik gebräuchlichen Maasse.

Bei der Besprechung der Methode der Physik ist es schon hervorgetreten, dass wir zum Studium der Naturerscheinungen der Messungen be-

dürfen. Wir stellen deshalb hier die Maasse zusammen, welche allen physikalischen Messungen zu Grunde liegen, die entweder direkt angewandt werden oder aus denen die in speciellen Fällen benutzten abgeleitet werden.

Die in der Physik angewandten Maasse sind dem neufranzösischen Maasssystem entnommen, welches den grossen Vorzug hat, dass es alle Maassbestimmungen aus dem Längenmaasse ableitet. Die Einheit des französischen Längenmaasses ist das Meter. Dasselbe ist von der Länge eines Erdmeridians abgeleitet und zwar wurde der zehnmillionte Theil des durch genaue Messungen bestimmten Quadranten eines Erdmeridians dazu gewählt. Später hat sich zwar ergeben, dass in die dem Meter zu Grunde liegenden Messungen sich ein kleiner Fehler eingeschlichen hat, da aber die Maasseinheit einmal festgestellt und verbreitet war, so hat man es unterlassen, das Meter darnach zu ändern. Dasselbe ist darnach um ein sehr Geringes von dem zehnmillionten Theil eines Erdquadranten verschieden. Das Originalmeter, nach welchem alle übrigen Maassstäbe abgeglichen sind, ist in den Archiven zu Paris niedergelegt.

Man theilt das Meter nach dem Decimalsystem:

1 m = 10 dm Decimeter = 100 cm Centimeter = 1000 mm Millimeter.

Grössere Längen werden durch die Vielfachen des Meters gemessen, als grössere Einheiten wendet man Kilometer gleich 1000 Meter oder Myriameter gleich 10000 Meter an.

Das Flächen- und Körpermaass erhält man durch Quadrirung oder Kubation des Meters oder dessen Unterabtheilungen.

Als Einheit des Hohlmaasses setzt das metrische System den Rauminhalt des Kubikdecimeters und nennt dieses Maass ein Liter.

Auch die Einheit des Gewichtes ist im metrischen Systeme aus dem Längenmaasse abgeleitet. Man geht von dem Centimeter aus und nennt das Gewicht jener Wassermenge, welche bei der Temperatur von 4^0 C den Rauminhalt eines Kubikcentimeters ausfüllt, ein Gramm.

Im gewöhnlichen Leben, oder auch in der Physik dort, wo es sich um grössere Gewichte handelt, wird als Einheit des Gewichts das Gewicht von 1 Liter Wasser unter den eben genannten Umständen angewandt, dasselbe wiegt, da ein Liter gleich 1000 Kubikcentimeter ist, 1000 Gramm und führt den Namen Kilogramm.

Die Unterabtheilungen des Gramm werden gebildet und bezeichnet wie die des Meter, 1 Gr. = 10 Decigr. = 100 Centigr. = 1000 Milligramm.

Um eine Richtung im Raume mit einer andern zu vergleichen, hat man ein Maass für Winkel oder Richtungsverschiedenheiten eingeführt; man theilt zu dem Ende den Kreisumfang in 360 gleiche Theile, deren einer Grad genannt wird. Der Grad wird in $60'$ Minuten, die Minute in $60''$ Secunden eingetheilt.

Da die physikalischen Erscheinungen auch vielfach von ihrem zeitlichen Verlauf abhängen, so haben wir auch ein Maass für die Zeit nöthig. Das Zeitmaass ist auf die Dauer des Tages gegründet:

1 Tag = 24 Stunden; 1^h Stunde = $60'$ Minuten, $1'$ Min. = $60''$ Secunden. Bei den physikalischen Erscheinungen wird meist die Secunde als Zeiteinheit genommen.

Erster Theil.

Die Lehre von dem Gleichgewicht und der Bewegung der Körper.

Erster Abschnitt.

Die Lehre vom Gleichgewicht und der Bewegung der Körper als solcher.

Erstes Kapitel.

Von der fortschreitenden Bewegung der Körper.

§. 1.

Bewegung. Die erste Thatsache, welche uns bei der Betrachtung der Aussenwelt auffällt, ist die, dass einige Körper ihren Ort im Raume, soweit wir es beurtheilen können, stets behaupten, andere ihn verändern. Von den erstern sagen wir, sie seien in Ruhe, von den letzteren, sie seien in Bewegung. Bei den Bewegungen erkennen wir dann sehr bald einen Unterschied, indem einige Körper in einer bestimmten Zeit einen grösseren Weg zurücklegen als andere. Den ersteren legen wir dann eine grössere, den letzteren eine kleinere Geschwindigkeit bei. Der Begriff der Geschwindigkeit bedeutet somit die Beziehung zwischen dem durchlaufenen Weg und der Zeit, in welcher er durchlaufen ist.

Einen weitern Unterschied in der Bewegung nehmen wir wahr, wenn wir die in gleichen auf einander folgenden Zeiten zurückgelegten Wege vergleichen. Die einen legen in gleichen Zeiten immer die gleiche Anzahl Meter zurück. Bilden wir dort das Verhältniss zwischen dem in irgend einer Anzahl t Secunden zurückgelegten Weg s und dieser Zahl von Secunden, $\frac{s}{t}$, so ist das immer dasselbe. Solche Körper besitzen demnach, da die Beziehung zwischen zurückgelegtem Wege und der Zeit, in welcher derselbe zurückgelegt ist, immer dieselbe ist, eine constante Geschwindigkeit. Man nennt die Bewegung eine gleichförmige. Für diese Bewegung erhalten wir dann sofort auch ein Maass der Geschwindigkeit eben in dem constanten Verhältnisse zwischen Weg und Zeit

$$c = \frac{s}{t}.$$

Man sieht weiter, dass dieser Quotient uns die Strecke gibt, welche der Körper in der Zeit einer Secunde zurücklegt, so dass wir die Geschwindigkeit eines Körpers auch die in der Zeit einer Secunde zurückgelegte Wege-

länge nennen können. Der in irgend einer Zeit zurückgelegte Weg s ist dann

$$s = c \,.\, t.$$

Andere Körper bewegen sich ungleichförmig, das heisst, beobachten wir den jedesmal in t Secunden aber zu verschiedenen Zeiten zurückgelegten Weg s, so finden wir, dass der Quotient

$$\frac{s}{t}$$

zu den verschiedenen Zeiten einen verschiedenen Werth hat, der Quotient wächst bei einigen, bei andern nimmt er ab. Für solche Körper ist also die Geschwindigkeit in jedem Augenblicke eine andere. Man kann deshalb für diese Bewegung von einer bestimmten Geschwindigkeit nur für einen bestimmten Augenblick sprechen. Man nennt dann die Geschwindigkeit des Körpers in dem bestimmten Momente jene, mit welcher er sich nach der vorherigen Definition weiter bewegen würde, wenn von dem Momente ab seine Bewegung eine gleichförmige würde. Können wir also bei der Untersuchung einer nicht gleichförmigen Bewegung bewirken, dass von einem bestimmten Momente ab die Aenderung der Geschwindigkeit aufhört, so haben wir nur die in der dann gleichförmigen Bewegung in einer Secunde zurückgelegte Strecke zu messen, um die Geschwindigkeit für den Moment zu erhalten, in welchem die Bewegung gleichförmig wurde. Auch bei der ungleichförmigen Bewegung lässt sich für die Geschwindigkeit auf Grund der vorhin gegebenen Definition, dass die Geschwindigkeit der Quotient aus Weg und Zeit sei, so lange die Bewegung gleichförmig ist, ein mathematischer Ausdruck ableiten. Setzen wir voraus, der Körper habe in der Zeit t_1 Secunden den Weg s_1 zurückgelegt, in der Zeit von t Secunden, die grösser sein soll als die erste, den Weg s. In der Zeit $t - t_1$ hat er dann den Weg $s - s_1$ zurückgelegt, und der Quotient

$$v = \frac{s - s_1}{t - t_1}$$

gibt uns die Strecke, welche der Körper pro Secunde zurückgelegt haben müsste, um mit gleichförmiger Bewegung in derselben Zeit $t - t_1$ denselben Weg zurückzulegen, den er in Wirklichkeit zurückgelegt hat. Man nennt diese Geschwindigkeit die mittlere Geschwindigkeit während der Zeit $t - t_1$. Diese mittlere Geschwindigkeit unterscheidet sich nun von den Geschwindigkeiten, welche der Körper innerhalb der Zeit $t - t_1$ hat, um so weniger, je kleiner die Zeit und der Weg ist, aus denen wir sie ableiten. Bilden wir deshalb für die denkbar kleinste Zeit $t - t_1 = dt$ und den in dieser kleinen Zeit zurückgelegten Weg ds den Quotienten

$$v = \frac{ds}{dt},$$

so wird die so berechnete Geschwindigkeit v, welche die mittlere für die Zeit dt ist, von derjenigen, welche zur Zeit t_1, zu welcher die Zeit dt beginnt, vorhanden ist, nicht mehr verschieden sein, wenn wir die Zeit dt nur hinreichend klein, nur unendlich wenig von Null verschieden denken. Der so für einen verschwindend kleinen Weg und verschwindend kleine Zeit gebildete Quotient gibt uns also die Geschwindigkeit an der Stelle der

Bahn und für jenen Zeitmoment der Bewegung, für welchen der Quotient gebildet wird.

Die so für die Geschwindigkeit v aufgestellte Gleichung ist nicht nur eine mathematische Fiction, sondern sie lässt sich wirklich bilden, wenn man die Abhängigkeit des zurückgelegten Weges von der Zeit kennt, oder wie es mathematisch ausgedrückt wird, den Weg als Function der Zeit kennt. Denn dann haben wir in allgemeinen Zeichen

$$s = f(t),$$

somit auch

$$s + ds = f(t + dt)$$

und

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{f(t+dt) - f(t)}{dt}.$$

Nehmen wir z. B. an, wir wüssten, dass

$$s = a + bt^2,$$

dass also die zurückgelegten Wege proportional dem Quadrate der Zeit, während welcher die Bewegung gedauert hat, zunehmen, so erhalten wir die Geschwindigkeit für irgend eine Zeit t durch Ausführung der oben angedeuteten Rechnung

$$s + ds = a + b\,(t + dt)^2$$

$$ds = 2\,btdt + bdt^2$$

$$v = \frac{ds}{dt} = 2\,bt + bdt.$$

Nehmen wir nun dt so klein an, dass bdt als nicht mehr von Null verschieden zu nehmen ist, so wird

$$\frac{ds}{dt} = v = 2\,bt.$$

Man sieht also, wie man die Geschwindigkeit berechnen kann, wenn man weiss, wie der zurückgelegte Weg mit der Zeit wächst. Dass dieselbe Rechnung auch bei der gleichförmigen Bewegung zum Ziele führt, versteht sich unmittelbar von selbst.

Bei der ungleichförmigen Bewegung ändert sich die Geschwindigkeit in jedem Zeitmoment. Das Verhältniss der Geschwindigkeitsänderung zur Zeit, in der diese Aenderung eintritt, nennt man die Beschleunigung. Der einfachste Fall der Aenderung der Geschwindigkeit ist dann der, dass die Geschwindigkeit in gleichen Zeiten sich immer um dieselbe Grösse ändert, dass sie also für die Zeiteinheit immer um dieselbe Grösse zu- oder abnimmt. Wächst dann die Geschwindigkeit in der Zeit t von v_1 auf v, so ist der Quotient

$$g = \frac{v - v_1}{t}$$

constant und gibt uns die Geschwindigkeitszunahme für die Secunde; in dem Falle ist also die Beschleunigung gleich der in jeder Secunde stattfindenden Geschwindigkeitszunahme. Eine solche Bewegung nennt man eine gleichmässig geänderte, nimmt die Geschwindigkeit in dieser Weise zu, eine gleichmässig beschleunigte, nimmt sie ab, eine gleichmässig verzögerte.

Ist die Geschwindigkeitsänderung nicht immer in gleichen Zeiten dieselbe, so nennt man die Bewegung eine ungleichmässig geänderte. Bei einer solchen kann man von einer bestimmten Beschleunigung nur für einen bestimmten Moment sprechen, wie man bei der ungleichmässigen Bewegung allgemein, wie wir eben sahen, von einer bestimmten Geschwindigkeit nur für einen bestimmten Moment sprechen kann. In einem solchen Falle gelangen wir aber zu einer Definition der Beschleunigung in ganz ähnlicher Weise wie vorher zu derjenigen der Geschwindigkeit. Ist dv die Zunahme der Geschwindigkeit in der Zeit dt, so ist $\frac{dv}{dt}$ die mittlere Beschleunigung in der Zeit dt. Diese mittlere Beschleunigung unterscheidet sich um so weniger von der wirklich innerhalb der Zeit dt in den verschiedenen Momenten derselben stattfindenden, je kleiner die Zeit dt ist, sie wird der wirklichen Beschleunigung in einem betrachteten Moment gleich, wenn wir dt unendlich klein setzen. Unter dieser Voraussetzung gibt uns dann der Quotient $\frac{dv}{dt}$ die Geschwindigkeitszunahme, welche in einer Secunde stattfinden würde, wenn die Geschwindigkeit in jedem der die Secunde zusammensetzenden verschwindend kleinen Zeitelemente dt um die gleiche Grösse dv zunähme.

Ebenso, wie wir die Geschwindigkeit berechnen können für einen beliebigen Zeitpunkt, wenn wir die Abhängigkeit des zurückgelegten Weges von der Zeit kennen, können wir die Beschleunigung berechnen, wenn wir die Abhängigkeit der Geschwindigkeit von der Zeit kennen. Setzen wir in allgemeinen Zeichen

$$v = \varphi(t),$$

so wird

$$v + dv = \varphi(t + dt)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\varphi(t + dt) - \varphi(t)}{dt}.$$

So fanden wir vorher für die Geschwindigkeit einer Bewegung, bei welcher die zurückgelegten Wege proportional dem Quadrate der Zeit zunehmen, während der die Bewegung gedauert hat,

$$v = 2\,bt;$$

demnach ist

$$v + dv = 2b\,(t + dt); \quad \frac{dv}{dt} = 2\,b.$$

Die Beschleunigung ist also in dem Falle constant, die Geschwindigkeitszunahme für die Secunde gleich $2b$. In diesem Falle war das auch direkt zu erkennen, da wir für die Geschwindigkeit nach der vom Anfange der Bewegung an gerechneten Zeit fanden, dass sie gleich ist dem Producte aus der Zeit t und einer Constanten. Das ist nur möglich, wenn in der Zeiteinheit die Geschwindigkeitszunahme immer denselben Werth hat, wenn sie gleich ist dem Coefficienten, mit dem die Zeit multiplicirt ist.

Wir wollen an diese Definitionen von Bewegung, Geschwindigkeit und Beschleunigung sofort noch eine uns für später sehr oft nutzbare Bemerkung mathematischer Natur knüpfen. Wir sahen, wie man aus dem bekannten Gesetze, nach welchem der zurückgelegte Weg mit der Zeit zu-

sammenhängt, die Geschwindigkeit und aus dieser die Beschleunigung einer ungleichförmigen Bewegung ableiten kann, indem man die unendlich kleinen Aenderungen in unendlich kleinen Zeiten betrachtet. Es ist nun aber ebenso möglich, wenn uns das Gesetz bekannt ist, nach welchem sich die Beschleunigung mit der Zeit ändert, daraus die Geschwindigkeit und den zurückgelegten Weg in seiner Abhängigkeit von der Zeit abzuleiten, wenn das auch zuweilen für die Rechnung einige Schwierigkeit bietet. Es genügt für uns diese Möglichkeit zu erkennen, und wir wählen, um dieses zu zeigen, die gleichförmig beschleunigte Bewegung, welche dadurch gegeben ist, dass bei derselben die Beschleunigung constant ist, welche also durch die Unabhängigkeit der Beschleunigung von der Zeit definirt ist. Nennen wir die Beschleunigung a, so sagt uns die Definition der Beschleunigung als das Verhältniss zwischen Geschwindigkeitszunahme und Zeit, in welcher sie stattgefunden hat, welches im allgemeinen bei der ungleichförmigen Bewegung nur für einen bestimmten Moment einen bestimmten Werth hat, dass die Beschleunigung

$$\frac{dv}{dt} = a.$$

Die in der Zeit dt stattfindende Geschwindigkeitszunahme ist somit

$$dv = a \,.\, dt.$$

Um nun daraus die Geschwindigkeit zur Zeit t abzuleiten, können wir einen doppelten Weg einschlagen, wir können nämlich einmal jene Function von t aufsuchen $\varphi(t)$, welche so beschaffen ist, dass für ein unendlich kleines dt der Ausdruck $\varphi(t + dt) - \varphi(t) = adt$ ist. Das würde hier leicht sein, denn nur wenn wir setzen

$$\varphi(t) = A + at,$$

worin A zunächst eine uns unbekannte Constante ist, ist

$$\varphi(t + dt) - \varphi(t) = A + a(t + dt) - A - at = adt.$$

Wir erhalten somit

$$v = A + at$$

und erkennen dann, dass die unbekannte Constante A jene Geschwindigkeit ist, welche der bewegte Körper etwa besass, als er sich mit gleichmässig beschleunigter Bewegung zu bewegen begann.

Der andere Weg ist folgender. Da von dem Momente an, wo die Bewegung mit constanter Beschleunigung begann, in jedem Zeitelemente dt die Geschwindigkeit um dv zunahm, so hat in der Zeit t die Geschwindigkeit um die Summe aller dv zugenommen, welche allen den Zeitelementen dt entspricht, die die Zeit t zusammensetzen. Die in der Zeit t stattfindende Geschwindigkeitszunahme ist also, wenn wir die aufeinanderfolgenden Zeitelemente mit unten rechts angesetzten Zahlen bezeichnen,

$$adt_1 + adt_2 + adt_3 + \cdots\cdots$$

eine Summe, die aus unendlich vielen Gliedern besteht, und welche man durch das Zeichen

$$\int_0^t adt$$

zu bezeichnen pflegt. Hat nun der Körper etwa im Beginne der gleichmässig beschleunigten Bewegung schon die Geschwindigkeit A besessen, so ist dieselbe zur Zeit t

$$v = A + \int_0^t a dt.$$

Diese Summe ist hier leicht zu bilden. Jedes Glied derselben hat den Factor a, wir können denselben nach bekannten algebraischen Sätzen vor das Summenzeichen schreiben und erhalten dann

$$v = A + a \int_0^t dt.$$

Die Summe aller die Zeit t zusammensetzenden Zeitelemente ist nun aber nichts anders als die Zeit t, wir erhalten somit wie vorhin

$$v = A + at.$$

Setzen wir voraus, dass unser Körper bei dem Beginne der gleichmässig beschleunigten Bewegung in Ruhe war, so ist $A = 0$, $v = at$.

Um nun den in der Zeit t zurückgelegten Weg s zu erhalten, wissen wir nach unserer Definition der Geschwindigkeit bei der ungleichförmigen Bewegung, dass

$$v = \frac{ds}{dt},$$

somit, wenn wir auch jetzt die Annahme festhalten, dass $A = 0$,

$$ds = a t \, dt.$$

Zur Bestimmung des Weges s können wir die beiden eben angedeuteten Wege einschlagen; wir wählen den zweiten. Der Weg s ist die Summe aller der in den einzelnen Zeitelementen dt, welche die Zeit t zusammensetzen, zuückgelegten Wegstücke ds. Wir haben daher gerade wie vorhin

$$s = \int_0^t at \, dt = a \int_0^t t \, dt.$$

Den hier unter dem Summenzeichen stehenden Ausdruck können wir als die Differenz zwischen zwei Werthen des Ausdrucks $\frac{1}{2} t^2$ betrachten, in denen sich t nur um die unendlich kleine Grösse dt von einander unterscheidet; denn

$$\tfrac{1}{2} (t + dt)^2 = \tfrac{1}{2} t^2 + t dt + \tfrac{1}{2} dt^2.$$

Da wir nun dt selbst schon als unendlich klein vorausgesetzt haben, so ist $dt \, . \, dt$ gegen dt unendlich klein, , so dass es ganz ausser Acht gelassen werden kann; dann ist aber

$$\tfrac{1}{2} (t + dt)^2 - \tfrac{1}{2} t^2 = t dt.$$

Unsere Summe ist also die Summe aller Differenzen $t dt$, wenn wir nach und nach für t alle Werthe von 0 bis zu dem Werthe von t eingesetzt haben, für den s bestimmt werden soll. Diese Summe ist aber einfach gleich der Differenz des letzten Gliedes, wenn wir für t den Werth einsetzen, für welchen s bestimmt werden soll und des ersten, für welchen

$t = 0$ gesetzt wird, also $\frac{1}{2} t^2$. Denn schreiben wir die in Wirklichkeit unendliche Reihe der Werthe hin, welche $\frac{1}{2} t^2$ annehmen kann, deren erster 0 ist, deren folgende wir mit $\frac{1}{2} t_1^2, \frac{1}{2} t_2^2 \cdots$ bezeichnen wollen, so ist dieselbe

$$0, \frac{1}{2} t_1^2, \frac{1}{2} t_2^2, \frac{1}{2} t_3^2 \cdots \frac{1}{2} t_n^2, \frac{1}{2} t^2.$$

Die einzelnen zu summirenden Differenzen sind

$$\frac{1}{2} t_1^2 - 0; \frac{1}{2} t_2^2 - \frac{1}{2} t_1^2; \frac{1}{2} t_3^2 - \frac{1}{2} t_2^2 \cdots \frac{1}{2} t^2 - \frac{1}{2} t_n^2$$

und die Summe ist

$$\frac{1}{2} t_1^2 - 0 + \frac{1}{2} t_2^2 - \frac{1}{2} t_1^2 + \frac{1}{2} t_3^2 - \frac{1}{2} t_2^2 \cdots + \frac{1}{2} t^2 - \frac{1}{2} t_n^2.$$

Da nun in dieser Summe jedes Glied ausser dem letzten und dem ersten einmal positiv, einmal negativ vorkommt, so heben sich alle Glieder ausser dem letzten, das nur positiv und dem ersten, das nur negativ vorkommt, auf, und die ganze Summe ist gleich der Differenz des letzten und ersten.

Diese Art der Summation ist eine uns häufig vorkommende, und wir erkennen, dass die ihr zu Grunde liegende Ueberlegung ganz allgemein gilt. Ist ein Ausdruck von der Form

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

zu summiren und wir können nachweisen, dass

$$f(x)\, dx = \varphi(x + dx) - \varphi(x),$$

so ist immer die Summe gleich der Differenz

$$\varphi(b) - \varphi(a),$$

also der Differenz des Werthes, welchen die Function von x, deren Differenz für zwei unendlich wenig verschiedene Werthe von x gleich $f(x)\, dx$ ist, für den ersten und letzten Werth annimmt.

Für den bei der gleichmässig beschleunigten Bewegung in der Zeit t zurückgelegten Weg erhalten wir somit

$$s = \frac{1}{2} a t^2$$

oder der Weg ist gleich der halben Beschleunigung multiplicirt mit dem Quadrate der Secundenzahl, während welcher die Bewegung gedauert hat.

Die hier durchgeführten Betrachtungen werden uns sehr oft von grossem Nutzen sein, da die Untersuchung der Bewegungserscheinungen, von den drei zu bestimmenden Grössen: Weg, Geschwindigkeit, Beschleunigung uns bald die eine, bald die andere liefert, wir also aus der einen die andere ableiten müssen.

§. 2.

Kräfte. Unsere erste Erfahrung hat uns gezeigt, dass die Materie beweglich ist; wir können dieselbe nun aber sofort dahin ergänzen, dass kein in Ruhe befindlicher Körper durch sich selbst, ohne einen äussern Antrieb seinen Ruhezustand verlässt. Ist aber einmal ein Körper in Bewegung, so zeigt uns die Erfahrung weiter, dass der Körper die ihm einmal gegebene Bewegung beibehält, bis sie wieder durch eine äussere Ver-

anlassung, etwa einen dem frühern Antrieb entgegengesetzten abgeändert und aufgehalten wird. Auf den ersten Blick scheint der letztere Satz der Wirklichkeit nicht zu entsprechen, denn wir sehen auf der Erde jede Bewegung allmählich in Ruhe kommen. Betrachten wir indess die Bewegung genauer, so finden wir auch, dass jeder an der Erde stattfindenden Bewegung Hindernisse entgegenstehen, die auf dieselben wie ein der Bewegungsrichtung entgegengesetzter Antrieb einwirken, wie die Reibung auf der Unterlage, der Widerstand der Luft u. s. f. Je mehr wir diese Hindernisse fortschaffen, um so länger dauert die Bewegung fort. Ein auf einer rauhen horizontalen Fläche fortgeschobener Körper kommt bald zur Ruhe, wenn die schiebende Kraft aufhört; auf glatter Fläche dauert die Bewegung viel länger fort; ein rollender Körper bewegt sich noch länger ohne merkliche Verminderung der Geschwindigkeit, wenn wir ihn durch einen einmaligen Antrieb in Bewegung gesetzt haben. Wir dürfen daraus schliessen, dass wenn wir die Hindernisse ganz fortschaffen könnten, die Bewegung ganz ungeändert fortdauern würde. In der That lehrt uns die Astronomie, dass die Bewegung der Planeten um die Sonne seit Jahrtausenden ganz unverändert dieselbe geblieben ist.

Wir können es deshalb als eine Eigenschaft der Materie bezeichnen, dass sie einen ihr einmal gegebenen Bewegungszustand nicht ohne äussere Ursache ändert. Diese Eigenschaft der Materie nennt man die Trägheit derselben.

Die äussern Ursachen, welche den Bewegungszustand der Materie ändern, nennen wir Kräfte.

Um alles zu kennen, wodurch eine Kraft bestimmt ist, müssen wir ihren Angriffspunkt, ihre Grösse und ihre Richtung kennen.

Die Richtung einer Kraft fällt mit derjenigen zusammen, nach welcher sie die Materie in Bewegung setzt.

Die Grösse einer Kraft können wir streng genommen nur aus der Grösse ihrer Wirkung, also aus der von ihr bewirkten Bewegung beurtheilen. Um sie aber darnach messen zu können, müssen wir zunächst wissen, von welchen Umständen überhaupt die Bewegung eines Körpers abhängt. Zu dieser Untersuchung ist es nun durchaus wünschenswerth, schon ein Maass für die Kraft zu haben. Wir gelangen dazu durch folgende Ueberlegung. Wenn auf einen Körper eine Kraft wirkt, so können wir die Bewegung verhindern, dadurch, dass wir nach gerade entgegengesetzter Richtung eine Kraft wirken lassen; wir müssen diese Kraft als der erstern genau gleich betrachten, wenn sie in der That die Wirkung der ersten gerade aufhebt. Als eine solche Gegenkraft können wir nun immer ein in passender Weise angebrachtes und den Körper gerade nach der entgegengesetzten Richtung ziehendes Gewicht anwenden. Wir setzen demnach die Wirkung dieses Gewichtes jenem der Kraft gleich und erhalten in der Grösse desselben das Maass für die Kraft.

Welcher Art nun auch die Kräfte sind, man kann sie in zwei Klassen theilen, die einen wirken stets in derselben Richtung und bedürfen stets der gleichen Anzahl von Kilogrammen, um im Gleichgewichte gehalten zu werden, es sind die constanten Kräfte; die andern können sich mit der Zeit nach Grösse und Richtung ändern, das heisst es bedarf, um sie im Gleichgewicht zu halten, zu verschiedener Zeit verschieden grosser

Gewichte, welche man nach verschiedenen Richtungen wirken lässt; es sind die inconstanten oder veränderlichen Kräfte.

Unsere erste Aufgabe ist nun, zu untersuchen, in welcher Weise die im §. 1 definirten Bewegungen erzeugt werden. Von einer wissen wir es bereits nach unserer Definition von Trägheit, von der gleichförmigen Bewegung; dieselbe tritt dann ein, wenn ein Körper sich nach einmal erhaltenem Antriebe ohne jedes Hinderniss und ohne jeden weitern Antrieb weiter bewegt. Daraus folgt dann schon, dass jede unter Wirkung einer Kraft stattfindende Bewegung eine ungleichförmige wird. Wir haben zu untersuchen, welcher Art die ungleichförmige Bewegung je nach Art der wirkenden Kräfte wird.

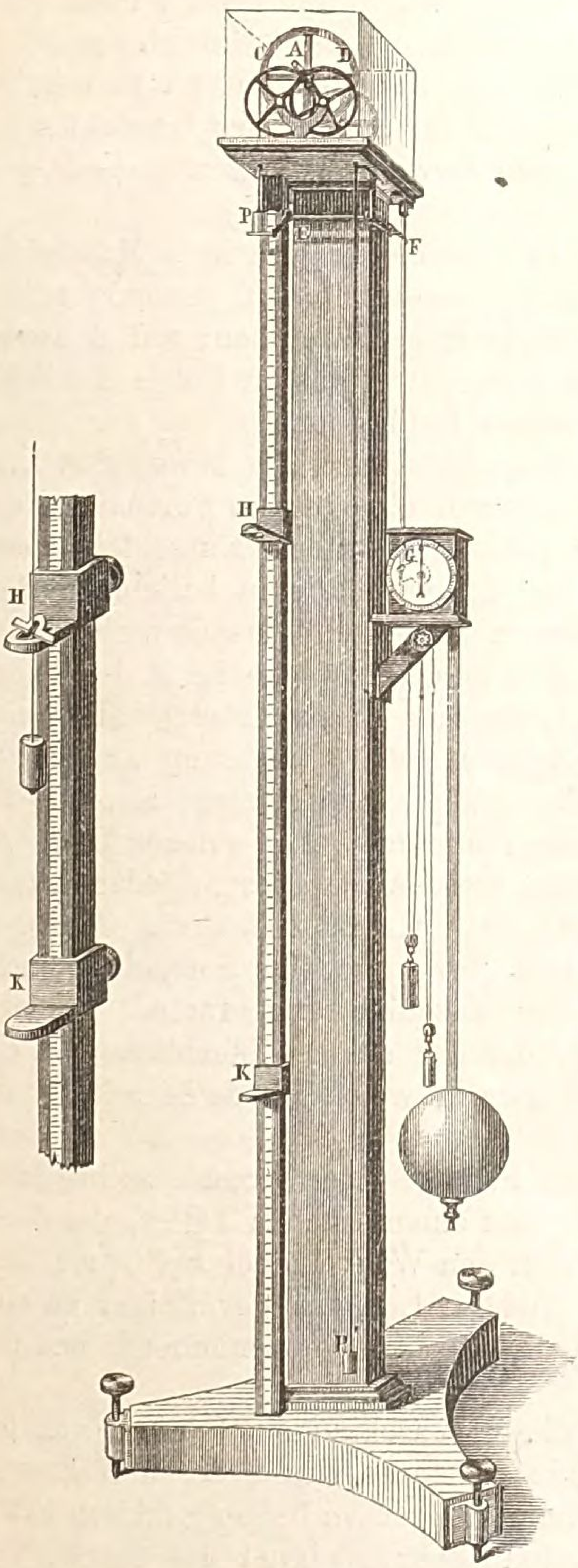
Wir beginnen mit der Untersuchung der Wirkung constanter Kräfte und benutzen dazu jene constante Kraft, welche wir in der Natur als häufigste Bewegungsursache finden, die Kraft der Schwere, welche die Körper, wenn sie nicht unterstützt sind, zu Boden fallen macht. Die Richtung, nach welcher diese Kraft wirkt, ist die Richtung, nach welcher die ihrer Wirkung folgenden Körper fallen, die Richtung der Verticalen. Die Grösse dieser Kraft wird uns sofort durch die Grösse des Gewichtes gegeben, welches den Fall bewirkt, da wir ja das Gewicht der Körper in dem vorhin aufgestellten Hülfsmaass als Maass der Kräfte benutzen.

§. 3.

Atwoodsche Fallmaschine. Schon in der Einleitung wurde darauf hingewiesen, dass die Beobachtung allein nicht ausreicht, um die Bewegung eines fallenden Körpers zu untersuchen, andererseits bietet uns der freie Fall der Körper nur einen Specialfall der Bewegung durch eine constante Kraft, nämlich die Bewegung eines Körpers durch sein eigenes Gewicht. Wir müssen uns deshalb nach experimentellen Methoden umsehen, durch die wir einmal die Bewegung in einer solchen Weise erfolgen lassen, dass sie unserer Beobachtung zugänglich sind, andererseits aber die Bewegung beliebig variiren können, um die Abhängigkeit derselben von den verschiedenen sie bedingenden Umständen untersuchen zu können. Die bequemste Methode bietet uns die Benutzung der von Atwood construirten Fallmaschine. Das Princip dieser Maschine ist folgendes. Wenn man an den Enden eines um eine leichtbewegliche in verticaler Ebene drehbare Rolle geführten vollkommen biegsamen Fadens zwei ganz gleiche Gewichte befestigt, so halten sich dieselben das Gleichgewicht; es tritt keine Bewegung ein, da ein jeder der Körper durch das dem seinigen gleiche Gewicht der Richtung der Schwere entgegen gezogen wird. Um nun dieses System, die beiden Körper, den Faden und die Rolle in Bewegung zu versetzen, bedarf es einer äussern Kraft, die wir erhalten, wenn wir auf eines der Gewichte ein Uebergewicht legen. Die Grösse des Uebergewichtes, die Dauer der Wirkung, sowie die Grösse der zu bewegenden Körper können wir dann beliebig ändern. Sorgen wir dann weiter dafür, dass die Bewegung, die wir erzeugen, ohne äussere Hindernisse erfolgt, dass also eine einmal hervorgebrachte Bewegung als gleichförmige fortdauert, so ist der Apparat geeignet, die Abhängigkeit der Bewegung von den sie bedingenden Umständen zu untersuchen. Die Einrichtung des Apparates ist zu dem Zwecke

folgende. Auf einer massiven hölzernen mit drei Stellschrauben versehenen Fussplatte befindet sich ein hölzerner Pfeiler von 2 Meter Höhe; auf dem-

Fig. 1.



selben ist eine horizontale Holzplatte befestigt und auf dieser ist ein möglichst leicht gearbeitetes aus vier an einer Achse befestigten Speichen und einem Radkranz bestehendes Rad möglichst beweglich aufgesetzt. Um seine Beweglichkeit zu erhöhen, ist die Axe des Rades nicht in feste Lager, sondern auf Frictionsräder gelegt. Dieselben bestehen aus zwei Systemen von Rädern C, D, welche, wie die Zeichnung zeigt, sich kreuzen, und welche das Rad A auf dem Umfange derselben rollend mit in Bewegung setzt. Dadurch ist, wie später hervortreten wird, die Reibung sehr vermindert; wir werden gleich zeigen, wie man sie ganz unschädlich macht.

Der Umfang des Rades hat eine Rinne, und in dieser ist über das Rad ein Seidenfaden gelegt, an dessen Enden zwei genau gleiche Gewichte P und P' befestigt sind. Legt man dann auf P ein Uebergewicht p, so sinkt P nach unten, P' steigt auf, und das ganze System erhält eine gemeinschaftliche Bewegung. Die zu bewegenden Gewichte sind in dem Falle $P + P' + p$ und das Gewicht des Fadens und der Rolle. Sind die Axe und die Speichen der Rolle hinreichend fein gearbeitet, so darf man annehmen, dass das ganze Gewicht derselben im Radkranze vereinigt ist. Dann erhält aber dieses Gewicht, da die Rolle mit gedreht wird, und die einzelnen Punkte derselben ebenso schnell bewegt werden wie der Faden oder die Gewichte P, ganz dieselbe Bewegung wie die übrigen Theile des Systems. Bezeichnen wir das Gewicht der Rolle und des Fadens mit Π, so ist dann das Gewicht der zu bewegenden Körper $p + P + P' + \Pi$. Die Kraft, welche dieses System in Bewegung setzt, ist das Uebergewicht p; um indess die bewegende Kraft genau zu erhalten, muss von p ein kleiner Theil π abgezogen werden, um die wenn auch kleine Reibung des Rades A in Rechnung zu ziehen. Diese Reibung gibt sich daran zu erkennen, dass das System nach einem einmaligen Anstoss sich nicht vollkommen gleich-

förmig, sondern mit wachsender Zeit etwas langsamer bewegt. Legt man dann aber auf das Gewicht P statt des Uebergewichtes p ein anderes kleines π, dessen Grösse man durch probiren leicht findet, so überwindet dieses gerade die Reibung und die Bewegung des Systems wird nach einem einmaligen Anstosse eine ganz gleichförmige. Dieses Gewicht π müsste man, um in dem eben betrachteten Falle die bewegende Kraft zu erhalten, von p abziehen. Bequemer ist es aber, ein für allemal das Gewicht π hinzuzufügen; das in Bewegung zu setzende Gewicht ist dann $p + P + P' + II + \pi$, und die bewegende Kraft das Uebergewicht p.

Das Gewicht P fällt vor einem in Centimeter getheilten Maassstabe; längs desselben kann man einen kleinen Messingteller K verschieben und durch Klemmschrauben in einer beliebigen Höhe feststellen; auf denselben schlägt dann das Gewicht P auf und gibt durch das in Folge des Schlages eintretende Geräusch das Ende seines Laufes an.

Um nun die Wirkung des Uebergewichtes, also die bewegende Kraft eine beliebige Zeit dauern lassen zu können, ohne durch Fortnahme derselben die Bewegung im Geringsten zu stören, ist an dem Maassstabe ausser dem Teller K ein Ring H angebracht, der ebenfalls in beliebiger Höhe festgeklemmt werden kann. Durch diesen Ring geht das Gewicht P frei hindurch, während das Uebergewicht, dem zu dem Zwecke die in der Nebenfigur angedeutete Gestalt gegeben wird, von dem Ringe zurückgehalten wird.

An der Maschine ist weiter ein Apparat zur Zeitmessung angebracht, der nothwendig ist, da wir an derselben Geschwindigkeiten, also die Beziehung zwischen Weg und Zeit messen müssen. Als solcher dient ein Pendel, von dem wir später nachweisen werden, dass es zu jeder Schwingung eine genau bestimmte Zeit gebraucht. Es ist leicht, ein Pendel so herzustellen, dass es zu jedem Hin- und Hergange eine Secunde braucht. Ein solches Secundenpendel ist an der Maschine angebracht. Mit dem Pendel ist ein Zeiger in Verbindung, der auf einem Zifferblatte die einzelnen Secunden anzeigt, und ein Schlagwerk, welches jede Secunde durch einen hörbaren Schlag angibt.

Um die Bewegung genau mit dem Schlage einer Secunde zu beginnen, steht das Gewicht P vor der Bewegung auf einem kleinen Teller, der durch eine Stütze gehalten wird, welche durch den Winkelhebel EFG mit dem Pendel in Verbindung gebracht ist. Jedesmal, wenn der Zeiger an eine bestimmte Stelle gekommen ist, wird diese Stütze fortgenommen, und das System beginnt seine Bewegung.

Wie man sieht, lässt sich mit dieser Maschine ein System von beliebigem Gewichte, durch eine beliebige constante Kraft, deren Wirkungsdauer man, allerdings innerhalb bestimmter Grenzen beliebig ändern kann, in Bewegung setzen. Dieselbe ist deshalb sehr geeignet die Gesetze der Bewegung, welche eine constante Kraft hervorbringt, zu untersuchen.

§. 4.

Bewegung in Folge einer constanten Kraft. Die erste Frage, die wir zu beantworten haben, ist die, welcher Art ist die durch eine constant wirkende Kraft hervorgebrachte Bewegung; dass die Bewegung eine ungleichförmige sein muss, wissen wir bereits, wir können deshalb die Frage

gleich dahin präcisiren, welche der möglichen ungleichförmigen Bewegungen tritt ein, nach welchem Gesetze ändern sich unter Wirkung der constanten Kraft die Geschwindigkeiten, welches ist die Beschleunigung. Das zu dieser Untersuchung einzuschlagende Verfahren ist uns damit vorgezeichnet; wir messen die Geschwindigkeiten, welche unser System erhält, wenn irgend ein, aber immer das gleiche Uebergewicht, eine verschiedene Anzahl 1, 2, 3 .. Secunden wirkt. Diese Geschwindigkeit messen wir, indem wir den Ring *H* so einklemmen, dass das Uebergewicht fortgenommen wird, nachdem das System unter Wirkung des Uebergewichtes 1, 2 .. Secunden sich bewegt hat. Da das System sich von dem Momente ab mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewegt und zwar mit der Geschwindigkeit, welche es in dem Momente der Fortnahme des Uebergewichts besitzt, so gibt uns die Geschwindigkeit dieser gleichförmigen Bewegung, die durch das Uebergewicht in 1, 2, 3 .. Secunden ertheilte Geschwindigkeit. Indem wir dann diese Geschwindigkeiten mit der Dauer der Kraftwirkung vergleichen, erhalten wir das Gesetz, nach welchem die Geschwindigkeiten mit dieser Dauer sich ändern.

Setzen wir voraus, dass wir ein solches Uebergewicht gewählt haben, dass unser System in der ersten Secunde unter Wirkung desselben 5 Centimeter zurücklegt. Wir klemmen den Ring *H* 5 Centimeter unter dem Teller ein; lassen wir dann fallen, so finden wir, dass das Gewicht *P* nach 2 Secunden bei dem Theilstrich 15, nach 3 Secunden bei dem Theilstrich 25, nach 4 Secunden bei 35 angekommen ist. Das System hat also in der zweiten Secunde 10 Centimeter zurückgelegt; dieselbe Strecke von 10 Centim. hat es in der 3, 4, ... Secunde zurückgelegt. Der Versuch zeigt also in der That, dass die Bewegung nach Fortnahme des Uebergewichtes gleichförmig geworden ist, denn die zurückgelegte Wegestrecke ist von da ab der Secundenzahl proportional, sie ist

$$s = 10 \,.\, t.$$

Daraus folgt für die nach einer Secunde dem System ertheilte Geschwindigkeit, nach unserer Definition

$$\frac{s}{t} = 10.$$

Wir suchen jetzt die Stelle auf, wo *H* angebracht werden muss, damit das Uebergewicht nach 2 Secunden fortgenommen wird, und klemmen dort den Ring ein. Es ergibt sich, dass das der Theilstrich 20 ist. Wir wiederholen den vorher angestellten Versuch und finden, dass *P* nach 3 Secunden 40, nach 4 Secunden 60, nach 5 Secunden 80 Centim. zurückgelegt hat. Die nach 2 Secunden erreichte Geschwindigkeit ist somit, gerade wie vorhin berechnet, jetzt 20 Cent. Um das Uebergewicht 3, 4 ... Secunden wirken zu lassen, müssen wir den Ring *H* bei dem Theilstriche 45; 80 ... einklemmen. Wiederholen wir die Versuche ganz in der angegebenen Weise, so finden wir, wenn das Uebergewicht gewirkt hat

während	1″	2″	3″	4″	5″	...
die Geschwindigkeit	10	20	30	40	50	...

Bilden wir nun die Quotienten aus den am Ende dieser Secunden erreichten Geschwindigkeiten durch die Zahl der Secunden, während deren das Uebergewicht gewirkt hat:

$$\frac{10}{1} = \frac{20}{2} = \frac{30}{3} \cdots = 10,$$

so erhalten alle diese Quotienten denselben Werth und zwar hier den Werth 10. Wir schliessen daraus, dass die durch das constante Uebergewicht unserm System ertheilten Geschwindigkeiten einfach der Zeit proportional sind, dass also

$$v = c \, . \, t.$$

Die nach einer Wirkungsdauer von t'' erreichte Geschwindigkeit ist gleich dem Producte aus der Zeit t und einer Constanten c, welche die am Ende der ersten Secunde erreichte Geschwindigkeit bedeutet.

Wir haben die Grösse des Uebergewichts ganz willkürlich genommen, wir dürfen deshalb schliessen, dass nicht nur dieses, sondern auch jedes andere Uebergewicht, ja überhaupt jede constante Kraft einem Körper, auf den sie wirkt, einen in gleichen Zeiten gleichen Geschwindigkeitszuwachs gibt, dass also ganz allgemein die unter Wirkung einer constanten Kraft stattfindende Bewegung eine gleichmässig beschleunigte ist, und dass der Geschwindigkeitszuwachs für jede Secunde, also die Beschleunigung der Bewegung gleich der am Ende der ersten Secunde erreichten Geschwindigkeit ist.

Wir haben in §. 1 abgeleitet, dass bei einer gleichmässig beschleunigten Bewegung die während derselben zurückgelegten Wege gleich sind der halben Beschleunigung multiplicirt mit dem Quadrate der Zeit, dass also

$$s = \tfrac{1}{2} c t^2$$

sein muss. Den Beweis für die Richtigkeit dieser Folgerung können wir an der Fallmaschine sehr leicht führen, und die oben angegebenen Zahlen für die Stellen, an denen wir den Ring H einklemmen müssen, damit das Uebergewicht 2, 3, 4 Secunden wirke, zeigen das schon. Wir fanden für

	$1''$	$2''$	$3''$	$4''$
Einklemmestelle	5	$20 = 5 \, . \, 2^2$	$45 = 5 \, . \, 3^2$	$80 = 5 \, . \, 4^2$;

allgemein nach t Secunden wurde der Abstand

$$s = 5 \, . \, t^2 = \frac{10}{2} \cdot t^2 = \frac{c}{2} \, t^2$$

erreicht.

Wir schlossen vorhin, dass jede constante Kraft eine gleichmässig beschleunigte Bewegung hervorbringt, wir werden aber weiter sofort erkennen, dass die Grösse der Beschleunigung der Bewegung von der Grösse der bewegenden Kraft und dem Gewichte des bewegten Körpers abhängt, da die Aenderung des Bewegungszustandes durch die Kraft bewirkt wird. Es ist somit unsere zweite Aufgabe, zu untersuchen, wie die Beschleunigung von diesen beiden Umständen abhängt.

Um zunächst die Abhängigkeit der Beschleunigung von der Grösse der bewegenden Kraft zu erhalten, müssen wir ein und dasselbe System durch verschiedene Uebergewichte in Bewegung versetzen. Wir dürfen diese Uebergewichte nicht dadurch herstellen, dass wir auf unser bewegliches System verschiedene Zulagegewichte p bringen, denn da das Uebergewicht p selbst ein Theil des bewegten Systems ist, würde hierdurch das Gewicht des Systems geändert. Um das Uebergewicht ohne jegliche Aende-

rung des Gesammtgewichtes ändern zu können, wendet man eigenthümlich geformte Gewichte P an; man setzt dieselben aus einer Anzahl von Ringen gleichen Gewichtes zusammen, welche auf zwei an den Enden des Fadens befestigte Scheiben gelegt werden. Haben wir $2n$ solcher Ringe, und legen auf jede Seite n Ringe, so tritt keine Bewegung ein; setzen wir nun voraus, dass die n Ringe das Gewicht P haben, legen wir dann auf die Seite des niedersinkenden Gewichtes das die Reibung überwindende Gewicht π und noch einen Ring p, so haben wir jetzt unser System ganz dem vorher betrachteten gleich gemacht, das Gewicht des Systems ist $P + P' + \Pi + p + \pi$, die bewegende Kraft ist p und die Beschleunigung ist gleich c, gleich der vorher gefundenen.

Nun nehmen wir einen Ring von der Seite P' fort und legen ihn auf die Seite p des niedersinkenden Gewichtes; das Gesammtgewicht ist ungeändert, aber das Uebergewicht ist $3\,p$ geworden, denn an der einen Seite sind $n - 1$ Ringe, an der andern $n + 2$. Wir lassen das System fallen und beobachten die Fallräume für t Secunden; wir erhalten dann für dieselben

$$s = \frac{3c}{2}\,t^2,$$

somit für die Beschleunigung den Werth $3c$. Wir wiederholen die Versuche, indem wir nochmals und nochmals einen Ring von P' zu P übertragen, wir erhalten dann die Uebergewichte $5\,p$, $7\,p\ldots$ und finden die Beschleunigungen $5\,c$, $7\,c\ldots\ldots$

Die Beschleunigung ergibt sich also der Grösse des wirksamen Uebergewichts bei constantem Gewichte des zu bewegenden Systems direkt proportional. Wir ziehen daraus allgemein den Schluss, dass wenn ein Körper durch constante Kräfte verschiedener Grösse in Bewegung gesetzt wird, die Beschleunigungen der jedesmal eintretenden Bewegungen der Grösse der bewegenden Kraft einfach proportional sind. Oder ertheilt die Einheit der Kraft dem Körper die Beschleunigung d, so ertheilt ihm eine Kraft p die Beschleunigung

$$c = d\,.\,p.$$

Aendern wir nun bei einem bestimmten Uebergewichte das Gesammtgewicht unseres Systems, indem wir eine verschiedene Anzahl von Ringen auflegen, so ergibt sich aus eben solchen Versuchen, dass sich die Beschleunigung mit der Grösse des Gesammtgewichtes ändert, und zwar, dass sie in demselben Verhältnisse kleiner wird, als das Gesammtgewicht grösser wird. Eine Verdoppelung des Gesammtgewichtes bringt die Beschleunigung auf die Hälfte, eine Verdreifachung auf $\frac{1}{3}$, allgemein: die Beschleunigung ist der Grösse des zu bewegenden Gewichtes umgekehrt proportional. Nennen wir deshalb die Beschleunigung, welche die Einheit der bewegenden Kraft einem Körper ertheilt, dessen Gewicht der Gewichtseinheit gleich ist, g, so ist die Beschleunigung, welche ein Körper vom Gewichte Q erhält,

$$d = \frac{g}{Q}.$$

Da wir nun vorher sahen, dass ein Körper, der durch die Einheit der bewegenden Kraft die Beschleunigung d bekommt, durch die Kraft p die Beschleunigung

$$c = d\,.\,p$$

erhält, so folgt, dass die Beschleunigung, welche ein Körper vom Gewichte Q durch die Kraft p erhält,

$$c = g \cdot \frac{p}{Q}$$

ist. Oder die Beschleunigung, die ein beliebiger Körper durch eine beliebige constante Kraft bekommt, ist gleich dem Quotienten aus der Anzahl Krafteinheiten der bewegenden Kraft dividirt durch die Anzahl Gewichtseinheiten des zu bewegenden Körpers multiplicirt mit einer constanten Grösse g, welche gleich der Beschleunigung ist, die die Einheit der bewegenden Kraft einem Körper ertheilt, welcher die Einheit des Gewichtes besitzt.

Damit sind alle Umstände, die auf die Bewegung unter Wirkung einer constanten Kraft von Einfluss sein können, bestimmt; die Bewegung ist eine gleichmässig beschleunigte, und die Beschleunigung c, Geschwindigkeit v nach der Zeit t, sowie der in der Zeit t zurückgelegte Weg s sind gegeben durch

$$c = g\,\frac{p}{Q};\ v = g\,\frac{p}{Q}\,t;\quad s = \tfrac{1}{2}\,g\,\frac{p}{Q}\,t^2.$$

Die Constante g, welche wir vorhin definirt haben als die Beschleunigung, welche die Krafteinheit der Gewichtseinheit ertheilt, können wir an unserm Apparate bestimmen, indem wir die Grösse des Uebergewichtes und das Gewicht des ganzen Systems bestimmen und nun die Beschleunigung c in Metern messen. Genauere später zu besprechende Versuche haben ergeben, dass die Grösse g an verschiedenen Stellen der Erde einen etwas verschiedenen Werth hat. Messen wir die Beschleunigungen für die Secunde als Zeiteinheit in Metern, so ergibt sich g nach Versuchen von Gauss für Göttingen gleich 9,81163, nach Biot und Arago für Paris 9,80896.

Wir können die Grösse g noch in einer etwas andern Weise definiren; setzen wir $p = Q$, so wird

$$c = g,\quad v = gt,\quad s = \tfrac{1}{2}gt^2.$$

Ist aber $p = Q$, so heisst das, das Uebergewicht ist gleich dem Gesammtgewicht, oder wir lassen einen Körper sich durch sein eigenes Gewicht bewegen, wir lassen ihn frei fallen. Die Grösse g ist darnach also die Beschleunigung eines frei fallenden Körpers und die beiden letzten Ausdrücke geben uns die Geschwindigkeit eines frei fallenden Körpers nach t Secunden und den in t Secunden durchfallenen Raum.

Die obigen Gleichungen werden in der Mechanik gewöhnlich in einer etwas andern Form geschrieben, man setzt die Grösse g in den Nenner und schreibt den Quotienten

$$\frac{Q}{g} = m,$$

somit die Gleichungen

$$c = \frac{p}{m},\quad v = \frac{p}{m}\,t,\quad s = \tfrac{1}{2}\,\frac{p}{m}\,t^2.$$

Dem so gebildeten Quotienten, den wir uns nur zur Vereinfachung der Gleichungen eingeführt denken können, nennt man die Masse des zu be-

wegenden Körpers; die Masse eines Körpers ist also gleich seinem Gewichte dividirt durch die Grösse g. Die Einführung dieses Zeichens oder des Begriffes der Masse hat auch vorzüglich dadurch einen Vortheil, dass wir damit ein zusammengehöriges System von Einheiten erhalten. Ein Körper, der die Masseneinheit hat, erhält durch die Einheit der bewegenden Kraft, das Kilogramm, die Einheit der Beschleunigung, ein Meter.

§. 5.

Fundamentalgesetz der Kraftwirkung. Das in dem vorigen §. experimentell abgeleitete Gesetz, dass eine constante Kraft eine gleichmässig beschleunigte Bewegung erzeugt, liefert uns sofort ein Beispiel dafür, dass, wie in der Einleitung erwähnt wurde, ein solches Gesetz nicht nur der Ausdruck derjenigen Thatsachen ist, welche es in einem allgemeinen Satze zusammenfasst, sondern dass es gleichzeitig alle diejenigen Erscheinungen in sich schliesst, welche aus demselben folgen. Das Gesetz der gleichmässig beschleunigten Bewegung können wir als die experimentelle Grundlage der ganzen Mechanik bezeichnen, indem aus demselben sich das Fundamentalgesetz der Wirkung einer Kraft ergibt, das Gesetz nämlich, dass die Wirkung einer Kraft nur durch sie selbst und von nichts anderm bedingt ist.

Das Gesetz der gleichmässig beschleunigten Bewegung zeigt uns nämlich zunächst, dass die Geschwindigkeitszunahme in gleichen Zeiten immer denselben Werth hat, die Geschwindigkeit ist am Ende der ersten Secunde c, der zweiten $2c$, der dritten $3c$, sie wächst in jeder Secunde um c, einerlei, welche Geschwindigkeit der Körper im Beginne der Secunde besass. Wir schliessen daher, dass die Wirkung einer Kraft auf einen beweglichen Körper immer dieselbe ist, einerlei ob der Körper schon eine Bewegung besitzt oder nicht.

Ganz dasselbe zeigt eine Betrachtung der unter Wirkung der Kraft zurückgelegten Wege; dieselben sind in den aufeinanderfolgenden Secunden

$$\frac{c}{2} \qquad 3\frac{c}{2} \qquad 5\frac{c}{2} \cdot \cdot \cdot \cdot$$

Wäre der Körper am Schlusse der ersten Secunde der Wirkung der Kraft entzogen mit gleichförmiger Geschwindigkeit weiter gegangen, so hätte er den Weg c zurückgelegt, in Folge der dauernden Kraftwirkung hat er $3\frac{c}{2}$ zurückgelegt, die Differenz zwischen diesen Werthen, also $\frac{c}{2}$ ist Folge der wirkenden Kraft. Der Werth ist gleich dem in der ersten Secunde zurückgelegten Wege; ebenso ist es in den folgenden Secunden, oder wir sehen allgemein, dass der durch die Wirkung einer Kraft in jeder Secunde zurückgelegte Weg ganz unabhängig ist von der Geschwindigkeit, welche der Körper bereits besitzt.

Der soeben gezogene Schluss, dass die Wirkung einer Kraft ganz unabhängig ist von der Bewegung, die ein Körper schon besitzt, gilt zunächst nur in dem Falle, dass die Kraft in der Richtung der Bewegung wirkt, welche der Körper schon besitzt. Indess lässt sich der Schluss mit Hülfe bekannter Erfahrungen sehr leicht verallgemeinern. Befinden wir uns in einem mit gleichförmiger Bewegung begabten Raume, etwa in

dem Innern eines Schiffes, so nehmen wir die Bewegung nicht direkt wahr. Lassen wir dann auf irgend einen im Innern des Raumes befindlichen Körper eine Kraft wirken, zo bewegt sich derselbe innerhalb des Raumes ganz so, wie wenn das Schiff in Ruhe wäre, die Wirkung der Kraft auf den Körper ist also unabhängig von dessen mit dem Schiffe gemeinsamer Bewegung. Wir können deshalb ganz allgemein den Satz aufstellen:

Wenn alle Punkte eines Systems eine gemeinschaftliche Bewegung haben, und einer von ihnen wird der Wirkung einer Kraft unterworfen, so ist die Bewegung, welche der Punkt in Folge dieser Kraft in Beziehung zu dem Systeme annimmt, genau so, als habe die gemeinschaftliche Bewegung des Systemes nicht existirt.

Das Gesetz der gleichmässig beschleunigten Bewegung sagt weiter aus, dass die Beschleunigungen, welche verschiedene Kräfte an einem Systeme bewirken, der Grösse der Kraft proportional sind. Wirken sonach zwei oder mehrere Kräfte gleichzeitig auf das System, so ist die Beschleunigung gleich der Summe der Beschleunigungen, welche jede Kraft für sich, wenn sie allein in Wirksamkeit wäre, hervorbringen würde. Es folgt daraus, dass die Wirkung einer Kraft unabhängig davon ist, ob gleichzeitig mit ihr eine andere zur Wirksamkeit kommt, es ist somit die Wirkung einer Summe von Kräften gleich der Summe von Wirkungen der einzelnen Kräfte.

Das Gesetz der gleichförmig beschleunigten Bewegung beweist diesen Satz zunächst wiederum nur für gleichgerichtete Kräfte, man kann ihn durch den vorhin angeführten ähnliche Erfahrungen indess leicht verallgemeinern; ja strenge genommen folgt die Allgemeingültigkeit dieses Satzes schon aus dem vorigen. Denn die Wirkung einer jeden von einer Summe von gleichzeitig wirkenden Kräften ist Bewegung, da wir nun ganz allgemein fanden, dass eine jede Kraft durchaus unabhängig von einer bereits vorhandenen oder anderweitig ertheilten Bewegung ist, so folgt, dass die Wirkung einer Kraft unabhängig von derjenigen einer andern ist.

Dieser Satz, dass die Wirkung einer Kraft von nichts beeinflusst wird, ist der Fundamentalsatz der Mechanik, denn er setzt uns in den Stand, sofort die von einer Kraft bewirkte Bewegung zu bestimmen, wenn wir die Dauer ihrer Wirkung und die Masse des zu bewegenden Systems kennen. Wir haben mit demselben die ganze experimentelle Grundlage der Mechanik gewonnen, aus der wir dieselbe deductiv ableiten können.

§. 6.

Das Kräfteparallelogramm. Wir gehen zunächst dazu über, die unter Wirkung mehrerer nach verschiedenen Richtungen thätigen Kräfte stattfindende Bewegung etwas genauer zu betrachten und daraus einige Folgerungen zu ziehen. Es ist an sich klar, dass die Bewegungsrichtung eines Körpers unter der Wirkung zweier nach verschiedener Richtung wirkender Kräfte weder mit der Richtung der einen noch derjenigen der andern zusammenfallen kann. Die Bewegung muss vielmehr eine solche Richtung haben, dass durch dieselbe nach irgend einer Zeit genau derselbe Punkt erreicht wird, der erreicht worden wäre, wenn erst die eine Kraft diese Zeit hindurch gewirkt hätte, der Körper dann plötzlich an der erreichten Stelle zur Ruhe gekommen wäre, und dann die andere Kraft dieselbe Zeit

ihn nach ihrer Richtung hin bewegt hätte. Darnach ist die Bahn des Körpers leicht zu bestimmen. Legen wir nämlich durch den Punkt, den der Körper am Ende der Zeit durch die Wirkung der einen Kraft erreichen würde, eine gerade Linie parallel der Wirkung der zweiten Kraft und tragen auf dieser von dem erwähnten Punkte aus die Strecke auf, welche er unter Wirkung der zweiten Kraft zurückgelegt haben würde, so ist der Endpunkt dieser Strecke die Stelle, welche der Körper unter gleichzeitiger Wirkung beider Kräfte erreicht, und die Verbindungslinie dieses Punktes mit dem Ausgangspunkte der Bewegung ist die Bahn des Körpers. Man sieht, dieselbe fällt zusammen mit der Diagonale eines Parallelogrammes, welches wir aus den Längen construiren, die der Körper durch die Wirkung jeder einzelnen Kraft in derselben Zeit zurücklegt, indem wir diese Längen in dem Ausgangspunkt parallel den betreffenden Richtungen zusammenlegen, und das durch diese Längen und den Winkel, den die Richtungen mit einander bilden, bestimmte Parallelogramm vervollständigen.

Diesen Weg hat der Körper unter der Wirkung zweier nach verschiedenen Richtungen thätiger Kräfte zurückgelegt; ganz denselben Weg hätte nun aber der Körper unter der Wirkung einer einzigen nach der Richtung der resultirenden Bewegung thätigen Kraft zurücklegen können. Da dann diese Kraft genau dieselbe Wirkung haben würde, als die beiden vereint wirkenden, so kann sie auch dieselben vollständig ersetzen. In dem Sinne sagt man, die beiden Kräfte setzen sich zu einer resultirenden Kraft zusammen und versteht unter der resultirenden Kraft jene, welche der Grösse und Richtung nach genau dieselbe Bewegung zur Folge hat, als die gleichzeitig wirkenden.

Diese resultirende Kraft, welche also der Richtung und Grösse nach die beiden wirklich vorhandenen vollständig ersetzt, lässt sich durch eine ganz ähnliche Construction erhalten. Wenden wir nämlich zur Construction des vorhin erwähnten Parallelogramms anstatt der von dem Körper durchlaufenen Wege, die von den Kräften bewirkten Beschleunigungen an, so sind diese den Kräften proportional und können als Maass derselben angewandt werden. Dann gibt uns also die Diagonale dieses Parallelogramms die Grösse der resultirenden Kraft in demselben Maasse, in welchem wir die einzelnen Kräfte ausgedrückt haben. Bezeichnen wir nun die beiden gegebenen Kräfte mit P und P_1, welche den Winkel β mit einander bilden, und mit R die resultirende Kraft, welche ihrer Richtung nach mit der den Winkel β schneidenden Diagonale zusammenfällt, so erhalten wir für R nach bekannten Sätzen der ebenen Geometrie

$$R^2 = P^2 + P_1^2 + 2\, PP_1 \cos \beta.$$

Man bezeichnet diesen Satz über die Resultirende von zwei gegebenen Kräften als den Satz vom Kräfteparallelogramm.

Mit Hülfe dieses Satzes erhält man ebenso auch die Resultirende von beliebig vielen an einem Punkte angreifenden Kräften, indem man sie nach demselben paarweise zusammensetzt.

Wie wir so beliebig viele Kräfte in eine einzige Resultirende zusammenziehen, so können wir auch eine jede gegebene Kraft in beliebig viele Seitenkräfte zerlegen, indem wir eine gegebene Bewegung als die resultirende von zwei Seitenbewegungen auffassen. Die Kräfte, welche diese

gedachten Seitenbewegungen hervorbringen würden, sind dann die Seitenkräfte. Letztere können wir dann wieder zerlegen u. s. f. Diese Zerlegungen können sogar auf unendlich viele Arten vorgenommen werden, da jede Linie als die Diagonale unendlich vieler Parallelogramme aufgefasst werden kann.

Von besonderer Wichtigkeit ist dieser Satz für uns, indem er uns die Componente einer gegebenen Kraft nach einer von der ihrigen verschiedenen Richtung zu bestimmen gestattet. Als Componente der Kraft nach einer bestimmten Richtung bezeichnet man jene Kraft, welche den Körper nach dieser bestimmten Richtung genau so bewegen würde, als es die wirklich vorhandene Kraft thut. Kann sich der Körper z. B. nur nach einer Richtung bewegen, welche mit der Richtung der gegebenen Kraft den Winkel α bildet, so erhalten wir die in die Bewegungsrichtung fallende Componente, indem wir die gegebene Kraft R in zwei Seitenkräfte zerlegen, von denen die eine in die Bewegungsrichtung fällt, die andere zu derselben senkrecht ist. Letztere trägt zur Bewegung gar nichts bei, somit ist erstere die gesuchte Componente. Für die Grösse derselben erhalten wir

$$P = R \, . \cos \alpha,$$

da P die Seite eines Rechtecks ist, dessen Diagonale R ist und da die Seite P mit dieser Diagonale den Winkel α bildet.

Wirken auf einen Körper beliebig viele Kräfte $R_1 \; R_2 \ldots$ und kann derselbe sich nur nach einer Richtung bewegen, welche mit der Richtung der gegebenen Kräfte die Winkel $\alpha_1 \; \alpha_2 \ldots$ bildet, so ist die den Körper nach dieser Richtung bewegende Kraft gleich der Summe aller Componenten nach dieser Richtung

$$P = R_1 \cos \alpha_1 + R_2 \cos \alpha_2 + \cdots R_n \cos \alpha_n = \Sigma R \cos \alpha,$$

worin das Zeichen Σ die Summen aller einzelnen $R. \cos \alpha$ bedeutet.

Experimentelle Belege für die Richtigkeit dieser Sätze werden wir sehr viele finden; eines der am häufigsten vorkommenden Beispiele ist die Bewegung eines Körpers auf einer schiefen Ebene.

Befindet sich ein Körper, von dem wir annehmen wollen, dass er ohne Reibung die schiefe Ebene herabrollen kann, auf einer solchen, welche mit dem Horizont den Winkel α bildet, so kann der Körper sich nur nach einer Richtung bewegen, welche mit der Richtung der auf ihn wirkenden Schwerkraft den Winkel $90^0 - \alpha$ bildet. Ist das Gewicht des Körpers p, so ist die der Bewegungsrichtung parallele Componente gleich $p \, . \cos (90 - \alpha) = p. \sin \alpha$. Soll der Körper demnach nicht hinabrollen, so muss eine Kraft gleich $p \sin \alpha$ der schiefen Ebene parallel und dieselbe hinauf gerichtet angebracht werden. Der Versuch bestätigt das; denn befestigt man den Körper an einem Faden und führt denselben die schiefe Ebene und derselben parallel aufwärts und dann über eine Rolle, so muss man an der andern Seite des Fadens das Gewicht $p \, . \sin \alpha$ anbringen, um den Körper auf der schiefen Ebene festzuhalten.

Lässt man den Körper rollen, so folgt daraus, dass die ihn treibende Kraft $p \, . \sin \alpha$ ist, dass die ihm ertheilte Beschleunigung

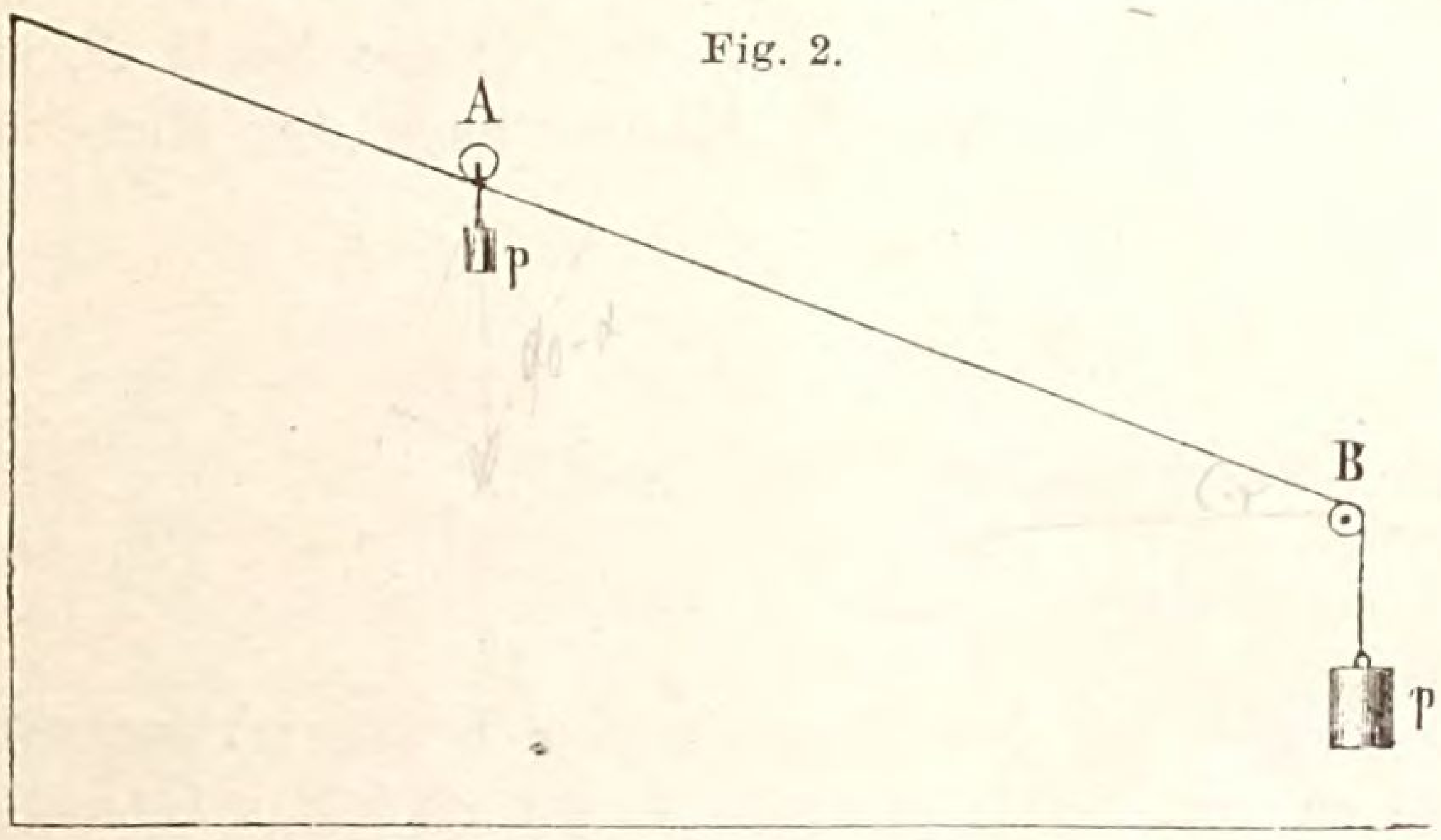
$$c = g. \frac{p. \sin \alpha}{p.} = g \sin \alpha$$

ist. Die nach der Zeit t erreichte Geschwindigkeit und der in dieser Zeit zurückgelegte Weg s ist

$$v = g \sin \alpha\, t \qquad s = \tfrac{1}{2} g \sin \alpha\, t^2.$$

Wenn nun der bewegliche Körper A Fig. 2 im Punkte B angekommen ist, so hat er den Weg

Fig. 2.



$$s = A\,B = \frac{h}{\sin \alpha}$$

durchlaufen, wenn wir mit h die Höhe der schiefen Ebene, das ist den verticalen Abstand des Punktes A von B bezeichnen. Für die zu diesem Wege erforderliche Zeit erhalten wir dann aus

$$\frac{h}{\sin \alpha} = \tfrac{1}{2} g \,.\, \sin \alpha \,.\, t^2$$

$$t = \frac{\sqrt{2\, g h}}{g \,.\, \sin \alpha},$$

somit für die Geschwindigkeit v, die der Körper im Punkte P hat,

$$v = \sqrt{2\, g h}.$$

Bei gleicher Höhe h des Ausgangspunktes A über B ist somit die Dauer des Falles dem Sinus des Neigungswinkels der schiefen Ebene umgekehrt proportional, die Geschwindigkeit v dagegen ist von dieser Neigung unabhängig, sie ist einfach gleich jener, welche der Körper erhält, wenn er die Höhe h frei durchfallen hat. Denn die Beschleunigung beim freien Fall ist g, somit die Geschwindigkeit nach der Zeit t

$$v = g t.$$

Um die Höhe h frei zu durchfallen ist aber die Zeit t aus der Gleichung

$$h = \tfrac{1}{2} g t^2$$

$$t = \sqrt{2\,\frac{h}{g}},$$

somit die Geschwindigkeit v

$$v = g \sqrt{\frac{2\,h}{g}} = \sqrt{2\, g h}\,.$$

Schon Galilei hat diese Sätze für die Bewegung auf der schiefen Ebene experimentell aufgefunden und an derselben die Gesetze der gleichmässig beschleunigten Bewegung erkannt. Man kann dieselben, besonders den Satz, dass bei gleicher Höhe h die Fallzeit dem Sinus des Neigungswinkels umgekehrt proportional ist, leicht nachweisen.

§. 7.

Bewegung geworfener Körper. Die in den letzten §§. entwickelten Sätze liefern uns nun sofort die Mittel, die fortschreitende Bewegung eines Körpers unter der Wirkung beliebiger Kräfte, nur vorausgesetzt, dass sie constant sind, abzuleiten.

Wirkt auf irgend einen Körper vom Gewichte Q die Kraft P, als Resultirende beliebiger Kräfte, so erhält der Körper nach der Richtung dieser Resultirenden die Beschleunigung

$$c = g\frac{P}{Q}.$$

Die in der Zeit t erlangte Geschwindigkeit ist dann

$$v = g\frac{P}{Q}t.$$

Besass der Körper bereits bei dem Beginne der Kraftwirkung eine Geschwindigkeit a, so setzen sich die Geschwindigkeiten nach den Gesetzen des vorigen §. zusammen. Ist die Geschwindigkeit a mit jener v gleichgerichtet, so addiren sie sich einfach, ist sie entgegengerichtet, so subtrahiren sich dieselben; für diese Fälle erhalten wir somit nach der Zeit t die Geschwindigkeit

$$v = a \pm g\frac{P}{Q}t.$$

Vermöge der Geschwindigkeit a durchläuft der Körper den Weg at, vermöge der ihm durch Wirkung der Kraft ertheilten den Weg $\frac{1}{2}g\frac{P}{Q}t^2$. Hat der Körper beim Beginne der Zeit t schon den Weg C zurückgelegt, so ist der überhaupt von ihm zurückgelegte Weg

$$s = C + at \pm \frac{1}{2}g\frac{P}{Q}t^2.$$

Setzen wir hierin C und a gleich 0, so haben wir die an der Fallmaschine experimentell abgeleiteten Gleichungen, setzen wir ausserdem $P = Q$ und nehmen an, die bewegende Kraft sei die Schwere, so erhalten wir die Ausdrücke für den freien Fall der Körper.

Ebenso erhalten wir aus den Gleichungen unmittelbar die Bewegung geworfener Körper. Untersuchen wir zunächst diejenige eines senkrecht in die Höhe mit der Geschwindigkeit a geworfenen Körpers. Die Schwere zieht ihn der Geschwindigkeit a entgegen abwärts, und da $P = Q$, so ist die Geschwindigkeit nach t Secunden

$$v = a - gt.$$

Der Körper steigt so lange, bis die Geschwindigkeit $v = 0$ ist, dann kommt er einen Augenblick zur Ruhe und fällt dann abwärts. Die Dauer des Steigens ergibt sich daher aus

$$0 = a - gt;\quad t = \frac{a}{g};$$

die Höhe, bis zu der er gestiegen ist, ergibt sich aus

$$s = at - \frac{1}{2}gt^2 = \frac{a^2}{g} - \frac{1}{2}\frac{a^2}{g} = \frac{1}{2}\frac{a^2}{g}.$$

Die fallende Bewegung ist dann diejenige des freien Falls. Die Dauer desselben, also die Zeit bis zur Rückkehr an die Erdoberfläche erhalten wir aus der Höhe

$$\frac{1}{2}\frac{a^2}{g} = \frac{1}{2}gt^2; \quad t = \frac{a}{g};$$

sie ist also genau gleich der Dauer des Aufsteigens. Die Geschwindigkeit, mit der er unten ankommt, wird

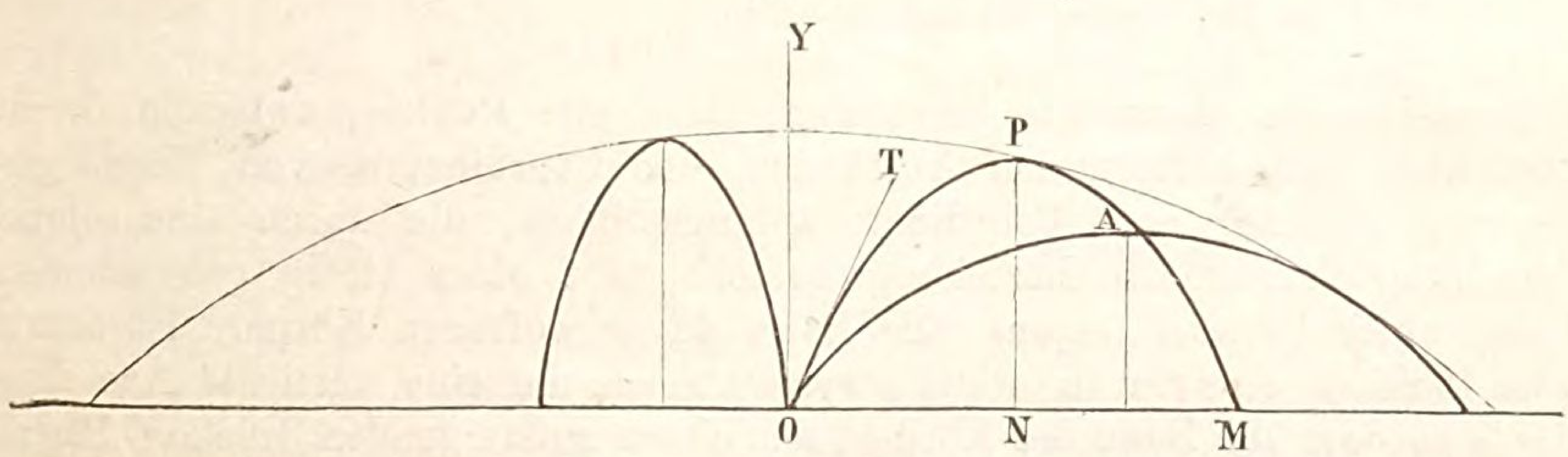
$$v = g \,.\, t = g \cdot \frac{a}{g} = a.$$

Die Geschwindigkeit, mit der er an der Erdoberfläche ankommt, ist somit gleich derjenigen, mit welcher er in die Höhe geworfen wurde.

Letztern Satz können wir sofort dahin verallgemeinern, dass ein Körper, der von einem Punkte mit einer gewissen Geschwindigkeit ausgeht, dann durch auf ihn einwirkende Kräfte zur Ruhe kommt, und nun unter Wirkung derselben Kräfte, welche ihn zur Ruhe brachten, in den Ausgangspunkt zurückkehrt, dort stets mit der Geschwindigkeit ankommt, welche er bei dem Verlassen des Ausgangspunktes der Bewegung besass.

Wird der Körper nicht senkrecht in die Höhe, sondern nach einer andern Richtung geworfen, so erhalten wir seine Bewegung durch Anwendung der Sätze des vorigen §. Es sei der Körper vom Punkte O Fig. 3 aus in der Richtung OT, welche mit der verticalen Richtung den

Fig. 3.



Winkel α bilde, mit der Geschwindigkeit a geworfen. Sowie der Körper seinen Ausgangspunkt verlassen hat, wirkt die Schwere auf ihn ein und gibt ihm eine vertical abwärts gerichtete Beschleunigung. Um die Bahn des Körpers zu erhalten, suchen wir in jedem Momente seinen Abstand x parallel der Horizontalen und den Abstand y parallel der verticalen Richtung vom Punkte O zu bestimmen.

Die dem Körper parallel OT gegebene Geschwindigkeit können wir in ihre verticale und in die horizontale Componente zerlegen, letztere ist

$$c_1 = a \,.\, \sin \alpha.$$

Für den parallel der horizontalen in der Zeit t zurückgelegten Weg x ergibt sich dann, da der Körper parallel dieser Richtung sich nur mit der betreffenden Componente der ihm ertheilten Geschwindigkeit bewegt,

$$x = a \,.\, \sin \alpha \,.\, t.$$

Die verticale, nach oben gerichtete Componente der ihm ertheilten Geschwindigkeit ist

$$c_2 = a \,.\, \cos \alpha;$$

dieser wirkt nun die Schwere entgegen, welche dem Körper die nach unten gerichtete Beschleunigung g ertheilt, die verticale Geschwindigkeit ist somit nach der Zeit t

$$v = a \cdot \cos \alpha - gt$$

und der in verticaler Richtung zurückgelegte Weg y

$$y = a \cdot \cos \alpha \cdot t - \tfrac{1}{2} g t^2.$$

Die beiden Gleichungen gestatten für jeden Moment die Lage des Punktes durch die beiden Abstände x und y zu berechnen. Wir können die Gleichungen auch so umformen, dass wir aus denselben für jeden gegebenen horizontalen Abstand x den zugehörigen Abstand y berechnen können, indem wir nur t durch x ausdrücken. Die zur Zurücklegung des Weges x parallel der horizontalen erforderliche Zeit ist

$$t = \frac{x}{a \cdot \sin \alpha};$$

den in dieser Zeit t zurückgelegten Weg y erhalten wir, wenn wir diesen Werth von t in die Gleichung für y einsetzen

$$y = \frac{a \cdot \cos \alpha}{a \cdot \sin \alpha} \cdot x - \tfrac{1}{2} \frac{g}{a^2 \cdot \sin^2 \alpha} \cdot x^2$$

oder

$$y = x \cdot \cot \alpha - \tfrac{1}{2} \frac{g}{a^2 \sin^2 \alpha} \cdot x^2.$$

Die analytische Geometrie lehrt nun, dass alle Punkte, zwischen deren verticalen und horizontalen Abständen, den Coordinaten, von einem gegebenen Punkte, dem Coordinatenanfangspunkte, die durch eine solche Gleichung dargestellte Beziehung besteht, auf einer stetig gekrümmten Linie, einer Parabel liegen. Die Bahn des geworfenen Körpers ist somit eine Parabel, eine Curve, welche symmetrisch um eine verticale Axe NP liegt, so dass die Bahn des Körpers aus einem aufsteigenden Stücke OP und einem absteigenden MP besteht, welche symmetrisch zur Axe liegen. Den Abstand des Punktes M, in welchem die Wurfbahn die horizontale wieder trifft, nennt man die Wurfweite. Wir finden dieselbe in jenem Werthe von x, der $y = 0$ macht, somit aus der Gleichung

$$0 = x' \cdot \cot \alpha - \tfrac{1}{2} \frac{g}{a^2 \sin^2 \alpha} \cdot x'^2$$

$$x' = 2 \frac{a^2}{g} \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{a^2}{g} \cdot \sin 2\alpha.$$

Bei gleicher Anfangsgeschwindigkeit a ist somit die Wurfweite wesentlich von dem Werthe von α abhängig, sie wird am grössten, wenn $\alpha = 45^0$ wird, in dem Falle ist

$$x' = \frac{a^2}{g}$$

oder die Wurfweite ist gleich der doppelten Höhe, bis zu welcher der in verticaler Richtung geworfene Körper aufsteigt.

Weicht die Wurfrichtung von $\alpha = 45^0$ ab, so ist die Wurfweite klei-

ner, sie ist dieselbe, wenn wir α um einen gewissen Winkel φ grösser oder kleiner setzen, denn wir erhalten in beiden Fällen für dieselbe

$$x' = \frac{a^2}{g} \cdot \cos 2\,\varphi.$$

Die höchste Höhe wird erreicht, wenn die verticale Geschwindigkeit gleich 0 wird; die Zeit t für diesen Moment ist aus

$$0 = a \,.\, \cos\alpha - gt$$

$$t = \frac{a \,.\, \cos\alpha}{g},$$

somit der Werth von x, dem die grösste Höhe der Bahn entspricht,

$$x_{,} = a \,.\, \sin\alpha \frac{a \,.\, \cos\alpha}{g} = \tfrac{1}{2}\frac{a^2}{g} \cdot \sin 2\,\alpha.$$

Die grösste Höhe wird in der Mitte der Wurfweite erreicht, sie wird nach der Gleichung für y

$$y_{,} = \frac{a^2}{g}\cos^2\alpha - \tfrac{1}{2}\frac{a^2}{g}\cos^2\alpha = \tfrac{1}{2}\frac{a^2}{g} \cdot \cos^2\alpha;$$

sie ist also gleich der verticalen Wurfhöhe multiplicirt mit dem Quadrate des Cosinus von α, sie nimmt stetig ab mit wachsendem α.

Ebenso wie die Bahn können wir die Geschwindigkeiten des Körpers in jedem Momente oder auch an jeder Stelle der Bahn erhalten. Wir kennen die horizontale und verticale Componente derselben, die Geschwindigkeit ist dann in jedem Momente die Diagonale des aus diesen beiden Componenten construirten Rechtecks. Der Werth derselben ergibt sich daher aus der Gleichung

$$V^2 = c_1^2 + v^2 = a^2 \sin^2\alpha + a^2\cos^2\alpha - 2\,agt\cos\alpha + g^2 t^2$$

$$V^2 = a^2 - 2\,g\,(at\cos\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2) = a^2 - 2\,gy.$$

Für gleiche Höhen y hat somit die Geschwindigkeit denselben Werth, dieselben sind somit symmetrisch zu dem höchsten Punkte der Bahn, dort im Punkte P ist

$$V^2 = a^2 - a^2\cos^2\alpha = a^2\sin^2\alpha,$$

die Geschwindigkeit ist gleich der horizontalen Componente, die verticale Componente ist gleich 0.

Die sich so aus den Bewegungsgesetzen ergebende Bewegung wird in der Wirklichkeit einigermassen durch den Widerstand der Luft gestört, in einer Weise, die später hervortreten wird, nur bei kleinen Werthen der Anfangsgeschwindigkeit und Anwendung von Kugeln sehr grossen specifischen Gewichtes findet man diese Sätze sehr nahe in der Praxis bestätigt, da in dem Falle der Widerstand der Luft nur einen sehr geringen Einfluss hat.

§. 8.

Verschiedene Maasse der Kraft; Arbeit, Princip der Erhaltung der Arbeit. Nach Erkennung der Gesetze der Bewegung durch eine constante Kraft können wir die Kraft nun auch durch ihr eigentliches Maass,

ihre Wirkung messen. Für den Geschwindigkeitszuwachs pro Secunde, die Beschleunigung erhielten wir

$$G = \frac{P}{M},$$

somit

$$P = G \,.\, M$$

oder die bewegende Kraft ist gleich dem Producte aus der bewegten Masse und der dieser Masse ertheilten Beschleunigung. Wir erkennen gleichzeitig, dass durch die Einführung des Begriffs der Masse die Kraft in diesem durch ihre Wirkung gemessenen Maasse ebensoviele Einheiten erhält, wie nach dem §. 2 aufgestellten provisorischen Maasse, dass wir also zu demselben Ziele gelangen, wenn wir als Krafteinheit jene hinstellen, welche der Masseneinheit die Einheit der Beschleunigung ertheilt, wie wenn wir die Einheit der Kraft durch die Einheit des Gewichtes messen, wenn wir nur festhalten, dass die Masseneinheit dann gleich der gfachen Gewichtseinheit, also die Masse gleich dem Quotienten aus dem Gewichte eines Körpers dividirt durch g ist.

Aus der Gleichung für die nach der Zeit t erreichte Geschwindigkeit für die Masse M unter Wirkung der constanten Kraft P

$$v = \frac{P}{M} \cdot t$$

erhalten wir

$$Mv = Pt \;\ldots.\; \text{I}$$

Das Product aus der bewegten Masse M und der in der Zeit t erreichten Geschwindigkeit ist gleich dem Producte aus der Kraft P und dieser Zeit t.

Ersteres Product pflegt man als die Bewegungsgrösse der Masse M, letzteres als den Antrieb der Kraft P in der Zeit t zu bezeichnen.

Wirkt auf eine Masse M_1 eine Kraft P_1 dieselbe Zeit t hindurch und ertheilt ihr die Geschwindigkeit v_1, so ist

$$M_1\, v_1 = P_1\, t$$

und

$$Mv : M_1\, v_1 = Pt : P_1\, t = P : P_1.$$

Unter der Voraussetzung, dass zwei Kräfte gleiche Zeiten auf verschiedene Massen gewirkt haben, verhalten sie sich also wie die Bewegungsgrössen, die sie den Massen ertheilt haben.

Verbinden wir die Gleichung für den unter Wirkung der Kraft P von der Masse M durchlaufenen Raum

$$s = {}^1\!/_2\, \frac{P}{M} \cdot t^2$$

mit der Gleichung für die in der Zeit t erlangte Geschwindigkeit, so erhalten wir als Beziehung zwischen dem zurückgelegten Wege s und der auf diesem erlangten Geschwindigkeit

$${}^1\!/_2\, Mv^2 = Ps \;\ldots.\; \text{II.}$$

Das Product aus der halben Masse und dem Quadrate der Geschwindigkeit ist gleich dem Producte aus der Kraft P und dem Wege s, durch

welchen die Kraft P wirkend der Masse M jene Geschwindigkeit ertheilt hat. Wirken zwei verschiedene Kräfte P und P_1 auf zwei verschiedene Massen M und M_1 gleiche Wegstrecken s, und ertheilen ihnen auf diesen die Geschwindigkeiten v und v_1, so erhalten wir

$$\frac{1}{2} M v^2 : \frac{1}{2} M_1 v_1^2 = P : P_1.$$

Das Product $\frac{1}{2} M v^2$ nennt man die lebendige Kraft der bewegten Masse; wir können deshalb diese Gleichung dahin aussprechen, dass unter der Voraussetzung, dass sie gleiche Wege hindurch gewirkt haben, zwei Kräfte sich verhalten wie die lebendigen Kräfte, welche sie den bewegten Massen auf diesen gleichen Wegen ertheilt haben.

Das Product Ps, aus der Grösse der Kraft und dem Wege, durch welchen die Kraft gewirkt hat, nennt man die Arbeit der Kraft. Dieser Benennung liegt die Auffassung zu Grunde, dass eine Kraft auf dem ganzen Wege, auf welchem sie gewirkt hat, einen ihr an Grösse genau gleichen Widerstand zu überwinden hat, eine Auffassung, die sich unmittelbar aus der Eigenschaft der Trägheit oder aus dem von Newton zuerst ausgesprochenen Princip der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung als nothwendig ergibt.

Dieses Princip sagt aus, dass, wenn ein Körper von einem andern einen Druck oder Zug erfährt, er dann auf diesen letztern einen genau ebenso grossen, nach entgegengesetzter Seite gerichteten Gegenzug oder Gegendruck ausübt. Wir nennen diesen Satz ein Princip, weil er, sobald man seine Bedeutung versteht, keines weitern Beweises bedarf; wir können keinen Zug ausüben, ohne dass dem Zuge etwas Widerstehendes entgegensteht, keinen Druck, ohne dass diesem Drucke etwas Widerstand leistet; und da dieser Widerstand nur soweit vorhanden ist, als wir einen Druck oder Zug ausüben, muss er demselben entgegengesetzt gleich sein.

Wir können diese Gleichheit des Zuges und Gegenzuges in manchen Fällen leicht sichtbar machen. Wir legen ein Stück Eisen auf eine Wage und bringen es ins Gleichgewicht; legen wir dann unter die Wage einen Magnet, so müssen wir, weil das Eisen vom Magnet angezogen wird, auf die andere Wagschale Gewichte hinzulegen, um wieder Gleichgewicht herzustellen. Legen wir dann den Magnet auf die Wage, bringen ihn in Gleichgewicht und legen dann das Eisen unter die Wage, so dass die relative Lage von Eisen und Magnet dieselbe ist, so bedarf es eines genau ebensolchen Zulagegewichtes zur Herstellung des Gleichgewichtes wie vorher, ein Beweis, dass das Eisen den Magnet genau so stark zu sich hinzieht, wie letzterer das erstere anzieht. Aehnlich können wir es in andern Fällen sichtbar machen.

Ebenso hat auch eine bewegende Kraft einen ihr an Grösse genau gleichen Gegenzug während der Bewegung zu überwinden, da durch die Kraft in jedem Momente die Bewegung geändert wird, in welcher ohne dieselbe der Körper vermöge der Trägheit verharren würde. Somit übt die Kraft P durch den ganzen Weg s, durch welchen sie die Masse M bewegt, den Druck P aus, wir nennen deshalb das Product Ps ebenso die Arbeit der Kraft, wie wir bei dem Heben einer Last die geleistete Arbeit durch das Product aus der gehobenen Last in die Strecke, durch welche sie gehoben ist, messen. Dass dort aber die Arbeit durch dieses

Product gemessen werden muss, ergibt die einfache Ueberlegung, dass es dieselbe Arbeit ist, wenn wir 1 Kilogramm durch die Höhe von 2 Meter heben, als wenn wir 2 Kilogramm durch die Höhe von 1 Meter heben, denn in beiden Fällen müssen wir 1 Kilogramm zweimal durch die Höhe von 1 Meter heben.

Die Gleichung

$$Ps = \frac{1}{2} Mv^2$$

ist zugleich der erste Ausdruck eines wichtigen physikalischen Princips, das man in neuerer Zeit immer mehr als das Grundprincip aller physikalischen Erscheinungen erkannt hat, nämlich des Princips von der Erhaltung der Kraft, oder wie wir es wohl richtiger bezeichnen, von der Erhaltung der Arbeit. Das Princip sagt aus, dass in der Natur keine Arbeit gewonnen und verloren werden kann, dass ebenso wenig wie eine Arbeit von selbst gewonnen werden kann, sondern durch Aufwand einer Kraft durch einen entsprechenden Weg geleistet werden muss, dass ebenso eine geleistete Arbeit nicht verloren, nicht verbraucht, sondern nur in eine andere Form umgewandelt ist, aus der man sie vollständig wieder gewinnen kann. In einem speciellen Fall zeigt das obige Gleichung, sie zeigt, dass die geleistete Arbeit sich vollständig in der lebendigen Kraft der bewegten Masse wiederfindet, dass sie nur in diese lebendige Kraft verwandelt ist. In der That können wir dieselbe Arbeit wieder gewinnen, wenn wir der bewegten Masse ihre Bewegung nehmen. Wie wir später sehen werden, geschieht das z. B. wenn wir eine bewegte, vollkommen elastische Kugel auf eine ihr gleiche in Ruhe befindliche stossen lassen. Die ursprünglich bewegte Kugel kommt zur Ruhe, die gestossene bewegt sich mit genau derselben Geschwindigkeit weiter, welche die stossende hatte. Gerade der Umstand, dass die bewegte Masse M, welche die Geschwindigkeit v hat, eine Arbeit leisten kann, welche $\frac{1}{2} Mv^2$ gleich ist, wenn man sie zur Ruhe bringt, berechtigt dazu, dieses Product die lebendige Kraft der bewegten Masse zu nennen.

Wie in diesem Falle, so können wir das Princip leicht noch in andern erkennen; heben wir eine Last durch eine gewisse Höhe, so haben wir die geleistete Arbeit nur in das gehobene Gewicht übertragen, sie kann niedersinkend dieselbe Last wieder heben, oder sie erhält frei durch den Weg, um den sie gehoben war, fallend die der geleisteten Arbeit gleiche lebendige Kraft. Ebenso sahen wir im vorigen §., dass ein in die Höhe geworfener Körper bei der Rückkehr zu seinem Ausgangspunkte dieselbe Geschwindigkeit wieder erhält, mit der er das Aufsteigen begann.

In manchen Fällen glaubte die ältere Physik einen Verlust an Arbeit annehmen zu müssen, z. B. bei der Reibung, wir werden später den Nachweis liefern, dass auch hier kein Verlust an Arbeit, sondern nur eine Umsetzung in andere Formen und zwar vorzugsweise in Wärme stattfindet.

§. 9.

Bewegung durch inconstante Kräfte; Maass dieser Kräfte. Die bisher abgeleiteten Sätze über die Bewegung unter Wirkung einer constanten Kraft, sowie über die Wirkung der Kräfte überhaupt, setzen uns nun auch sofort in Stand, im Allgemeinen zu bestimmen, welcher Art die

Bewegung durch inconstante Kräfte sein muss. Wirken die Kräfte immer in derselben Richtung, aber mit veränderlicher Stärke auf einen festen Körper oder einen materiellen Punkt, so muss auch dann die Bewegung eine geradlinig fortschreitende und eine beschleunigte, aber eine ungleichmässig beschleunigte sein, es muss sich die Beschleunigung in den verschiedenen Zeiten in demselben Verhältnisse ändern wie die wirksamen Kräfte. Kennen wir das Gesetz, nach welchem die Kraft sich ändert, so können wir auf dem schon im §. 1 angedeuteten Wege das Gesetz bestimmen, nach welchem die Geschwindigkeit sich ändert. Denken wir uns nämlich die Zeit, in welcher die Kraft wirkt, in hinreichend kleine Zeitelemente dt zerlegt, so können wir ohne ungenau zu sein annehmen, dass innerhalb jedes dieser Zeittheilchen die Kraft constant ist, und dass sich dieselbe erst von einem zum andern Zeitelemente ändert. Innerhalb eines solchen Zeitelementes gelten dann die Gesetze constanter Kräfte. Ist demnach F die in dem betrachteten Zeitelemente auf die Masse M wirkende Kraft, so erhalten wir für die Beschleunigung in diesem Momente, welche nach §. 1 durch den Quotienten $\frac{dv}{dt}$ gegeben ist,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{M}.$$

Um diese Grösse würde die Geschwindigkeit zur Zeit t in einer Secunde zugenommen haben, wenn die Kraft F eine Secunde constant gewesen wäre.

Kennen wir nun das Gesetz, nach welchem sich die Kraft ändert, so ist es eine Aufgabe der Integralrechnung, aus demselben die Geschwindigkeit zur Zeit t und mit dieser dann den in der Zeit t zurückgelegten Weg zu berechnen, in der Art, wie wir es an dem Beispiel der gleichmässig beschleunigten Bewegung im §. 1 gezeigt haben. Da es sehr oft unsere Aufgabe sein muss, aus dem Gesetze, nach welchem sich die Kraft ändert, das ganze Gesetz der Bewegung abzuleiten, so bedarf es hier keines weitern Beispieles, die Untersuchung der Bewegung eines schwingenden Pendels wird uns im nächsten Kapitel sofort ein solches liefern.

Kennen wir das Gesetz, nach welchem eine ungleichförmige Bewegung erfolgt, so können wir daraus ebenso die in jedem Augenblicke wirksame Kraft ableiten. Wir kennen dann s, den zurückgelegten Weg in seiner Abhängigkeit von der Zeit, oder nach dem mathematischen Ausdrucke als Function der Zeit. Daraus erhalten wir gemäss §. 1 zunächst

$$v = \frac{ds}{dt}$$

und weiter, da hierin v als Function von t gegeben ist, die Beschleunigung zur Zeit t in $\frac{dv}{dt}$. Dafür ist dann gerade wie vorhin

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{M}; \quad F = M\frac{dv}{dt}$$

für die zur Zeit t wirksame Kraft. Es ist also stets auch bei inconstanten Kräften die Grösse der wirksamen Kraft gleich dem Producte aus der bewegten Masse in die Beschleunigung, welche die Kraft in dem betrachteten Momente bewirkt.

Diesen Satz werden wir häufig zur Messung von Kräften benutzen.

Ist die Richtung der Kraft nicht immer dieselbe, so wird die Bewegung nicht eine geradlinig fortschreitende, sondern die Bahn wird eine von dem Gesetze, nach welchem sich die Richtung und Grösse der Kraft ändert, abhängige krumme Linie. Auch hier ist es nicht nöthig, Beispiele zu betrachten, wir werden, wenn uns eine solche Bewegung vorkommt, sie auf Grund der in diesem Kapitel gefundenen Principien untersuchen.

Zweites Kapitel.

Von der drehenden Bewegung.

§. 10.

Entstehung der drehenden Bewegung. Bei den im vorigen Kapitel betrachteten Bewegungen haben wir immer vorausgesetzt, dass der Körper der auf ihn wirkenden Kraft oder einer Componente derselben frei folgen könne, und dass er sich dann in der Richtung der Kraft, seinen Ort im Raume ändernd, fortbewege. An ausgedehnten Körpern können wir noch eine andere Bewegung erkennen, bei welcher sie den Ort im Raume, den sie einnehmen, nicht verlassen, bei welcher nur die einzelnen Punkte des Körpers nach und nach verschiedene Stellen im Raume erhalten, nämlich die drehende Bewegung. Eine solche Bewegung tritt immer dann ein, wenn wir durch den ausgedehnten Körper an irgend einer Stelle eine Axe führen und nun in gleich zu besprechender Weise ausserhalb der Axe Kräfte auf ihn einwirken. Bei dieser drehenden Bewegung beschreibt dann jeder Punkt des Körpers einen Kreis um einen festen in der Drehungsaxe liegenden Mittelpunkt, dessen Radius gleich ist dem senkrechten Abstande des betrachteten Punktes von der Drehungsaxe.

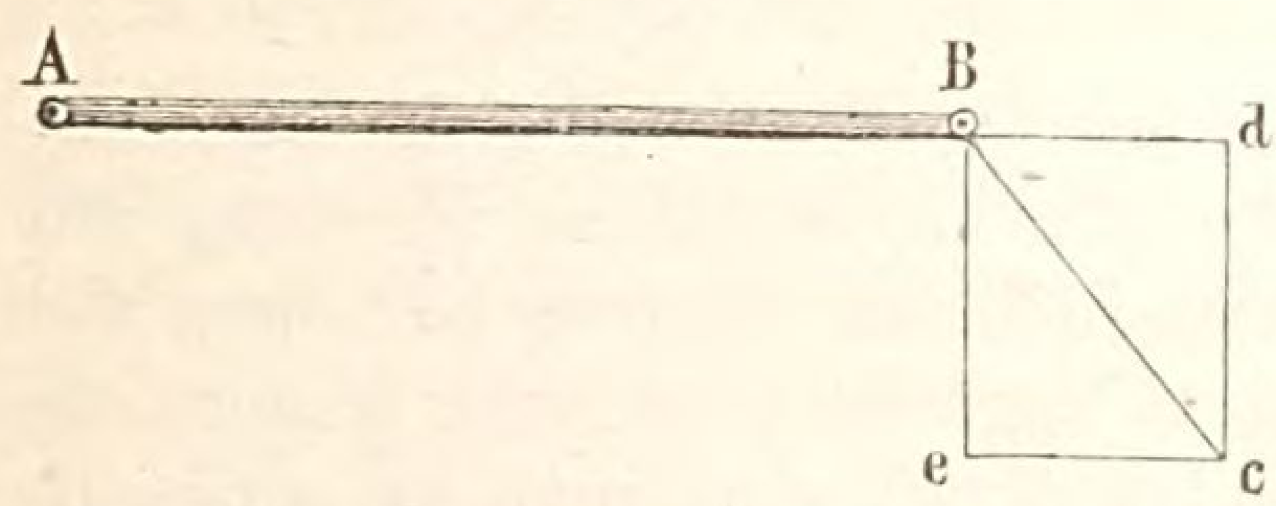
Bei der drehenden Bewegung können wir ebenso wie bei der fortschreitenden von einer bestimmten Geschwindigkeit, oder bei der ungleichförmigen von einer bestimmten Beschleunigung sprechen, die wir hier jedoch nicht auf die absolut zurückgelegten Wege, sondern auf die von den einzelnen Punkten des Körpers in dem von ihnen beschriebenen Kreise zurückgelegten Bögen beziehen. Man nennt diese Geschwindigkeit die Winkelgeschwindigkeit und es ist ersichtlich, dass alle Punkte eines festen, um eine Axe gedrehten Körpers die gleiche Winkelgeschwindigkeit haben. Die absolute Geschwindigkeit der einzelnen Punkte ist dabei eine sehr verschiedene, sie ist dem Radius des Kreises, in dem dieselben sich bewegen, also dem senkrechten Abstande der betrachteten Punkte von der Drehungsaxe proportional.

Ist die drehende Bewegung eine ungleichförmige, so können wir alle im §. 1 gegebenen Definitionen auch auf die drehende Bewegung anwenden, wenn wir sie auf die Winkelgeschwindigkeit beziehen, also anstatt der dort angewandten Längen die Bögen im Winkelmaass einführen.

Wir erwähnten vorhin schon, dass zur Erzeugung der drehenden Bewegung die Kräfte ausserhalb der Drehungsaxe in bestimmter Weise wirken müssten. Setzen wir voraus, wir hätten einen Stab AB Fig. 4, der sich nur um eine feste durch A senkrecht zur Längsrichtung des Stabes

geführte Axe etwa parallel der Zeichnungsebene drehen könnte. Alle Kräfte, welche dann senkrecht zu dieser Ebene, also parallel der Drehungsaxe wirken, können dann keine Drehung hervorrufen, und von den Kräften, welche gegen die Drehungsebene geneigt sind, nur die in die Drehungsebene fallende Componente, die wir erhalten, wenn wir nach dem Satze vom Kräfteparallelogramm die gegebene Kraft in zwei zerlegen, von denen die eine Bc in die Drehungsebene fällt, die andere zu derselben senkrecht, also parallel der Drehungsaxe ist.

Fig. 4.



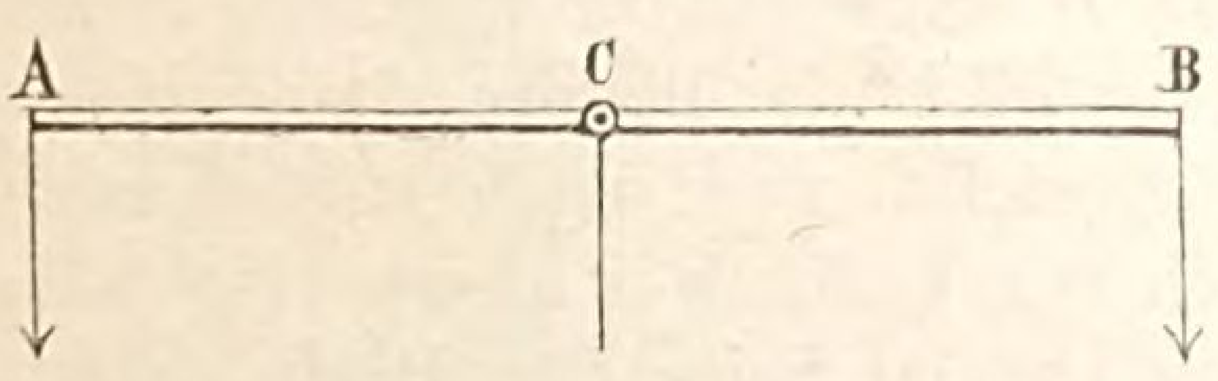
Aber auch die in die Ebene fallende Kraft Bc kann nicht immer vollständig zur Erzeugung der Drehung wirken. Zerlegen wir nämlich Bc in die beiden Componenten Bd und Be, von denen die eine der Verbindungslinie des Angriffspunktes der Kraft mit der Axe parallel, die andere zu dieser Verbindungslinie senkrecht ist, so kann die erstere Componente nur einen Zug auf die Axe ausüben, also zur drehenden Bewegung nichts beitragen. Nur die zu AB senkrechte Componente fällt in die Richtung der augenblicklich möglichen Bewegung des Punktes B, nur diese kann also die drehende Bewegung bewirken. Den Abstand des Angriffspunktes einer Kraft von der Drehungsaxe nennt man den Hebelarm der Kraft, es kann somit nur jene Componente einer Kraft eine Drehung bewirken, welche senkrecht ist zum Hebelarm der Kraft.

Wir untersuchen zunächst die Abhängigkeit der drehenden Bewegung von der drehenden Kraft und der zu drehenden Masse.

§. 11.

Abhängigkeit der drehenden Bewegung von der drehenden Kraft; statische Momente. Wenn wir einen Stab AB Fig. 5 um eine verticale Axe drehbar aufhängen, so kann ihm seine Schwere keine Drehung ertheilen, da dieselbe parallel der Drehungsaxe wirkt. Wir können ihn dann aber in Drehung versetzen, indem wir in horizontaler Richtung Kräfte auf ihn einwirken lassen, etwa so, dass wir an dem Stabe in B oder A oder in andern Punkten eine Schnur anbinden, diese dann über eine um eine horizontale Axe drehbare Rolle führen, und dann an das Ende der Schnur ein Gewicht befestigen. Stellen wir die Rolle so, dass die Schnur bis zur Rolle horizontal und senkrecht zu AB ist, so bildet das Gewicht die drehende Kraft.

Fig. 5.



Wir können dann zunächst erkennen, dass die Drehung wesentlich von dem Angriffspunkt der Kraft abhängig ist, sie findet in dem einen Sinne statt, wenn wir die Kraft zwischen B und C angreifen lassen, in dem entgegengesetzten, wenn wir sie zwischen C und A an der andern Seite der Axe angreifen lassen, sie wird bei gleicher drehender Kraft eine schnellere, wenn wir die Kraft weiter von C angreifen lassen, die Winkelgeschwindigkeit wird um so kleiner, je näher bei C die Kraft angreift. Um den Einfluss der Lage des Angriffspunktes zu untersuchen, verfahren wir

am bequemsten so, dass wir an B eine in dem einen Sinne drehende Kraft anbringen und nun aufsuchen, welche Kräfte wir zwischen B und C nach der entgegengesetzten Richtung ziehend anbringen müssen, um zu bewirken, dass keine Drehung eintritt. Daraus, dass die nach entgegengesetzter Richtung wirkenden Kräfte sich aufheben, folgt dann, dass die Kräfte gleiche Wirkung haben.

So ergibt sich zunächst, dass wenn wir in B zwei gleiche nach entgegengesetzter Richtung wirkende Kräfte anbringen, keine Drehung eintritt, was nach dem Frühern selbstverständlich ist. Lassen wir dann aber die eine der gleichen Kräfte näher bei C angreifen, so tritt immer eine Drehung im Sinne der bei B angreifenden Kraft ein, und es muss die Kraft, welche nach entgegengesetzter Richtung zieht, zur Herstellung des Gleichgewichtes vergrössert werden, und zwar um so mehr, je kleiner der Abstand des Angriffspunktes der Kraft vom Punkte C ist. Greift im Punkte B eine Kraft P_1 an, so ergeben die Versuche, dass wir in einem Abstande a von C zur Herstellung des Gleichgewichtes stets eine solche Kraft P anbringen müssen, dass

$$P : P_1 = BC : a$$

oder dass

$$P . a = P_1 . BC.$$

Es folgt daraus, dass zwei Kräfte, welche einem Körper eine entgegengesetzte Drehung ertheilen, sich im Gleichgewicht halten, wenn sie sich verhalten umgekehrt wie ihre Hebelarme, oder wenn die Producte aus den Kräften und ihren Hebelarmen einander gleich sind. Diese Producte nennt man die statischen oder mechanischen Momente oder auch die Drehungsmomente, so dass sich also zwei einen Körper nach entgegengesetzter Richtung drehende Kräfte das Gleichgewicht halten, wenn sie gleiche Drehungsmomente haben.

Wir sahen vorhin, dass eine zwischen C und A angebrachte nach derselben Richtung wie eine zwischen C und B angebrachte wirkende Kraft dem Körper eine entgegengesetzte Drehung gibt als letztere; anstatt an der Seite CB zur Herstellung des Gleichgewichts zwei nach entgegengesetzten Richtungen wirkende Kräfte, können wir auch zwei gleichgerichtete, die eine an der einen, die andere an der andern Seite der Drehungsaxe anwenden. Auch dann ist die Bedingung des Gleichgewichts, dass die Drehungsmomente an beiden Seiten gleich sein müssen, wie man sehr leicht im Versuche zeigen kann.

Wenn wir statt des einen Gewichtes P_1 eine Anzahl Gewichte p_1, p_1', p_1'' ... in den Abständen d, d', d'' ... und ebenso nach entgegengesetzter Richtung drehend eine Anzahl Kräfte p, p', p'' in den Abständen e, e', e'' .. anbringen, so ist die Bedingung des Gleichgewichts

$$p_1\, d + p_1'\, d' + p_1''\, d'' \ldots = pe + p'\, e' + p''\, e'' \ldots$$

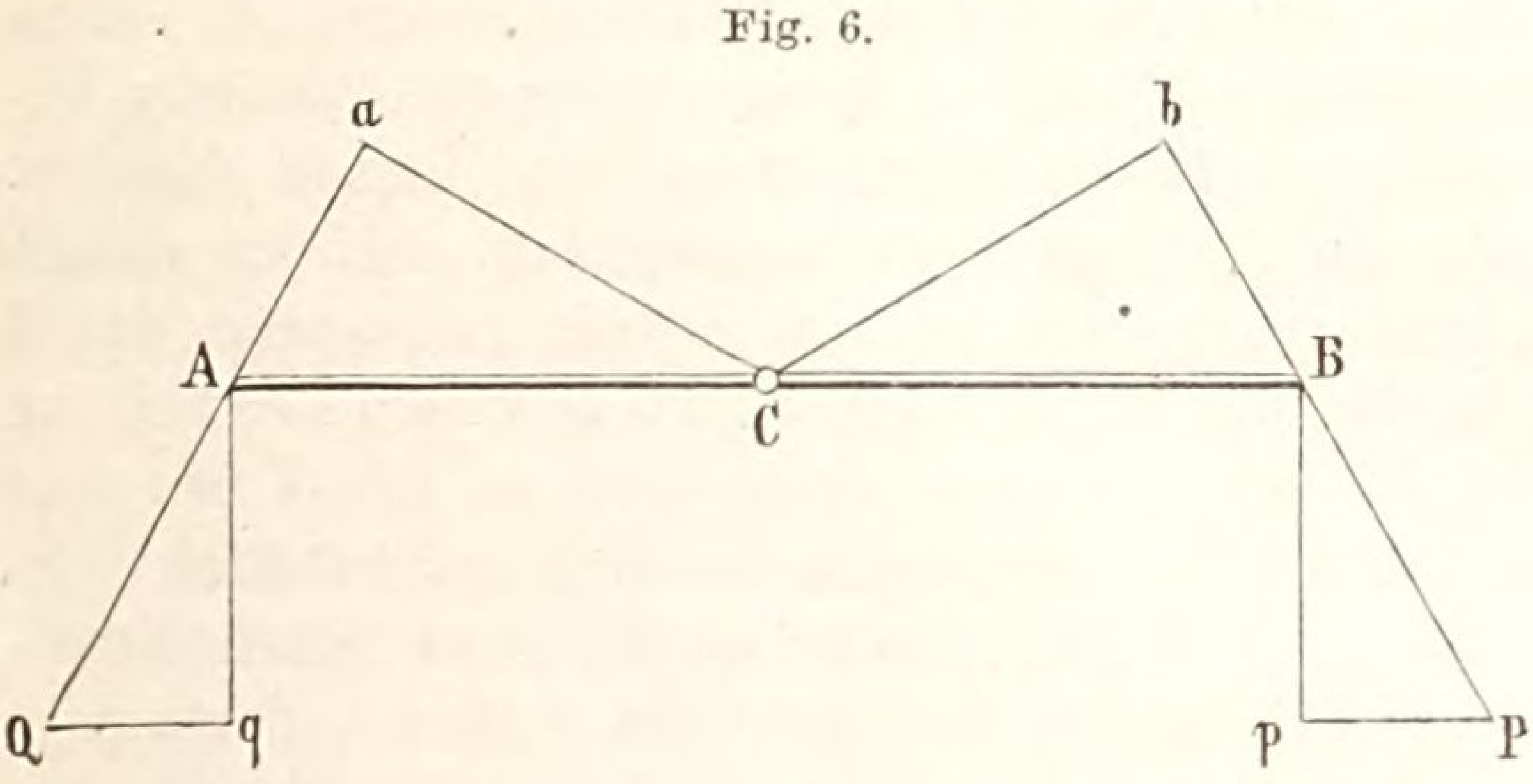
wie sich unmittelbar aus den Versuchen und auch daraus gibt, dass die Summen der Drehungsmomente an jeder der beiden Seiten das wirklich ertheilte Drehungsmoment nach der betreffenden Richtung ist.

Bezeichnen wir nun entgegengesetzte Drehung hervorbringende Drehungsmomente mit entgegengesetzten Vorzeichen, so können wir den zuletzt

abgeleiteten Satz kurz dahin aussprechen, dass wenn an einem drehbaren Körper verschiedene Kräfte angreifen, keine Drehung eintritt, wenn die algebraische Summe der Drehungsmomente gleich Null ist.

Wir haben bisher angenommen, dass die wirksamen Kräfte senkrecht seien zu dem Hebelarm, an dem sie angreifen, wir können unsern Satz aber sofort verallgemeinern, wenn wir den Begriff des Hebelarms etwas enger fassen, wenn wir als Hebelarm den senkrechten Abstand der Richtung der Kraft von der Drehungsaxe, und als Drehungsmoment das Product aus der Kraft in diesen senkrechten Abstand bezeichnen. Denn ist AB Fig. 6

Fig. 6.



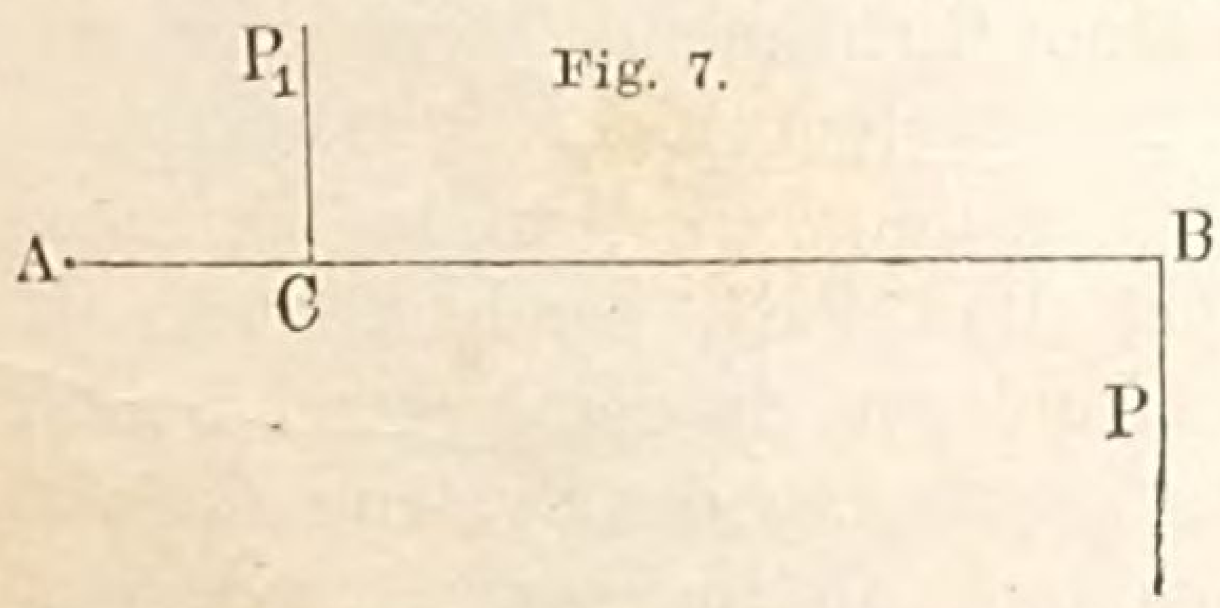
ein um C drehbarer Stab und greifen an den Enden Kräfte AQ und BP an, die nicht senkrecht zu AB wirken, so erzeugt z. B. an B nur die zu AB senkrechte Componente der Kraft P eine Drehung. Diese Componente p ist aber, wenn wir den Winkel pBP mit α bezeichnen, $P . \cos \alpha$, somit das Drehungsmoment $AB . P \cos \alpha$. Ziehen wir nun von C aus die senkrechte Cb auf die Richtung der Kraft BP, so ist der senkrechte Abstand $Cb = CB . \cos \alpha$, da dann auch der Winkel $BCb = \alpha$ ist. Somit ist

$$P . Cb = P . CB . \cos \alpha$$

oder wir können als das Drehungsmoment einer irgendwie gerichteten Kraft das Product aus derselben und dem senkrechten Abstande der Kraftrichtung von der Drehungsaxe bezeichnen.

Wir haben im Vorstehenden den Satz, dass keine drehende Bewegung eines Körpers eintritt, wenn die entgegengesetzt gerichteten Drehungsmomente gleich sind, als einen experimentellen Satz hingestellt. Man kann denselben indess auch aus dem im vorigen Kapitel aufgestellten Princip von der Erhaltung der Arbeit ableiten. Aus diesem Princip ergibt sich nämlich unmittelbar, dass wenn in einem System an verschiedenen Punkten, welche starr mit einander verbunden sind, Kräfte angreifen, keine Bewegung eintreten kann, wenn bei der Bewegung des Systems in einem Sinne genau soviel Arbeit geleistet werden muss, als bei der Bewegung in gerade entgegengesetztem Sinne. Um die Bedeutung dieses Satzes und dessen Richtigkeit zu erkennen, sei AB Fig. 7 ein starrer Hebel, den wir

Fig. 7.



uns der Einfachheit wegen als gewichtslos denken wollen. Derselbe sei um eine verticale durch A gehende Axe in horizontaler Ebene drehbar. Im Punkte B im Abstande l von der Drehungsaxe sei eine Schnur angebunden, dieselbe sei horizontal und senkrecht zu AB fortgeführt, dann über eine verticale drehbare Rolle gelegt und trage an ihrem Ende das Gewicht P. Ganz in derselben Weise sei an C im Abstande l_1

von der Drehungsaxe ein Gewicht P_1 angebracht. Tritt nun eine Drehung in dem einen Sinne ein, so sinkt das Gewicht P, das Gewicht P_1 wird gehoben, bei einer Drehung in dem andern Sinne sinkt P_1 und das Gewicht P wird gehoben. Dass nun, wenn die zum Heben des einen Gewichts zu leistende Arbeit, Product aus Gewicht und Hubhöhe, gleich ist der von dem andern Gewicht geleisteten Arbeit, Product aus Gewicht und zurückgelegtem Wege beim Niedersinken, durch die Wirkung dieser Kräfte keine Bewegung entstehen kann, ergibt sich folgendermassen.

Würde durch die constante Kraft P etwa das System in Bewegung gesetzt, so müsste nach den Sätzen des vorigen Kapitels ebenso in jedem Momente die Bewegung geändert werden, es müsste eine gleichmässig beschleunigte Bewegung entstehen. Dadurch erhielten die Massen der Gewichte P und P_1 eine mit der Zeit wachsende lebendige Kraft, welche einen gewissen Arbeitsvorrath repräsentirt. Wir würden demnach durch das niedersinkende Gewicht die der Arbeit der Kraft P gleiche Arbeit im Emporheben des Gewichtes P_1 leisten, ausserdem noch in der Form von lebendiger Kraft der bewegten Massen einen mit der Zeit wachsenden Vorrath von Arbeit erhalten, diese letztere Arbeit somit ohne einen Kraftaufwand, oder was dasselbe ist, aus nichts schaffen. Das widerspricht aber dem Princip von der Erhaltung der Arbeit. Ist demnach die bei der Bewegung des Systems in dem einen Sinne zu leistende Arbeit gleich der bei einer Bewegung in dem gerade entgegengesetzten Sinne, so müssen die Kräfte, die an dem System angreifen, sich das Gleichgewicht halten.

Um nun die Gleichgewichtsbedingung bei der drehenden Bewegung daraus zu erhalten, denken wir uns, es werde der Hebel AB im Sinne der Kraft P um einen sehr kleinen Bogen φ gedreht, das Gewicht P sinkt dann um die Strecke $l\varphi$, die von ihm geleistete Arbeit ist somit $Pl\varphi$. Das Gewicht P_1 wird dadurch um die Strecke $l_1\varphi$ gehoben, die zu leistende Arbeit ist somit $P_1 l_1 \varphi$. Die Bedingung, dass durch diese Kräfte keine Bewegung bewirkt werden kann, ist somit

$$Pl\varphi = P_1 l_1 \varphi$$

oder

$$Pl = P_1 l_1,$$

die Drehungsmomente müssen entgegengesetzt gleich, ihre Summe muss gleich Null sein.

Man erkennt unmittelbar, dass wir ganz in derselben Weise zu dem Satze gelangen, wenn an dem Hebel beliebig viele Kräfte angreifen.

Der soeben zur Ableitung des Gesetzes von den statischen Momenten angewandte Satz, dass wenn die von den thätigen Kräften bei der Bewegung eines Systemes nach entgegengesetzten Richtungen geleisteten Arbeiten einander gleich sind, die Kräfte das System nicht in Bewegung versetzen können, gilt nach dem der Entwicklung zu Grunde liegenden Gedankengange nicht nur für diesen speciellen Fall, sondern ganz allgemein. Haben wir irgend ein System von Punkten, an dem irgend welche Kräfte angreifen, und ist bei irgend einer Bewegung des Systems die von den Kräften geleistete Arbeit gleich derjenigen, die bei der gerade entgegengesetzten geleistet wird, so halten sich die Kräfte das Gleichgewicht. In dieser allgemeinen Form ausgesprochen nennt man den Satz das Princip

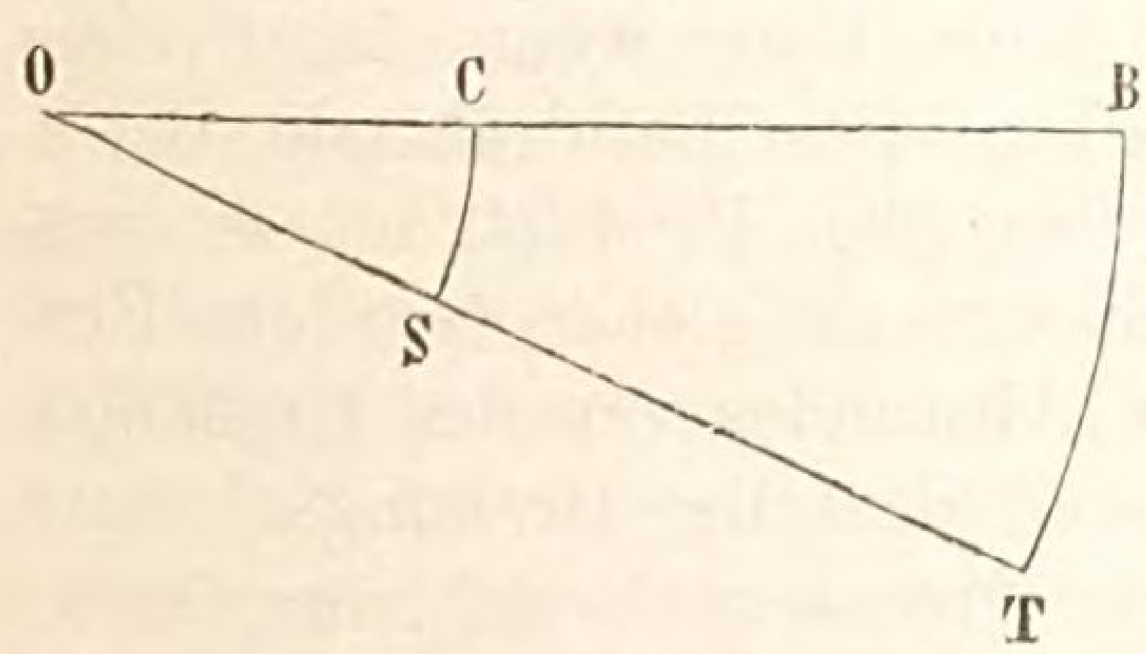
der virtuellen Geschwindigkeiten, eine Bezeichnung, welche andeuten soll, dass die zur Anwendung des Princips in Betracht gezogenen Bewegungen nur gedachte, nicht wirkliche sind. Das Princip ist sehr häufig äusserst bequem, um die Bedingungen des Gleichgewichtes zu formuliren.

Da bei der drehenden Bewegung Kräfte, deren Drehungsmomente entgegengesetzt gleich sind, sich das Gleichgewicht halten, so folgt auch, dass an einem Körper angreifende Kräfte demselben eine gleiche drehende Bewegung, in gleichen Zeiten gleiche Winkelgeschwindigkeiten ertheilen, wenn die Kräfte gleiche Momente haben. Die Winkelgeschwindigkeit ist gleich jener, welche eine dem Drehungsmomente der gegebenen gleiche, im Abstande Eins von der Drehungsaxe angreifende Kraft dem Körper ertheilt, denn das Drehungsmoment einer im Abstande Eins angreifenden Kraft ist dann gleich dem Drehungsmoment einer gegebenen Kraft, wenn die Kraft selbst diesem Drehungsmomente gleich ist.

§. 12.

Abhängigkeit der drehenden Bewegung von der Vertheilung der zu drehenden Masse; Trägheitsmoment. Ebenso wie die drehende Bewegung nicht nur von der Grösse, sondern auch von dem Abstande des Angriffspunktes einer Kraft von der Drehungsaxe abhängig ist, ebenso ist sie nicht nur von der Grösse der bei der Drehung zu bewegenden Masse, sondern auch von der Lage derselben abhängig. Um diese Abhängigkeit zu untersuchen, sei OB Fig. 8 ein gewichtsloser Hebel, der um eine durch O gehende Axe drehbar ist. In B greife eine Kraft p an, von der wir voraussetzen wollen, dass sie der Grösse nach constant, aber der Richtung nach immer senkrecht zu dem Hebelarme sei. Es würde das etwa der Fall sein, wenn OB Radius einer gewichtslosen Rolle wäre, über deren Umfang eine Schnur gelegt ist, an der die Kraft p nach constanter Richtung ziehend angreift.

Fig 8.



Nun befinde sich in B die Masse m, welche dann die in Bewegung zu setzende Masse unseres Systems ist. Die Kraft p treibt dann die Masse m, da die augenblickliche Bewegungsrichtung immer mit der Richtung der Kraft zusammenfällt, mit gleichmässig beschleunigter Bewegung voran, so dass wir für den in der Zeit t zurückgelegten Weg BT erhalten

$$BT = \frac{1}{2}\frac{p}{m}\cdot t^2.$$

Für den diesem Wege entsprechenden Bogen φ erhalten wir dann, wenn wir die Länge $OB = l$ setzen, da dann $BT = l\varphi$,

$$\varphi = \frac{1}{2}\frac{p}{lm}\cdot t^2.$$

Nun denken wir uns, die Masse m bei B sei fortgenommen und solle durch eine im Punkt C im Abstande r von der Drehungsaxe anzubringende Masse m' ersetzt werden, so dass auch jetzt, während die Kraft p ungeändert bei B angreift, die drehende Bewegung dieselbe bleibt, das heisst also in gleichen Zeiten der gleiche Bogen φ zurückgelegt werde.

Zur Bestimmung dieser Masse m' haben wir uns zunächst zu erinnern, dass die im Punkte B angreifende Kraft p im Punkte C einen Druck ausübt wie eine Kraft p', welche dasselbe Drehungsmoment hat wie p, somit gegeben ist durch die Gleichung

$$p' r = p \,.\, l; \quad p' = p \,.\, \frac{l}{r} \cdot$$

Der Weg s', den die Masse m' unter der Wirkung dieser an ihr angreifenden Kraft p' zurücklegt, ist dann

$$s' = {}^1/_2 \frac{p'}{m'} t^2 = {}^1/_2 \frac{p \frac{l}{r}}{m'} \cdot t^2.$$

Dieser Weg soll nun demselben Bogen φ entsprechen, den in derselben Zeit t die in B befindliche Masse m beschrieb, es soll also $s' = r\,\varphi$ sein, somit

$$\varphi = {}^1/_2 \frac{p \frac{l}{r}}{r \,.\, m'} \cdot t^2 = {}^1/_2 \frac{p\,l}{r^2 m'} t^2$$

sein. Aus den beiden Gleichungen für φ ergibt sich

$$\frac{p}{l\,m} = \frac{p\,l}{r^2 m'},$$

oder

$$m' r^2 = m l^2.$$

Die im Punkte C anzubringende Masse m' muss also, wenn das System unter Wirkung der in B angreifenden Kraft p dieselbe drehende Bewegung erhalten soll, so genommen werden, dass das Product aus m' und dem Quadrate des Abstandes von der Drehungsaxe gleich ist dem Producte der Masse m und dem Quadrate ihres Abstandes von der Drehungsaxe, oder zwei Massen erhalten durch ein und dasselbe Drehungsmoment gleiche drehende Bewegungen, wenn sie ihrer Grösse nach sich umgekehrt verhalten wie die Quadrate ihrer Abstände von der Drehungsaxe.

Das Product aus einer Masse m in das Quadrat ihres Abstandes r von einer Drehungsaxe nennt man das Trägheitsmoment der Masse in Bezug auf die Drehungsaxe; wir können daher den eben abgeleiteten Satz auch kurz dahin aussprechen, dass verschiedene Massen durch ein und dieselbe Kraft gleiche Drehungen erhalten, wenn sie gleiche Trägheitsmomente haben.

Das Trägheitsmoment einer Masse bedeutet gleichzeitig jene Masse, welche in der Abstandseinheit von der Drehungsaxe an Stelle einer im Abstande r befindlichen Masse m angebracht werden muss, damit das System dieselbe drehende Bewegung erhält, das heisst in gleichen Zeiten dieselben Bögen im Winkelmaass beschreibt.

Dieser Satz von den Trägheitsmomenten in Verbindung mit dem im vorigen §. abgeleiteten Satze von den statischen Momenten setzt uns in den Stand, die Bewegung eines Systems um seine Drehungsaxe, in welchem Massen an verschiedenen Punkten vorhanden sind und von verschiedenen Kräften angegriffen werden, wenigstens dann vollständig zu bestimmen, wenn wir die Vertheilung der Massen und Kräfte kennen. Die

Summe der statischen Momente der wirksamen Kräfte gibt uns jene Kraft, welche in der Abstandseinheit von der Drehungsaxe angebracht dieselbe drehende Bewegung erzeugt, wie die wirklich vorhandenen Kräfte; die Summe der Trägheitsmomente der vorhandenen Massen gibt uns jene Masse, welche in der Abstandseinheit angebracht, durch die vorhandenen Kräfte genau die gleiche Bewegung erhält, wie die wirklich vorhandenen Massen. Da diese Masse sich dann in demselben Punkte befindet, in welchem die durch die Summe der statischen Momente gegebene Kraft angreift, so erhalten wir die Beschleunigung der Bewegung, indem wir den Quotienten aus der wirksamen Kraft und der Masse, also aus der Summe der statischen Momente und der Summe der Trägheitsmomente bilden; aus der Beschleunigung erhalten wir dann die Geschwindigkeit und die zurückgelegten Wege ganz nach den Sätzen des vorigen Kapitels. Es ist eben dadurch, dass wir die zu bewegenden Massen in den Angriffspunkt der Kraft verlegt haben, die drehende Bewegung auf die fortschreitende zurückgeführt.

Auch die Bewegung eines ausgedehnten um eine Axe drehbaren Körpers erhalten wir in derselben Weise; wir müssen das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf die Drehungsaxe bilden, und dieses Trägheitsmoment als die bei der Drehung zu bewegende Masse als Nenner unter die Summe der statischen Momente der wirksamen Kräfte setzen. Um das Trägheitsmoment eines solchen ausgedehnten Körpers zu bilden, müssen wir ihn in einzelne unendlich kleine Stückchen zerlegt denken, die Masse jedes Stückchens mit dem Quadrate ihres Abstandes von der Drehungsaxe multipliciren und die Summe aller Producte bilden. Hat der Körper eine geometrisch bestimmbare Gestalt und ist die Masse in demselben gleichförmig vertheilt, so dass gleiche Volumina in demselben überall gleiche Masse enthalten, so kann man mit Hülfe der Integralrechnung das Trägheitsmoment berechnen. Auf diese Berechnung gehen wir hier nicht ein, wenn wir in einem speciellen Falle das Trägheitsmoment eines Körpers bestimmen müssen, werden wir den Gang der Rechnung andeuten.

§. 13.

Zusammensetzung verschieden gerichteter Drehungen. Wir haben bisher vorausgesetzt, dass der drehbare Körper sich nur um eine bestimmte Drehungsaxe drehen könnte; es ist nun aber auch möglich, dass ein Körper sich gleichzeitig um verschiedene Drehungsaxen drehen kann und nach den verschiedenen Richtungen, nach denen er sich drehen kann, gleichzeitig angetrieben wird. Es fragt sich nun, ob diese Drehungen sich dann ebenso zu einer resultirenden Drehung zusammensetzen, wie verschieden gerichtete fortschreitende Bewegungen, und welches die Richtung und Grösse der Drehung ist. Wir können uns einen solchen Fall etwa in folgender Weise realisirt denken. Wir setzen eine massive Kugel in ein kleines Segment einer Hohlkugel von gleichem Radius und legen, um die Kugel an der fortschreitenden Bewegung zu hindern, ein ebensolches Segment oben auf die Kugel. Eine solche Kugel kann sich dann um jede beliebige, durch den Mittelpunkt derselben gehende Axe drehen. Um diese Kugel nun nach verschiedenen Richtungen anzutreiben, denken wir uns in der Oberfläche derselben, grössten Kreisen folgend, einige Rinnen eingeschnitten, und in

diese Rinnen Schnüre gelegt in ähnlicher Weise, wie bei der Rolle der Fallmaschine.

Nehmen wir nun an, es werde die Kugel nach zwei gegeneinander geneigten Richtungen angetrieben, so erkennt man leicht, dass die beiden Drehungen sich zu einer resultirenden zusammensetzen, deren Richtung und Grösse sich durch eine der Construction des Kräfteparallelogramms ganz gleiche bestimmen lässt. Betrachten wir irgend einen Punkt der Kugel, der in Folge der Drehung nach der einen Richtung den Winkel α zurücklegt, nach der andern in derselben Zeit den Winkel β, so muss der Ort, welcher von dem Punkte erreicht wird, ganz derselbe sein, wenn die Kugel sich erst in der einen Richtung um den Winkel α und dann um den Winkel β gedreht hätte, und die Bahn des Punktes muss die auf der Kugel gezogene Verbindungslinie des Ausgangspunktes mit dem so erreichten Orte sein. Diese Verbindungslinie ist aber die Diagonale der aus den beiden Bögen α und β auf der Kugel gebildeten Vierecks; des Drehungsaxe, um welche eine einfache Drehung durch den von dei Diagonale der Grösse und Richtung nach gegebenen Bogen genau dieselbe Drehung dieses und somit aller Punkte der Kugel ergeben haben würde, ist diejenige Axe der Kugel, welche zu dem Kreise, zu welchem der resultirende Bogen gehört, senkrecht ist. Man sieht, dass diese Axe in der durch die beiden gegebenen Axen bestimmten Ebene liegt, und mit jeder derselben den gleichen Winkel bildet, welchen der resultirende Bogen auf der Kugel mit den beiden Bögen α und β bildet.

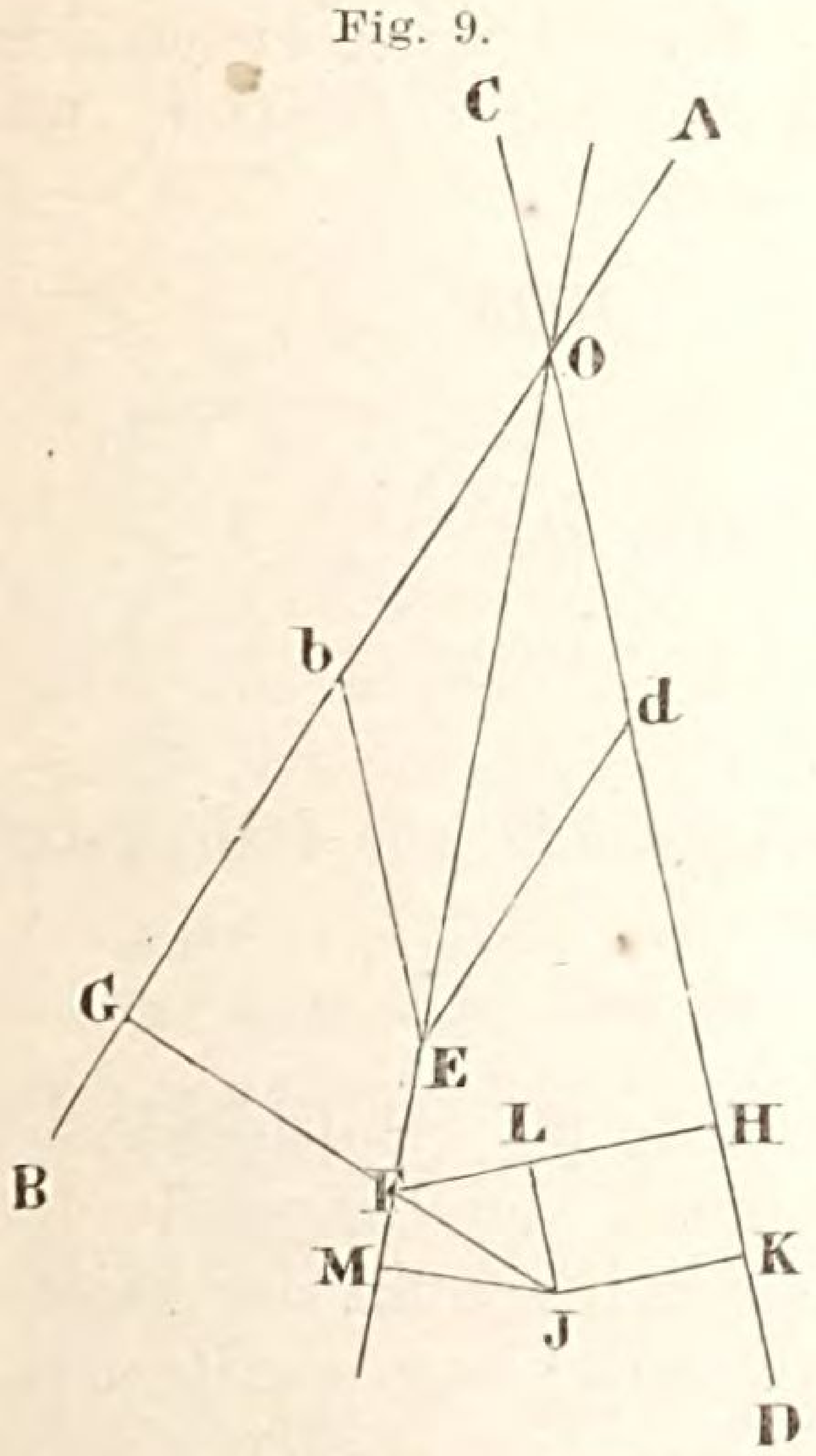
Aus dieser letztern Bemerkung erkennt man, dass man die Richtung der resultirenden Axe auch durch eine ebene Construction erhalten kann. Wir legen durch die beiden ursprünglich gegebenen Axen eine Ebene und tragen von dem Punkte, in welchem die Axen sich schneiden, die Bögen α und β als Seiten eines Parallelogramms auf. Die durch den Schnittpunkt der Axen gelegte Diagonale des vervollständigten Parallelogramms ist dann die Richtung der Axe der resultirenden Bewegung, und gleichzeitig ist dann die Länge dieser Diagonale die Grösse der resultirenden Drehung.

Um die Richtigkeit dieser Construction leichter zu erkennen, seien AB und CD Fig. 9 die beiden sich im Mittelpunkte O der Kugel schneidenden Drehungsaxen, und setzen wir voraus, dass wir in der Axe OB stehend, den Kopf bei O, den Fuss bei B, die Drehung in demselben Sinne, etwa von links nach rechts, erfolgen sehen, wie die Drehung um die Axe OD, wenn wir in dieser stehen, mit dem Kopfe bei O, den Fuss bei D. Wir tragen dann auf OB den Bogen α, auf OD den Bogen β auf, ergänzen dann das Parallelogramm $ObEd$, und erhalten in OE die Richtung der resultirenden Drehungsaxe und die Grösse des Bogens γ, um welchen der betrachtete Punkt um diese Axe in derselben Zeit gedreht wird, und zwar so, dass wenn wir in der Axe stehen, den Kopf bei O, Fuss bei E, die Bewegung in demselben Sinne von links nach rechts erfolgt.

Die Richtigkeit dieser Construction erkennen wir durch den Nachweis, dass in Folge beider Drehungen die auf der Axe OE liegenden Punkte in Ruhe bleiben, denn bei der Drehung eines Körpers sind die Punkte der Axe und nur diese in Ruhe, und dadurch, dass wir zeigen, dass die Punkte der Axen AB und CD durch die gegebenen Drehungen

α und β in der That um die Axe OE durch den durch $OE = \gamma$ repräsentirten Bogen gedreht werden.

Fig. 9.



Ein Punkt F der Axe OE wird durch die Drehung um die Axe OB aus der Ebene der Zeichnung nach vorn gehoben in einem Kreise, dessen Radius die von F auf OB herabgelassene Senkrechte ist. Setzen wir voraus, die Drehung um die Axe OB sei eine gleichförmige und α die Drehung in der Secunde, so wird in der unendlich kleinen Zeit dt der Punkt F, da das Kreiselement auf dem Radius senkrecht steht, um die Strecke $GF.\alpha.dt$ nach vorn gehoben; in demselben Zeitelement dt rückt der Punkt F in Folge der Drehung um OD um die Strecke $FH.\beta.dt$ senkrecht hinter die Ebene der Zeichnung. Die Verschiebung des Punktes F im Sinne der ersten Drehung ist dann die Differenz beider Verschiebungen oder

$$(FG.\alpha - FH.\beta)dt.$$

Nun besteht aber, da F ein Punkt auf der verlängerten Diagonale OE ist, für die beiden Senkrechten die leicht zu beweisende Beziehung

$$\frac{FG}{Eb} = \frac{FH}{Ed}; \quad FG.Ed = FH.Eb.$$

Weiter ist nach unserer Voraussetzung $Ed = \alpha$; $Eb = \beta$, somit

$$FG.\alpha = FH.\beta; \quad FG.\alpha - FH.\beta = 0.$$

Die Differenz der Verschiebungen in dem Zeitelemente dt ist somit gleich Null, oder was dasselbe ist, der Punkt F und somit alle Punkte der Axe OE erhalten in dem Zeitelemente dt und damit überhaupt gar keine Verschiebung. Die Richtung OE ist somit die resultirende Drehungsaxe.

Dass nun für jeden beliebigen Punkt die Grösse der Drehung durch den durch die Länge der Diagonale OE repräsentirten Bogen γ gegeben ist, erkennt man folgendermassen. Wir betrachten die Drehung eines beliebigen, in der Ebene der Zeichnung liegenden Punktes J, von dem wir, um die Zeichnung nicht zu sehr zu compliciren, annehmen wollen, er liege in der Verlängerung der vorher durch den beliebigen Punkt F gelegten Senkrechten FG. Die Verschiebung des Punktes J in dem Zeitelement dt ist dann

$$(GJ.\alpha - KJ.\beta)\,dt.$$

Ziehen wir JL parallel OD, so können wir dafür schreiben

$$\{(GF + FJ)\alpha - (HF - LF)\beta\}\,dt = (FJ.\alpha + LF.\beta)dt.$$

Da wir gesehen haben, dass OE die resultirende Drehungsaxe ist, so können wir, wenn $JM \perp OE$, und wenn ξ die gesuchte resultirende Geschwindigkeit der Drehung um diese Axe ist, diese Verschiebung auch darstellen durch $MJ.\xi.dt$, erhalten somit zur Bestimmung von ξ die Gleichung

$$MJ \,.\, \xi = FJ \,.\, \alpha + LF \,.\, \beta.$$

In dem Dreieck FJL ist der Winkel an J gleich dem Complementwinkel des Winkels bOd, in dem Dreieck MJF ist der Winkel an J gleich dem Winkel EOb, den die Richtung der resultirenden Axe mit Ob bildet. Wir können deshalb setzen

$$LF = FJ \,.\, \cos dOb; \quad MJ = JF \cos EOb,$$

somit

$$JF \,.\, \cos EOb \,.\, \xi = JF(\alpha + \cos dOb \,.\, \beta)$$

$$\xi = \frac{\alpha + \cos dOb \,.\, \beta}{\cos EOb}.$$

Ziehen wir nun $EN \perp$ zu Ob, so ist $Ob = \alpha$, $bN = bE \,.\, \cos dOb$, somit

$$\xi = \frac{ON}{\cos EOb} = OE = \gamma.$$

Die Drehungsgeschwindigkeit um die Axe OE, welche als resultirende die beiden gegebenen Drehungen ersetzt, ist somit durch die Diagonale des Parallelogramms gegeben, welches wir vom Durchschnittspunkt der beiden Axen aus mit den beiden gegebenen Drehungsgeschwindigkeiten construiren.

Ebenso wie zwei können wir in derselben Weise auch beliebig viele Drehungen zu einer resultirenden Drehung zusammensetzen, indem wir sie zunächst paarweise vereinigen.

Gerade wie eine gegebene fortschreitende Bewegung können wir nun aber auch eine gegebene Drehung in andere zerlegen, so besonders die Componenten nach zwei zu einander senkrechten Richtungen bestimmen. Die Ausdrücke für diese Componenten fallen sogar nach den soeben gemachten Entwicklungen ganz mit den für die Componenten der fortschreitenden Bewegung zusammen. Die Componente der Drehung um eine Axe, welche mit der Axe der gegebenen Drehung einen Winkel φ bildet, ist gleich der vorhandenen Drehungsgeschwindigkeit multiplicirt mit dem Cosinus des Winkels φ.

§. 14.

Mittelpunkt paralleler Kräfte; Schwerpunkt. Wenn an einem Hebel eine Reihe von parallelen Kräften wirken, und es ist der Punkt, in Bezug auf welchen die Summe der statischen Momente gleich Null ist, unterstützt, so tritt keine drehende und auch keine fortschreitende Bewegung ein. Würde die Unterstützung fortgenommen, so würde der Stab in Folge der parallel wirkenden Kräfte eine fortschreitende Bewegung nach der Richtung der Kräfte annehmen; diese fortschreitende Bewegung können wir aber hemmen, indem wir in dem frühern Unterstützungspunkte eine nach entgegengesetzter Richtung wirkende Kraft anbringen, welche gleich ist der Summe der gegebenen parallelen Kräfte.

Wir können demnach schliessen, dass auch parallele Kräfte eine Resultirende haben, welche der Summe der gegebenen Kräfte gleich ist, und dass diese Resultirende an dem Punkte angreift, in Bezug auf welchen die Summe der statischen Momente der gegebenen Kräfte gleich Null ist, das heisst also, dass die gegebenen Kräfte vollständig ersetzt werden können

durch eine ihrer Summe gleiche, welche in dem Punkte angreift, in Bezug auf den die Summe der Momente gleich Null ist. Man nennt deshalb diesen Punkt den Mittelpunkt der parallelen Kräfte.

Dass dieser vollständige Ersatz für die fortschreitende Bewegung vorhanden ist, ergibt sich ausser durch den Versuch, so unmittelbar aus dem Satze, dass die Summe der Wirkungen von einer Anzahl von Kräften gleich ist der Wirkung der Summe der Kräfte, dass es dafür keines weitern Beweises bedarf, der sich überdies noch unschwer mit Hülfe des Kräfteparallelogramms führen lässt. Dass die so bestimmte resultirende Kraft auch in Bezug auf die drehende Bewegung die vorhandenen Kräfte vollständig ersetzt, erkennen wir folgendermassen.

Haben wir eine Anzahl von Kräften $p, p_1, p_2 \cdots$, welche im Abstande $l, l_1, l_2 \cdots$ von dem Mittelpunkte angreifen, so ist die Summe

$$pl + p_1 l_1 + p_2 l_2 + \cdots = 0.$$

Würde nun der Unterstützungspunkt um die Grösse x nach der einen Seite verschoben, so würde in Bezug auf den neuen Unterstützungspunkt das Drehungsmoment

$$p(l+x) + p_1(l_1+x) + p_2(l_2+x) + \cdots = pl + p_1 l_1 + p_2 l_2 + \cdots \\ + (p + p_1 + p_2 \cdots) . x .$$

Da nun der Voraussetzung nach

$$pl + p_1 l_1 + p_2 l_2 + \cdots = 0,$$

so folgt, dass das Drehungsmoment in Bezug auf den neuen Drehpunkt gleich ist

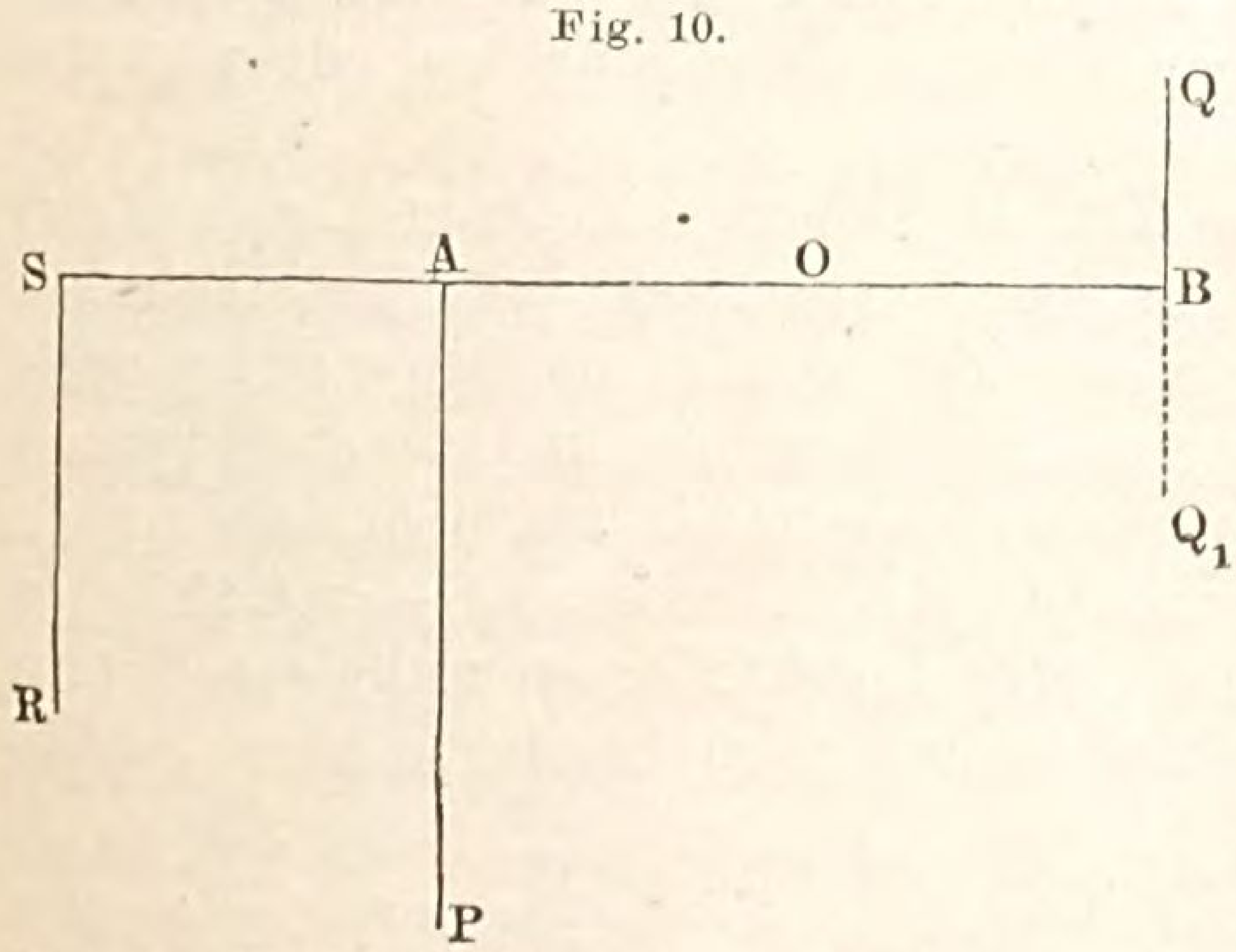
$$(p + p_1 + p_2 + \cdots) x,$$

also dasselbe, wie wenn in dem Mittelpunkte die Summe aller Kräfte angebracht wäre.

Auch dann, wenn die parallelen Kräfte nicht alle nach derselben, sondern die einen nach der einen, die andern nach der gerade entgegengesetzten Richtung wirken, haben sie im Allgemeinen eine Resultirende, welche gleich der Differenz der nach entgegengesetzter Richtung wirkenden Kräfte ist, und welche in der Richtung der grössern Kraft an dem Punkte angreift, in Bezug auf welchen die Summe der Momente Null ist.

Sei, um dieses zu zeigen, AB Fig. 10 eine feste Linie, an deren Punkten A und B die beiden Kräfte P und Q wirken. Wir können nun P als Mittelkraft zweier anderer betrachten, von denen die eine bei B angreift und gleich Q ist, während die andere gleich $P - Q$ und an einem Punkt S angreift, dessen Lage dadurch gegeben ist, dass

Fig. 10.



$$AS(P-Q) = AB . Q$$

$$AS = AB \cdot \frac{Q}{P-Q}.$$

Die beiden an B angreifenden Kräfte heben sich auf, es bleibt also als Resultirende $P - Q$ übrig. Dass nun der Punkt S jener ist, in Bezug auf den die Summe der Momente

der beiden gegebenen Kräfte Null ist, folgt aus der Gleichung, die zur Bestimmung von S gedient hat, denn daraus folgt

$$AS \, . \, P = (AS + AB) \; Q = SB \, . \, Q,$$

die entgegengesetzt drehenden Momente sind gleich.

In einem Falle haben indess entgegengesetzt drehende Kräfte keine Resultirende, wenn sie nämlich einander gleich sind, aber an verschiedenen Punkten A und B angreifen. In dem Falle wird nämlich in der Gleichung zur Bestimmung von AS der Nenner $P - Q = 0$, deshalb gibt es keinen endlichen Abstand von A, in welchem der Mittelpunkt der Kräfte liegt, es gibt deshalb keinen solchen. Damit gibt es auch keine resultirende Mittelkraft.

Ein solches Kräftepaar kann deshalb keine fortschreitende, sondern nur eine drehende Bewegung um irgend einen zwischen A und B liegenden Punkt hervorbringen; das Drehungsmoment des Paares ist gleich dem Producte aus einer der Kräfte in den senkrechten Abstand der beiden Kräfte. Denn welchen Punkt wir uns auch fest denken, wo auch der Punkt O Fig. 10 zwischen A und B liegt, das Drehungsmoment ist, da beide Kräfte das System in dem gleichen Sinne drehen, gleich $P \, . \, AO + Q \, . \, BO$, also da $P = Q$ ist, gleich $P \, (AO + BO)$ gleich $P \, . \, AB$.

Haben wir eine Reihe von parallelen Kräften anstatt an einer festen Linie an einer festen Ebene vertheilt, so müssen auch diese eine Resultirende und einen Mittelpunkt haben. Denn wir können irgend zwei solcher Kräfte zusammensetzen, die Resultirende mit einer dritten u. s. f., bis uns die zuletzt sich ergebende Mittelkraft die Resultante aller Kräfte und deren Angriffspunkt den Mittelpunkt aller Kräfte gibt.

Nur in dem Falle, dass die Zusammensetzung der nach der einen und nach der gerade entgegengesetzten Richtung wirkenden Kräfte zu zwei gleichen aber entgegengesetzten, nicht an demselben Punkte angreifenden Kräften führt, erhalten wir auch hier nur ein resultirendes Paar.

Ganz die gleichen Schlüsse können wir anwenden, wenn eine Anzahl paralleler Kräfte anstatt an einer festen Ebene an einem festen Körper angreifen; auch für diesen muss es einen Mittelpunkt der parallelen Kräfte geben, in welchem wir uns die Summe aller Kräfte angebracht denken können, oder in welchem eine der Summe der gegebenen Kräfte gleiche Kraft angreifend, dem Körper genau dieselbe Bewegung ertheilt wie die vorhandenen Kräfte.

Der Mittelpunkt von parallelen Kräften ändert seine Lage nicht, wenn wir die Richtung der Kräfte ändern, jedoch so, dass die Angriffspunkte aller Kräfte dieselben und die Kräfte einander parallel bleiben. Denn nach der Drehung der Kräfte ist die Summe der Momente in Bezug auf genau denselben Punkt gleich Null wie vorher. Haben wir an einer Linie oder Fläche oder an einem Körper angreifende Kräfte $p, p_1, p_2 \cdots$, welche in den Abständen $d, d_1, d_2 \cdots$ von dem Mittelpunkte der parallelen Kräfte und zwar senkrecht zu diesen Abständen angreifen, so ist

$$p d + p_1 d_1 + p_2 d_2 + \cdots = \Sigma p d = 0.$$

Drehen wir nun alle Kräfte um den Winkel α, so werden nach §. 11 die Momente

$$p\,d \cos\alpha + p_1\,d_1 \cos\alpha \cdots = \cos\alpha\,(p\,d + p_1\,d_1 \cdots) = \cos\alpha\,\Sigma p\,d.$$

Ist aber die Summe für sich Null, so bleibt sie es auch, wenn sie mit $\cos\alpha$ multiplicirt ist.

Diese Sätze über den Mittelpunkt und die Resultirende paralleler Kräfte finden unmittelbar Anwendung auf die der Schwere unterworfenen Körper; an allen Punkten eines solchen Körpers greift eine vertical abwärts gerichtete Kraft an, da die Schwere auf alle Theile des Körpers gleichmässig einwirkt. Für diese Körper muss es deshalb einen Mittelpunkt dieser an ihnen angreifenden Kräfte geben, in welchem wir statt der vertheilten Kräfte die Summe derselben, das ist das Gewicht der Körper angreifend denken können. Diesen Punkt nennt man den Schwerpunkt des Körpers; ist derselbe unterstützt, oder greift an ihm der Schwere entgegen eine Kraft an, welche dem Gewichte des Körpers gleich ist, so ist der Körper im Gleichgewicht.

Der Schwerpunkt ist nach dem Vorigen in einem gegebenen Körper ein ganz fester Punkt, dessen Lage sich nicht ändert, wenn wir auch den Körper drehen. Denn eine solche Drehung des Körpers hat denselben Effect, als wenn wir alle Kräfte bei ungeändertem Angriffspunkte um denselben Winkel gedreht hätten.

Wie der Mittelpunkt der parallelen Kräfte nur von der Vertheilung der Kräfte abhängt, so die Lage des Schwerpunkts in einem Körper nur von der Vertheilung der in ihm vorhandenen Materie. Setzen wir voraus, dass der Körper homogen ist, das heisst, dass überall in gleichen Räumen gleiche Quantitäten der Materie vorhanden sind, so hängt die Lage des Schwerpunkts nur von der Gestalt des Körpers ab. Für geometrisch bestimmte Formen lässt sich dann die Lage des Schwerpunkts auf Grund der Definition

$$\Sigma p\,d = 0$$

als des Punktes, in Bezug auf den die Summe aller Momente gleich Null ist, berechnen. Die Darlegung der Methoden dieser Rechnungen ist Aufgabe der theoretischen Mechanik, wir gehen darauf nicht ein.

Man kann den Schwerpunkt aller, auch der geometrisch nicht bestimmten Formen, auf Grund derselben Definition leicht experimentell bestimmen.

Ist der Schwerpunkt des Körpers unterstützt, so ist der Körper in Ruhe, ist der Schwerpunkt nicht unterstützt, so nimmt der Körper eine drehende Bewegung an, bis der Schwerpunkt mit der Drehungsaxe in einer verticalen Ebene, resp. wenn der Körper sich nach allen Richtungen frei drehen kann, bis der Schwerpunkt mit dem Unterstützungspunkt in einer verticalen Linie sich befindet. Denn da wir uns im Schwerpunkte das ganze Gewicht des Körpers angreifend denken können, kann der Körper nur dann keine Drehung erhalten, wenn der parallel der horizontalen Richtung genommene Abstand des Schwerpunktes von der Drehungsaxe gleich Null ist. Kann nun der Körper sich um alle horizontalen Axen frei drehen, so ist derselbe nur im Gleichgewicht, wenn der Abstand des Schwerpunktes von allen horizontalen Axen gleich Null ist, die wir durch den Unterstützungspunkt legen können, und das ist nur der Fall, wenn der

Schwerpunkt mit dem Unterstützungspunkt sich in einer und derselben verticalen Linie befindet.

Befestigen wir deshalb einen Körper etwa an einem Faden und lassen ihn frei herabhängen, so muss derselbe sich so hängen, dass der Schwerpunkt in der Richtung des Fadens liegt. Befestigen wir dann den Körper mit einem andern, nicht auf der Verlängerung des Fadens in der ersten Lage liegenden Punkte, so muss er sich auch jetzt wieder so hängen, dass der Schwerpunkt auf der Verlängerung des Fadens liegt. Wir erhalten somit zwei Richtungen im Körper, auf denen der Schwerpunkt liegen muss, er liegt demnach dort, wo diese beiden Richtungen sich schneiden.

Auf diese Weise kann man leicht erkennen, dass bei geometrisch bestimmten Linien, Flächen oder Körpern der Schwerpunkt dort liegt, wo ihn die Rechnung ergibt, so z. B., dass er bei einer homogenen Kugel in den Mittelpunkt fällt, bei einem geraden Cylinder in den Halbirungspunkt der Axe etc.

Da die Bedingung des Gleichgewichts für einen schweren Körper nur die ist, dass der Schwerpunkt mit dem Unterstützungspunkt in derselben Verticalen ist, so können wir drei Arten des Gleichgewichts unterscheiden.

1) Der Schwerpunkt fällt mit dem Unterstützungspunkt zusammen; in dem Falle können wir den Körper um den Unterstützungspunkt drehen, wie wir wollen, der Schwerpunkt ist immer mit dem Unterstützungspunkt in derselben Verticalen, der Körper ist in jeder Lage im Gleichgewicht. Man nennt diesen Gleichgewichtszustand den des indifferenten Gleichgewichts.

2) Der Schwerpunkt liegt senkrecht unter dem Unterstützungspunkt. Dreht man dann den Körper um irgend eine horizontale Axe, so kehrt er, da die Schwere den Schwerpunkt nach unten treibt, in seine frühere Lage zurück, um nach einigen Schwankungen in derselben zu verharren. Man nennt diesen Gleichgewichtszustand deshalb den des stabilen Gleichgewichtes.

3) Der Schwerpunkt liegt senkrecht über dem Unterstützungspunkt, das Gleichgewicht ist dann ein labiles. Bringen wir den Körper aus seiner Lage, so muss, da der Hebelarm der wirksamen Kraft dann nicht mehr Null ist, eine Drehung eintreten, die aber, da die Kraft vertical abwärts gerichtet ist, den Schwerpunkt nicht in die frühere Lage hebt, sondern ihn aus derselben weiter entfernt; sie dreht ihn, wenn kein äusseres Hinderniss die Bewegung hemmt, bis der Schwerpunkt in seiner tiefsten Lage senkrecht unter dem Unterstützungspunkt, der Körper also in der Lage des stabilen Gleichgewichts angekommen ist.

Hieraus erkennt man weiter, dass ein Körper nur dann in einer stabilen Gleichgewichtslage sich befinden kann, wenn jede Drehung um eine horizontale Axe den Schwerpunkt hebt, denn dann bringt ihn die vertical abwärts wirkende Schwere in seine frühere Lage zurück. Es kann deshalb auch stabiles Gleichgewicht vorhanden sein, wenn der Schwerpunkt höher liegt als die Unterstützung, nämlich wenn der Körper in einer Ebene unterstützt ist, und eine von dem Schwerpunkt herabgelassene Verticale diese Unterstützungsebene trifft. Je grösser diese Ebene ist und je weiter der Schnittpunkt der von dem Schwerpunkt herabgelassenen Verticalen mit der Unterstützungsebene von den Grenzen derselben entfernt ist, um so fester steht der Körper, denn eine um so stärkere Hebung des Schwer-

punktes tritt ein, wenn wir den Körper um eine der Grenzlinien dieser Unterstützungsebene drehen.

§. 15.

Die Wage. Wir benutzen die in den letzten §§. abgeleiteten Sätze zunächst, um die Theorie zweier der wichtigsten Apparate abzuleiten, nämlich der Wage und des Pendels. Wir beginnen mit der Theorie der Wage.

Die Wage hat die Aufgabe, das Gewicht der Körper zu bestimmen, das heisst das Gewicht eines gegebenen Körpers mit dem uns bekannter Gewichtsstücke zu vergleichen. Wir benutzen dazu bekanntlich einen in seiner Mitte unterstützten Stab, der an seinen Enden die Wagschalen trägt, deren eine den abzuwägenden Körper, deren andere die Gewichte aufnimmt. Wir schliessen dann, dass das Gewicht des abzuwägenden Körpers dem der Gewichte gleich ist, wenn der die Wagschalen tragende Stab, der Wagebalken, horizontal steht. Die horizontale Stellung erkennen wir an einem mit dem Wagebalken fest verbundenen Zeiger. Wir verlangen ferner, dass der Wagebalken in einer geneigten Stellung zur Ruhe komme, wenn auf der einen Seite ein Uebergewicht ist, und zwar dass für das kleinste Uebergewicht diese Neigung deutlich sichtbar sei, der Wagebalken also einen deutlich erkennbaren Winkel mit der Horizontalen bilde. Das kleinste Uebergewicht ist je nach dem Zwecke der Wage verschieden; Wagen zu wissenschaftlichen Untersuchungen sollen schon einen deutlich sichtbaren Winkel mit der Horizontalen, einen hinreichenden Ausschlag geben, wenn die eine Seite um Bruchtheile eines Milligrammes schwerer ist.

Aus dieser Aufgabe der Wage lässt sich unmittelbar ableiten, in welcher Weise die Wage eingerichtet sein muss. Wir wollen aus der Horizontalstellung der Wage auf die Gleichheit der abzuwägenden Gewichte schliessen, daraus folgt zunächst, dass die Wage im unbelasteten Zustande horizontal stehen, das heisst, dass dann der Schwerpunkt mit der Drehungsaxe in derselben Verticalen liegen muss. Dazu ist erforderlich, dass die beiden Hälften der Wage, an jeder Seite der Drehungsaxe der Wage, genau das gleiche Gewicht haben müssen.

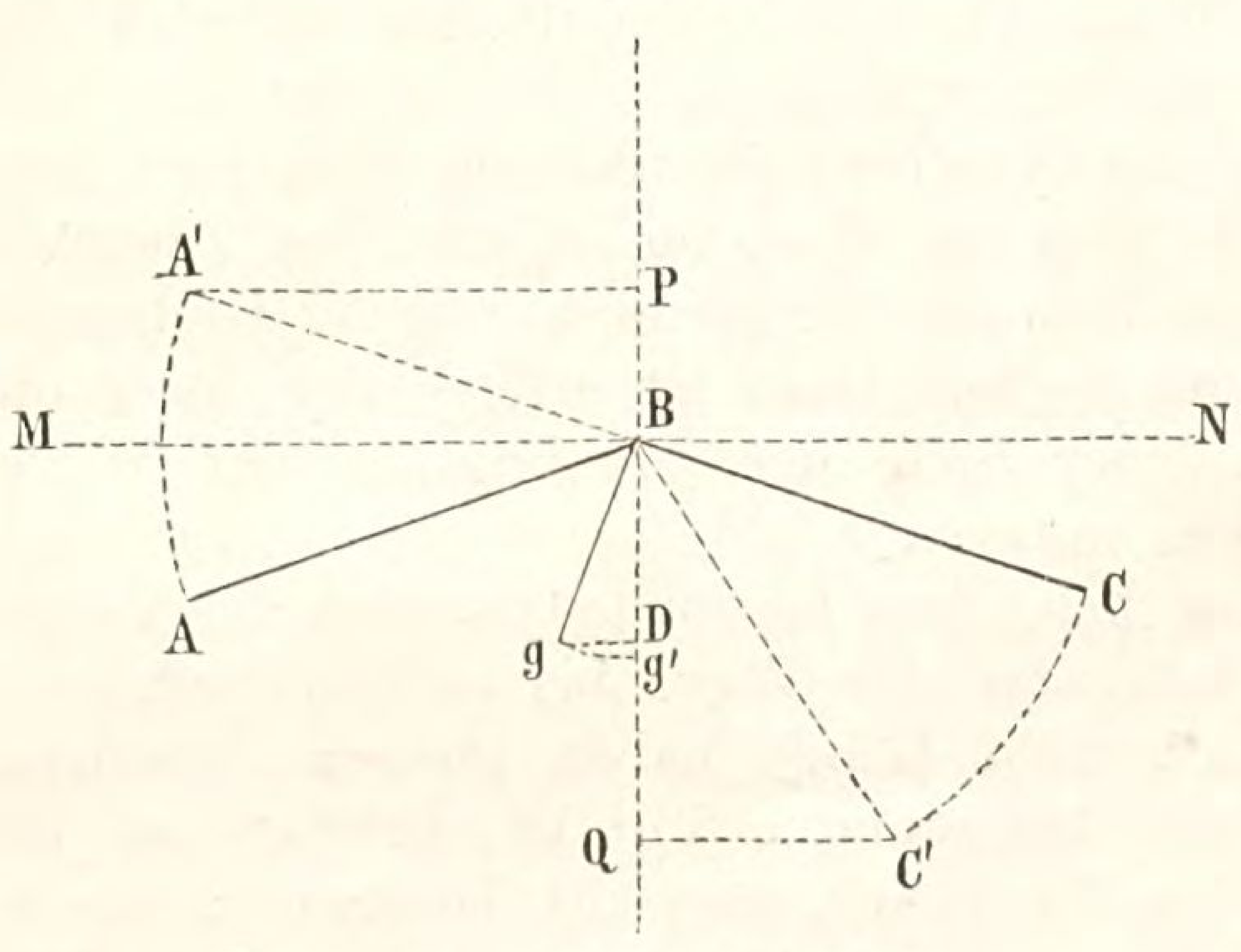
Es ist dazu zweitens erforderlich, dass die beiden Hälften des Wagebalkens, die Abstände der Drehungsaxe der Wage bis zu den Aufhängepunkten der Wagschalen, genau gleiche Länge haben müssen. Denn in der Voraussetzung, dass die erste Bedingung erfüllt ist, beweist uns die horizontale Stellung der belasteten Wage nur, dass die Drehungsmomente auf beiden Seiten gleich sind. Aus der Gleichheit der Drehungsmomente folgt aber die Gleichheit der wirksamen Kräfte, hier also der in den Wagschalen liegenden Gewichte, nur dann, wenn wir wissen, dass die Hebelarme, hier also die senkrechten Abstände der Aufhängungspunkte der Schalen von der Drehungsaxe einander gleich sind.

Da die Wage, wenn auf der einen Wagschale ein kleines Uebergewicht liegt, in einer geneigten Lage zur Ruhe kommen soll, so folgt als dritte nothwendige Bedingung, dass die unbelastete Wage im stabilen Gleichgewicht sich befinden, dass also der Schwerpunkt unter der Drehungsaxe liegen muss. Würde die Wage im labilen Gleichgewichtszustande sein, so würde sie bei der geringsten Bewegung umschlagen, wäre die unbelastete Wage im indifferenten Gleichgewicht, so würde sie unbelastet in

jeder Lage im Gleichgewicht sein, bei dem geringsten Uebergewichte auf der einen Seite sich dagegen sofort um 90^0 drehen, soweit bis der Schwerpunkt des Uebergewichts unter der Drehungsaxe in derselben Verticalen liegen würde. Denn da im Zustande des indifferenten Gleichgewichtes die Summe der statischen Momente der einzelnen Theile der Wage in Bezug auf die Unterstützungsaxe selbst Null ist und in jeder Lage Null bleibt, kann bei Hinzufügung eines Uebergewichts nur dann Gleichgewicht sein, wenn das Moment des Uebergewichts für sich Null ist, und das ist nur möglich, wenn sein Schwerpunkt mit der Drehungsaxe in derselben Verticalen liegt. In diesem Falle ist somit die Wage ebenfalls unbrauchbar. Ist die unbelastete Wage dagegen im stabilen Gleichgewicht, so tritt eine von der Grösse des Uebergewichts abhängige Drehung der Wage ein. Denn dadurch, dass die Wage sich nach der Seite des Uebergewichtes neigt, wird der Schwerpunkt nach der andern Seite gehoben, somit dadurch ein die Wage zurückdrehendes Moment erzeugt, und die Gleichgewichtslage ist dann jene, bei welcher die nach entgegengesetzter Richtung drehenden Momente einander gleich sind.

Indem wir diese Gleichgewichtsbedingung nun formuliren, erkennen wir weiter, von welchen Umständen ausser von der Grösse des Uebergewichts die Grösse der Drehung abhängig ist, welche speciellere Einrichtung also die Wage haben muss, damit sie für ein möglichst kleines Uebergewicht einen deutlich erkennbaren Ausschlag erhält. Bei dieser Untersuchung machen wir die allgemeinste, mit den bereits erkannten Bedingungen verträgliche Annahme, die sich auch in der Praxis stets realisirt finden wird, dass nämlich der Wagebalken ABC Fig. 11 nicht eine gerade Linie bilde, dass also die Verbindungslinie der Aufhängepunkte der Wagschalen nicht durch die Drehungsaxe gehe. Wir nehmen aber an, dass in der Gleichgewichtslage die Verbindungslinie AC horizontal sei, dass also AB und BC dann mit der Horizontalen MN den gleichen Winkel β bilden. Die Längen $AB = BC$ seien gleich l. Der Schwerpunkt des Wagebalkens liege in g' im Abstande l' unter B. Nun liege in der an A hängenden Wagschale ein Gewicht, welches mit dem der Wagschale zusammen gleich P sei, in der an C hängenden ein Gewicht, welches mit dem der Wage zusammen gleich $P + p$ sei, und sei das Gewicht des Wagebalkens gleich q.

Fig. 11.



Der Wagebalken wird dann an der Seite C herabsinken und vielleicht die Lage $A'BC'$ annehmen, so dass er in der neuen Lage mit der ursprünglichen den Winkel α bildet. Damit wird auch der Schwerpunkt, der ein bestimmter Punkt des Wagebalkens ist, nach g verschoben, so dass die Verbindungslinie des Aufhängepunktes mit dem Schwerpunkte Bg

mit der Verticalen Bg' ebenfalls den Winkel α bildet. Die Gleichgewichtsbedingungen der neuen Lage sind dann folgende. Das am Punkte C' angreifende Gewicht $P + p$ wirkt an dem Hebelarme $C'Q$. Da wir den Winkel $CBN = \beta$, $C'BC = \alpha$ gesetzt haben, so ist $CQ = BC \cdot \cos(\alpha + \beta)$ oder gleich $l \cdot \cos(\alpha + \beta)$. Das die Wage in dem einen Sinne drehende Moment ist somit $(P + p)\, l \cos(\alpha + \beta)$.

Am Punkte A' greift das Gewicht P an, sein Hebelarm ist $A'P = A'B \cdot \cos BA'P$. Der Winkel $BA'P = A'BM$ ist nun gleich $A'BA - MBA = \alpha - \beta$; somit ist das Drehungsmoment des Gewichtes P gleich $P \cdot l \cdot \cos(\alpha - \beta)$. In demselben Sinne sucht das an g angreifende Gewicht q des Wagebalkens die Wage zurückzudrehen; das Drehungsmoment desselben ist, wenn wir $gD \perp Bg'$ ziehen, $q \cdot gD$. Da wir nun $Bg = l'$ gesetzt, und da der Winkel $gBD = \alpha$ ist, so ist $q \cdot gD = ql' \sin \alpha$.

Da die nach entgegengesetzten Richtungen drehenden Momente einander gleich sein müssen, so ist die Gleichgewichtsbedingung

$$(P + p)\, l \cdot \cos(\alpha + \beta) = Pl \cdot \cos(\alpha - \beta) + q\, l' \cdot \sin \alpha.$$

Bestimmen wir nun aus dieser Gleichung α, so erhalten wir die Umstände, von denen der Ausschlagswinkel abhängig ist, die dann an der Wage so hergestellt werden müssen, dass für ein möglichst kleines p der Werth von α möglichst gross wird. Drücken wir die Cosinus der Summe und der Differenz durch die einzelnen Bogen aus und ziehen das auf beiden Seiten gleiche Glied $Pl \cos \alpha \cos \beta$ ab, so wird

$$pl \cos \alpha \cos \beta - (P + p)\, l \cdot \sin \alpha \sin \beta = Pl \sin \alpha \sin \beta + ql' \sin \alpha$$

$$pl \cos \alpha \cos \beta = \{(2P + p)\, l \sin \beta + ql'\} \sin \alpha$$

oder

$$\frac{pl \cdot \cos \beta}{(2P + p)\, l \sin \beta + ql'} = \operatorname{tang} \alpha.$$

Da die Ausschlagswinkel α immer nur klein sind, so können wir als Maass des Ausschlagswinkels auch die Tangente von α betrachten, und dann gibt uns die linke Seite der Gleichung die Umstände an, von denen bei gleichem Uebergewichte p der Ausschlagswinkel und damit die Empfindlichkeit der Wage abhängig ist.

Zunächst erkennt man, dass unter sonst gleichen Umständen der Werth von α am grössten ist, wenn β gleich Null ist, dass also die Empfindlichkeit um so grösser ist, je näher die beiden Aufhängepunkte der Schalen und des Wagebalkens in einer geraden Linie liegen. Es hat das, wie die Gleichung zeigt, noch den weitern Vortheil, dass, weil $\sin \beta = 0$, das erste Glied des Nenners zu Null macht, die Wage eine constante Empfindlichkeit hat, das heisst, dass welches auch die Belastung P der Wage ist, bei gleichem Uebergewicht p der Winkel α immer denselben Werth hat. Ist β nicht gleich Null, so wird für ein gleiches p mit wachsender Belastung der Winkel α kleiner, also die Empfindlichkeit der Wage nimmt ab. Dass das nothwendig ist, ergibt die direkt an der Figur 11 als richtig einzusehende Ueberlegung, dass wenn β nicht gleich Null ist, der Hebelarm, an dem das Uebergewicht wirkt, in stärkerm Verhältnisse kleiner wird als der Hebelarm an der andern Seite der Wage.

Aus diesen Gründen sucht man soviel wie möglich die drei Punkte

A, B, C in eine gerade Linie zu bringen. Nehmen wir an, dass das erreicht, also $\beta = 0$ sei, so ist

$$\tang \alpha = \frac{1}{l'}\left(\frac{l}{q}\right)p,$$

also bei gleichem Uebergewicht der Ausschlagswinkel um so grösser:

1) je kleiner l', also der Abstand des Schwerpunktes von dem Unterstützungspunkte ist. Auch das erkennt man nach der Figur unmittelbar als richtig, denn je näher g bei B liegt, um so grösser muss der Winkel α werden, damit der Hebelarm, an welchem das Gewicht des Wagebalkens angreift, einen solchen Werth hat, damit das daher rührende Drehungsmoment dem Drehungsmoment des Uebergewichtes das Gleichgewicht hält.

2) Der Winkel α wird um so grösser, je grösser der Quotient $\frac{l}{q}$, der Quotient aus der Länge des Wagebalkens und dem Gewichte des Wagebalkens ist, je länger also bei gegebenem Gewichte q die Wagebalken sind, oder je leichter bei gegebener Länge der Wagebalken ist. Diese Bedingungen sind selbstverständlich innerhalb gewisser Grenzen eingeschlossen, da bei zu grosser Länge oder zu kleinem Gewichte die Wagebalken sich biegen, somit die Bedingung, dass $\beta = 0$ ist, nicht mehr erfüllt ist. Von zwei Wagen, bei denen der Quotient $\frac{l}{q}$ denselben Werth hat, ist schon deshalb diejenige die beste, bei welcher die Wagebalken die kürzern sind. Es wird sich herausstellen, dass mit einer solchen Wage die Wägungen ebenfalls schneller gemacht werden können.

In welcher Weise man verfährt, um die im Vorigen abgeleiteten Bedingungen einer guten Wage zu erfüllen, zeigt Fig. 12, welche die Abbildung einer feinen Wage zeigt.

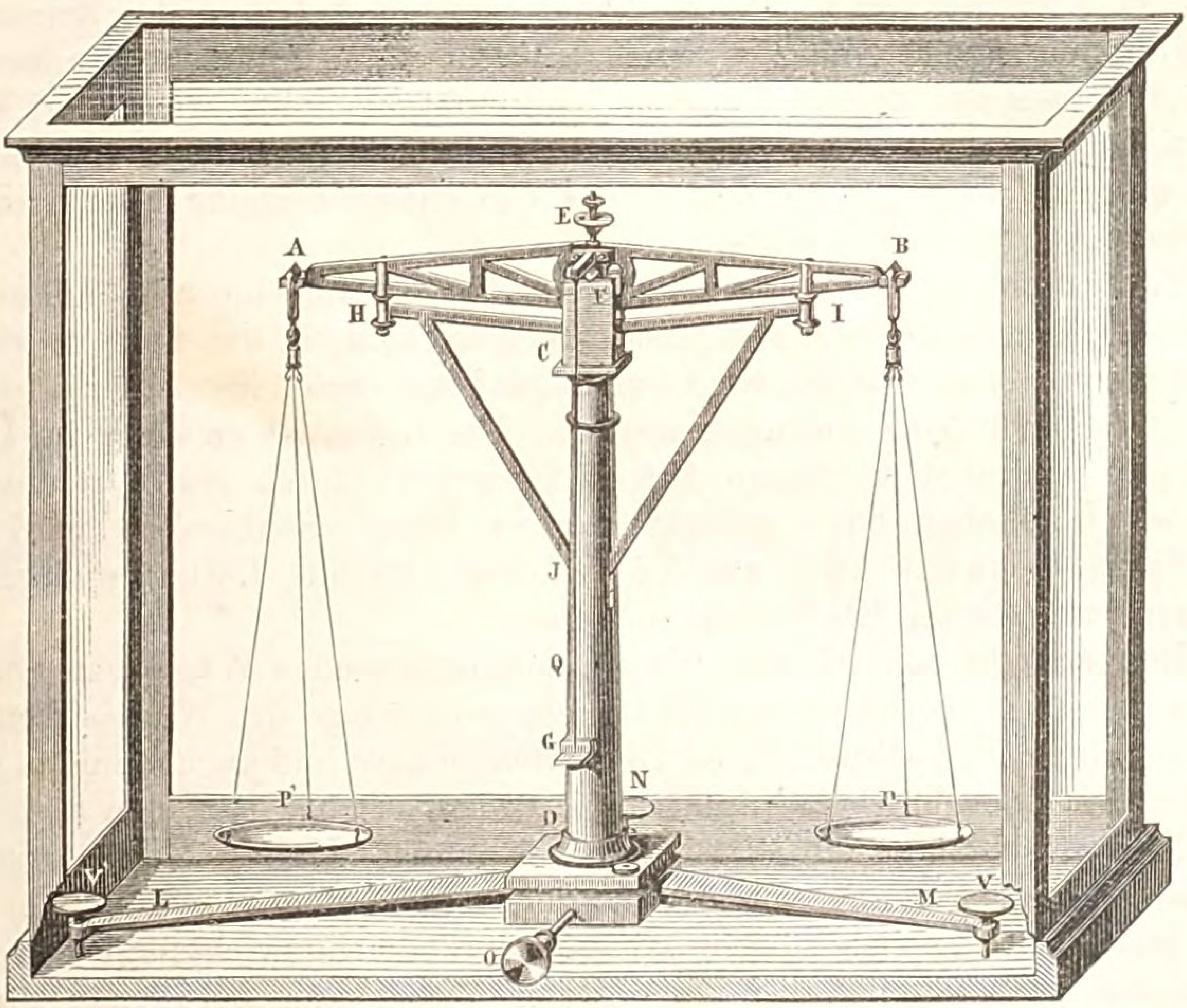
Der Wagebalken AB wird aus einem 3 bis 5 Mm. dicken Messingbleche hergestellt, man gibt ihm die Form eines länglichen Vierecks, und um ihn bei möglichst grosser Stabilität recht leicht zu machen, wird das Blech vielfach ausgeschnitten, so dass nur der Rahmen des Vierecks und einige Stützen im Innern des Rahmens stehen bleiben. Als Drehungsaxe wird in der Mitte des Balkens senkrecht zur Ebene des Vierecks ein Prisma von gehärtetem Stahl angebracht, dessen untere scharfe Kante auf eine Platte von polirtem Stahl oder besser noch von Achat gelegt wird, welche oben auf der die Wage tragenden Säule liegt. Durch diese Anordnung dreht sich die Wage fast ohne Reibung um die Schärfe des Prismas als Drehungsaxe.

Ganz eben solche Prismen mit der scharfen Kante nach oben sind an den Enden des Wagebalkens angebracht, auf welche dann die unten ganz schwach concav geschliffenen Stahlstücke A und B gelegt werden, welche die Wagschalen tragen.

Die die Wagschalen tragenden Prismen sind meist nicht unveränderlich fest am Wagebalken angebracht, sondern meistens mit ganz feinen Schrauben etwas verschiebbar, um die Abstände der Aufhängepunkte der Schalen von der Drehungsaxe etwas verändern und so einander genau gleich machen zu können. Um etwaige Ungleichheiten im Gewichte der Wagebalken auszugleichen, sind an ganz feinen Wagen an den Enden als Verlängerungen des Balkens feine Schraubenspindeln angesetzt, auf denen kleine

Laufgewichte, als Schraubenmuttern gearbeitet, durch Drehung verschoben werden können. Ist die eine Seite der Wage etwas zu schwer, so dass

Fig. 12.



sie unbelastet nicht genau horizontal steht, so wird das betreffende Laufgewicht der Mitte etwas genähert. Da dann der Hebelarm dieses Gewichtchens etwas verkleinert wird, so hat das denselben Effect, wie wenn diese Hälfte des Wagebalkens etwas leichter gemacht würde.

Die drei Schneiden, diejenige, welche die ganze Wage trägt, und diejenigen, welche die Schalen tragen, werden immer so genau wie möglich in eine Ebene gelegt.

Um nun die für eine grosse Empfindlichkeit der Wage wichtigste Bedingung, dass der Schwerpunkt möglichst nahe unter dem Unterstützungspunkt liegt, zu erreichen, ist auf dem obern Rande des Wagebalkens gerade über der Drehungsaxe eine feine Schraubenspindel aufgesetzt, auf welcher sich zwei Laufgewichte *E* auf und nieder schrauben lassen. Eine Hebung dieser Laufgewichte hebt, eine Senkung senkt den Schwerpunkt des Wagebalkens. Die gröbern Hebungen und Senkungen werden durch das grössere, die feinern durch das kleinere Laufgewicht bewirkt. Die Grösse dieser Gewichte wird so gewählt, dass durch Heben derselben bis an das obere Ende der Spindel die Wage in den Zustand des labilen Gleichgewichtes kommt, man kann deshalb durch passende Stellung derselben die Wage stets auf das Maximum der Empfindlichkeit bringen, welches dann erreicht ist, wenn der Schwerpunkt gerade eben unter dem Unterstützungspunkte liegt.

Die die Wage tragende Säule ist auf einen mit Stellschrauben versehenen Dreifuss gestellt. Die Stellschrauben haben den Zweck, die Axe der Säule genau vertical zu stellen.

Die Horizontalstellung oder Neigung des Wagebalkens erkennt man durch einen an der Mitte des Balkens angebrachten Zeiger Q, welcher bis nahe an den Fuss der Säule hinabreicht. Die Spitze des Zeigers schwebt vor einer Kreistheilung G, deren Radius gleich der Länge des Zeigers ist. Der Nullpunkt der Theilung liegt mit der Drehungsaxe in derselben Verticalebene, so dass der Zeiger auf dem Nullpunkt einsteht, wenn der Wagebalken horizontal ist. Ist der Wagebalken nach der einen oder andern Seite geneigt, so zeigt der Zeiger auf den entsprechenden Theilstrich auf der rechten oder linken Seite.

Zur Schonung des Wagebalkens, das heisst um eine allmähliche Biegung desselben zu verhindern, lässt man denselben, in der Zeit, in welcher die Wage nicht gebraucht wird, nicht auf der Schneide ruhen, sondern durch die Hebel HJJ getragen werden. Die Gabel ist an einer im Innern der Säule befindlichen Stange befestigt, welche durch eine Drehung des Knopfes O gehoben oder gesenkt werden kann. Schliesslich wird dann die Wage, besonders auch um die Wägung störende Luftströmungen abzuhalten, mit einem Glaskasten umgeben.

Bei den mit solch feinen Wagen vorzunehmenden Wägungen verfährt man am besten so, dass man die Gleichgewichtslage des Wagebalkens aus Schwingungen beobachtet, da es viel zeitraubender und auch weniger genau ist, die Gleichgewichtslage direkt aufzusuchen. Dabei darf man aber nicht als Gleichgewichtslage die Mitte von zwei aufeinander folgenden äussersten Lagen nehmen, weil die von der Wage ausgeführten Schwingungen nicht nach beiden Seiten sich gleich weit von der Gleichgewichtslage entfernen. Beobachtet man nämlich bei unbelasteter Wage oder bei genau gleicher Belastung auf beiden Seiten von der Gleichgewichtslage die Ausschläge des Zeigers, und ist der erste beobachtete Ausschlag gleich a, so findet man den ersten nach der andern Seite etwa um b Theilstriche kleiner, den zweiten nach derselben Seite dann gleich $a - 2b$, den zweiten nach der andern Seite $a - 3b$ etc., kurz jede folgende Schwingung ist um dieselbe Grösse b kleiner. Bezeichnen wir nun die Ausschläge nach rechts mit r_1, $r_2 \cdot \cdot$, nach links mit l_1, $l_2 \cdot \cdot$, so folgt aus diesem Gesetze der Abnahme, dass

$$r_1 + r_2 = 2\,l_1$$
$$2\,r_2 = l_1 + l_2$$
$$r_2 + r_3 = 2\,l_2$$

u. s. f. Beobachtet man nun im Falle der Wägung die Reihenfolge der Ausschläge, und findet, dass in der That diese Beziehung zwischen den Ausschlägen zur Rechten und zur Linken vom Nullpunkte besteht, so folgt, dass die horizontale Lage des Balkens die Gleichgewichtslage ist, somit, dass die Gewichte auf beiden Seiten, vorausgesetzt, dass die Wage richtig ist, gleich sind. Findet man dagegen, dass

$$\frac{r_1 + r_2}{2} \gtrless l_1$$

u. s. f. ist, so folgt, dass die Gleichgewichtslage eine geneigte und zwar

$$\frac{r_1 + r_2}{2} - l_1$$

ist. Das Gewicht ist dann auf jener Seite zu gross, auf welcher der kleinere Ausschlag vorhanden ist.

Mit Hülfe zweier Wägungen ist es nun leicht zu prüfen, ob die Wagebalken gleiche Länge haben, oder wenn nicht, welches das Verhältniss der Längen ist. Wir legen in die Wagschale links einen Körper, dessen Gewicht mit q bezeichnet werde, und bringen ihn dadurch, dass wir auf die Wagschale rechts das Gewicht p legen, ins Gleichgewicht. Ist nun die Länge des Wagebalkens links l, rechts r, so folgt

$$q l = r . p .$$

Wir legen dann den Körper vom Gewicht q auf die Wagschale rechts und aequilibriren ihn durch auf die linke Schale gelegte Gewichte. Sei dazu $p + \pi$ erforderlich, so ist

$$(p + \pi) l = r . q .$$

Aus dieser und der ersten Gleichung folgt

$$\frac{r}{l} = \sqrt{1 + \frac{\pi}{p}} .$$

Da es sehr schwierig ist, absolute Gleichheit der beiden Längen herzustellen, ist es stets rathsam, bei der Wage das Verhältniss der beiden Längen aufzusuchen.

§. 16.

Specifisches Gewicht und Dichtigkeit. Die Wage gibt uns eine wichtige Eigenschaft der Körper zu erkennen; wägt man nämlich gleiche Volume verschiedener Körper ab, so findet man, dass die Gewichte derselben verschieden sind, also dass bei verschiedenen Körpern das Verhältniss zwischen Volumen und Gewicht, oder was dasselbe ist, das Gewicht der Volumeinheit der verschiedenen Körper ein verschiedenes ist. Ist p das Gewicht eines Körpers, v das Volumen desselben, so ist, da das Gewicht einer und derselben Substanz dem Volumen proportional ist,

$$\frac{p}{v} = s \qquad p = sv,$$

so dass also s das Gewicht der Volumeinheit oder das Verhältniss des Gewichts zum Volumen bedeutet. Diese Grösse s nennt man das specifische Gewicht des Körpers.

Der Zahlenwerth der Grösse s hängt selbstverständlich von den gewählten Einheiten des Gewichts und des Volums ab. Deshalb hat man schon früher, als in den verschiedenen Ländern noch verschiedene Maasse benutzt wurden, die specifischen Gewichte überall in derselben Einheit ausgedrückt, um diese die Materie eines Körpers charakterisirende Grösse überall durch dieselbe Zahl auszudrücken. Man hat überall bei Bestimmung des specifischen Gewichts als Gewichtseinheit das Gewicht der Volumeinheit Wasser gewählt. Für gleiche Volume ergibt sich dann das Gewicht

für irgend einen Körper $p = v . s$
für Wasser $p' = v . s'$

und daraus $$\frac{p}{p'} = \frac{s}{s'} = \sigma,$$

so dass σ das Verhältniss zwischen dem Gewichte gleicher Volume eines beliebigen Körpers und Wassers von der Temperatur 4^0 ist, oder jene Zahl ist, welche angibt, wie vielmal schwerer oder leichter ein gegebener Körper ist als das gleiche Volum Wasser von der Temperatur 4^0 C. Man nennt diese Zahl das relative specifische Gewicht oder auch schlechthin das specifische Gewicht des Körpers. Man erhält aus demselben das Gewicht eines Körpers nach der Gleichung

$$p = p'.\sigma = v.s'\sigma.$$

Das Gewicht eines Körpers ist gleich dem Producte aus seinem Volumen, dem relativen specifischen Gewichte und dem Gewichte der Volumeinheit Wasser.

In unserm jetzigen Gewichtssystem wird nun, wie wir sahen, stets als Gewichtseinheit das Gewicht der Volumeinheit Wasser angewandt, es ist somit $s' = 1$ und

$$p = vs = v.\sigma$$

oder in unserm Maasssystem ist kein Unterschied zwischen dem specifischen Gewicht nach unserer ersten Definition und dem relativen specifischen Gewichte.

Bei den Gasen und Dämpfen pflegt man das relative specifische Gewicht etwas anders zu definiren, man vergleicht das Gewicht eines gegebenen Volumens Gas nicht mit dem eines gleichen Volumens Wasser, sondern mit dem eines unter denselben Umständen genommenen gleichen Volumens eines andern Gases, der atmosphärischen Luft oder des Wasserstoffs. Das relative specifische Gewicht σ gibt uns dann also an, wie vielmal schwerer oder leichter ein gegebenes Volumen eines Gases ist, als das unter gleichen Umständen genommene gleiche Volumen des Normalgases. Um das Gewicht des Gases dann zu erhalten, müssen wir das Product aus dem specifischen Gewicht und dem Volumen noch multipliciren mit dem Gewichte der Volumeinheit des zur Vergleichung genommenen Gases.

Vielfach unterscheidet man von dem specifischen Gewichte eines Körpers die Dichtigkeit desselben und nennt dann Dichtigkeit die Masse der Volumeinheit. Nach unserer Definition von Masse, als dem Quotienten eines Körpers und der Zahl g ist die Dichtigkeit eines Körpers dann nichts anders als der Quotient aus dem specifischen Gewichte und der Zahl g. Die Masse eines Körpers ist dann gleich dem Producte aus dem Volumen des Körpers und seiner Dichtigkeit

$$m = \frac{p}{g} = v \cdot \frac{s}{g} = v.d,$$

wenn wir die Dichtigkeit mit d bezeichnen.

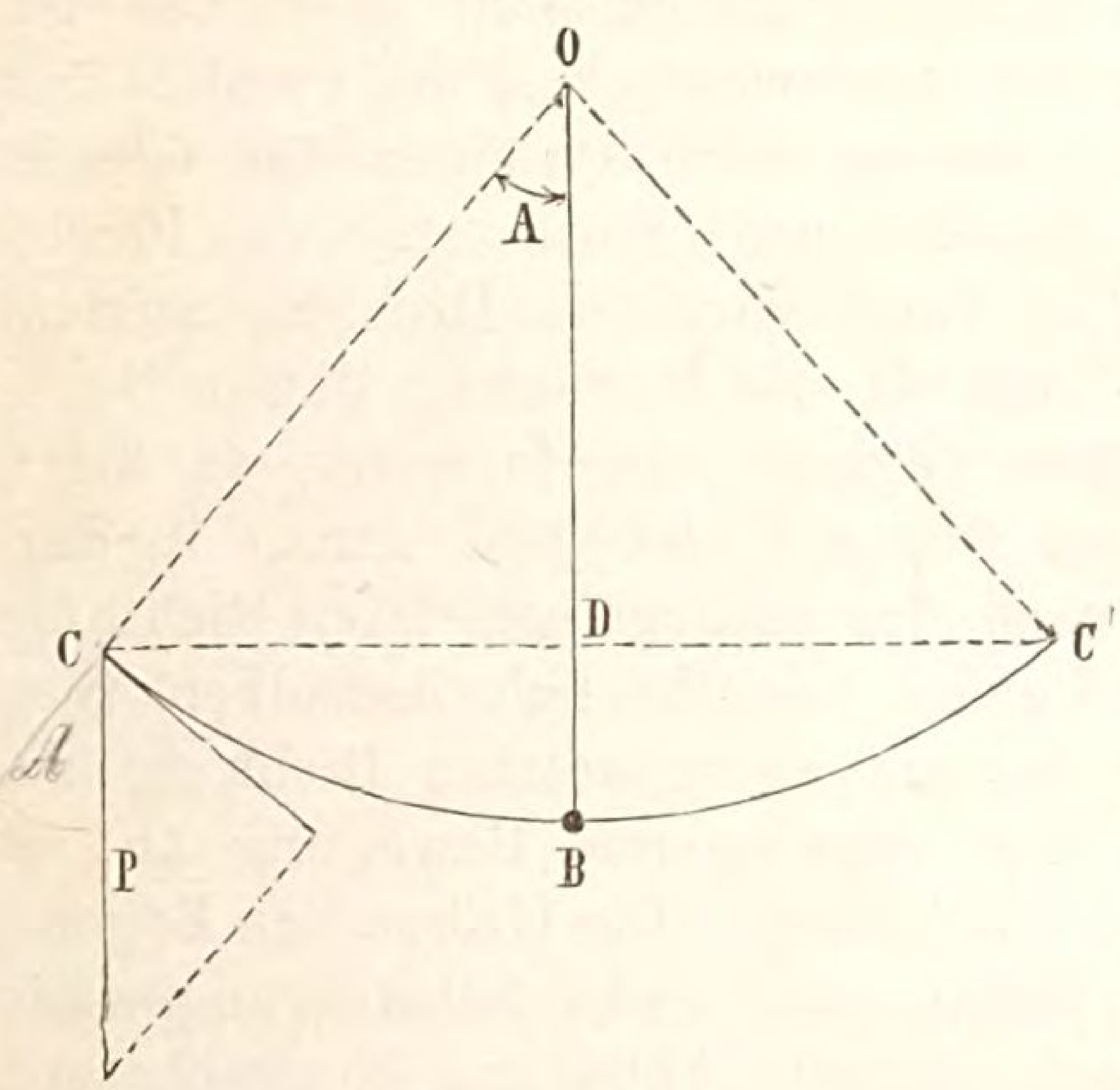
Ebenso wie von einem relativen specifischen Gewichte können wir auch von einer relativen Dichtigkeit sprechen. Legt man dabei als Einheit die Masse der Gewichtseinheit Wasser zum Grunde, so erkennt man ohne weiteres, dass relative Dichtigkeit und relatives specifisches Gewicht durch dieselbe Zahl ausgedrückt wird.

§. 17.

Das Pendel. Der zweite Apparat, dessen Verhalten wir auf Grund der Sätze über die drehende Bewegung zu untersuchen haben, ist das

Pendel. Dasselbe hat für uns die gleiche Wichtigkeit wie die Wage, da es uns dazu dient, die Zeit zu messen, und da uns die Gesetze der Pendelbewegung zu einer grossen Zahl von Messungen dienen werden. Das Pendel in seiner einfachsten Form ist ein Stab oder Faden OB Fig. 13, welcher um eine Drehungsaxe in O drehbar ist und an seinem untern Ende oder in der Nähe desselben ein Gewicht B trägt. In der Gleichgewichtslage muss der Schwerpunkt des Pendels vertical unter der Drehungsaxe sich befinden, das Pendel muss also vertical hängen. Heben wir nun dasselbe aus der Gleichgewichtslage nach der einen Seite heraus, etwa in die Lage OC, so dass die Lage des Pendels mit der Gleichgewichtslage den Winkel A bildet, und überlassen es dann sich selbst, so muss das Pendel sich gegen die Gleichgewichtslage hin bewegen. Denn das im Schwerpunkte des Pendels angreifende, vertical abwärts gerichtete Gewicht P desselben gibt ihm ein Drehungsmoment, welches das Pendel gegen die Gleichgewichtslage hin dreht. Um die Grösse dieses Drehungsmoments zu erhalten, müssen wir zunächst die in die augenblicklich mögliche Bewegungsrichtung fallende, also die zu dem Hebelarme OC senkrechte Componente der Kraft bestimmen. Da die Kraft P vertical abwärts wirkt, das Pendel OC aber mit der Verticalen den Winkel A bildet, so bildet die Richtung der Kraft mit derjenigen des Pendels ebenfalls den Winkel A, mit der zum Pendel senkrechten Richtung somit den Winkel $90^0 - A$. Die zu dem Pendel senkrechte Componente ist somit $P \,.\, \cos(90 - A) = P \,.\, \sin A$. Nennen wir nun den Abstand des Schwerpunktes des Pendels von der Drehungsaxe z, so ist das Drehungsmoment, welches das Pendel aus seiner augenblicklichen Lage gegen die Gleichgewichtsaxe hintreibt, gleich $P \,.\, \sin A \,.\, z$. Sowie nun aber das Pendel seine Lage OC verlassen hat und einen kleinern Winkel α mit der Gleichgewichtslage bildet, wird auch sofort das Drehungsmoment kleiner, es geht über in $P \sin \alpha \,.\, z$, da die Componente der Kraft, welche in die augenblickliche Bewegungsrichtung fällt, nur mehr $P \sin \alpha$ ist. Die bewegende Kraft wird somit stetig kleiner mit $\sin \alpha$, um gleich Null zu werden, wenn α und damit $\sin \alpha = 0$ wird. Das Pendel muss daher auf dem Theile seiner Bahn von C bis B eine beschleunigte Bewegung erhalten, deren Beschleunigung aber eine immer kleinere wird.

Fig. 13.



Im Punkte B angekommen, besitzt dann das Pendel eine gewisse Winkelgeschwindigkeit, es kann deshalb in dieser Lage nicht zur Ruhe kommen, sondern muss vermöge der Trägheit nach der andern Seite weiter gehen. Sowie es aber die Gleichgewichtslage um einen Winkel α überschritten hat, wirkt wieder ein Drehungsmoment von der Grösse $P \sin \alpha \,.\, z$ auf dasselbe ein, aber jetzt nach entgegengesetzter Richtung, da α jetzt an der andern Seite der Verticalen liegt. Dasselbe wirkt somit jetzt gerade

so verzögernd auf die Bewegung ein, wie vorher beschleunigend. Da nun die jetzt verzögernden Drehungsmomente genau denselben Werth haben, wie bei einem gleichen Winkel α auf der andern Seite der Verticalen die beschleunigenden, so folgt, dass das Pendel nach dieser Seite sich durch genau den gleichen Bogen BC' aufsteigend bewegen muss, bis durch die fortdauernde Verzögerung die Geschwindigkeit gleich Null geworden ist, als der Bogen BC war, auf welchem die Geschwindigkeit des Pendels von Null bis zu jenem Werthe anwuchs, den es beim Passiren der Gleichgewichtslage besass. In dieser Lage angekommen, muss somit das Pendel einen Moment in Ruhe sein; das aber dann wirkende Drehungsmoment $P \sin A \,.\, z$ treibt das Pendel zurück, und da die Bewegung diesen Rückgang unter genau denselben Umständen beginnt und fortsetzt, so folgt, dass das Pendel jetzt genau denselben Bogen $C'BC$ und genau in derselben Weise zurücklegt, wie vorher nach der entgegengesetzten Richtung. Daraus folgt dann weiter, dass das Pendel unaufhörlich denselben Weg CBC' einmal in der einen, dann in der entgegengesetzten Richtung zurücklegen muss. Das Pendel nimmt eine schwingende Bewegung an, es vollführt Schwingungen um die Gleichgewichtslage. Die Grösse des Bogens, durch welche das Pendel schwingt, nennt man seine Schwingungsweite oder Amplitude. Dieselbe müsste nach unserer Ableitung constant sein, in Wirklichkeit ist das nicht genau der Fall, da wir bei unserer Ableitung die der Bewegung entgegenstehenden Hindernisse: als Reibung in der Drehungsaxe, Widerstand der Luft etc. ausser Acht gelassen haben. Da die Ueberwindung derselben in jedem Momente etwas Arbeit erfordert, so wird die dem Pendel durch die erste Hebung ertheilte Arbeit allmählich verbraucht, die Amplituden werden kleiner und das Pendel kommt allmählich zur Ruhe. Diese Abnahme lassen wir ausser Acht, nehmen also an, das Pendel bewege sich ohne Widerstand, oder wie es bei unsern Uhren der Fall ist, es erhalte jedesmal in der äussersten Lage einen solchen Antrieb, dass dadurch der zur Ueberwindung der Widerstände stattgehabte Arbeitsverbrauch gerade ausgeglichen werde.

Dann erkennt man weiter, dass die Zeit, welche das Pendel zur Zurücklegung einer Schwingung verbraucht, seine Schwingungsdauer immer dieselbe sein muss, da es immer denselben Weg mit derselben Geschwindigkeit zurücklegt, somit, dass das Pendel für uns ein vorzügliches Mittel der Zeitmessung ist, da es uns ganz genau gleiche Zeitabschnitte angibt.

Um nun das Pendel als Zeitmaass benutzen zu können, müssen wir zunächst untersuchen, von welchen Umständen die Dauer einer Schwingung abhängig ist. Wir könnten diese Untersuchung wenigstens zum Theil experimentell führen, wir wollen indess, da uns die schwingende Bewegung später noch oft begegnen wird, die Gesetze derselben aus den allgemeinen Bewegungsgesetzen ableiten, die Ableitung gleichzeitig als Beispiel benutzend, wie sich die Gesetze einer Bewegung aus dem Gesetze, nach welchem die Kraft wirkt, entwickeln lassen.

Wie wir vorhin fanden, ist das Drehungsmoment, welches das Pendel bewegt, wenn es mit der Gleichgewichtslage den Winkel α bildet, gleich $P \,.\, z \,.\, \sin \alpha$. Setzen wir zunächst nur so kleine Amplituden voraus, dass wir den Sinus gleich dem Bogen setzen dürfen, so können wir auch als Drehungsmoment setzen $P \,.\, z \,.\, \alpha$. Dieses Drehungsmoment gibt uns nach

§. 11 die in der Abstandseinheit von der Drehungsaxe angreifende Kraft, das heisst die im Abstande eins von der Drehungsaxe angreifende Kraft $P . z . \alpha$ ersetzt alle die an den verschiedenen Punkten des Pendels angreifenden Kräfte.

Um nun die Beschleunigung zu erhalten, welche diese Kraft dem Pendel in dem Momente ertheilt, in welchem es mit der Verticalen den Winkel α bildet, müssen wir die Masse bestimmen, welche in der Abstandseinheit von der Drehungsaxe die Masse des Pendels ersetzt, das heisst welche dort angebracht durch die wirksame Kraft genau die gleiche Winkelgeschwindigkeit erhält, wie das Pendel. Wir wissen, dass diese Masse uns durch das Trägheitsmoment des Pendels gegeben ist. Setzen wir voraus, wir hätten dasselbe berechnet, es sei gleich M. Damit ist dann die Beschleunigung, die das Pendel in diesem Momente erhält, resp. die Beschleunigung des in der Abstandseinheit von der Drehungsaxe liegenden Punktes, an dem die Kraft angreift und in dem die Masse M sich befindet,

$$\frac{P z \alpha}{M}.$$

Für diese Beschleunigung erhalten wir andererseits nach §. 1 den Quotienten aus der Geschwindigkeitszunahme dv und der unendlich kleinen Zeit dt, während der wir die Kraft als constant betrachten können, erhalten somit die Gleichung

$$\frac{dv}{dt} = \frac{P z \alpha}{M}.$$

Da die Bewegung nach beiden Seiten von der Gleichgewichtslage, von der aus der Winkel α gerechnet wird, geht, so ist es gut, hier gleich die Vorzeichen richtig einzuführen. Ist das Pendel an der linken Seite der Gleichgewichtslage, so ist die Beschleunigung zur rechten gerichtet, ist dagegen das Pendel an der rechten Seite, so ist die Beschleunigung zur linken gerichtet. Setzen wir daher die Bögen α an der linken Seite als positive, an der rechten Seite als negative in die Rechnung, so müssen wir, um anzudeuten, dass die Beschleunigung nach der negativen Seite gerichtet ist, wenn α positiv ist und umgekehrt, die rechte Seite der obigen Gleichung mit dem negativen Vorzeichen versehen, also setzen

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{P z}{M} \cdot \alpha$$

oder, wenn wir zur Abkürzung

$$\frac{P z}{M} = k^2$$

setzen,

$$\frac{dv}{dt} = -k^2 \alpha.$$

Der Bestimmung der Geschwindigkeit v in ihrer Abhängigkeit von t steht hier die Schwierigkeit entgegen, dass die Beschleunigung nicht direkt in ihrer Abhängigkeit von der Zeit gegeben ist, sondern in ihrer Abhängigkeit von der Lage des Punktes in seiner Bahn. Wir können deshalb nicht in der Weise wie im §. 1 die Geschwindigkeit ableiten, sondern müssen

dazu einen andern Weg einschlagen. Wir benutzen dazu den §. 8 bewiesenen Satz, dass die Arbeit einer Kraft gleich ist der lebendigen Kraft, welche in Folge dieser Arbeit der Masse ertheilt ist. Wir gehen dabei aus von der äussersten Lage des Pendels, in welcher es die Ablenkung α_0 und die Geschwindigkeit 0 hat. Fällt es dann herab, bis die Ablenkung noch den Werth α hat, so sei seine Geschwindigkeit in dem Momente gleich v, somit die lebendige Kraft gleich $\frac{1}{2} M v^2$. Diese lebendige Kraft ist der Masse M dadurch ertheilt worden, dass auf jedem Wegeelement $d\alpha$ von α_0 bis zu dem betrachteten Werthe α die Kraft $Pz\alpha$ gewirkt hat. Da die Masse M im Abstande 1 sich befindet und wir α in Bruchtheilen des Kreisumfanges 2π rechnen, so ist $d\alpha$ in Längenmaass der Weg, durch welchen die Kraft $Pz\alpha$ gewirkt hat, somit $Pz\alpha\, d\alpha$ die auf dem Wegelement $d\alpha$ geleistete Arbeit. Die Summe aller der Arbeiten von α_0 bis α genommen ist somit gleich der überhaupt geleisteten Arbeit, also gleich der gewonnenen lebendigen Kraft oder

$$\frac{1}{2} M v^2 = -\int_{\alpha_0}^{\alpha} Pz\alpha\, d\alpha,$$

worin wir auf der rechten Seite das negative Vorzeichen setzen müssen, weil das Zurücklegen des Bogens $d\alpha$, wenn α positiv ist, während die Geschwindigkeit v wächst, einer Verminderung des Bogens α entspricht. Da der Factor Pz in jedem Gliede der Summe denselben Werth hat, können wir ihn vor das Summenzeichen setzen, und erhalten dann

$$\frac{1}{2} M v^2 = -Pz\int_{\alpha_0}^{\alpha} \alpha\, d\alpha$$

oder nach den Entwicklungen des §. 1

$$\frac{1}{2} M v^2 = -Pz\,\frac{1}{2}\left(\alpha^2 - \alpha_0^2\right)$$

$$v^2 = \frac{Pz}{M}\left(\alpha_0^2 - \alpha^2\right) = k^2\left(\alpha_0^2 - \alpha^2\right).$$

Dass diese für die Geschwindigkeit der schwingenden Bewegung erhaltene Gleichung dieselbe so wiedergibt, wie sie sich vorhin aus der Betrachtung der schwingenden Bewegung ergab, erkennt man sehr leicht. Die Geschwindigkeit ist gleich Null, wenn $\alpha = \alpha_0$ ist, in der äussersten Lage, von der aus die Bewegung beginnt, sie wächst mit abnehmendem α und erhält ihren grössten Werth, wenn $\alpha = 0$, wenn das Pendel die Gleichgewichtslage passirt; nach Ueberschreiten derselben nimmt sie wieder ab und hat für gleiche Werthe α auf beiden Seiten der Gleichgewichtslage denselben Werth. In der Gleichung tritt das hervor, denn ob α positiv oder negativ ist, für gleiche absolute Werthe von α hat das Quadrat von α immer denselben Werth.

Aus dieser Gleichung für die Geschwindigkeit der Bewegung müssen wir nun ableiten, welche Zeit das Pendel braucht, um irgend ein beliebiges Stück seiner Bahn zurückzulegen, woraus sich dann die Zeit ergibt, welche das Pendel zum Durchlaufen seiner ganzen Bahn nöthig hat. Nach §. 1 ist nun

$$\frac{ds}{dt} = v,\; ds = v\,dt,$$

die in der unendlich kleinen Zeit dt durchlaufene Strecke gleich dem Producte aus der Geschwindigkeit für diesen Moment und der unendlich kleinen Zeit; für das Pendel erhalten wir somit

$$d\alpha = k \,.\, \sqrt{\alpha_0^2 - \alpha^2} \,.\, dt$$

oder auch für die Zeit dt, welche das Pendel zur Zurücklegung des Weges $d\alpha$ gebraucht,

$$dt = \frac{d\alpha}{k\sqrt{\alpha_0^2 - \alpha^2}}.$$

Die Bewegung beginnt nun in dem Momente, in welchem wir das Pendel in seiner äussersten Lage, wo $\alpha = \alpha_0$ ist, loslassen, die Zeit t, welche es braucht, um einen solchen Bogen zurückzulegen, dass α_0 in α übergeht, ist die Summe aller Zeitelemente dt, welche es zur Zurücklegung aller Wegelemente $d\alpha$ gebraucht, welche auf dem Wege von α_0 bis α liegen, also

$$t = \int dt = \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{d\alpha}{k\sqrt{\alpha_0^2 - \alpha^2}}$$

oder auch

$$k \,.\, t = \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{d\alpha}{\alpha_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha_0}\right)^2}}.$$

In der Differentialrechnung wird nun bewiesen, dass der unter dem Summenzeichen stehende Ausdruck gleich ist der Differenz zweier Bögen, deren Sinus sind $\frac{\alpha + d\alpha}{\alpha_0}$ und $\frac{\alpha}{\alpha_0}$, oder dass

$$\frac{d\alpha}{\alpha_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha_0}\right)^2}} = \text{arc}\left(\sin = \frac{\alpha + d\alpha}{\alpha_0}\right) - \text{arc}\left(\sin = \frac{\alpha}{\alpha_0}\right),$$

woraus sich gemäss den Bemerkungen des §. 1 ergibt

$$kt = \text{arc}\left(\sin = \frac{\alpha}{\alpha_0}\right) - \text{arc}\left(\sin = \frac{\alpha_0}{\alpha_0}\right).$$

Der Bogen, dessen Sinus gleich $\frac{\alpha_0}{\alpha_0}$ oder 1 ist, ist nun gleich $\frac{\pi}{2}$ oder $5\,\frac{\pi}{2}$ oder allgemein gleich $(4\,n + 1)\,\pi$; welchen Werth für n wir einsetzen, ist gleichgültig, da wir für $t = 0$ auch in dem ersten Gliede der rechten Seite $\alpha = \alpha_0$ zu setzen haben, wir also dort von demselben Werthe ausgehen müssen, den wir dem zweiten beilegen. Wir setzen deshalb $n = 1$ und erhalten

$$kt = \text{arc}\left(\sin = \frac{\alpha}{\alpha_0}\right) - \frac{\pi}{2}.$$

Schreiben wir die Gleichung in einer etwas andern Form, so erkennen wir sofort, dass sie uns die Pendelbewegung so darstellt, wie wir sie vorhin abgeleitet haben. Wir erhalten zuerst

$$\text{arc}\left(\sin = \frac{\alpha}{\alpha_0}\right) = kt + \frac{\pi}{2}$$

$$\alpha = \alpha_0 \sin\left(kt + \frac{\pi}{2}\right) = \alpha_0 \, . \cos kt.$$

Zur Zeit $t = 0$ ist der Cosinus gleich 1, also $\alpha = \alpha_0$, der Ausgangspunkt der Bewegung; wächst jetzt t, so wird der Cosinus kleiner, somit nimmt α ab. Ist t soweit gewachsen, dass kt gleich $\frac{\pi}{2}$ ist, so ist der Cosinus gleich Null, das Pendel ist in der Gleichgewichtslage angekommen; wächst t weiter, so wird der Cosinus negativ, somit α negativ, das heisst, das Pendel geht an die andere Seite der Gleichgewichtslage; es erreicht dort die äusserste Lage, α wird gleich $-\alpha_0$, wenn kt nochmals um $\frac{\pi}{2}$, also bis π gewachsen ist. Bei weiterm Wachsen bleibt α negativ, wird aber seinem absoluten Werthe nach kleiner, bis $kt = 3\frac{\pi}{2}$ geworden ist, in welchem Momente α wieder gleich Null, das Pendel wieder in seiner Gleichgewichtslage ist. Diese überschreitet es wieder auf die positive Seite zurückkehrend, auf der es die äusserste Lage α_0 wieder erreicht, wenn kt bis zu dem Werthe von 2π gewachsen ist. Indem kt dann von $2\,\pi$ bis $4\,\pi$ wächst, durchläuft das Pendel wieder die ganze Bahn hin und zurück und so jedesmal, wenn kt von $2\,n\pi$ auf $2\,(n+1)\,\pi$ wächst. Die Gleichung zeigt uns also, dass, wie wir es im Anfange dieses Paragraphen entwickelten, das Pendel unaufhörlich zwischen den äussersten Lagen hin und herschwingt, und dass diese äussersten Lagen auf beiden Seiten gleich weit von der Gleichgewichtslage entfernt sind.

Als Dauer einer Schwingung bezeichneten wir nun die Zeit, welche das Pendel braucht, um von einer äussersten Lage zur andern zu gelangen; wie wir eben sahen ist das der Fall, wenn kt von Null bis π, oder von π bis 2π u. s. f. wächst. Nennen wir deshalb die Dauer einer Schwingung T, so erhalten wir

$$kT = \pi; \quad T = \frac{\pi}{k}.$$

Da wir nun gesetzt hatten

$$k^2 = \frac{Pz}{M}; \quad \frac{1}{k} = \sqrt{\frac{M}{Pz}},$$

so folgt schliesslich

$$T = \pi \sqrt{\frac{M}{Pz}}$$

oder die Schwingungsdauer eines Pendels ist gleich der Zahl π multiplicirt mit der Quadratwurzel aus dem Quotienten des Trägheitsmomentes des Pendels und des Drehungsmomentes, welches die wirksame Kraft dem Pendel ertheilt.

Dieser Ausdruck für die Schwingungsdauer eines Pendels nimmt eine sehr einfache Form an, wenn wir voraussetzen, dasselbe bestände aus einem ganz gewichtslosen Faden von der Länge l, an dessen unterm Ende sich ein schwerer Punkt befindet, dessen Gewicht gleich P sei. In dem Falle ist das Trägheitsmoment

$$M = \frac{P}{g} \cdot l^2,$$

das statische Moment

$$Pz = Pl,$$

da wenn der Faden gewichtslos und das Gewicht P ein schwerer Punkt ist, der Schwerpunkt des Pendels in diesen Punkt fällt. Setzen wir diese Werthe ein, so wird

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Ein solches Pendel, welches man in Wirklichkeit strenge nicht darstellen kann, nennt man ein mathematisches Pendel, für ein solches gelangen wir also zu dem Satze, dass die Schwingungsdauer desselben gleich ist der Zahl π multiplicirt mit der Quadratwurzel aus dem Quotienten der Pendellänge und der Beschleunigung g beim freien Fall, und dass die Schwingungsdauer, so lange unsere Voraussetzung kleiner Amplituden gewahrt ist, von der Grösse der Amplituden nicht abhängig ist.

Stellt man Pendel her, welche einem mathematischen möglichst nahe kommen, so kann man sich sehr leicht durch den Versuch überzeugen, dass die Schwingungsdauer bei kleinen Schwingungen nicht von der Amplitude abhängig ist, und dass dieselbe der Quadratwurzel aus der Pendellänge proportional ist. Man wendet einen möglichst leichten Faden an und befestigt am untern Ende eine möglichst kleine, aber möglichst schwere Kugel, etwa eine Bleikugel. Man kann dann annehmen, dass der Mittelpunkt der Kugel der Schwerpunkt des Pendels ist und gleichzeitig, dass in demselben die ganze Masse des Pendels concentrirt sei. Versetzt man ein solches Pendel in Schwingungen, so dass α_0 nur etwa einem Winkel von 4^0, die ganze Amplitude also einem Winkel von 8^0 entspricht, so werden aus den vorher angegebenen Gründen die Amplituden immer kleiner, das Pendel macht aber doch, ehe es zur Ruhe kommt, einige hundert Schwingungen. Bestimmt man nun die Dauer etwa der ersten, dann der zweiten etc. hundert Schwingungen, so findet man die Zeit stets gleich, trotzdem die Grösse der Amplitude bei den weiter folgenden Schwingungen immer kleiner ist, als bei den vorhergehenden.

Die Abhängigkeit der Schwingungsdauer von der Pendellänge erkennt man, indem man Fäden von verschiedener Länge anwendet. Nimmt man Fäden, deren Längen sich verhalten wie 1, 4, 9, 16, so findet man, dass die Schwingungsdauern sich verhalten wie 1, 2, 3, 4.

Die Unabhängigkeit der Schwingungsdauer von der Amplitude gilt strenge nur für unendlich kleine Schwingungsamplituden, da nur für solche der Bogen dem Sinus strenge proportional gesetzt werden darf. Weil der Sinus auch bei kleinen Bogen etwas langsamer wächst als der Bogen, ist, sobald die Amplitude nicht unendlich klein ist, die Schwingungsdauer etwas grösser, als unsere Entwicklung sie angibt. Wir begnügen uns hier, das von der theoretischen Mechanik in der Beziehung gegebene Resultat mitzutheilen. Für eine Amplitude α_0 wird die Schwingungsdauer

$$T = \pi \sqrt{\frac{M}{Pz}} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{1}{2} \alpha_0\right),$$

wenn man α_0 etwa bis 10^0, also die Schwingungsweite bis etwa 20^0 wachsen lässt. Bei der Amplitude von 20^0 würde die Vernachlässigung dieser Correction etwas weniger als 0,2 Procent betragen, das heisst in der Zeit, in welcher ein Pendel mit dieser Amplitude 1000 Schwingungen vollführt, würde es mit unendlich kleiner Amplitude 1001,89 ausführen. Mit dieser Correction kann man leicht eine beobachtete Schwingungsdauer T zurückführen auf jene, welche das Pendel bei unendlich kleiner Amplitude gehabt hätte; nennen wir dieselbe T', so ist

$$T' = \pi \sqrt{\frac{M}{Pz}} = \frac{T}{1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{1}{2} \alpha_0}.$$

§. 18.

Länge des physischen Pendels; Bestimmung von g. Die Beobachtung eines unter der Wirkung der Schwere schwingenden Pendels ist das beste Mittel zur Bestimmung des Werthes der Beschleunigung g beim freien Falle. Würde man ein mathematisches Pendel herstellen können, so würde sich aus der Gleichung für die Schwingungsdauer unmittelbar ergeben

$$g = \frac{\pi^2 l}{T^2}$$

oder, wenn wir ein solches von der Länge L herstellten, welches genau eine Schwingung in der Secunde vollführte,

$$g = \pi^2 L.$$

Bei einem in Wirklichkeit herstellbaren Pendel, welches man zum Unterschiede von einem mathematischen ein physisches Pendel nennt, stellt sich die Sache nicht so einfach; dass man indess mit Hülfe desselben die Grösse g ebenso gut bestimmen kann, lässt sich leicht zeigen. Das Trägheitsmoment eines ausgedehnten Körpers, sahen wir §. 12, erhalten wir in Form einer Summe, indem wir uns den Körper in lauter unendlich kleine Stückchen zerlegt denken, und die Masse jedes Stückchens mit dem Quadrate seines Abstandes von der Drehungsaxe multipliciren. Nennen wir die Gewichte der einzelnen Stückchen q, q_1, $q_2 \ldots$ deren Abstände von der Drehungsaxe r, r_1, $r_2 \ldots$, so ist das Trägheitsmoment

$$M = \left(\frac{q}{g} \cdot r^2 + \frac{q_1}{g} r_1^2 + \frac{q_2}{g} r_2^2 + \cdots\right) = \frac{1}{g} \left(q r^2 + q_1 r_1^2 + q_2 r_2^2 + \cdots\right)$$

oder wenn wir die in Klammern eingeschlossene Summe von unendlich vielen Gliedern mit Q bezeichnen,

$$M = \frac{Q}{g}.$$

Damit wird dann

$$T = \pi \sqrt{\frac{Q}{g \cdot Pz}},$$

somit

$$g = \frac{\pi^2 Q}{T^2 . P . z}.$$

Für geometrisch bestimmte Körper kann man die Summe Q berechnen, stellt man deshalb Pendel aus solchen her, so lässt sich aus der Beobach-

tung der Schwingungsdauer derselben g ebenso gut ableiten, wie mit Hülfe eines mathematischen Pendels. In dieser Weise hat Borda den Werth von g für Paris bestimmt, indem er Pendel von dünnen Drähten anwandte, an welche unten eine Kugel befestigt wurde. Da der Draht ein Kreiscylinder ist, so kann man unter der Voraussetzung, dass er überall gleich dicht ist, sein Trägheitsmoment, resp. die Summe Q und ebenso das Trägheitsmoment der Kugel bestimmen. Da man ferner den Schwerpunkt des Pendels aufsuchen und sein Gewicht P bestimmen kann, so lässt sich damit g bestimmen. Borda erhielt auf diese Weise für Paris den Werth

$$g = 9{,}80882,$$

Biot nach derselben Methode

$$g = 9{,}80896.$$

Man kann indess noch anders verfahren, indem man auf rein experimentellem Wege die Länge jenes mathematischen Pendels aufsucht, welches dieselbe Schwingungsdauer hat, als das physische Pendel, und welche man deshalb die Länge des physischen Pendels nennt. Dass es ein mathematisches Pendel gibt, welches mit dem physischen die gleiche Schwingungsdauer hat, ist selbstverständlich; die Länge desselben ist gegeben in dem Quotienten

$$l = \frac{Q}{Pz},$$

von dem man auch sofort erkennt, dass er eine Länge darstellt, da die einzelnen Glieder im Zähler Producte aus einem Gewichte und dem Quadrate einer Länge sind, während der Nenner das Product aus dem Gewichte P und der Länge z ist. Den Punkt im physischen Pendel, welcher um die Länge l von der Axe entfernt ist, nennt man den Schwingungspunkt des Pendels.

Diese Länge l des physischen Pendels lässt sich nun in Folge einer besonderen Eigenschaft des Schwingungspunktes auch auf rein experimentellem Wege bestimmen. Führt man nämlich durch den Schwingungspunkt des Pendels eine der Drehungsaxe parallele Axe und lässt dann das Pendel um diese schwingen, so ist die Schwingungsdauer des Pendels genau gleich jener, welche es bei der Schwingung um die ursprüngliche Axe besitzt. Da nun der Abstand des Schwingungspunktes von der ursprünglichen Axe gleich ist der Länge l des mathematischen Pendels, welches die gleiche Schwingungsdauer hat, wie das physische Pendel, so gibt uns der Abstand derjenigen beiden Axen, um welche das Pendel schwingend dieselbe Schwingungsdauer hat, die Länge des mit dem physischen Pendel gleichzeitig schwingenden mathematischen Pendels. Dieser Satz gilt nur dann nicht, wenn der Schwerpunkt des Pendels gerade in der Mitte zwischen den beiden Axen liegt, ein Umstand, der sich indess leicht vermeiden lässt.

Die Richtigkeit dieses Satzes lässt sich leicht mit Hülfe eines Satzes über das Trägheitsmoment eines Körpers beweisen, des Satzes nämlich, dass wenn das Trägheitsmoment eines Körpers in Bezug auf eine durch den Schwerpunkt des Körpers geführte Axe auf die Form gebracht wird $\frac{P}{g} \cdot a^2$, worin P das Gewicht des Körpers ist und a irgend eine Constante,

dass dann das Trägheitsmoment M in Bezug auf eine der durch den Schwerpunkt geführten parallele und im Abstande z von ihr befindliche Axe gegeben ist durch den Ausdruck

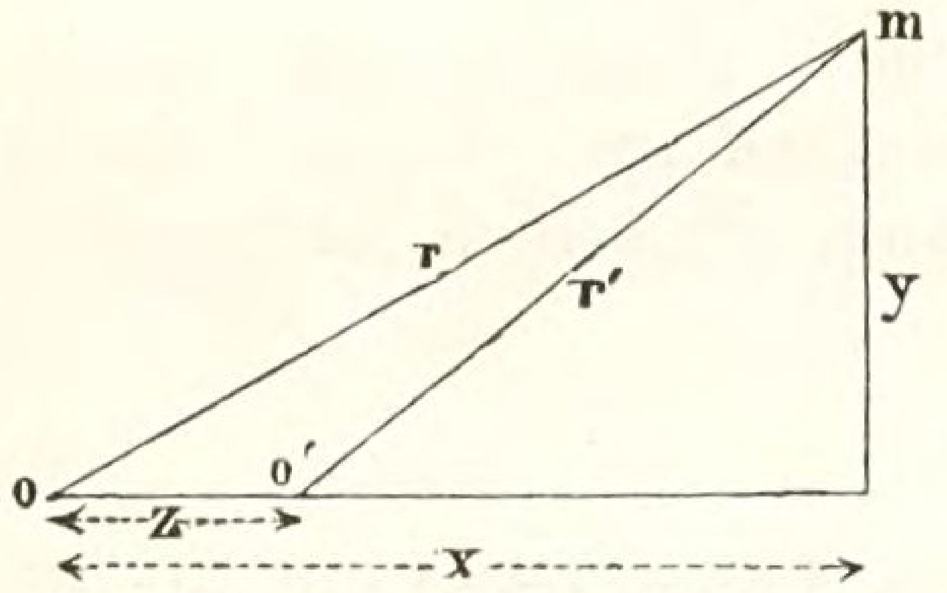
$$M = \frac{P}{g}(a^2 + z^2).$$

Dass wir das Trägheitsmoment in Bezug auf eine durch den Schwerpunkt gehende Axe immer auf die Form bringen können, ergibt sich unmittelbar. Denn nennen wir das Trägheitsmoment in dem Falle M_1, so haben wir a^2 nur aus der Gleichung zu bestimmen

$$M_1 = \frac{P}{g} a^2; \quad a^2 = \frac{g M_1}{P}.$$

Die Richtigkeit dieses Satzes über die Trägheitsmomente lässt sich folgendermassen erkennen. Es sei m Fig. 14 ein Punkt des Körpers, dessen Schwerpunkt in O liege, und sei durch den Schwerpunkt eine zur Ebene der Zeichnung senkrechte Axe geführt. Der Abstand des Punktes m von O sei gleich r. Ist nun die Masse des Punktes $m = \frac{p}{g}$, so ist das Trägheitsmoment dieses Punktes in Bezug auf die Axe gleich $\frac{p}{g} \cdot r^2$. Wir wollen nun den Abstand der einzelnen Punkte von der Axe durch ihre Abstände von zwei festen Ebenen bestimmen, von denen die eine durch die Axe parallel x, die andere durch die Axe parallel y gelegt sei, und die Abstände der Punkte von diesen festen Ebenen mit x und y bezeichnen, dann ist $r^2 = x^2 + y^2$. Das Trägheitsmoment des ganzen Körpers in Bezug auf die durch O gehende Axe ist nun die Summe der Trägheitsmomente aller Massenpunkte des Körpers, also

Fig. 14.



$$\Sigma \frac{p}{g} \cdot r^2 = \Sigma \frac{p}{g}(x^2 + y^2) = \frac{P}{g} a^2.$$

Nun sei eine zweite Axe der ersten parallel durch O' geführt, welche parallel der Richtung x im Abstande z von der ersten angebracht sei. Ist der Abstand des Punktes m von dieser gleich r', so ist das Trägheitsmoment dieses Punktes in Bezug auf diese Axe

$$\frac{p}{g} \cdot r'^2 = \frac{p}{g}\left((x - z)^2 + y^2\right),$$

somit das Trägheitsmoment des ganzen Körpers die Summe aller Trägheitsmomente der einzelnen Punkte

$$\Sigma \frac{p}{g} r'^2 = \Sigma \frac{p}{g}\left\{(x - z)^2 + y^2\right\}.$$

Indem wir die Quadrirung in der Klammer ausführen und passend usammenziehen wird

$$\Sigma \frac{p}{g}\left\{(x - z)^2 + y^2\right\} = \Sigma \frac{p}{g}(x^2 + y^2) + \Sigma \frac{p}{g} \cdot z^2 - 2\,\Sigma \frac{p}{g} \cdot zx$$

Das erste Glied auf der rechten Seite ist nun nach dem Vorigen das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf die durch den Schwerpunkt gehende Axe, also gleich $\frac{P}{g} \cdot a^2$. In dem zweiten Gliede enthält jedes einzelne Glied der Summe den constanten Factor z^2, wir können denselben deshalb vor das Summenzeichen schreiben und erhalten $z^2 \Sigma \frac{p}{g} = z^2 \frac{P}{g}$, da die Summe der Massen der sämmtlichen Punkte des Körpers gleich ist der Masse des Körpers. In dem dritten Gliede können wir ebenfalls das für alle Glieder der Summe constante $\frac{z}{g}$ herausschreiben, dann wird dasselbe $\frac{z}{g} \cdot \Sigma px$. In dieser Form erkennt man aber sofort, dass dieses Glied gleich Null ist, weil Σpx gleich Null ist. Denn jedes Glied dieser Summe bedeutet ein Drehungsmoment, welches das Gewicht des betreffenden Punktes dem Körper um die durch den Schwerpunkt O gehende Axe ertheilt. Die Summe bedeutet also ein Drehungsmoment, welches das ganze Gewicht des Körpers demselben um eine durch den Schwerpunkt gehende Axe ertheilt. Da nun aber, wenn eine Axe durch den Schwerpunkt des Körpers geführt ist, derselbe im indifferenten Gleichgewichtszustande ist, so kann der Körper durch sein eigenes Gewicht gar kein Drehungsmoment erhalten, somit muss $\Sigma px = 0$ und damit das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf die durch O' der ersten parallelen Axe

$$M = \frac{P}{g} (a^2 + z^2)$$

sein.

Wir haben nun bei unserm physischen Pendel vorausgesetzt, dass der Schwerpunkt sich im Abstande z von der Drehungsaxe befinde, wir haben das Gewicht des Pendels P gesetzt, es ist daher, wenn wir obigen Ausdruck jetzt als für unser Pendel entwickelt denken,

$$Q = g \cdot M = P (a^2 + z^2),$$

somit die Länge des physischen Pendels

$$l = \frac{P (a^2 + z^2)}{Pz} = \frac{a^2}{z} + z.$$

Sei jetzt durch den Schwingungspunkt die Axe gelegt, und sei der Abstand des Schwerpunktes von der Axe gleich z'. Die Länge l' des Pendels in dieser Lage ist dann

$$l' = \frac{P (a^2 + z')}{Pz'} = \frac{a^2}{z'} + z'.$$

Ist nun die Schwingungsdauer im zweiten Falle gleich der im ersten, so ist

$$l = l'.$$

oder

$$\frac{a^2}{z} + z = \frac{a^2}{z'} + z' = l.$$

Ist nun $z = z'$, so ist die Gleichung immer erfüllt, ohne dass sie über die Beziehung von z und z' zu l etwas aussagt, ist aber z von z' verschieden, so folgt aus derselben, indem man a^2 eliminirt

$$z^2 - z'^2 = l\,(z - z'); \quad z + z' = l$$

oder die Länge des physischen Pendels ist gleich dem Abstand der beiden Axen.

Ein Pendel, welches eine zweite Axe zum Umhängen und Aufsuchen des Schwingungspunktes hat, nennt man Reversionspendel. Man stellt ein solches aus einem Stabe her, an dem man Gewichte verschieben kann. Die eine der Axen ist ein für allemal fest, und die zweite verschiebbar oder auch fest. Im letzteren Falle trägt der Stab zwischen den Schneiden zwei verschiebbare Gewichte, und ausserhalb derselben in der Nähe der einen Axe ein drittes, um so sicher den Schwerpunkt des Pendels näher an die eine als an die andere Axe zu bringen.

Mit Hülfe eines solchen Pendels bestimmte der englische Physiker Kater die Länge des Secundenpendels für Paris zu

$$L = 0{,}9938606,$$

woraus sich nach der Gleichung

$$g = \pi^2\, L$$

ergibt

$$g = 9{,}80904,$$

eine Zahl, welche fast genau der von Biot gefundenen gleich ist.

§. 19.

Allgemeine Anwendung der Pendelgesetze. Die Gesetze der schwingenden Bewegung gelten nicht nur für ein unter Wirkung der Schwere schwingendes Pendel, sondern immer, wenn ein Körper unter der Wirkung einer Kraft schwingt, welche so wirkt, dass das von der wirksamen Kraft dem Körper ertheilte Drehungsmoment dem Abstande des Körpers von der Gleichgewichtslage proportional ist. Ist dann M das Trägheitsmoment des schwingenden Körpers und $D \,.\, \alpha$ das Drehungsmoment, welches die wirksame Kraft dem Körper ertheilt, wenn derselbe um den Winkel α aus der Gleichgewichtslage gedreht ist, so ist die Beschleunigung, welche dem Körper in der augenblicklichen Lage gegen die Gleichgewichtslage hin ertheilt wird

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{D}{M} \cdot \alpha,$$

also genau derselbe Ausdruck, den wir auch vorhin hatten, nur dass anstatt des durch das Gewicht gegebenen Momentes Pz hier das Drehungsmoment D eintritt. Daraus folgt dann genau in der vorhin entwickelten Weise für die Schwingungsdauer des Körpers

$$t = \pi \sqrt{\frac{M}{D}},$$

und daraus

$$D = \frac{\pi^2 M}{t^2}.$$

Dieses Drehungsmoment D gibt uns dann gleichzeitig die Grösse der wirksamen Kraft, welche in der Abstandseinheit von der Drehungsaxe und parallel der Richtung, welche den Angriffspunkt der Kraft mit der Dreh-

ungsaxe in der Gleichgewichtslage des Körpers verbindet, an dem schwingenden Körper angreift, und zwar in denselben Druckeinheiten, wie wir sie bei dem Pendel erhalten, wenn wir die Masse des Körpers als den Quotienten aus dem Gewichte und der Grösse g definiren, also die bisher gewählte Definition der Masse festhalten.

Wir werden in dieser Weise Schwingungen benutzen, um magnetische und elektrische Kräfte zu messen.

In gleicher Weise können wir diese Messung anwenden, jedesmal wenn durch Verschiebung eines Körpers aus einer bestimmten Gleichgewichtslage eine Kraft auf ihn einwirkt, welche ihn gegen die Gleichgewichtslage zurücktreibt, und der Grösse der Verschiebung proportional ist, oder auch, wenn wir die einzelnen Theile eines Körpers gegen einander verschieben, einerlei ob dabei eine drehende Bewegung eintritt oder nicht. Ist die entstehende Bewegung nicht eine drehende, so tritt in unsern Ausdruck für die Beschleunigung anstatt des Drehungsmomentes D einfach die bewegende Kraft p und an Stelle des Trägheitsmomentes M direkt die von der Kraft p zu bewegende Masse m. Die einer Verschiebung x aus der Gleichgewichtslage entsprechende, stets gegen die Gleichgewichtslage hin gerichtete Beschleunigung ist dann

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{p}{m} \cdot x \cdot$$

Aus dieser Gleichung folgen dann ganz die früher für das Pendel erhaltenen. Wir werden sie später zur Betrachtung solcher Bewegungen stets benutzen.

Schliesslich finden unsere Gleichungen vielfach eine Anwendung zur experimentellen Bestimmung des Trägheitsmoments eines schwingenden Körpers. Auf das Speciellere darüber wollen wir eingehen, wenn wir eine solche Bestimmung auszuführen haben; dass das möglich ist, wenn wir die zu bewegende Masse in bekannter Weise ändern, während wir die Kraft constant halten, und dann die Schwingungsdauer bei dieser geänderten Masse beobachten, ergibt sich aus der Ueberlegung, dass uns jede Beobachtung eine neue Gleichung gibt, zur Bestimmung der beiden Unbekannten D und M, welche in unserer Gleichung vorkommen.

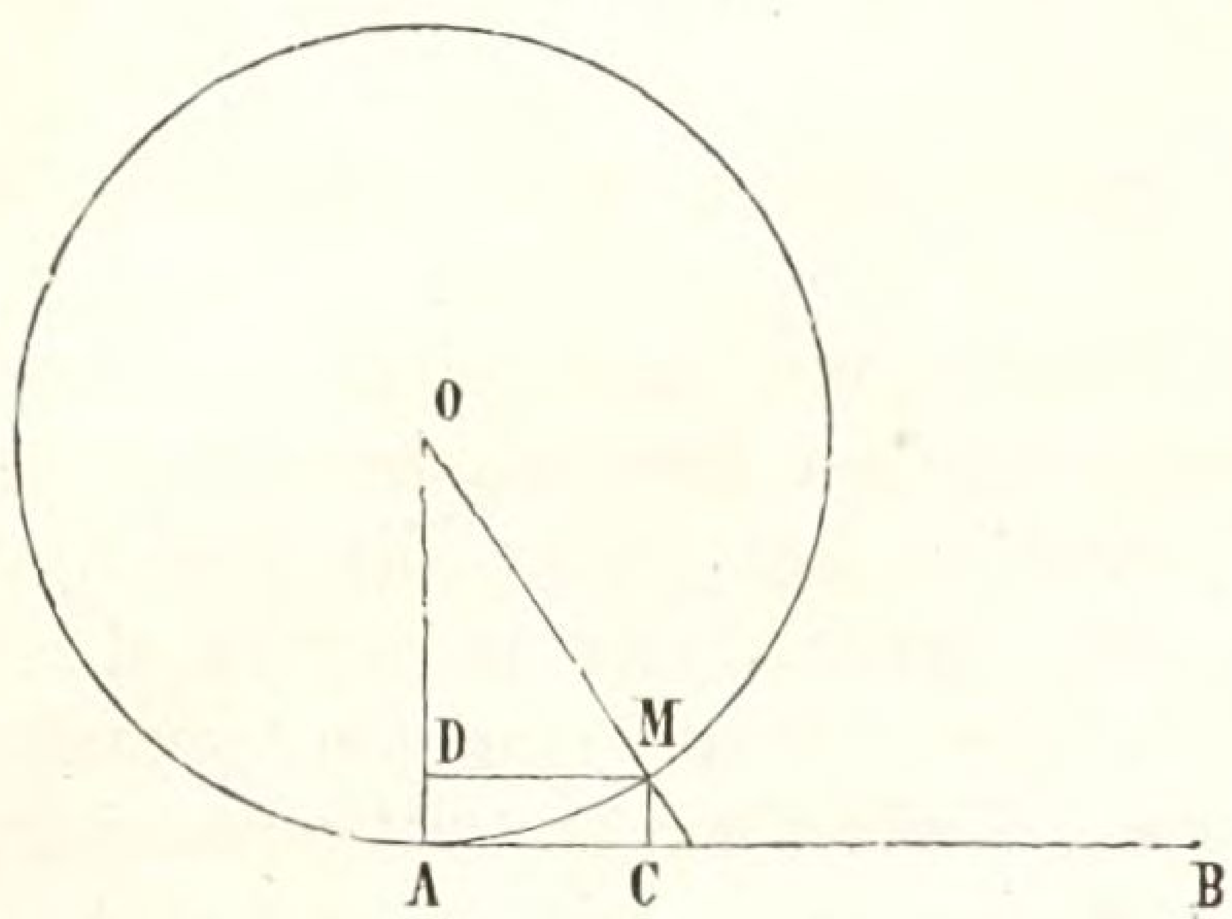
§. 20.

Centripetalkraft und Centrifugalkraft. Wenn sich ein Körper A Fig. 15 in einem Kreise um den Mittelpunkt O bewegt, so ist in dem Momente, in welchem der Körper den Punkt A passirt, seine Bewegung nach AB gerichtet, nach der Richtung der im Punkt A an den Kreis gelegten Tangente, da bekanntlich im Berührungspunkt das Element des Kreises mit der Tangente zusammenfällt. Vermöge der Trägheit der Materie ändert nun ein Körper ebenso wenig seine Bewegungsrichtung wie seine Geschwindigkeit ohne eine äussere Ursache, das ist also ohne eine die Bewegungsrichtung ändernde Kraft.

Wenn der Körper im Kreise weiter gehen soll, muss nun in jedem Momente die Richtung der Bewegung geändert werden, es muss deshalb auf den Körper eine Kraft einwirken, welche diese Richtungsänderung hervorbringt, oder welche ihn in jedem Zeitelemente wieder soviel dem Mittel-

punkte nähert, als er sich bei seiner nach der Tangente gerichteten Bewegung von demselben entfernt. Diese zur Erzeugung einer drehenden Bewegung nothwendige gegen das Centrum der Bahn gerichtete Kraft nennt man die Centripetalkraft. Die Nothwendigkeit dieser Centripetalkraft, wenn eine Kreisbewegung entstehen soll, zeigt uns auch die Erfahrung, denn wir wissen, dass ein Körper, der sich in einem Kreise bewegen soll, daran gehindert werden muss, den Kreis zu verlassen, sei es durch eine feste Verbindung mit dem Mittelpunkte des Kreises resp. der Axe der drehenden Bewegung, sei es auf irgend eine andere Weise.

Fig. 15.



Der Centripetalkraft genau an Grösse gleich und ihr entgegengesezt ist die Centrifugalkraft. Dass diese Kraft vorhanden sein muss und dass in Folge derselben der im Kreise bewegte Körper auf den Mittelpunkt einen Zug ausüben muss, der genau gleich jenem ist, der von dem Mittelpunkt aus auf ihn selbst ausgeübt wird, das ergibt sich aus dem §. 8 entwickelten Princip der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung. Wir nehmen dieselbe auch bei jeder drehenden Bewegung wahr. Ist der im Kreise bewegte Körper an einem Faden befestigt, so ist es der Zusammenhang des Fadens, der ihn im Kreise festhält, also gegen den Mittelpunkt hinzieht; der Faden ist gespannt und diese Spannung beweist, dass der Körper einen ebenso starken Zug auf den Mittelpunkt ausübt, als derjenige ist, welcher ihn aus der geradlinigen Bahn ablenkt. Reisst der Faden, so bewegt sich, wie wir das an der Schleuder sehen, der Körper einfach in der Tangente der Kreisbahn weiter.

Die Centrifugalkraft ist also weiter nichts als der Widerstand, den der träge Körper der Aenderung seiner Bewegungsrichtung entgegensetzt; hört die Centripetalkraft auf, so auch die Centrifugalkraft, indem der Körper sich dann in der Richtung seiner Bewegung von der Drehungsaxe entfernt.

Die Grösse der Centripetalkraft, welche auf einen Körper wirken muss, um ihn im Kreise festzuhalten, ergibt sich leicht folgendermassen. Der Körper A Fig. 15 habe die Masse m und bewege sich mit einer Geschwindigkeit v, das heisst, er lege in der Secunde im Längenmaasse die Strecke v zurück. Nach einer sehr kleinen Zeit t sei er in M angekommen, habe also den Bogen AM zurückgelegt, den wir so klein voraussetzen wollen, dass wir ihn mit der Sehne AM als zusammenfallend ansehen dürfen. Die Bewegung des Körpers im Punkte A ist nach AB gerichtet, und ohne die Centripetalkraft wäre der Körper in derselben Zeit nach C gelangt; die Centripetalkraft hat ihn in derselben Zeit nach M hin, also durch die Strecke $CM = AD$ gegen den Mittelpunkt O hingezogen, so dass wir AM nach dem Satze vom Parallelogramm der Bewegungen als die Diagonale des aus AC und AD construirten Rechtecks betrachten können. Da wir AM als sehr klein vorausgesetzt haben, können wir die Centripetalkraft als während der sehr kleinen Zeit t constant nach M ge-

richtet betrachten; bezeichnen wir sie mit F, so ist der in der Zeit t in Folge dieser Kraft zurückgelegte Weg AD gegeben durch

$$AD = {}^1/_2 \frac{F}{m} \cdot t^2.$$

Andererseits ist, da wir die Geschwindigkeit des Körpers A mit v bezeichnet haben,

$$AM = v \,.\, t$$

und weiter, da wir AM als Sehne annehmen können, nach einem bekannten Satze der Geometrie

$$AM^2 = 2\, R \,.\, AD,$$

wenn R den Radius des Kreises bedeutet. Setzen wir hierin für AM und AD ihre Werthe, so wird

$$v^2\, t^2 = 2\, R \,.\, {}^1/_2 \frac{F}{m} \,.\, t^2$$

und daraus

$$F = \frac{m v^2}{R}.$$

Damit sich also ein Körper im Kreise bewegt, muss ihn an jeder Stelle seiner Bahn eine Kraft gegen den Mittelpunkt hinziehen, die proportional ist der Masse des Körpers, dem Quadrate der Geschwindigkeit seiner Bewegung und die umgekehrt proportional ist dem Radius des Kreises, in welchem der Körper sich bewegt.

Mit ganz derselben Kraft wirkt die Centrifugalkraft entgegen und spannt, wenn der Körper an einem Faden befestigt ist, den Faden. Gleitet der Körper in einer kreisförmigen Rinne, so übt der Rand derselben in jedem Augenblicke auf ihn den Druck F aus und mit gleicher Kraft drückt der Körper gegen den Rand.

Man kann dem Ausdrucke für die Centrifugalkraft eine für manche Fälle bequemere Form geben, indem man beachtet, dass der Körper den ganzen Kreisumfang $2\pi R$ in einer Zeit T durchläuft, welche gegeben ist durch die Gleichung

$$2\pi R = v\, T.$$

Setzen wir den hieraus sich ergebenden Werth von v in den Ausdruck für F, so wird

$$F = \frac{4\pi^2 R m}{T^2}.$$

Wir werden die Centrifugalkraft bei einer Reihe von Erscheinungen in Rechnung zu ziehen haben und dort Gelegenheit haben, die hier gegebene Entwicklung experimentell zu bestätigen.

§. 21.

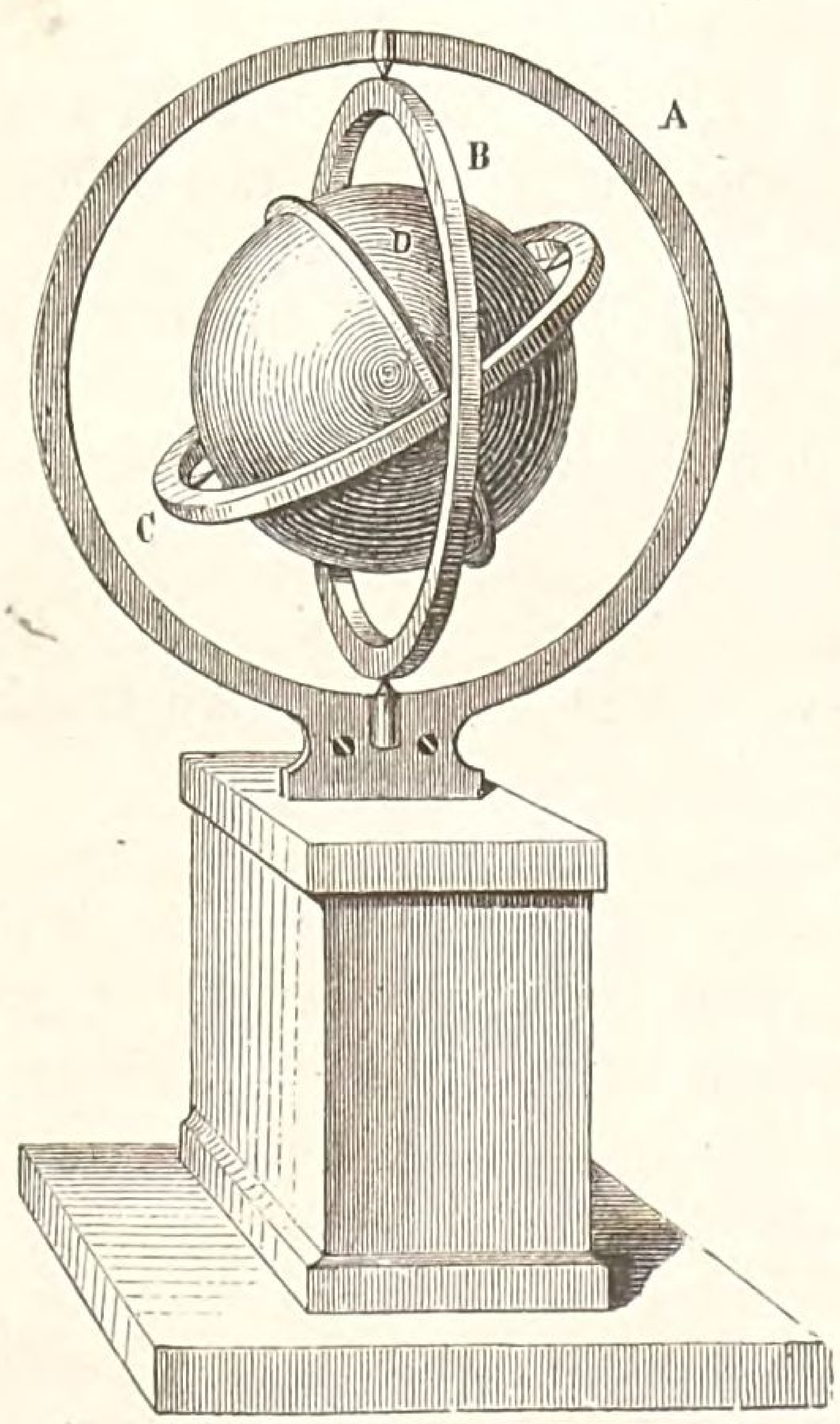
Erhaltung der Rotationsebene. In gleicher Weise wie ein Körper bei der drehenden Bewegung der Aenderung der Bewegungsrichtung in seiner Bahn einen gewissen Widerstand leistet, welcher sich in der Centrifugalkraft zu erkennen gibt, so auch strebt ein rotirender Körper in der Ebene, in welcher er rotirt, zu verharren. Jeder Theil des Körpers be-

schreibt nämlich bei seiner Bewegung einen ebenen Kreis und in jedem Augenblicke besitzt derselbe eine parallel der Tangente des Kreises an dem Punkte, in welchem er sich befindet, gerichtete Geschwindigkeit. Wenn man nun den rotirenden Körper so drehen will, dass die Ebene, in welcher irgend ein betrachteter Punkt sich bewegt, mit ihrer ursprünglichen Lage einen Winkel bildet, so muss ebenfalls die Richtung der Bewegung geändert werden.

Dazu bedarf es aber ebenso einer Kraft wie zur Aenderung der Bewegungsrichtung in der Rotationsebene. Wirken nun keine äussern Kräfte auf einen solchen Körper ein, so bleibt er demnach in seiner Lage, so dass die von den einzelnen Punkten beschriebenen Kreise in derselben Lage bleiben.

Man sieht dieses sehr deutlich an einer schmalen kreisförmigen Scheibe, welche sehr leicht umfällt, wenn man sie ruhend auf dem Rande vertical aufstellt, welche aber in der verticalen Ebene fortrollt, wenn man sie in rasche Drehung um eine horizontale Axe versetzt. Ganz dasselbe zeigt sich in dem Beharren der sogenannten freien Axen eines rotirenden Körpers. Dreht man einen Körper um eine Axe, um welche die Masse desselben ganz symmetrisch vertheilt ist, so zwar, dass die Schwerpunkte aller einzelnen auf der Axe senkrechten Schichten auf der Axe liegen, dann übt die Centrifugalkraft nach allen Richtungen einen gleichen Zug auf die Axe aus, ihre Wirkung hebt sich also auf. Eine solche Axe, welche durch die Centrifugalkraft gar keinen Zug erfährt, nennt man eine freie Axe. Dass eine solche Axe, wenn auf den rotirenden Körper keine äusseren Kräfte einwirken, ihre Richtung im Raume beibehält, lässt sich sehr deutlich mit dem Bohnenbergerschen Apparate Fig. 16 beweisen. Derselbe besteht aus einer in drehbaren Ringen aufgehängten Kugel, welche in rasche Rotation versetzt werden kann. Der äusserste Ring *A* ist fest vertical aufgestellt. Der zweite Ring *B* kann sich in dem ersten um eine verticale Axe frei drehen, der dritte Ring *C* kann sich in dem zweiten um eine Axe frei drehen, welche mit der Drehungsaxe des zweiten Ringes einen rechten Winkel bildet, und die Rotationsaxe der Kugel ist wieder senkrecht zu der Drehungsaxe des dritten Ringes. An der Axe der Kugel ist eine kleine Rolle angebracht, um welche ein Faden vielfach geschlungen werden kann. Zieht man den Faden rasch ab, während man den dritten Ring festhält, so nimmt die Kugel eine sehr rasche Rotation um ihre Axe an.

Fig. 16.



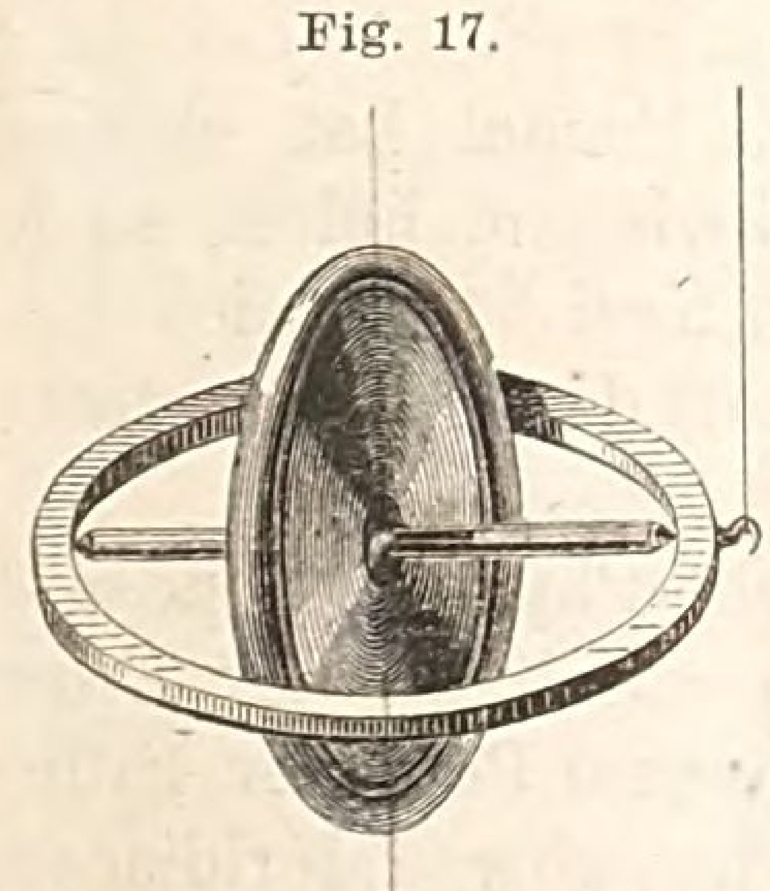
In Folge der dreifachen Aufhängung kann sich die Rotationsaxe der Kugel ganz frei nach allen Richtungen drehen; rotirt die Kugel nicht, so bringt auch der leiseste Druck eine Drehung der Axe hervor. Hat man

aber die Kugel mittelst Abziehen des Fadens in eine rasche Rotation versetzt, so mag man den Apparat drehen und wenden wie man will, die Rotationsaxe der Kugel bleibt sich immer parallel.

Ganz dieselbe Erscheinung zeigt sich bei dem bekannten Kinderspielzeug dem Kreisel; wenn derselbe nicht rotirt, so fällt er auf die Spitze gestellt sofort um, rotirt er dagegen, so fällt er nicht um, selbst wenn die Axe nicht vertical steht. Dann zeigt sich aber, dass der Kreisel nicht einfach um die feststehende Axe rotirt, sondern dass gleichzeitig die Rotationsaxe des Kreisels eine Kegelfläche um die verticale beschreibt.

Diese Erhaltung der Rotationsebene zeigt sich noch schöner, wenn man eine an ihrem Rande mit starkem Messingwulst versehene Scheibe auf einer Axe befestigt, welche wie die Bohnenbergersche Kugel in einem Ringe angebracht ist, dann die Scheibe in eine rasche Rotation versetzt und dieselbe dann in der Fig. 17 bezeichneten Weise an einem Faden aufhängt. Die Vorrichtung fällt dann nicht, wie man wegen des grossen Gewichts derselben erwarten sollte, herab, so dass die Rotationsaxe die Verlängerung des Fadens bildet, sondern die Rotationsaxe bleibt nahezu horizontal und die Scheibe mit dem Ringe nimmt eine rotirende Bewegung um den Aufhängefaden an, welche der Rotation der Scheibe entgegengesetzt ist. Verhindert man die Vorrichtung an dieser letztern Rotation, so sinkt die Scheibe sofort hinab. Dass diese Erscheinungen sich unmittelbar aus dem Bestreben der Scheibe, in der Rotationsebene zu verharren, ergeben, hat Poggendorff in einer sehr einfachen Weise abgeleitet. Nehmen wir an, die Scheibe rotire so, dass ihre Theile vorn aufsteigen und hinten absteigen. Wird nun die Rotationsaxe der Scheibe zunächst horizontal gestellt, so dass die Scheibe in der verticalen Ebene rotirt, so wird sie in Folge der Schwere etwas sinken.

Fig. 17.



Durch dieses Sinken tritt nothwendig eine kleine Drehung der Scheibe ein, so dass ihre Rotationsebene nicht mehr die verticale ist, und dadurch wird die Bewegung der Theilchen vorn, wo sie aufsteigen und hinten, wo sie absteigen, geändert. Dieselben besitzen verticale Geschwindigkeiten, und müssen wegen der Trägheit in denselben verharren; die Geschwindigkeiten der Theilchen treten daher vorn, wo sie aufsteigen, zur Rechten, hinten, wo sie absteigen, zur Linken aus der Ebene der Scheibe heraus. Die zur augenblicklichen Lage der Scheibe senkrechten Componenten der Bewegung der vorn aufsteigenden, hinten absteigenden Theilchen üben deshalb einen Zug senkrecht auf die Scheibe aus, vorn nach rechts, hinten nach links hin. Beide Wirkungen unterstützen sich, und die Folge davon ist eine Drehung der ganzen Vorrichtung um den Aufhängefaden als Axe und zwar von oben her angesehen, umgekehrt wie der Zeiger einer Uhr sich dreht.

Sobald nun aber diese Rotation um die verticale Axe beginnt, wird auch die Bewegung der Theilchen unten, wo sie horizontal von hinten nach vorn, oben, wo sie von vorn nach hinten stattfindet, gegen die augenblickliche Lage der Scheibe geneigt, die Geschwindigkeit der Theilchen tritt unten nach links, oben nach rechts aus der Scheibe heraus. Die zur

augenblicklichen Lage der Scheibe senkrechte Componente der Bewegung dieser Theilchen übt deshalb unten an der Scheibe einen Zug nach links, oben nach rechts in horizontaler Richtung auf die Scheibe aus. Beide Wirkungen zusammen müssen die Drehungsaxe der Scheibe der Wirkung der Schwere entgegen heben, sie bewirken also, dass die Scheibe der Wirkung der Schwere nicht folgt, dass sie nicht hinabsinkt.

Aus dieser letzteren Bemerkung erkennt man nun auch sofort, dass die Scheibe herabsinken muss, wenn man die Drehung um den verticalen Aufhängefaden verhindert, denn dann kann dieses letztere Drehungsmoment, welches der Wirkung der Schwere entgegenwirkt, sich nicht bilden, weil dann die Drehung der Scheibe, welche die horizontalen, aus der Ebene der Scheibe hervortretenden Componenten bewirkt, nicht eintritt.

§. 22.

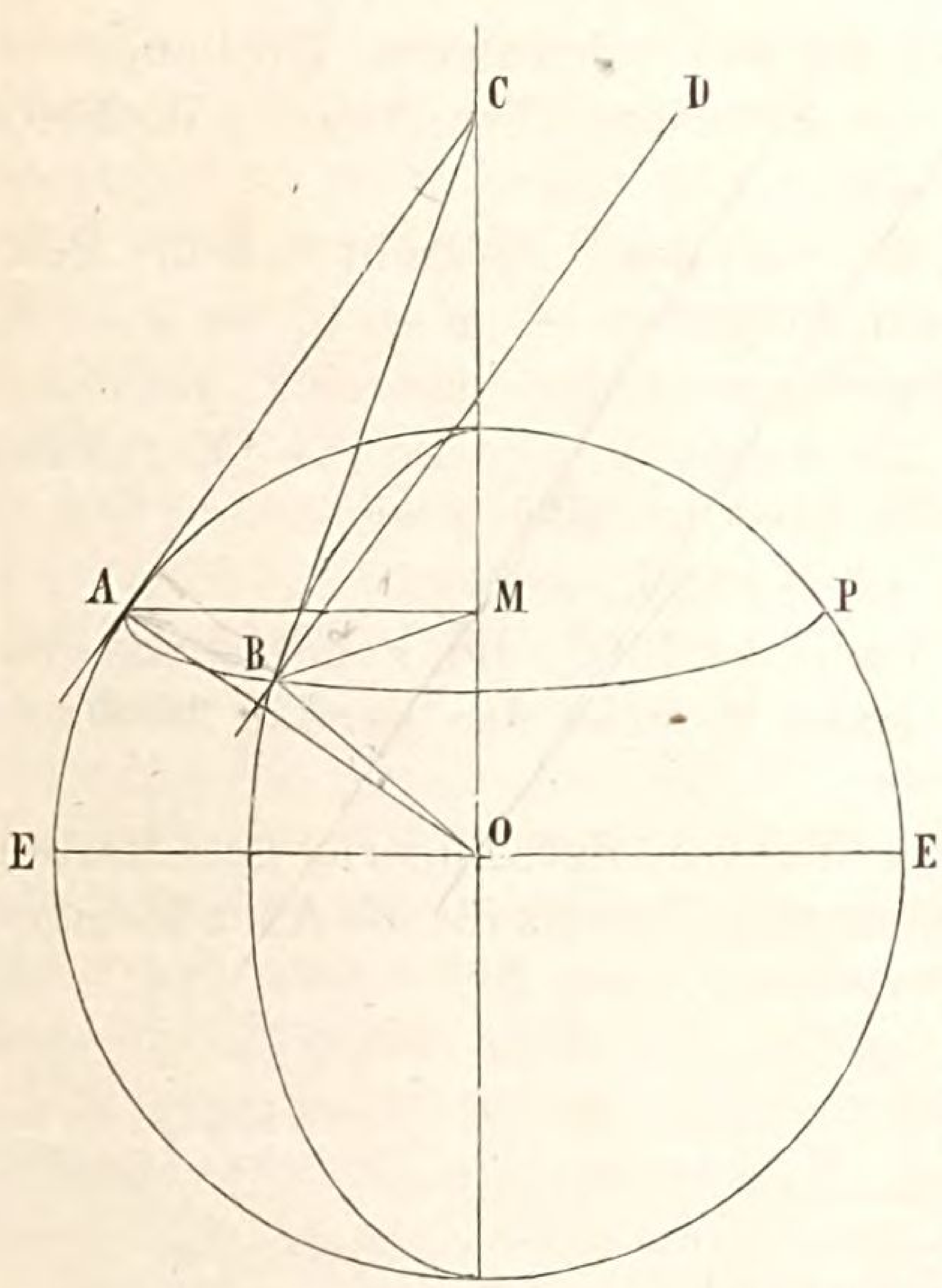
Foucault's Pendelversuch. Ein schwingendes Pendel hat ebenso das Bestreben, stets in derselben Verticalebene zu schwingen, indem auch bei diesem die einzelnen Theile in ebenen Curven, in Kreisbögen sich bewegen. Wenn daher keine seitliche Einwirkung auf das Pendel stattfindet, muss es stets in derselben Ebene schwingen.

Diese Eigenschaft des Pendels hat der französische Physiker Foucault benutzt, um einen experimentellen Beweis für die Axendrehung der Erde zu liefern. Denken wir uns ein Pendel gerade über einem Pole der Erde, etwa dem Nordpole aufgehängt und in der Richtung eines Meridianes schwingen. Das Pendel bleibt mit seinen Schwingungen stets parallel, der Meridian aber, mit welchem seine Bewegung ursprünglich parallel war, dreht sich unter dem Pendel in 24 Stunden vollständig um einen ganzen Umkreis. Ein Beobachter muss daher nach und nach die Richtung der Pendelschwingung von der des Meridianes abweichen sehen; und da er die Drehung der Erde nicht wahrnimmt, hat es den Anschein, als wenn die Pendelebene sich im entgegengesetzten Sinne drehe. Die Pendelebene muss sich daher scheinbar mit der Sonne und wie diese in 24 Stunden einmal vollständig um 360^0 drehen.

An andern Orten ist das Verhältniss nicht ganz so einfach, dort kann die Pendelebene nicht ganz ihre Lage behalten, wie unter dem Pole, da mit der Rotation der Erde die Richtung der Schwere, somit die Gleichgewichtslage sich ändert, um welche das Pendel seine Schwingungen vollführt; in wie weit nun dort eine Drehung der Pendelebene eintreten muss, ergibt folgende Ueberlegung. Die Lage der Pendelebene in einem bestimmten Momente ist bestimmt durch die Richtung der Verticalen und durch die Richtung der horizontalen Tangente, die wir an den tiefsten Punkt des von dem Pendel beschriebenen Kreisbogens legen, also etwa durch den Winkel, den diese mit dem Meridiane bildet. Nehmen wir der Einfachheit wegen an, das Pendel schwinge in dem betrachteten Momente in der durch den Meridian gelegten Verticalebene, so würde OAC Fig. 18 uns die Lage der Pendelebene darstellen, wenn A einen Ort auf dem Parallel ABP bedeutet und O der Mittelpunkt der Erde ist. Dreht sich nun die Erde um CO als Axe, so ändert sich die Richtung der Verticalen stetig, und mit der Drehung der Verticalen ändert sich die Lage der Pendelebene, da das Pendel immer um die augenblickliche Verticale als

Gleichgewichtslage in Folge der nach der Verticalen gerichteten Wirkung der Schwere hin und herschwingen muss. Hat sich die Erde soweit gedreht, dass der Punkt A auf dem Parallel ABP bis B gekommen ist, so hat sich die Verticale um den Winkel AOB gedreht, eine Drehung, die wir indess nicht wahrnehmen, da wir uns mit der Erde drehen.

Fig. 18.



Auf die andere Richtung dagegen, AC, welche uns die Lage der Pendelebene bestimmt, resp. auf die horizontale Componente der Pendelbewegung wirkt gar keine Kraft ein, so dass die horizontale Richtung, das heisst die von dem tiefsten Punkte des von dem Pendel beschriebenen Kreisbogens gelegte horizontale Tangente im Raume immer dieselbe Richtung beibehalten muss. Denn ein Verlassen dieser Richtung wäre nur möglich, wenn auf das schwingende Pendel in horizontaler Richtung irgend eine der horizontalen parallele Kraft einwirkte. Es muss deshalb, wenn das Pendel im Punkte B angekommen ist, die zweite Richtung, welche die Lage der Pendelebene bestimmt, die an den Pendelbogen im tiefsten Punkte gelegte Tangente BD der ursprünglichen Richtung AC parallel sein. Da nun die durch den Meridian gelegte Verticalebene sich gedreht und die Lage OBC angenommen hat, so muss die horizontale Richtung der Pendelebene BD mit der durch die Richtung des Meridians bestimmten Horizontalen BC einen Winkel $DBC = \beta$ bilden. Um diesen Winkel hat sich dann auf diesem Parallelkreise die Pendelebene scheinbar gedreht. Bezeichnen wir den Winkel AMB, um welchen sich die Erde gedreht hat, mit α und die geographische Breite des Ortes A, also den Winkel EOA mit φ, so erhalten wir für die Grösse des Winkels β

$$\beta = \alpha \, . \sin \varphi.$$

Es ergibt sich das aus den im §. 13 bewiesenen Sätzen über die Zusammensetzung und die Zerlegung von Drehungen. Wir können nämlich darnach die um die Erdaxe OC stattfindende Drehung der Erde in zwei zu einander senkrechte Componenten zerlegen, und zwar in die beiden Componenten, die wir eben auch gesondert betrachtet haben. Die beiden Componenten sind die Drehung um eine zu AO senkrechte Axe und um AO als Axe. Durch die erstere Drehung wird die Verticale aus der Richtung AO in die Richtung BO gebracht, durch die zweite Drehung um AO als Axe wird die Richtung AC in die Richtung BC übergeführt, da diese Richtungsänderung der Drehung der Ebene OAC um die Axe AO entspricht und zwar um den Winkel $CBD = \beta$. Wie wir nun §. 13 sahen, ist die Componente einer Drehung um eine Axe, welche mit der

gegebenen Drehungsaxe einen Winkel ψ bildet, gleich der gegebenen Drehung multiplicirt mit cos ψ. Die Axe AO bildet, wenn wir die geographische Breite des Orts A mit φ bezeichnen, mit der Drehungsaxe CO der Erde den Winkel $90 - \varphi$. Einer Drehung α um die Axe CO entspricht also als Componente der Drehung um die Axe AO der Winkel

$$\beta = \alpha . \cos (90 - \varphi) = \alpha . \sin \varphi,$$

oder, wie wir oben hinstellten, der Winkel der scheinbaren Drehung der Pendelebene ist gleich der Drehung der Erde um ihre Axe multiplicirt mit dem Sinus der geographischen Breite.

Am Pole ist $\varphi = 90^0$, $\sin \varphi = 1$, $\beta = \alpha$; am Pole dreht sich die Pendelebene ebenso rasch wie die Erde; am Aequator ist $\varphi = 0$, $\sin \varphi = 0$, $\beta = 0$; dort dreht sich die Pendelebene gar nicht, wie sich auch unmittelbar daraus erkennen lässt, dass am Aequator alle an die Meridiane gelegten Tangenten einander und der Erdaxe parallel sind.

Für Berlin ist $\beta = \alpha . \sin 52^0 \, 30' = 0{,}79335 \, \alpha$.

In 24 Stunden dreht sich somit, da $\alpha = 360^0$, die Pendelebene um $285^0 \, 36'$ oder zu einer ganzen Umdrehung braucht das Pendel 30 Stunden und 15 Minuten.

Genau ausgeführte Versuche haben die von der Theorie geforderten Zahlen geliefert, und somit einen experimentellen Beweis für die Axendrehung der Erde gegeben.

Drittes Kapitel.

Von der allgemeinen Gravitation.

§. 23.

Allgemeine Anziehung. Keppler's Gesetze. Die in den beiden vorigen Kapiteln vorgeführten Erfahrungen zeigen uns, dass an der Erdoberfläche alle Körper von Kräften angegriffen werden, welche wir das Gewicht der Körper nannten, und welche an jeder Stelle parallel der Verticalen wirken. Es hat demnach den Anschein, als wenn die ganze Masse der Erde auf die an ihrer Oberfläche befindlichen Körper eine Anziehung ausübe, welche überall merklich gegen den Mittelpunkt der Erde gerichtet ist. Diese Anziehung reicht, soweit unsere Erfahrung geht, bis zu jeder Entfernung von der Erdoberfläche; durch Induction schliessen wir dann, dass diese gegen den Mittelpunkt der Erde gerichtete Kraft über die von uns erreichbaren Grenzen hinausreicht, dass sie sich bis zu den Sternen erstreckt.

Wir dürfen dann weiter schliessen, dass alle Gestirne ähnliche Erscheinungen bieten, dass es auf allen eine gegen deren Mittelpunkt gerichtete Schwere gibt, die dann ebenso auch von diesen bis zu den andern Himmelskörpern wirkt. Nennen wir diese Kraft eine Anziehung der Materie, so würden wir also schliessen, dass alle Gestirne sich gegenseitig anziehen, und dass deren Bewegungen durch die wechselseitige Anziehung derselben bestimmt seien, dass also das ganze Weltall in seinen Bewegungen

durch die Anziehung der verschiedenen Massen geregelt werde. Diese Schlüsse waren es, welche Newton in den Stand setzten, die Bewegung der Gestirne auf mechanische Gesetze zurückzuführen.

Die Bewegungen der Gestirne müssen darnach äusserst verwickelter Natur sein, da die Zahl derselben, die aufeinander einwirken, äusserst gross ist. Indess kann man das Problem der Bewegung in einer ersten Annäherung einfacher stellen. Die Himmelskörper theilen sich in zwei Klassen; die eine umfasst die Fixsterne, welche sich in so grosser Entfernung von unserm Sonnensystem befinden, dass man ihren Einfluss auf dasselbe vernachlässigen kann; die andern stehen sich näher, sie bilden eine von Fixsternen freie, in sich abgeschlossene Gruppe, es sind die Körper unseres Sonnensystems, die Sonne mit ihren Planeten. Wenn nun auch alle Körper dieses Systems mehr oder weniger stark auf einander einwirken, so wird die hauptsächlichste Wirkung doch gegen den grössten desselben gerichtet sein, gegen die Sonne. Da nun die Grösse und Masse der Sonne viel grösser ist, als die aller Planeten zusammengenommen, so werden wir in unsern Entwicklungen uns nicht sehr weit von der Wahrheit entfernen, wenn wir voraussetzen, dass anziehende Kräfte nur zwischen der Sonne und den einzelnen Planeten thätig sind, dass die zwischen den Planeten thätigen Kräfte ausser Acht gelassen werden können. Wir setzen also voraus, dass die Planeten sich unabhängig von einander bewegen, dass ihre Bewegung nur bestimmt wird durch die zwischen der Sonne und den Planeten thätigen Kräfte. Um dann die Gesetze, nach denen diese Kräfte wirken, zu erhalten, haben wir die Bewegung der einzelnen Planeten um die als fest betrachtete Sonne zu untersuchen und aus dieser dann nach den in den vorigen Kapiteln entwickelten Gesetzen auf jene zurückzuschliessen, nach denen die Kraft wirksam ist.

Die Gesetze der Bewegung der einzelnen Planeten können nur durch Beobachtungen erhalten werden, indem man die Bahn derselben im Himmelsraum bestimmt. Diese Beobachtungen sind in der vollkommensten Weise im Beginn des 17. Jahrhunderts von dem grossen deutschen Astronomen Keppler ausgeführt worden. Die von Keppler aus seinen Beobachtungen abgeleiteten Gesetze dieser Bewegung, die nach ihm benannten drei Keppler'schen Gesetze, bilden die Grundlage der Mechanik des Weltalls. Die drei Gesetze sind:

1) Die Planeten bewegen sich in elliptischen Bahnen um die Sonne, welche sich in dem einen Brennpunkte der Ellipsen befindet.

2) Die von dem Radiusvector jedes Planeten in verschiedenen Zeiten beschriebenen Flächenräume verhalten sich wie die Zeiten, in denen sie beschrieben sind.

3) Die Quadrate der Umlaufszeiten der verschiedenen Planeten verhalten sich wie die dritten Potenzen ihrer mittlern Abstände von der Sonne.

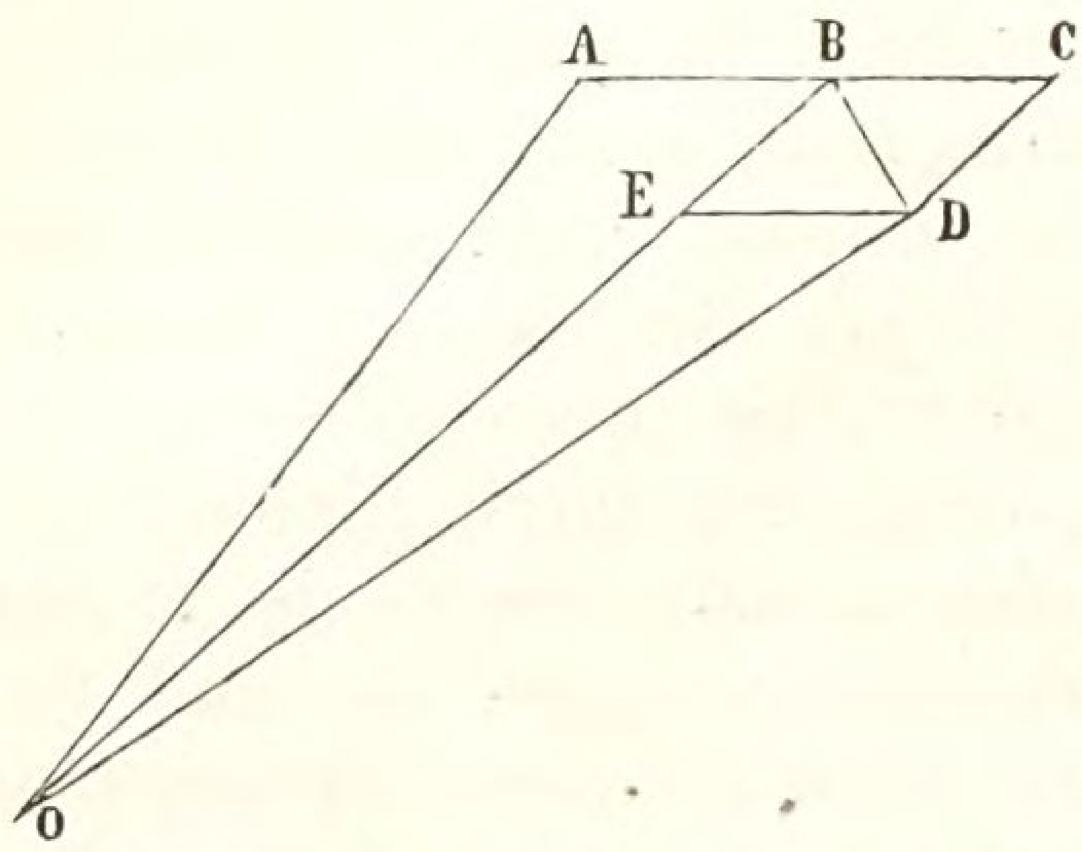
Auf diese Gesetze gründete Newton den Nachweis von der Existenz einer zwischen verschiedenen Massen thätigen, wie eine Anziehung der Massen sich äussernden Kraft und die Ableitung der Gesetze ihrer Wirkung.

§. 24.

Entwicklung der Anziehungsgesetze. Aus dem zweiten der Keppler'schen Gesetze ergibt sich zunächst, dass zwischen der Sonne und den ein-

zelnen Planeten eine Kraft thätig ist, welche die Planeten gegen die Sonne hintreibt. Um das zu erklären, sei O Fig. 19 das Centrum der Sonne und A das eines Planeten in einem bestimmten Momente. Während einer sehr kleinen Zeit beschreibt nun das Centrum des Planeten das Stückchen AB seiner Bahnellipse, welches wir so klein annehmen wollen, dass wir es als gerade ansehen können. Wenn nun keine äussere Kraft auf den Planeten einwirkte, würde das Centrum desselben in dem folgenden dem ersten gleichen Zeitelemente den Weg $BC = AB$ in der der ursprünglichen gleichen Richtung zurücklegen. Statt dessen geht der Punkt A nach dem ersten Keppler'schen Gesetze in einer Ellipse weiter, er beschreibt das Stückchen BD seiner Bahn, dessen Grösse nach dem zweiten Keppler'schen Gesetze dadurch gegeben ist, dass das Dreieck BDO gleich sein muss dem Dreieck ABO.

Fig. 19.



Aus der Thatsache, dass der Planet aus der Richtung AB abgelenkt wird, ergibt sich zunächst, dass auf denselben eine äussere Kraft einwirkt, da er sonst in Folge des Beharrungsvermögens in der Richtung BC weiter gehen würde. Um die Richtung dieser Kraft zu erhalten, betrachten wir BD als die Diagonale eines Parallelogramms, dessen eine Seite die Strecke ist, welche der Planet in Folge des Beharrungsvermögens zurücklegen würde, dessen andere Seite die Strecke ist, welche er in derselben Zeit durch die Wirkung der äussern Kraft allein zurückgelegt haben würde. Da der Planet anstatt nach C nach D gelangt ist, so gibt uns CD der Richtung und Grösse nach diese Strecke; ziehen wir deshalb in B die Linie BE parallel und gleich CD, so ist $BECD$ das zu construirende Parallelogramm und BE gibt uns die Richtung der auf den Planeten im Punkte B angreifenden Kraft. Diese Richtung fällt aber zusammen mit der Richtung BO, der Verbindungslinie des Planeten mit der Sonne, denn der Punkt D muss so liegen, dass das Dreieck $BDO = ABO$ ist. Denken wir uns nun C mit O verbunden, so ist das Dreieck CBO gleich dem Dreieck ABO, weil $AB = BC$ und die Spitze O beider Dreiecke zusammenfällt. Deshalb muss also auch $BDO = CBO$, und das ist, da sie die gleiche Seite BO haben, nur möglich, wenn die Spitzen D und O in einer mit BO parallelen Linie liegen; es folgt also, dass $CD \parallel BO$ oder dass BE mit BO zusammenfällt. Daraus folgt also schliesslich, dass die Richtung der zwischen den Planeten und der Sonne thätigen Kraft, welche die Planeten gegen die Sonne treibt, in jedem Momente mit der Verbindungslinie des Centrums des Planeten und des Centrums der Sonne zusammenfällt.

Die Grösse der in jedem Momente thätigen Kraft gibt uns das erste Keppler'sche Gesetz in Verbindung mit dem dritten. Nach dem ersten sind die Bahnen Ellipsen, deren Excentricitäten verschieden, aber stets nicht sehr gross sind. Betrachten wir nun den Fall, in welchem die Excentricität gleich Null, beide Brennpunkte also zusammen und in den Mittelpunkt der Ellipse fallen. In dem Falle geht die Ellipse in einen Kreis über, in dessen Mittelpunkt die Sonne steht. In der Wirklichkeit ist diese

Vereinfachung allerdings für keinen Planeten realisirt, das unter dieser vereinfachten Annahme sich ergebende Anziehungsgesetz fällt aber, wie in der Mechanik bewiesen wird, mit dem zusammen, welches sich aus der Annahme elliptischer Bahnen ergibt.

Bei der vereinfachten Annahme kreisförmiger Bahnen folgt aus dem zweiten Keppler'schen Gesetze, dass von den in einer solchen sich bewegenden Planeten in gleichen Zeiten gleiche Bögen zurückgelegt werden, da nur dann die von den Radien beschriebenen Flächen gleich sind. Die Planeten durchlaufen also dann kreisförmige Bahnen mit gleichförmiger Bewegung. Die dieselben gegen den Mittelpunkt der Bahn, also den Mittelpunkt der Sonne treibende Kraft muss somit an Grösse gleich der nach § 20 für diese Kreisbewegung nothwendigen Centripetalkraft sein. Nennen wir diese Centripetalkraft F, den Radius der Planetenbahn R und bezeichnen wir die Masse des Planeten mit m, seine Geschwindigkeit im Längenmaass mit v, so ist nach § 20

$$F = \frac{m \cdot v^2}{R} = \frac{4 \pi^2 m R}{T^2},$$

wenn wir mit T die Umlaufszeit des Planeten bezeichnen.

Bezeichnen wir nun die Anziehungen, welche die Sonne auf verschiedene Planeten ausübt, deren Abstände $R_1, R_2, R_3 \ldots$, deren Massen $m_1, m_2, m_3 \ldots$ und deren Umlaufszeiten $T_1, T_2, T_3 \ldots$ sind, mit $F_1, F_2, F_3 \ldots$, so ist darnach

$$F_1 = \frac{4 \pi^2 m_1 R_1}{T_1^{\,2}}, \quad F_2 = \frac{4 \pi^2 m_2 R_2}{T_2^{\,2}}, \quad F_3 = \frac{4 \pi^2 m_3 R_3}{T_3^{\,2}} \ldots$$

Nach dem dritten Keppler'schen Gesetze verhalten sich nun die Quadrate der Umlaufszeiten der verschiedenen Planeten wie die Cuben der mittlern Entfernungen, oder es ist

$$\frac{R_1^{\,3}}{T_1^{\,2}} = \frac{R_2^{\,3}}{T_2^{\,2}} = \frac{R_3^{\,3}}{T_3^{\,2}} \ldots = K,$$

wenn K diesen für alle Planeten constanten Quotienten bedeutet, somit auch

$$\frac{R_1}{T_1^{\,2}} = \frac{K}{R_1^{\,2}}; \quad \frac{R_2}{T_2^{\,2}} = \frac{K}{R_2^{\,2}}; \quad \frac{R_3}{T_3^{\,2}} = \frac{K}{R_3^{\,2}} \ldots$$

oder

$$F_1 = \frac{4 \pi^2 K m_1}{R_1^{\,2}}; \quad F_2 = \frac{4 \pi^2 K m_2}{R_2^{\,2}}; \quad F_3 = \frac{4 \pi^2 K m_3}{R_3^{\,2}}$$

oder in Worten die auf die verschiedenen Planeten wirkenden gegen die Sonne hin gerichteten Kräfte sind den Massen der Planeten direkt und den Quadraten ihrer Entfernung von der Sonne umgekehrt proportional.

Setzen wir den constanten Coefficienten $4 \pi^2 K = f$, so erhalten wir für die einen Planeten, dessen Masse m, dessen Abstand von der Sonne R ist, gegen die letztere treibende Kraft F

$$F = f \frac{m}{R^2}$$

und man erkennt, dass f die Kraft bedeutet, mit welcher die Einheit der Masse, $m = 1$, in der Einheit der Entfernung, $R = 1$, gegen die Sonne getrieben wird. Da aus unserer Entwicklung sich ergibt, dass diese Kraft der Masse m der Planeten proportional ist, folgt auch, dass wir sie der

Masse der Sonne proportional setzen müssen, dass also, wenn M die Masse der Sonne ist,

$$f = M\varphi$$

und allgemein

$$F = \frac{Mm}{R^2} \cdot \varphi$$

gesetzt werden kann.

Da wir zwischen den im Weltenraum vorhandenen Massen diese Kräfte thätig sehen, dürfen wir schliessen, dass diese Kräfte immer zwischen irgend zwei Massen wirksam sind, wir können dann obiges Gesetz allgemein dahin aussprechen: Zwischen zweien Körpern, welche sich in irgend einem Abstande befinden, ist eine die beiden Körper gegen einander treibende Kraft thätig, welche dem Producte der Massen der Körper direkt und dem Quadrate ihres Abstandes umgekehrt proportional ist. Die Grösse φ bedeutet dann die Kraft, mit welcher zwei der Einheit gleiche Massen in der Einheit der Entfernung gegen einander getrieben werden. Da die Massen von einander die Einheit der Entfernung haben sollen, müssen wir jede derselben in einen Punkt concentrirt denken.

Wir erwähnten vorhin schon, dass man diese zwischen den Körpern thätige Kraft in der Regel die Anziehung der Materie nennt. Mit dieser Bezeichnung begibt man sich auf den Boden der Hypothese, ihr liegt nämlich die Annahme zu Grunde, dass die Materie durch den Raum hindurch wirkend sich gegenseitig anziehe. In diesem Sinne haben wir auch das Gesetz, nach welchem die zwischen den Massen thätigen Kräfte wirken, das Anziehungsgesetz genannt. Die Gesetze der Bewegung beweisen nur, dass eine Kraft zwischen den verschiedenen Massen thätig ist, welche der Grösse der Massen direkt, dem Quadrat der Entfernungen umgekehrt proportional ist, woher diese Kraft rührt, ob wirklich die Materie aus der Ferne sich anzieht, darüber sagen sie nichts aus; deshalb hat auch Newton niemals behauptet, dass aus diesen Bewegungsgesetzen eine Anziehung der Materie folge, sondern dass die Bewegungen der Gestirne den Beweis lieferten, dass zwischen denselben eine Kraft thätig sei, wie wenn die Materie aus der Ferne sich anzöge. In neuerer Zeit ist man vielfach geneigt, eine solche Wirkung in die Ferne zwischen der Materie nicht anzunehmen, sondern diese scheinbare Anziehung auf andere Ursachen zurückzuführen. Auf diese Speculationen können wir an dieser Stelle noch nicht eingehen, wir werden an einer andern Stelle auf dieselben zurückkommen. Wir wollen zunächst diese Kraft als eine Anziehung der Materie bezeichnen, um eben einen Namen für dieselbe zu haben, ohne damit schon hier uns darüber zu entscheiden, ob wir annehmen müssen, dass die Materie wirklich ohne weitere Vermittlung aus der Entfernung auf einander einwirkt oder nicht.

§. 25.

Identität der Schwere und der allgemeinen Anziehung. Den Ausgangspunkt für die Betrachtungen der vorigen §§. bildete die Erfahrung, dass alle Körper an der Erdoberfläche einer nach der Verticalen, also gegen den Mittelpunkt der Erde gerichteten Kraft unterworfen sind, und der daraus gezogene Schluss, dass diese Kraft bis in beliebige Ent-

fernungen wirke. Wir müssen nun aber noch direkt den Nachweis liefern, dass die Schwerkraft mit der allgemeinen Massenanziehung dieselbe ist; wir thuen das, indem wir die Grösse der an der Erde beobachteten Schwerkraft vergleichen mit der Anziehung, welche die Himmelskörper auf einander ausüben. Wir vergleichen nach dem Vorgange Newtons die Schwerkraft an der Erdoberfläche mit der Anziehung der Erde auf den Mond.

Der Mittelpunkt des Mondes ist von dem Mittelpunkte der Erde im Mittel 60 Erdradien entfernt. Diese Entfernung des Mondes von der Erde ist gegenüber dem Abstande beider von der Sonne ein so kleiner, sie ist nur etwa ein Vierhundertstel des letztern, dass wir ohne einen merklichen Fehler annehmen dürfen, die Bewegung des Mondes um die Erde sei nur durch die Anziehung dieser beiden Himmelskörper bedingt. Der Mond beschreibt um die Erde, letztere als ruhend betrachtet, eine Ellipse, in deren einem Brennpunkte sich die Erde befindet. Die beiden Brennpunkte der Ellipse sind nun so wenig von einander und von dem Mittelpunkte der Erde, dieselbe als Kugel betrachtet, entfernt, dass wir sie beide als mit dem letztern zusammenfallend ansehen, somit die Bahn des Mondes als einen Kreis betrachten können, dessen Mittelpunkt mit dem Mittelpunkte der Erde zusammenfällt. Nach diesen vereinfachten Annahmen können wir zwar keine absolute Genauigkeit in den numerischen Resultaten erhalten, die Genauigkeit ist aber, da alle unsere Annahmen nur wenig von der Wahrheit abweichen, für unsere Zwecke ausreichend.

Die Anziehung der Erde auf den Mond erhalten wir, indem wir die Centripetalkraft berechnen, welche den Mond in seiner Bahn erhält, denn die Anziehung der Erde ist diese centripetale Kraft. Bezeichnen wir nun den Radius der Mondbahn mit R, die Masse des Mondes mit m, so erhalten wir für diese Kraft

$$F = \frac{4\pi^2 R m}{T^2}$$

oder für die Beschleunigung, welche der Mond gegen die Erde erhält,

$$G = \frac{F}{m} = \frac{4\pi^2 R}{T^2}.$$

Der Radius der Mondbahn ist gleich 60 Erdradien, bezeichnen wir den letztern mit r, so wird

$$G = \frac{4\pi^2 r . 60}{T^2} = \frac{2\pi r . 2\pi . 60}{T^2}.$$

In diesem Ausdrucke ist $2\pi r$ der Umfang der Erde gleich 40000000 Meter, T die Umlaufszeit des Mondes gleich 27 Tagen 7 Stunden 43 Minuten, gleich 39343.60 Secunden, deshalb wird

$$G = \frac{40000000 . 2\pi}{(39343)^2 . 60} = 0{,}002706 \text{ Meter.}$$

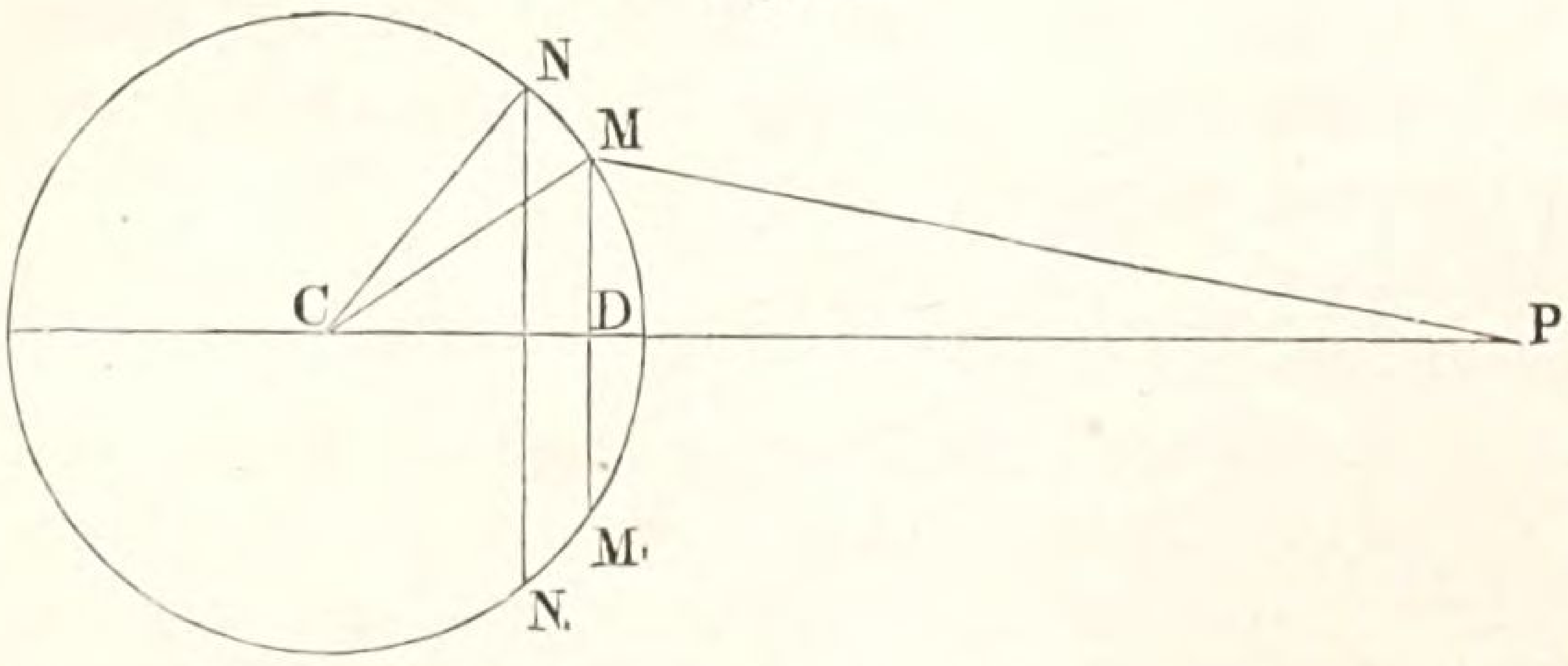
Der Mond erhält also in der Secunde eine Beschleunigung gegen den Mittelpunkt der Erde von 0,002706 Meter; oder auch, da die Beschleunigung gleich ist dem Quotienten aus der wirksamen Kraft und der bewegten Masse, somit gleich ist der auf die Masseneinheit wirkenden Kraft, so können wir diese Zahl dahin definiren, dass die Erde eine in der Entfernung des Mondes befindliche Masse, deren Grösse der Einheit gleich ist, mit einer Kraft von 0,002706 Kilogramm anzieht.

Ein an der Erdoberfläche befindlicher Körper erhält nun die Beschleunigung von 9,81 Meter gegen den Mittelpunkt der Erde, oder was dasselbe ist, die Einheit der Masse wird an der Erdoberfläche mit einer Kraft von 9,81 Kilogramm angezogen. Ist deshalb die Schwerkraft dieselbe Kraft, wie die allgemeine Massenanziehung, so müssen die in beiden Fällen gefundenen Beschleunigungen oder auf die Masseneinheit wirkenden anziehenden Kräfte sich umgekehrt verhalten wie die Quadrate der Abstände derselben von dem Punkte der Erde, von welchem wir uns die Anziehungen ausgehend denken können.

Dieser Punkt ist der Mittelpunkt der Erde. Dass das für sehr entfernte Massen, also den Mond der Fall ist, ergibt sich schon aus dem Satz vom Mittelpunkt der parallelen Kräfte. Denn ist die Masse von der Erde so weit entfernt, dass wir die Verbindungslinien aller Punkte der Erde mit allen Punkten der Masse, welche von der Erde angezogen wird, welche also rückwärts die Erde gegen sich hinzieht, als einander parallel betrachten können, so greifen an jedem Punkte der Erde parallele, gegen die Masse gerichtete Kräfte an. Die Erde befindet sich also jener Masse gegenüber gerade in demselben Verhältnisse, wie eine an der Erdoberfläche befindliche Kugel der Erde gegenüber. Wie nun alle an dieser Kugel angreifenden Kräfte sich zu einer resultirenden zusammensetzen, die im Schwerpunkt der Kugel, also in deren Mittelpunkt angreift, so auch bei der Erde jener entfernten Masse gegenüber. Die auf die einzelnen Punkte der Erde wirkenden Kräfte setzen sich zu einer ihrer Summe gleichen am Schwerpunkt, also da wir die Erde hier als eine homogene Kugel betrachten, im Mittelpunkte der Erde angreifenden Kraft zusammen. Da nun die Anziehung der Erde auf die entfernte Masse gleich und entgegengesetzt ist der Anziehung der Masse auf die Erde, so folgt, dass wir als den Punkt der Erde, von dem die Anziehung auf die entfernte Masse ausgeht, den Mittelpunkt der Erde zu betrachten haben. Ebenso greift die von der Erde ausgehende Anziehung auf den Mond an dem Mittelpunkte des Mondes an. Als Abstand des Mondes von der Erde haben wir somit den Abstand der beiden Mittelpunkte von einander einzusetzen.

Dass nun eine homogene oder aus homogenen Schalen bestehende Kugel auf einen in ihrer Nähe befindlichen Körper ebenfalls einen gegen den Mittelpunkt der Kugel gerichteten Zug ausüben muss, erkennt man durch folgende Ueberlegung. Es sei der Kreis Fig. 20 ein Durchschnitt der Kugel nach einem grössten Kreise, und in P im Abstande a von dem Mittelpunkte der Kugel befinde sich eine Masse, welche von der Kugel angezogen wird. Die Theile der Kugel, welche anziehend auf P wirken, sind dann ganz symmetrisch um die Verbindungslinie des Punktes P mit dem Mittelpunkte der Kugel vertheilt. In dem Durchschnitte der Zeichnung und so in jedem grössten Kreise, entspricht einem Punkte N an der einen Seite

Fig. 20.



von PC ein in gleicher Entfernung von PC liegender Punkt N an der andern Seite. Die Anziehung jedes Punktes N ist nach PN gerichtet; zerlegen wir dieselbe in eine PC parallele und eine zu PC senkrechte Componente, so heben die letztern sich auf, und es bleiben nur die nach C gerichteten Componenten übrig. Der von der Kugel auf P ausgeübte Zug muss also jedenfalls nach dem Mittelpunkte hin gerichtet sein.

Dass die Anziehung der ganzen Kugel auf den Punkt P nun gerade so wirkt, als wenn die ganze Masse der Kugel im Mittelpunkte concentrirt wäre, erscheint schon aus der Ueberlegung plausibel, dass die Masse der Kugel ganz gleichmässig um den Mittelpunkt vertheilt ist. Die näher liegenden Theile der Kugel ziehen den Punkt P stärker, die entfernt liegenden Theile ziehen ihn schwächer an, die Summe aller Anziehungen ist deshalb so, als wäre die ganze Masse im Mittelpunkt vereinigt. Der strenge Beweis dieses Satzes lässt sich nur durch eine Berechnung der Anziehungen führen. Wir wollen wegen der Wichtigkeit des Satzes die Rechnungen andeuten.

Wir berechnen zuerst die Anziehung einer Kugelschale von unendlich kleiner Dicke, und weisen nach, dass diese anziehend nach aussen gerade so wirkt, als wenn ihre Masse im Mittelpunkte vereinigt wäre. Stelle der Kreis einen Durchschnitt durch die Schale vor. Wir führen dann durch die Schale senkrecht zu PC zwei einander äusserst nahe parallele Schnitte MM und NN. Diese schneiden aus der Kugel einen Ring aus, dessen Volumen wir gleich dem Producte aus dem Umfange des Kreises MM, dem Bogen MN und der Dicke der Kugelschale setzen können, wenn wir eben die Dicke δ der Schale und den Bogen MN so klein voraussetzen, dass der Kreis MM von dem in der Mitte der Schale zwischen M und N gelegten Schnitte nur unendlich wenig verschieden ist. Multipliciren wir das Volumen des Ringes mit der Dichtigkeit der Kugelschale, das ist der in der Volumeinheit enthaltenen Masse σ, so gibt uns dieses Product die Masse des Ringes. Betrachten wir nun zunächst ein unendlich kleines Stück des Ringes bei MN, so zieht dieses die in P vorhandene Masse m in der Richtung MP an mit einer Kraft, die dem Producte der in dem unendlich kleinen Stück vorhandenen Masse und der Masse m direkt, dem Quadrate der Entfernung MP umgekehrt proportional ist, die also, wenn die Masse des unendlich kleinen Stückes μ ist, gleich ist

$$f \cdot \frac{\mu \cdot m}{MP^2};$$

hierin bezeichnet f die Kraft, mit der sich zwei der Einheit gleiche Massen in der Einheit der Entfernung anziehen. Für die parallel CP gerichtete Componente dieser Kraft erhalten wir dann

$$f \frac{\mu\, m}{MP^2} \cos MPC.$$

Da nun alle einzelnen Stücke des Ringes sich in der gleichen Entfernung MP von P befinden, und da für alle der Winkel MPC derselbe ist, so erhalten wir für jedes Stück des Ringes den gleichen Werth für die nach PC gerichtete Anziehung. Die Anziehung des ganzen Ringes nach PC erhalten wir nun, indem wir die Anziehung aller einzelnen Stücke, deren Masse μ, μ_1; μ_2 sind, addiren. Diese Summe ist

$$f\frac{\mu m}{MP^2}\cos MPC + f\frac{\mu_1 m}{MP^2}\cos MPC + \cdots$$
$$= (\mu + \mu_1 + \mu_2 \cdots) f\frac{m}{MP^2}\cos MPC.$$

Die Klammer auf der rechten Seite enthält alle Massentheile unseres Ringes, somit ist die Summe einfach gleich der Masse unseres Ringes, also wie wir vorhin sahen gleich $2\pi MD . MN . \delta . \sigma$. Darnach wird die Anziehung des Ringes parallel PC

$$f\frac{2\pi MD . MN . \delta . \sigma . m}{MP^2} \cdot \cos CPM.$$

Da, wie wir vorhin zeigten, die Componenten der Anziehung senkrecht zu PC sich aufheben, so ist dies die resultirende Anziehung des Ringes auf die in P befindliche Masse m.

Die ganze Kugelschale können wir nun aus einer unendlich grossen Anzahl solcher Ringe zusammengesetzt betrachten; für die Anziehung jedes Ringes erhalten wir dann einen ganz gleichen Ausdruck, summiren wir diese alle, so gibt uns die Summe die Anziehung der ganzen Schale. In den einzelnen Gliedern dieser Summe ändern sich der Radius MD des Ringes, der Abstand MP und der Winkel CPM. Um die Summirung ausführen zu können, müssen wir zunächst diese drei Grössen durch eine ausdrücken, so dass gleichzeitig die Veränderungen derselben durch die einer einzigen Grösse gegeben sind.

Bezeichnen wir den Radius der Kugelschale mit r, den Winkel MCD mit ϑ und den Bogen MN im Winkelmaass mit $d\vartheta$, so dass der Winkel $NCD = \vartheta + d\vartheta$ ist, und schliesslich den Abstand MP mit e, den Abstand NP mit $e + de$, so können wir alle veränderlichen Grössen durch e ausdrücken.

Wir erhalten zunächst

$$MD = r\sin\vartheta;\quad MN = r . d\vartheta;\quad \cos CPM = \frac{DP}{MP} = \frac{a - r . \cos\vartheta}{e}.$$

In dem Dreieck MPC erhalten wir weiter

$$e^2 = a^2 + r^2 - 2ar . \cos\vartheta$$
$$r . \cos\vartheta = \frac{a^2 + r^2 - e^2}{2a},$$

somit

$$\cos CPM = \frac{a - r\cos\vartheta}{e} = \frac{a^2 + e^2 - r^2}{2ae}.$$

Damit wird die Anziehung des Ringes

$$f \cdot \frac{2\pi r\sin\vartheta\, d\vartheta\, r\,\delta\,\sigma\, m}{e^2}\;\frac{a^2 + e^2 - r^2}{2ae}.$$

Hierin haben wir noch $\sin\vartheta d\vartheta$ durch e und de auszudrücken. In dem Dreieck NPC erhalten wir

$$NP^2 = PC^2 + NC^2 - 2PC . CN . \cos PCN$$
$$(e + de)^2 = a^2 + r^2 - 2ar\cos(\vartheta + d\vartheta)$$

oder

$$e^2 + 2ede + de^2 = a^2 + r^2 - 2ar(\cos\vartheta\cos d\vartheta - \sin\vartheta\sin d\vartheta).$$

Da nun de und $d\vartheta$ unendlich klein sind, können wir de^2 als gegen de unendlich klein vernachlässigen, und

$$\cos d\vartheta = 1 \quad \sin d\vartheta = d\vartheta$$

setzen. Ziehen wir dann auf beiden Seiten e^2 ab, so wird

$$e\,de = ar \sin\vartheta\, d\vartheta; \quad \sin\vartheta\, d\vartheta = \frac{e}{ar}\cdot de.$$

Setzen wir diesen Werth in unsern Ausdruck für die Anziehung und ordnen passend, so wird derselbe

$$f\frac{\pi\, r\, \delta\, \sigma\, m}{a^2}\left(1 + \frac{a^2 - r^2}{e^2}\right) de.$$

Hierin ist als einzige veränderliche Grösse nur mehr der Abstand e des Punktes P von dem betrachteten Ringe. Die Anziehungen der verschiedenen Ringe bekommen wir, indem wir den jedem Ringe entsprechenden Werth von e einsetzen, und die Anziehung der ganzen Schale, indem wir alle einzelnen Anziehungen der einzelnen Ringe summiren. Der kleinste Werth, den e annehmen kann, ist nun $a - r$, es ist der Abstand des Punktes P von dem Punkte der Schale, den die Verbindungslinie PC schneidet; der grösste Werth ist $a + r$, es ist der Abstand des Punktes der Kugelschale, den die verlängerte PC trifft. Wir haben demnach die Summen aller dem obigen gleichen Ausdrücke zu bilden, indem wir für e nach und nach alle Werthe zwischen $a - r$ und $a + r$ einsetzen, also

$$\int\limits_{a-r}^{a+r} f\frac{\pi\, r\, \delta\, \sigma\, m}{a^2}\left(1 + \frac{a^2 - r^2}{e^2}\right) de,$$

oder auch, indem wir den constanten Coefficienten vor das Summenzeichen setzen,

$$f\frac{\pi\, r\, \delta\, \sigma\, m}{a^2}\int\limits_{a-r}^{a+r}\left(1 + \frac{a^2 - r^2}{e^2}\right) de.$$

In der Differentialrechnung wird nun bewiesen, dass der Ausdruck unter dem Summenzeichen gleich der Differenz

$$\left(e + de - \frac{a^2 - r^2}{e + de}\right) - \left(e - \frac{a^2 - r^2}{e}\right)$$

ist, und daraus folgt nach §. 1, dass die Summe gleich ist

$$\left(a + r - \frac{a^2 - r^2}{a + r}\right) - \left(a - r - \frac{a^2 - r^2}{a - r}\right) = 4\, r.$$

Damit wird dann die Anziehung der ganzen Kugelschale

$$f\,\frac{\pi\, r\, \delta\, \sigma\, m}{a^2}\cdot 4\, r = f\frac{4\, r^2\, \pi\, \delta\, \sigma\, m}{a^2}.$$

Im Zähler dieses Ausdruckes ist $4\, r^2\, \pi$ die Fläche, somit $4\, r^2\, \pi\, \delta$ das Volumen der Kugelschale, und das Product dieses Volumens mit der Dichtigkeit σ die Masse der Kugelschale; bezeichnen wir dieselbe mit M, so wird die Anziehung

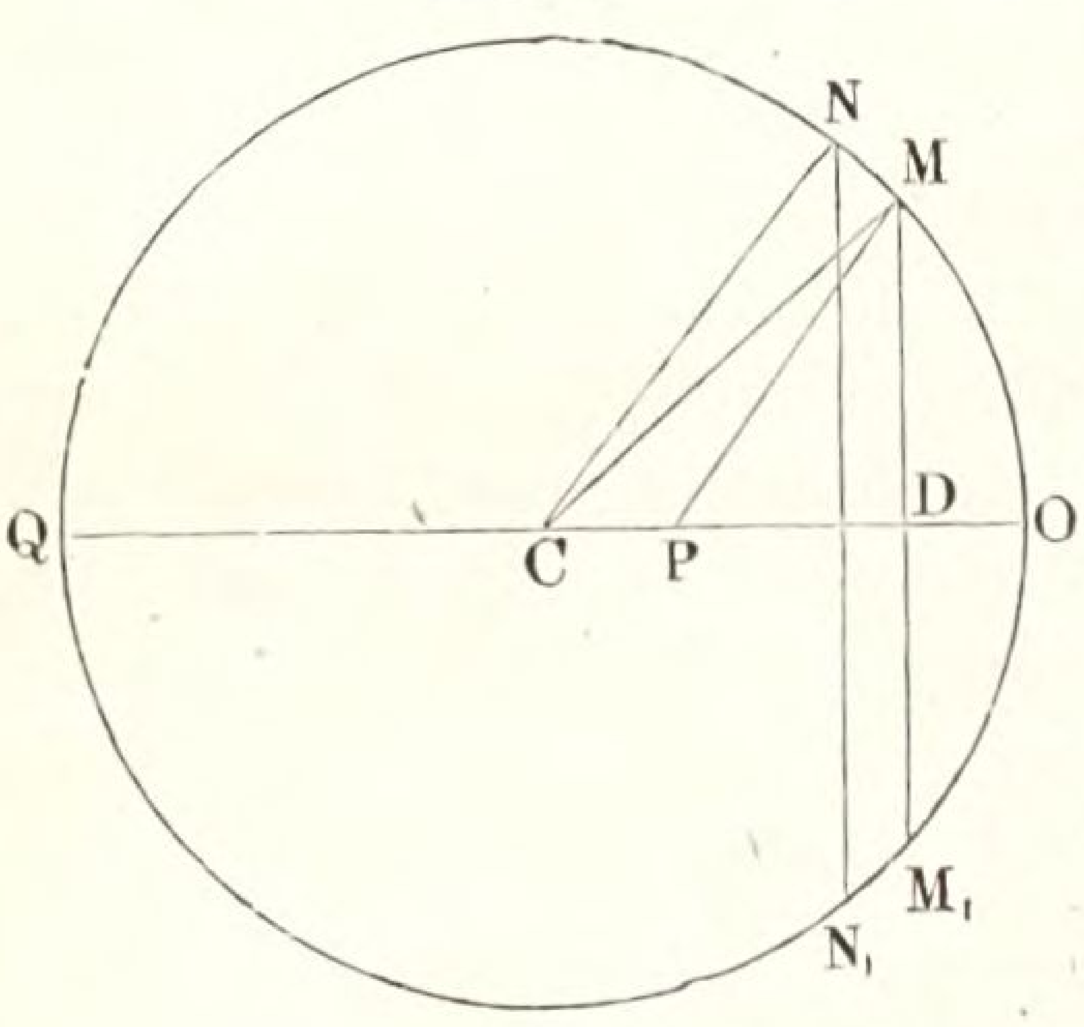
$$f\frac{M\, m}{a^2},$$

oder die Kugelschale zieht die im Punkte P befindliche Masse m gerade so an, als befände sich ihre Masse M im Abstande a von m, also in dem Mittelpunkte der Schale.

Wir können uns nun eine homogene Kugel ganz aus solchen einzelnen Schalen zusammengesetzt denken, für jede dieser Schalen gilt derselbe Nachweis, somit gilt auch für eine homogene Kugel der Satz, dass sie eine ausserhalb befindliche Masse gerade so anzieht, wie wenn die Masse der Kugel in ihrem Mittelpunkte concentrirt wäre.

Wir wollen an dieser Stelle über die Anziehungen einer homogenen Kugelschale noch einen weiteren, für später wichtigen Satz ableiten, nämlich den, dass eine Kugelschale auf eine in ihrem Hohlraum befindliche Masse gar keine Anziehung ausübt. Ist Fig. 21 der Kreis ein Durchschnitt durch die Kugelschale, C deren Mittelpunkt und P ein Punkt im Innern der Hohlkugel, in welchem sich die Masse m befindet, so verfahren wir, um die Anziehung der Kugelschale auf die Masse m zu berechnen, genau wie vorher, wir bestimmen zunächst die parallel CP gerichtete Componente der Anziehung des Ringes $MMNN$ auf den Punkt P. Bezeichnen wir nun den Abstand CP mit a, PM mit e und behalten im Uebrigen genau die vorhin angewandte Bezeichnung bei, so kann die vorige Entwicklung auch für diesen Fall ganz genau beibehalten werden, so dass wir für die Anziehung des Ringes genau denselben Ausdruck erhalten wie vorher. Wir haben dann auch hier die Werthe für alle Ringe zu bilden, indem wir für jeden den entsprechenden Werth von e einsetzen, und dann die Summe aller Ausdrücke für die einzelnen Ringe bilden. Die Werthe von e, die hier vorkommen, liegen aber nicht zwischen $a - r$ und $a + r$, sondern der kleinste Werth von e ist $PO = r - a$ und der grösste $PO = r + a$. Die hier zu bildende Summe ist somit

Fig. 21.



$$f \frac{\pi r \delta \sigma m}{a^2} \int_{r-a}^{r+a} \left(1 + \frac{a^2 - r^2}{e^2}\right) de.$$

Der unter dem Summenzeichen stehende Ausdruck ist genau derselbe wie vorher, die Summe ist demnach

$$\left(r + a - \frac{a^2 - r^2}{r + a}\right) - \left(r - a - \frac{a^2 - r^2}{r - a}\right) = 0.$$

Da somit diese Summe gleich 0 ist, so folgt, dass die Anziehung einer Kugelschale auf eine in deren Hohlraum befindliche Masse gleich 0 ist; wo also auch im Innern der Hohlkugel die Masse m sich befinden mag, sie erhält von der Schale gar keine Anziehung.

Wir werden diesen Satz später mehrfach anwenden. Wenden wir uns jetzt wieder zur Vergleichung der Schwerkraft mit der allgemeinen Anziehung, so müssen wir nach dem ersten der beiden Sätze über die Anziehung von Kugeln, für die Anziehung an der Erdoberfläche als an-

ziehenden Punkt den Mittelpunkt der Erde nehmen, denn die Erde zieht alle an ihrer Oberfläche vorhandenen Körper so an, als wäre die ganze Masse der Erde in ihrem Mittelpunkte concentrirt. Der Abstand der Körper an der Erdoberfläche von dem anziehenden Mittelpunkte ist somit gleich dem Erdradius.

Ist nun die Schwere mit der allgemeinen Massenanziehung dieselbe Kraft, so muss sich die Beschleunigung an der Erde zu derjenigen des Mondes gegen die Erde hin verhalten wie das Quadrat des Mondabstandes zum Quadrat des Erdradius, oder da wir sahen, dass der Abstand des Mondes gleich 60 Erdradien ist, so muss

$$G : g = 1 : 3600$$

$$G = \frac{g}{3600} = \frac{9{,}81}{3600} = 0{,}002728,$$

während wir aus der Umlaufszeit des Mondes den Werth

$$G = 0{,}002706$$

abgeleitet hatten. Man sieht, dieser Werth und der aus der Theorie der Anziehung sich ergebende sind so nahe gleich, dass der Unterschied als Folge der Ungenauigkeit unserer über die Mondbewegungen gemachten Annahmen zu erkennen ist. Damit folgt also in der That, dass die Schwere der Körper an der Erdoberfläche dieselbe Kraft ist wie jene, die zwischen den Himmelskörpern thätig ist, dass wir sie somit als eine Anziehung zwischen der Masse der ganzen Erde und der an der Erdoberfläche befindlichen Körper bezeichnen können.

Hieraus ergibt sich dann sofort auch, dass wenn man sich von der Erdoberfläche in die Höhe hebt, die Beschleunigung g eine kleinere werden muss. Nennen wir die Beschleunigung an der Erdoberfläche g_0, in der Höhe x über derselben g, so muss

$$g_0 : g = \frac{1}{R^2} : \frac{1}{(R + x)^2}$$

$$g_0 = g \left(1 + \frac{x}{R}\right)^2; \qquad g = g_0 \frac{1}{\left(1 + \frac{x}{R}\right)^2},$$

oder mit hinreichender Annäherung für alle in der Praxis zu erreichenden Höhen

$$g_0 = g \left(1 + 2\,\frac{x}{R}\right); \qquad g = g_0 \left(1 - 2\,\frac{x}{R}\right).$$

Man kann darnach aus dem Werthe g_0 den Werth von g für jede beliebige Höhe berechnen.

§. 26.

Verschiedenheit von g in verschiedenen Breiten. Ist die Beschleunigung g der Körper an der Erdoberfläche eine Folge der Anziehung der Masse der Erde auf die Körper, so muss der Werth derselben unter verschiedenen Breitegraden ein verschiedener sein. Denn wir wissen, dass die Erde sich in 24 Stunden einmal um ihre Axe dreht; jeder Punkt an

der Erdoberfläche beschreibt daher in 24 Stunden einen Kreis, dessen Radius gleich ist dem senkrechten Abstande des betrachteten Punktes von der Erdaxe, es ist der Parallelkreis, unter welchem sich der betreffende Punkt befindet. Ein Theil der von der Erde auf die Körper wirkenden anziehenden Kraft muss deshalb als Centripetalkraft dieselben in der Kreisbewegung halten, dieser Theil kann nicht beschleunigend auf die Körper einwirken. Um die Beschleunigung zu erhalten, müssen wir deshalb von der anziehenden Kraft der Erde jenen Theil abziehen, welcher als Centripetalkraft in Rechnung zu ziehen ist. Dieser Theil ist nun aus zwei Gründen an den verschiedenen Stellen der Erde verschieden; zunächst sind die Kreise, in denen sich die Punkte der Erdoberfläche bewegen, um so kleiner, je mehr man sich dem Pole nähert, und zweitens ist die centrifugale Beschleunigung nur unter dem Aequator gerade der Schwere entgegengerichtet; an allen andern Orten ist die Centrifugalbeschleunigung von der Erdaxe fortgerichtet, bildet also mit der Richtung der Schwere einen Winkel, der gleich ist der geographischen Breite des Ortes. Nur die in die Richtung der Schwere fallende, von der Erde fortgerichtete Componente der centrifugalen Beschleunigung, welche gleich dem Producte der ganzen centrifugalen Beschleunigung in den Cosinus der Breite ist, muss ein Theil der Schwerkraft als centripetale Kraft entgegen wirken. Die Beschleunigung g muss deshalb um so kleiner werden, je mehr man sich dem Aequator nähert.

Nach welchem Gesetze sich g ändern muss, ergibt sich auf folgende Weise. Auf dem Aequator muss die centrifugale Beschleunigung

$$\frac{F}{m} = \frac{4\pi^2 R}{T^2} = \frac{2\pi \,.\, 40000000}{(24.60.60)^2} = 0{,}03368 \text{ Meter}$$

sein. Unter einer geographischen Breite φ ist der Radius des Kreises, in dem sich die Körper an der Erdoberfläche bewegen, gleich dem senkrechten Abstande der Oberfläche von der Drehungsaxe der Erde, also gleich $R \,.\, \cos\varphi$. Für diesen Ort ist also die centrifugale Beschleunigung $0{,}03368 \cos\varphi$. Da dieselbe mit der Richtung der Schwere denselben Winkel φ bildet, welchen der Radius des Kreises mit dem an denselben Punkt gezogenen Erdradius bildet, so ist die in die Richtung der Schwere fallende Componente $0{,}03368 \cos^2\varphi$. Ist nun G die Beschleunigung, welche die nicht rotirende Erde den Körpern ertheilen würde, so folgt für die wirkliche Beschleunigung unter der Breite φ

$$g = G - 0{,}03368 \cos^2\varphi,$$

oder setzen wir die Beschleunigung unter dem Aequator gleich g_0, so dass

$$g_0 = G - 0{,}03368,$$

erhalten wir

$$g = g_0 + 0{,}03368 \sin^2\varphi.$$

Dass in der That die Grösse g sich mit der geographischen Breite ändert und zwar in dem Sinne, wie es diese Entwicklungen fordern, ergibt sich aus den Beobachtungen der Schwingungsdauer des Pendels, resp. aus der Bestimmung der Länge des Secundenpendels für die verschiedenen geographischen Breiten. Es ergibt sich aus denselben aber weiter, dass die

Aenderungen von g stärker sind, als es nach unsern Entwicklungen sein sollte.

Nach den Beobachtungen von Sabine ergibt sich nämlich für das Meeresniveau

Breite	Länge des Secundenpendels	g
0^0	$0,^m 990938$	$9,^m 78009$
45^0	0, 993509	9, 80552
90^0	0, 996080	9, 83089.

Die Grösse g der dritten Columne ergibt sich aus den Längen l, der zweiten Columne nach der Gleichung für die Schwingungsdauer des mathematischen Pendels

$$g = \pi^2 l,$$

da die gegebenen Längen jene des mathematischen Pendels bedeuten.

Die hier angegebenen, sowie die überhaupt von Sabine beobachteten Werthe von g entsprechen der Gleichung

$$g = 9,78009 + 0,05080 \sin^2 \varphi.$$

Es ist somit die Zunahme der Beschleunigung mit wachsender Breite eine nicht unbeträchtlich grössere, als sie nach der Aenderung der centrifugalen Beschleunigung sein sollte; es muss deshalb noch eine weitere Ursache dieser Aenderung vorhanden sein.

Das ist in der That der Fall. Nach geodätischen Messungen ist nämlich die Erde nicht, wie wir bisher vorausgesetzt haben, eine Kugel, sondern ein an den Polen abgeplattetes Ellipsoid, so dass die Differenz zwischen Aequatorialradius und der halben Axe, die sogenannte Abplattung, $\frac{1}{299}$ des Aequatorialradius beträgt. Ohne auf die Anziehungen solcher ellipsoidischer Massen auf ausserhalb befindliche Körper einzugehen, erkennt man, dass bei diesen die Anziehung an der Oberfläche nicht überall gleich sein kann. Auch hier können wir annähernd die Anziehung als von dem Mittelpunkte des Ellipsoides ausgehend betrachten; da man sich dann dem anziehenden Mittelpunkte um so mehr nähert, je mehr man sich auf der Oberfläche dem Endpunkte der kleinen Axe nähert, so muss auch die Anziehung mit dieser Annäherung zunehmen. Daraus folgt dann, dass die Grösse G, die Beschleunigung, welche an der nicht rotirenden Erde vorhanden sein würde, nicht wie in obiger Entwicklung angenommen wurde, constant ist, sondern mit wachsender geographischer Breite zunehmen muss. Man kann diese Zunahme in Folge der Abweichung der Erde von der Kugelgestalt berechnen, und die Rechnung gibt einen dem beobachteten sehr nahe gleichen Werth, dieselbe ergibt nämlich

$$G = G_0 + 0,01780 \sin^2 \varphi,$$

oder für g mit Beachtung der Centrifugalbeschleunigung

$$g = 9,78009 + 0,05148 \sin^2 \varphi.$$

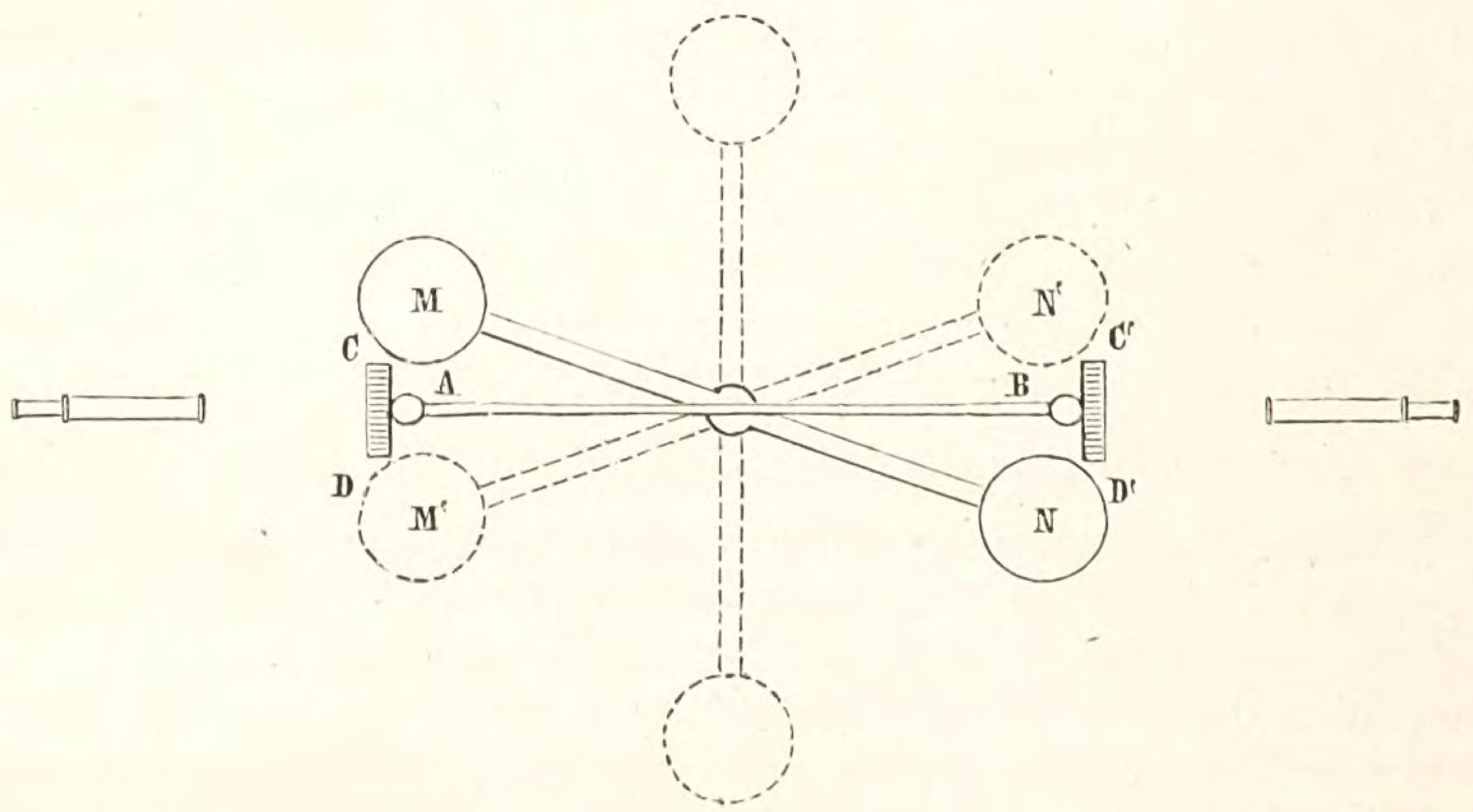
Würde man für die Abplattung einen nur um ein Geringes kleinern Werth annehmen, so würde man für g genau den experimentell gefundenen Werth erhalten.

§. 27.

Anziehung von Massen an der Erdoberfläche. Dichtigkeit der Erde. Die in den letzten §§. besprochenen Sätze über die allgemeine Massenanziehung lassen noch eine Folgerung zu, welche einer experimentellen Prüfung fähig ist. Es müssen dann auch die einzelnen Körper auf der Erde sich gegenseitig anziehen und diese Anziehung muss messbar sein. Diese Anziehung ist auch in der That nachgewiesen und gemessen worden und dann dazu benutzt worden, die Dichtigkeit der Erde zu bestimmen. Cavendish, Reich, Baily, Cornu haben die Anziehung von zwei Metallkugeln beobachtet, Maskelyne und Hutton, sowie Carlini und Biot haben gezeigt, dass die Berge der Erdoberfläche eine gegen ihren Schwerpunkt gerichtete Anziehung ausüben, und Airy schliesslich hat die Anziehung einer Kugelschale der Erde mit derjenigen der ganzen Erde verglichen.

Die ersten Beobachter massen die Anziehung zweier Kugeln mit Hülfe der Torsion eines sehr feinen Drahtes. Ein leichter, möglichst gleichmässig gearbeiteter Hebel, der an seinen Enden zwei Kugeln trägt, AB Fig. 22,

Fig. 22.



ist in seiner Mitte an einem möglichst langen und feinen Metalldrahte aufgehängt, so dass er horizontal schwebt. An den Kugeln sind an jeder ein Elfenbeinstreif angebracht, CD und $C'D'$, der mit einer Theilung versehen ist. Der Hebel ist in einem möglichst festen und ruhigen Raume aufgehängt und ausserdem mit einem rings geschlossenen Kasten umgeben, um alle Luftströmungen abzuhalten. Den Elfenbeinstreifen gegenüber sind die Wände des Kastens von Spiegelglas, damit man mit in einiger Entfernung fest aufgestellten Fernrohren die Theilung auf den Elfenbeinstreifen beobachten kann.

Ein solches an einem feinen Drahte aufgehängtes Horizontalpendel hat eine bestimmte Gleichgewichtslage, die, wie im nächsten Kapitel hervortreten wird, dadurch bedingt ist, dass der Aufhängedraht nicht gedrillt, dass er ohne Torsion ist. Bringt man den Hebel durch eine Drehung um die Axe des Aufhängedrahtes aus der Gleichgewichtslage, so wird dadurch gleichzeitig der Draht tordirt, und die durch diese Torsion in

dem Drahte geweckte elastische Kraft übt dann ein den Hebel zurückdrehendes Drehungsmoment aus, dessen Grösse, wie wir §. 33 nachweisen werden, der Grösse der Ablenkung proportional ist. Wir werden dann gleichzeitig zeigen, wie man dieses Drehungsmoment messen, also auch bestimmen kann, welchen Zug in Milligrammen oder Grammen man an den Enden des Hebels AB von der Gleichgewichtslage fort anbringen muss, um den Hebel in einer bestimmten abgelenkten Lage, also in einer Ablenkung von 1^0 oder 2^0 etc. zu halten.

Setzen wir voraus, diese Messung sei an dem betreffenden Apparate gemacht worden, so dass man weiss, welche Kraft an A und B angreifen muss, um den Hebel in irgend einer abgelenkten Lage zu halten. Bringt man dann in einer bestimmten Entfernung von den Kugeln A und B, nachdem man die Gleichgewichtslage beobachtet hat, ausserhalb des Kastens in derselben Horizontalebene, in der sich der Hebel drehen kann, zwei grosse Kugeln M und N an, so müssen diese eine bestimmte anziehende Kraft auf die kleinen Kugeln a und b ausüben, und da diese Anziehungen bei der Anordnung Fig. 22 den Hebel in demselben Sinne drehen, so muss durch dieselben der Hebel abgelenkt werden. Die Ablenkung muss so weit gehen, bis das durch die Anziehungen demselben ertheilte Drehungsmoment gleich ist dem in der abgelenkten Lage durch die Torsion des Fadens bedingten zurückdrehenden Drehungsmomente.

Zur Durchführung der Versuche werden die Kugeln M und N an einem gebogenen Hebel befestigt, der um eine unter dem das horizontale Pendel AB umschliessenden Kasten aufgestellte feste Axe drehbar ist. Die Kugeln werden zunächst so aufgestellt, dass ihre Verbindungslinie senkrecht zu AB ist und dann die Gleichgewichtslage von AB beobachtet. Darauf wird der Hebel so gedreht, dass die Kugeln MN die Lage MN Fig. 22 haben, und die Ablenkung von AB mit dem Fernrohr beobachtet. Bei einem zweiten Versuche werden dann die Kugeln in die Lage $M'N'$ gebracht, in die zur ersten symmetrische Lage, wodurch die Ablenkung nach der andern Seite stattfindet.

In der That ist von allen Experimentatoren bei diesen Versuchen eine messbare Ablenkung des Hebels AB beobachtet worden und so der Beweis geliefert, dass an der Erdoberfläche befindliche Massen sich gerade so anziehen, wie zwei Himmelskörper.

Aus der Vergleichung der so gemessenen Anziehung der Kugeln A und B durch die Kugeln M und N mit dem Gewichte der Kugeln A und B lässt sich dann die Masse resp., da das Volumen der Erde bekannt ist, die Dichtigkeit der Erde bestimmen. Bezeichnen wir die durch die Torsion des Aufhängedrahtes gemessene Anziehung mit F, den Abstand der Schwerpunkte der sich anziehenden Kugeln mit D, bezeichnen wir ferner das Gewicht der Kugeln M und N mit P und nennen die Anziehung, welche die Masseneinheit auf die Kugeln A und B in der Entfernungseinheit ausüben würde φ, so folgt aus den Gesetzen der allgemeinen Massenanziehung

$$F \cdot D^2 = \frac{P}{g} \cdot \varphi.$$

Denn da uns F die Anziehung gibt, wenn die sich anziehenden Massen die Entfernung D haben, folgt aus dem Satze, dass die Anziehungen dem

Quadrate der Entfernung umgekehrt proportional sind, dass in der Einheit der Entfernung die Anziehung $F . D^2$ ist. Da wir ferner die Anziehung der Masseneinheit auf die Kugeln A und B in der Entfernungseinheit φ genannt haben, folgt ebenfalls, dass die Masse der Kugeln M und N, $\frac{P}{g}$, in der Entfernungseinheit die Kugeln A und B mit der Kraft $\frac{P}{g} \cdot \varphi$ anzieht.

Bezeichnen wir das Gewicht der Kugeln A und B mit p, die Masse der Erde mit $\frac{P_1}{g}$ und nennen den Radius der Erde R, so haben wir andererseits

$$p . R^2 = \frac{P_1}{g} \cdot \varphi,$$

da wir im vorigen §. bewiesen haben, dass die Erde die an ihrer Oberfläche vorhandenen Körper so anzieht, als wenn die ganze Masse der Erde in ihrem Mittelpunkte vereinigt wäre. Aus diesen beiden Gleichungen folgt

$$\frac{F . D^2}{p . R^2} = \frac{P}{P_1}$$

oder für das Gewicht der Erde

$$P_1 = \frac{P R^2}{D^2} \frac{p}{F}.$$

Das Volumen der Erde, dieselbe als Kugel betrachtet, ist gleich $^4/_3\, \pi\, R^3$, ist d die Dichtigkeit der Erde, so ist

$$P_1 = {}^4/_3 \pi\, R^3\, d,$$

somit

$$d = \frac{0{,}75\, p\, P}{\pi\, R\, D^2\, F}.$$

Aus den Versuchen von Cavendish ergab sich auf diese Weise

$$d = 5{,}48.$$

Annähernd denselben Werth ergaben die Wiederholungen der Versuche durch Reich, Baily und Cornu, im Mittel für d den Werth 5,6. Darnach ist die mittlere Dichtigkeit der Erde etwas mehr als fünf und ein halb mal grösser, als wenn die Erde ganz aus Wasser bestände.

Maskelyne beobachtete die Anziehung von Gebirgsmassen, indem er die Ablenkung des Lothes durch dieselben bestimmte. Befindet sich nämlich ein Loth in der Nähe eines hinreichend grossen Berges, so muss dasselbe aus der verticalen Richtung abgelenkt werden, da zu der nach der Verticalen gerichteten Anziehung der Erde ein durch die Anziehung des Berges ausgeübter horizontaler Zug hinzutritt. Das Loth muss sich dann in die Richtung der Resultirenden stellen, und man erkennt leicht, dass die Tangente des Winkels, den das Loth mit der Verticalen bildet, gleich dem Quotienten aus dem horizontalen Zuge des Berges und der Anziehung der Erde ist.

Die von Carlini angewandte Methode war eine andere; er beobachtete die Schwingungsdauer eines Pendels auf der Spitze des MontC enis. Aus der Höhe des Beobachtungsortes über dem Meeresniveau liess sich dann nach dem vorigen §. die Schwingungsdauer des Pendels für diese Höhe berechnen. Die Beobachtung ergab, dass die Schwingungsdauer eine klei-

nere war, es folgte somit, dass die Masse des Berges dem Pendel eine gewisse Beschleunigung ertheilte, deren Grösse aus der Differenz der berechneten und beobachteten Schwingungsdauer sich ableiten liess.

Nach beiden Methoden vergleicht man die Anziehung einer Gebirgsmasse mit der Anziehung der Erde; kann man die Lage des Schwerpunktes der Gebirgsmasse und die Grösse der Masse bestimmen, so lässt sich auch aus diesen Beobachtungen die Dichtigkeit der Erde ebenso ableiten, wie nach der ersten Methode. Die sich aus diesen Beobachtungen ergebenden Zahlen können aber begreiflicher Weise nicht dieselbe Genauigkeit haben, wie die nach der ersten Methode, da es äusserst schwierig ist, die Masse des einwirkenden Gebirges und die Lage seines Schwerpunktes zu bestimmen.

Airy schliesslich verglich die Schwingungsdauer zweier Pendel, deren eines an der Oberfläche der Erde, deren anderes in einer gewissen Tiefe unter der Oberfläche auf dem Boden eines Bergwerks bei Harton in England, in einer Tiefe von 383 Meter aufgestellt war. Das Pendel an der Erdoberfläche erhielt seine Beschleunigung von der ganzen Erde, das Pendel in der Tiefe dagegen von derjenigen Kugel, welche von einer der Erdoberfläche concentrischen Kugelfläche eingeschlossen wird, die durch den Aufstellungspunkt des untern Pendels gelegt wird. Denn wie wir im vorigen §. zeigten, ist die Anziehung einer Kugelschale auf alle in dem von ihr umschlossenen Raume befindlichen Körper gleich Null.

Um nun zu bestimmen, wie sich in Folge dessen die Beschleunigungen g an der Erdoberfläche und g_1 in der Tiefe verhalten müssen, sei R der Radius der Erde, R_1 der Radius der innern Kugel. Die Anziehung an der Erdoberfläche ist gleich der Summe der Anziehungen der innern Kugel und der Kugelschale vom Radius $R - R_1$. Da nun alle Anziehungen gerade so erfolgen, als wären die anziehenden Massen im Mittelpunkte der Erde concentrirt, so ist die von der Anziehung der innern Kugel an der Erdoberfläche bewirkte Beschleunigung g' gegeben durch

$$g' : g_1 = \frac{1}{R^2} : \frac{1}{R_1^{\,2}}; \qquad g' = g_1 \frac{R_1^{\,2}}{R^2}.$$

Die Differenz der an der Erdoberfläche beobachteten Beschleunigung g und des so berechneten Werthes g' ist dann die Beschleunigung, welche bewirkt wird durch die Anziehung der Kugelschale allein. Da nun die Anziehungen so sind, wie wenn sie vom Mittelpunkt ausgingen, folgt, dass sich die durch die Kugelschale bewirkte Beschleunigung $g - g'$, und die durch die innere Kugel an der Erdoberfläche bewirkte Beschleunigung direkt verhalten müssen, wie die Masse der Schale zu der Masse der innern Kugel. Nennen wir Volumen und Dichtigkeit der Schale V und D, der innern Kugel V_1 und D_1, so ist demnach

$$g - g' : g' = VD : V_1 D_1$$

oder wenn wir den Werth von g' einsetzen

$$\frac{g - g_1 \frac{R_1^{\,2}}{R^2}}{g_1 \frac{R_1^{\,2}}{R^2}} = \frac{V D}{V_1 D_1} = \frac{{}^4/_3 \, (R^3 - R_1^{\,3}) \, \pi \, D}{{}^4/_3 \, R_1^{\,3} \, \pi \, D_1} = \frac{R^3 - R_1^{\,3}}{R_1^{\,3}} \, \frac{D}{D_1}.$$

Nach einigen leicht zu übersehenden Umformungen erhält man daraus

$$\frac{g}{g_1} = \frac{R_1^{\,2}}{R^2}\left\{1 + \left(\frac{R^3}{R_1^{\,3}} - 1\right)\frac{D}{D_1}\right\},$$

und man erkennt, dass das Verhältniss der Beschleunigungen g und g_1, an der Oberfläche und in der Tiefe wesentlich von dem Verhältnisse der Dichten D und D_1 abhängig ist; wäre $D = D_1$, so würde

$$\frac{g}{g_1} = \frac{R}{R_1},$$

die Beschleunigungen würden in verschiedenen Tiefen dem Abstande vom Mittelpunkte der Erde proportional sein, also mit wachsender Tiefe stetig abnehmen. Ist aber $D < D_1$, so kann je nach dem Verhältniss der Dichten g_1 grösser sein als g.

Airy fand nun auf dem Boden des Hartonschachtes, dass g_1 in der That grösser war als g, es ergab sich nämlich

$$g_1 = 1{,}000052\, g,$$

woraus folgt, dass die Dichtigkeit des innern Kernes der Erde beträchtlich grösser sein muss als die der äussern Schale. Für letztere setzte Airy nach den geognostischen Untersuchungen der Umgebungen des Schachtes als mittlere Dichtigkeit den Werth $D = 2{,}5$. Ferner ergab sich, dass die Tiefe des Hartoner Schachtes gleich 1 gesetzt, der Erdradius gleich 16621,7 war, somit $R_1 = 16620{,}7$. Setzen wir diese Werthe in obige Gleichung ein und lösen nach D_1 auf, so wird

$$D_1 = 6{,}566,$$

ein Werth, der nicht unbeträchtlich grösser ist als der nach der ersten Methode gefundene. Airy glaubt indess, dass man diesem Werthe ein ebenso grosses Gewicht beilegen müsse als dem erstern; wir würden dann als mittlere Dichtigkeit der Erde den Werth 6 einzusetzen haben, als Mittel aus den nach der ersten Methode und dem von Airy gefundenen Werthe. Darnach würde also die Masse der Erde sechsmal so gross sein, als wenn die ganze Erde aus Wasser bestände.

Die Bestimmung der Dichtigkeit der Erde setzt uns schliesslich in den Stand die Anziehung zu berechnen, welche zwei der Einheit gleiche Massen in der Entfernungseinheit auf einander ausüben, resp. welche Beschleunigung sie sich gegen einander ertheilen. Nennen wir diese Anziehung f, die Masse der Erde M, so ist die Anziehung der Erde auf die Masseneinheit, resp. die Beschleunigung g, welche die Erde der Masseneinheit wie jedem Körper gegen den Mittelpunkt der Erde hin ertheilt,

$$g = f\,\frac{M}{R^2},$$

somit die gesuchte Anziehung der Masseneinheiten

$$f = g\,\frac{R^2}{M} = g\,\frac{R^2}{{}^4\!/_3\, R^3\,\pi\,.\,D_1} = 0{,}75\ g\,\frac{1}{R\,\pi\,D_1}.$$

Darin ist $R\pi$ gleich dem halben Umfange der Erde gleich 20000000 Meter; setzen wir dann für g den Werth unter der geographischen Breite

von 45^0 berechnet für die nicht rotirende Erde ein, also $g = 9{,}822$, so erhalten wir mit dem Werthe $D_1 = 6$

$$f = 0{,}00000006138.$$

Diese Zahl gibt uns in Kilogrammen den Zug, den jede Masseneinheit, dieselbe in einem Punkt concentrirt gedacht, auf die andere im Abstande von 1 Meter ausübt, oder in Meter die Beschleunigung, welche die eine Masse der andern gegen sich hin ertheilt.

Zweiter Abschnitt.

Von dem Gleichgewicht und der Bewegung der Körper in ihren einzelnen Theilen.

Erstes Kapitel.

Von den festen Körpern.

§. 28.

Beschaffenheit der Materie. Bei unsern bisherigen Untersuchungen über die Wirkung von Kräften auf die Körper haben wir dieselben als absolut starr angesehen, indem wir nur die fortschreitende oder drehende Bewegung ins Auge fassten, welche die Körper unter Wirkung der Kräfte erhielten. Wir können indess leicht erkennen, dass eine Bewegung der Körper als solcher nicht die einzige Wirkung ist, welche die Kräfte hervorbringen, dass vielmehr an den Körpern selbst, wenn sie keine Bewegung annehmen, Veränderungen eintreten, indem die einzelnen Theile der Körper sich gegen einander verschieben.

Die Erscheinungen dieser Art müssen ausser von den wirksamen Kräften wesentlich bedingt sein von der innern Structur der Körper oder, was dasselbe ist, von der innern Structur dessen, was die Körper bildet, der Materie. Die Untersuchung dieser Erscheinungen wird uns deshalb auch einigen Aufschluss über die Structur der Materie geben. Wir können jedoch einen gewissen Aufschluss über diese Structur schon von einer andern Seite erhalten, nämlich durch die Erfahrungen der Chemie; und da uns die Kenntniss der Structur der Materie bei unsern fernern Untersuchungen von vornherein von Nutzen ist, so wollen wir hier sofort die Frage nach derselben, soweit es auf Grund dieser Erfahrungen geht, beantworten.

Die erste Erfahrung, welche wir in Betreff der Structur der Materie machen, ist die Theilbarkeit; jeder Körper kann in Theile zerlegt, kann zerstückt werden. Diese Theilbarkeit geht so weit, dass es nicht möglich ist eine Grenze derselben anzugeben, wir sind nicht im Stande Stückchen herzustellen, welche durch Anwendung passender Mittel nicht noch weiter zertheilt werden können. Bei dieser grossen Theilbarkeit der Körper fragt es sich nun, ob es in der That keine Grenze für dieselbe gibt, ob die Körper, wenn auch nicht durch praktisch anwendbare Mittel, bis ins Unendliche theilbar sind, oder ob doch eine Grenze der Theilbarkeit existirt,

ob wir bei fortgesetzter Theilung nicht schliesslich doch auf Theilchen der Materie kommen, die eine weitere Theilung nicht zulassen, auf Atome.

Diese Frage ist keine müssige, vielmehr muss je nach der Antwort, die wir darauf geben, unsere Anschauung von der Structur der Materie eine wesentlich verschiedene sein. Nehmen wir nämlich an, dass wir bei der fortgesetzten Theilung schliesslich bei solchen Atomen anlangen, so muss die Materie aus solchen Atomen zusammengesetzt sein, die im Innern derselben als solche existiren. Ein gegebenes Quantum Materie ist dann ein Aggregat von Atomen, welche in mehr oder weniger grossen Abständen neben einander liegen und sich mehr oder weniger festhalten; die Atome sind dann die Bausteine, durch deren Nebeneinanderlagern die Materie aufgebaut ist.

Nehmen wir dagegen an, die Materie sei, wenn auch nur ideell, bis ins Unendliche theilbar, so gibt es in derselben keine gesonderten Theilchen, welche als solche in derselben vorhanden sind, sondern jedes Theilchen ist nur ein Stück des Ganzen. Daraus, dass in der Materie keine gesonderten Theilchen existiren, folgt dann weiter, dass die Materie den Raum eines Körpers ganz continuirlich ausfülle, natürlich Spalten und Poren in demselben ausgenommen. Denn sobald man in der Materie eine Discontinuität zugibt, hat das in derselben für sich existirende Theilchen eine selbständige Existenz, auf welches wir bei fortgesetzter Theilung kommen müssen, es ist das Atom.

Es ist selbstverständlich, dass es sich bei der Beantwortung dieser Frage nur um die Wahl zwischen zwei möglichen Hypothesen handeln kann, da wir praktisch nicht im Stande sind, die Materie bis ins Unendliche zu theilen. Wir haben deshalb nach den in der Einleitung aufgestellten Principien so zu verfahren, dass wir untersuchen, welche von den beiden möglichen Hypothesen die von der innern Structur der Materie abhängigen Erscheinungen am einfachsten aus sich ableiten lässt.

Die Erscheinungen, welche wir hier zu einer Entscheidung der Frage benutzen, sind die in der Chemie studirten der Zusammensetzung und der Zerlegung der Materie. Wir können die erstern in folgenden Sätzen zusammenfassen.

1. Zwei verschiedene Materien können zu einer dritten neuen zusammengesetzt werden, welche ganz andere Eigenschaften hat, als die Materien, aus denen sie entstand. So treten Wasserstoff und Sauerstoff zu Wasser zusammen.

2. Der Uebergang eines Gemenges zweier Materien zu einer chemischen Verbindung findet stets unter einer Aenderung des Wärmezustandes statt, in der Regel unter Wärmeentwicklung, zuweilen ist die Wärmeentwicklung so bedeutend, dass die chemische Verbindung der Materien mit einer Explosion verbunden ist.

3. Die Gewichtsmengen, in welchen zwei Materien zu einer Verbindung zusammentreten, stehen immer in demselben Verhältnisse zu einander. Wasserstoff und Sauerstoff bilden Wasser, indem zu jedem Gewichtstheil Wasserstoff acht Gewichtstheile Sauerstoff hinzutreten. Mengen wir Wasserstoff und Sauerstoff zu andern Verhältnissen zusammen, so bleibt bei der Verbindung zu Wasser der Ueberschuss des einen Gases unverbunden zurück.

4. Zwei Materien können zu verschiedenen chemischen Verbindungen

zusammentreten, also verschiedene neue Materien bilden, so Wasserstoff und Sauerstoff zu Wasser und zu Wasserstoffdioxyd. Die Gewichtsmenge Sauerstoff, die dann zum Wasserstoff tritt, ist gerade die doppelte wie im Wasser, zu einem Gewichtstheil Wasserstoff treten 16 Gewichtstheile Sauerstoff. Stickstoff bildet mit Sauerstoff 5 verschiedene Verbindungen, die Mengenverhältnisse der Bestandtheile in diesen Verbindungen sind so, dass jedesmal zu 14 Gewichtstheilen Stickstoff hinzutreten 8 oder 2.8 = 16, oder 3.8 = 24, oder 4.8 = 32, oder 5.8 = 40 Gewichtstheile Sauerstoff. Das an diesen Beispielen dargelegte Gesetz nennt die Chemie das Gesetz der multiplen Proportionen, nach welchem die Verbindungen zweier Materien stets nach bestimmten Gewichtsverhältnissen, den sogenannten Mischungsgewichten, oder nach einfachen Vielfachen dieser Mischungsgewichte zusammentreten.

5. Die Michungsgewichte, welche bei der Verbindung zweier Materien mit einander massgebend sind, sind es ebenfalls, wenn man jede derselben mit einer dritten oder vierten zusammensetzt. Bestimmt man also etwa die Mischungsgewichte, in denen die verschiedenen Materien, wie Wasserstoff, Stickstoff, Schwefel, Chlor etc. mit Sauerstoff zusammentreten, so sind die Gewichtsmengen, mit denen diese Materien unter sich zusammentreten, dieselben Mischungsgewichte oder einfache Vielfache derselben.

Stellen wir die Gesetze der chemischen Verbindung mit den beiden Hypothesen über die Structur der Materie zusammen, so erkennt man leicht, dass sie nur in der Hypothese, dass die Materie ein Aggregat kleinster Theilchen ist, eine ungezwungene Erklärung finden.

Schon der Vorgang der chemischen Verbindung selbst und der Unterschied der Verbindung von einem Gemenge zweier Materien ist unter der Voraussetzung, dass die Materie etwas den Raum stetig Erfüllendes ist, sehr schwierig verständlich. Wir können dann sowohl eine Mengung als eine Verbindung nur als eine gegenseitige Durchdringung der Materien ansehen; welcher Unterschied in der Durchdringung kann dann aber stattfinden, um den Unterschied von Verbindung und Gemenge verständlich zu machen. Warum findet ferner eine solche Durchdringung zu chemischer Verbindung nur in ganz bestimmten Gewichtsverhältnissen statt, und wie lässt es sich als nothwendig aus dieser Auffassung der Materie ableiten, dass zwei Materien sich zu einer Verbindung in denselben Gewichtsverhältnissen durchdringen, in welchem jede mit einer dritten zusammentritt. Es sind alle diese Sätze dann Thatsachen, die uns neue Eigenschaften der Materie zeigen, ohne dass sie als eine Folge der Structur derselben hervortreten.

Die andere Auffassung der Materie, dass sie atomistisch constituirt sei, lässt alle diese Gesetze als nothwendige Folgerungen aus sich ableiten.

Wir erhalten ein Gemenge, wenn wir zwei Materien zusammen mischen, die Atome oder Theilchen der einen befinden sich dann in den Zwischenräumen zwischen den Theilchen der andern Materie, die Atome der einzelnen Materien bleiben aber von einander getrennt. Verwandelt sich aber das Gemenge in eine Verbindung, so tritt jedes Atom der einen Materie mit einem oder mehreren der andern Materie zusammen, und die so verbundenen Atome bilden das letzte kleinste Theilchen der neu entstandenen Materie, also das Atom dieser Materie. So ist im Wasser kein für sich

allein stehendes Wasserstoffatom oder Sauerstoffatom mehr vorhanden, sondern jedes Sauerstoffatom ist mit zwei Wasserstoffatomen fest verbunden, und diese Verbindung ist das Atom Wasser. Daraus ergibt sich dann auch sofort, dass eine Verbindung ganz andere Eigenschaften haben muss als die Bestandtheile, weil die Atome der Verbindungen eben ganz andere sind. Denn da nach dieser Auffassung die Materie ein Aggregat von Atomen ist, müssen die Eigenschaften der Materie jene der Atome sein, sind also die Atome andere, so müssen die Eigenschaften andere sein.

Ebenso ergibt sich aus dieser Auffassung, dass der Akt der Verbindung von einer Aenderung des Wärmezustandes begleitet sein muss. Denn der Zusammenstoss und die feste Verbindung der vorher getrennten Atome muss eine lebhafte Bewegung der Atome zur Folge haben und wir werden im dritten Theile nachweisen, dass diese lebhafte Bewegung einer Entwicklung von Wärme entspricht.

Als unmittelbar nothwendige Folge dieser Auffassung ergibt sich weiter, dass die Verbindungen nur nach festen Gewichtsverhältnissen sich bilden können, denn da die Verbindungen entstehen, indem eine bestimmte Anzahl der Atome der einen Materie mit einer bestimmten Anzahl der Atome der andern zum Atom der Verbindung zusammentritt, muss das Gewichtsverhältniss, in welchem zwei Materien sich zu einer chemischen Verbindung vereinigen, das Verhältniss der Gewichte jener zusammentretenden Atome sein, und da das Atom der Verbindung ein bestimmtes ist, muss jenes Verhältniss ein bestimmtes sein.

Das Gesetz der multiplen Proportionen zeigt uns dann, dass zwei Materien in verschiedener Atomzahl zusammentreten können, also etwa je ein Atom der einen mit einem oder zwei oder mehreren der andern, oder auch zwei der einen mit drei oder fünf der andern u. s. f., immer müssen dann aber die Gewichtsmengen der Materien, die in den verschiedenen Verbindungen enthalten sind, in einem einfachen Verhältniss zu einander stehen, eben im Verhältniss der Zahl der Atome, welche in die verschiedenen Verbindungen eingehen.

Schliesslich folgt, da die Atome der Verbindungen stets aus einer Anzahl Atome der einen und der andern Materie bestehen, dass die Mischungsgewichte, welche bei den Verbindungen zweier Materien massgebend sind, auch bei denen jeder dieser Materien mit einer andern massgebend sein müssen.

Aus alledem folgt, dass die Gesetze der chemischen Verbindungen sich als nothwendige Folgen der atomistischen Auffassung ergeben, also in derselben ihre Erklärung finden. An diesen Erscheinungen geprüft, müssen wir also die atomistische Hypothese für eine gute und brauchbare, die andere dagegen für eine unbrauchbare halten.

Ganz das Gleiche ergibt sich, wenn wir das Gesetz der chemischen Zersetzung ins Auge fassen. Zerlegen wir einen zusammengesetzten Körper, so treten dessen Bestandtheile unter allen Umständen in jenen Mengenverhältnissen hervor, die zur Zusammensetzung des Körpers erforderlich sind. Bei der Zerlegung des Wassers treten immer gleichzeitig ein Gewichtstheil Wasserstoff und acht Gewichtstheile Sauerstoff hervor. Das ist nur möglich, wenn wir annehmen, dass diese beiden Materien wirklich als solche im Wasser vorhanden sind, und zwar, dass sie in dem kleinsten Wasser-

partikelchen vorhanden sind. Dann müssen wir aber auch annehmen, dass sie, wenn auch noch so innig verbunden, doch räumlich getrennt sind. Wenn wir aber dann die zusammengesetzte Materie, also etwa das Wasser immer weiter und weiter theilen, müssen wir schliesslich auf Theilchen kommen, deren nochmalige Theilung das Wassertheilchen in Sauerstoff und Wasserstoff zertrennt, also bewirkt, dass das Wasser aufhört, als solches zu existiren. Diese letzten Theilchen sind es dann, die wir die Atome der zusammengesetzten Materie nennen.

Weitere chemische Erscheinungen, welche die atomistische Auffassung als nothwendig hervortreten lassen, sind die Erscheinungen der Isomerie und der Allotropie.

Die organische Chemie hat eine Reihe von Körpern dargestellt, welche bei ganz gleicher Zusammensetzung doch sehr verschiedene Eigenschaften haben, es sind die sogenannten isomeren Körper im weitesten Sinne des Wortes. Unter diesen isomeren Körpern gibt es eine Gruppe, die metameren Körper, welche bei ganz identischer elementarer Zusammensetzung unter ganz gleicher Behandlungsweise doch ganz verschiedene Zersetzungsproducte liefern.

So gibt es z. B. zwei Verbindungen, welche nach der Formel $C_6\,H_{12}\,O_2$ zusammengesetzt sind, das valeriansaure Methyl und das buttersaure Aethyl. Nehmen wir von jeder der beiden Verbindungen 116 Gramm, so sind in beiden 72 Gramm Kohlenstoff, 12 Gramm Wasserstoff und 32 Gramm Sauerstoff vorhanden. Lassen wir nun aber auf diese beiden aus identisch gleichen Bestandtheilen zusammengesetzten Körper Aetzkali einwirken, so ist das Resultat ein sehr verschiedenes. Der eine der beiden Körper, das valeriansaure Methyl zerfällt nach dem Schema

$$\left.\begin{matrix} C_5\,H_9\,O \\ C\,H_3 \end{matrix}\right\}\,O + \left.\begin{matrix} K \\ H \end{matrix}\right\}\,O = \left.\begin{matrix} C_5\,H_9\,O \\ K \end{matrix}\right\}\,O + \left.\begin{matrix} C\,H_3 \\ H \end{matrix}\right\}\,O$$

in valeriansaures Kali und Methylalkohol oder Holzgeist, der andere nach dem Schema

$$\left.\begin{matrix} C_4\,H_7\,O \\ C_2\,H_5 \end{matrix}\right\}\,O + \left.\begin{matrix} K \\ H \end{matrix}\right\}\,O = \left.\begin{matrix} C_4\,H_7\,O \\ K \end{matrix}\right\}\,O + \left.\begin{matrix} C_2\,H_5 \\ H \end{matrix}\right\}\,O$$

in buttersaures Kali und Aethylalkohol oder Weingeist. Aus zwei Körpern von identisch gleicher Zusammensetzung treten also bei ganz gleicher Behandlung ganz verschiedene Körper hervor. Diese Thatsache verlangt, dass in der auf verschiedene Weise dargestellten Verbindung $C_6\,H_{12}\,O_2$ bereits die Bestandtheile der Körper, in welche sie zerfallen, als solche vorhanden sind, also das einemal die Atomgruppe $C_5\,H_9\,O$ und CH_3, das anderemal die Gruppe $C_4\,H_7\,O$ und $C_2\,H_5$. Wenn sie aber als solche vorhanden sind, dann müssen sie auch räumlich getrennt sein, und eine fortgesetzte Theilung muss auf Elemente führen, deren weitere Theilung die Substanzen in ihre Bestandtheile auflöst, also auf Atome.

Das was die metameren Körper bei den zusammengesetzten Körpern, das bieten uns die allotropen Modificationen bei jenen Substanzen, welche die Chemie nicht weiter zu zerlegen im Stande ist, bei den sogenannten Elementen. Mehrere dieser Elemente kommen in verschiedenen Formen mit ganz wesentlich verschiedenen Eigenschaften vor, trotzdem diese Formen chemisch genau derselben Materie angehören; so kommt Kohle in den sehr verschiedenen Formen des Graphits, der schreibenden Substanz

unserer Bleistifte und als Diamant vor; beide Formen sind reiner Kohlenstoff und nichts anderes, denn verbrennt man gleiche Gewichtsmengen beider, so erhalten wir in beiden Fällen genau die gleiche Menge Kohlensäure. Ebenso kommen Schwefel, Selen u. s. f. in verschiedenen allotropen Modificationen vor.

Die Ueberführung einer allotropen Modification in eine andere ist mit ähnlichen Aenderungen des Wärmezustandes verbunden, wie die Herstellung oder Zerlegung einer chemischen Verbindung. Besonders deutlich tritt das z. B. bei dem Selen hervor. Das Selen kommt vor als metallisches und glasartiges. Man erhält letzteres, wenn man metallisches Selen schmilzt, und dann tropfenweise in kaltes Wasser fallen lässt oder auf einem kalten Bleche ausgiesst oder überhaupt es rasch abkühlt. Erwärmt man nun ein Stück amorphen Selens auf 94^0 C, so geht es wieder in metallisches über, dabei erwärmt es sich, wie Hittorf gezeigt hat, bis zu einer Temperatur von über 200^0. Gleichzeitig tritt dabei eine erhebliche Verdichtung des Selens ein. Aehnlich ist es bei den andern Körpern, die man aus der einen Modification in die andere überführen kann.

Diese Erfahrungen zeigen, dass eine und dieselbe Materie in verschiedenen Formen vorkommen kann, welche sich in gewissem Sinne ähnlich zu einander verhalten, wie eine Verbindung zu den Materien, aus denen sie entstanden ist. Eine solche Verschiedenheit ist uns absolut unverständlich, wenn wir die Materie als ein Continuum auffassen, während die atomistische Auffassung eine Erklärung der verschiedenen Modificationen möglich erscheinen lässt. Gerade so nämlich, wie sich die Atome der verschiedenen Materien zu einem zusammengesetzten Atome der Verbindung zusammensetzen können, können sich auch die Atome einer Materie in verschiedener Weise mit einander zu einem zusammengesetzten Atom verbinden; die verschiedenen allotropen Modificationen sind dann dadurch bedingt, dass das zusammengesetzte Atom in der einen aus einer grössern Anzahl Atome der Materie besteht als in der andern.

Nach diesen von der Chemie uns gelieferten Erfahrungen werden wir von den beiden die Structur betreffenden möglichen Hypothesen nur die eine als brauchbar erkennen, nämlich die, welche die Materie als ein Aggregat kleinster Theilchen ansieht. Wir werden deshalb diese Hypothese annehmen und zur Erklärung der Erscheinungen, die wir finden, wenn Körper von Kräften angegriffen werden, ohne dass sie eine Ortsveränderung im Raume erhalten, benutzen. Es wird sich dann die grosse Fruchtbarkeit dieser Hypothese zu erkennen geben.

Wir nannten die letzten kleinsten Theile Atome, bezeichneten sie also als untheilbar, bei den zusammengesetzten Körpern und bei Besprechung der allotropen Modificationen liessen wir aber schon hervortreten, dass wir das sogenannte Atom nicht als etwas absolut Untheilbares ansehen.

Für die zusammengesetzten Körper liess sich der Begriff des Atoms, wie wir sahen, leicht fasslich machen, wir bezeichneten als Atom das letzte Theilchen der Verbindung als solcher, dessen weitere Theilung die Verbindung nicht mehr als solche bestehen, sondern in ihre Bestandtheile zerfallen lässt. Die Chemie bezeichnet deshalb auch diese letzten kleinsten Theile nicht als Atome, sondern als Moleküle, um durch die Vermeidung

des Wortes Atom schon anzudeuten, dass diese letzten kleinsten Theilchen nicht untheilbar sind.

Für die einfachen Körper ist es nicht so leicht zu einem fasslichen Begriff dessen, was wir bisher Atom nannten, zu gelangen, indess führten uns die Erscheinungen der Allotropie schon zu einer ähnlichen Auffassung desselben. Wir können die Analogie noch weiter führen; wir werden nämlich annehmen dürfen, dass die chemisch unzerlegbaren Körper, die sogenannten Elemente, in der That nicht eben so viele verschiedene Materien sind, dass es vielmehr vielleicht nur eine Materie gibt, und dass die verschiedenen Stoffe nur verschiedene Modificationen dieser einen Materie sind. Das physische Atom dieser sogenannten einfachen Körper ist dann auch das letzte Theilchen des betreffenden Stoffes, dessen weitere Theilung diesen Stoff als solchen nicht mehr existiren lässt. Aus diesen kleinsten Theilchen ist dann die Materie zusammengesetzt. Die Chemie nennt deshalb auch bei den einfachen Körpern diese kleinsten Theilchen, welche eine selbständige Existenz haben, Moleküle. Sie nimmt für die meisten derselben ausdrücklich noch eine Theilbarkeit an, so dass eine Theilung eintritt, wenn ein Stoff eine Verbindung mit einem andern eingeht. So besteht das Chlormolekül im freien Zustande nach den jetzigen Anschauungen der Chemie aus zwei Atomen, ebenso das Molekül Wasserstoff; verbinden sich die beiden zu Chlorwasserstoff, so spalten sich beide Moleküle und je ein Atom verbindet sich mit einem Atom Wasserstoff zu dem Molekül Chlorwasserstoff. Das Molekül Wasserstoff ist aber das letzte, zu welchem wir bei einer fortgesetzten Theilung freien Wasserstoffs gelangen, das Atom Wasserstoff kann für sich nicht existiren.

Das, was wir bisher Atom genannt haben, ist also das chemische Molekül; von diesem können und müssen wir noch das physikalische Molekül unterscheiden, welches selbst wieder aus einer Anzahl chemischer Moleküle zusammengesetzt sein kann. Zu dieser Unterscheidung führen uns gerade die allotropen Modificationen. Das chemische Molekül des Graphits und des Diamants muss dasselbe sein, da wir in beiden chemisch denselben Körper haben, das physikalische Molekül des Graphits enthält aber mehr oder weniger und anders gelagerte chemische Moleküle Kohle als der Diamant, und dadurch hat der letztere wesentlich andere physikalische Eigenschaften als der erstere.

Diese Speculationen über die letzten kleinen Theilchen, die wir also jetzt passend, wie in der Chemie als Moleküle bezeichnen, schieben die Schwierigkeit der atomistischen Auffassung nur einen Schritt weiter zurück, ohne sie zu heben; denn schliesslich muss die Atomistik doch zu absolut untheilbaren kleinsten Theilchen, den eigentlichen Atomen kommen. Das tritt schon im Vorigen hervor, wir betrachten das Molekül als noch weiter theilbar, eine Theilung desselben führt uns, selbst wenn wir uns noch Zwischenstufen denken, zuletzt zum Atom, zu einem wirklich Untheilbaren. Die Auffassung desselben bietet philosophisch allerdings eine grosse Schwierigkeit, auf die einzugehen indess hier nicht der Ort ist. Für uns muss es hier genügen, die Nothwendigkeit der atomistischen Auffassung zu erkennen und zu wissen, was wir unter dem Molekül uns zu denken haben.

§. 29.

Die Aggregatzustände. Nach der Entwicklung des vorigen §. haben wir uns jeden Körper als ein Aggregat neben einander liegender Moleküle zu denken, welche eine äusserst kleine Ausdehnung haben, so zwar, dass wir sie als mit ihrem Schwerpunkte zusammenfallend ansehen können. Diese Moleküle befinden sich in gewissen Entfernungen von einander, über deren Grösse wir zunächst nichts weiteres aussagen können, als dass sie nicht Null ist. Dass das nicht der Fall sein kann, ergibt sich daraus, dass ein jeder Körper, sei es durch Druck, sei es durch Abkühlung auf einen kleinern Raum gebracht werden kann, ein Beweis, dass durch diese Mittel noch eine weitere Annäherung der Moleküle bewirkt werden kann.

Aus dieser Structur der Materie folgt, dass zwischen den Molekülen Kräfte thätig sein müssen, welche die gegenseitige Lage derselben bedingen, und zwar anziehende Kräfte, welche es verhindern, dass die Moleküle sich von einander entfernen, dass also der Körper in seine Moleküle zerfällt, und gleichzeitig abstossende Kräfte, welche es verhindern, dass die Moleküle sich bis zur Berührung einander nähern. Denn wenn zwischen den Molekülen nur anziehende Kräfte thätig wären, müssten dieselben dieser Anziehung folgen bis zur Berührung.

Da wir in dem vorigen Kapitel bewiesen haben, dass zwei materielle Massen sich anziehen mit einer Kraft, welche dem Quadrate des Abstandes der Massen umgekehrt proportional ist, liegt es nahe, die zwischen den Molekülen thätigen Anziehungen als einen Fall dieser Massenanziehung aufzufassen. Dann würde die Anziehung nur von der Grösse resp. Masse der Moleküle und ihrem Abstande, nicht aber von der Natur der Moleküle abhängig sein. Man würde dann auch geneigt sein, eine ähnliche Annahme für die abstossenden Kräfte zu machen, dass also auch diese unabhängig von der Natur der Materie zwischen je zwei Massen thätig, aber erst merkbar werden, wenn die Abstände der Massen sehr kleine geworden sind. Diese Annahme erscheint indess nach einer Reihe von Erfahrungen unwahrscheinlich, wir müssen vielmehr annehmen, dass die zwischen den Molekülen thätigen Kräfte wesentlich auch von der Natur der Moleküle bedingt sind. Das folgt aus dem Umstande, dass die Festigkeit eines Körpers, das ist der Widerstand, den seine Theile einer Verschiebung gegen einander entgegensetzen, nicht durch die Dichtigkeit des Körpers bedingt ist. Die Masse eines Körpers ist seinem Gewichte proportional, die Masse eines gegebenen Volumens also um so grösser, je grösser das Gewicht desselben ist. Je grösser nun das Gewicht eines gegebenen Volumens ist, eine um so grössere Anzahl von Molekülen muss dasselbe enthalten oder bei gleicher Anzahl muss die Masse der einzelnen Moleküle um so grösser sein. Da nun die allgemeine Massenanziehung der Grösse der Massen direkt, dem Quadrate der Grösse ihrer Abstände umgekehrt proportional ist, so würde in den dichtern Körpern die Anziehung der Moleküle jedenfalls die grössere sein, in Körpern gleicher Dichtigkeit aber immer dieselbe sein. Daraus würde dann folgen, dass bei Körpern gleicher Dichte auch der Widerstand der Moleküle gegen eine Verschiebung, also die Festigkeit dieselbe sein müsste. Das ist aber nicht der Fall, wir kennen feste Körper und flüssige Körper von genau gleicher

Dichte, bei den flüssigen ist aber eine Verschiebung der Theilchen viel leichter als bei den festen.

Diese Thatsache beweist, dass die zwischen den Molekülen thätigen Kräfte auch von der Natur der Moleküle abhängig sind oder genauer, dass wenigstens die eine dieser Kräfte von der Natur der Moleküle abhängig ist, entweder die Anziehung oder die Abstossung; indess ist es doch wahrscheinlich, dass wenn die eine dieser Kräfte von der Natur der Moleküle abhängt, es auch mit der andern der Fall ist. Man unterscheidet daher die zwischen den Molekülen thätigen Kräfte von der allgemeinen Anziehung, indem man besondere von der Natur der Moleküle abhängige Kräfte annimmt, die man in der Bezeichnung Cohäsionskräfte oder Cohäsion zusammenfasst.

Je nach der verschiedenen Cohäsion der einzelnen Theile der Körper unterscheidet man drei Aggregatzustände:

1. Die festen Körper. Dieselben sind dadurch charakterisirt, dass ein gegebenes Quantum derselben ein selbständiges Volumen und eine selbständige Gestalt hat. Daraus folgt, dass durch Wirkung der Cohäsionskräfte die Moleküle in bestimmten Entfernungen von einander und in bestimmten gegenseitigen Lagen gehalten werden, es bedarf einer mehr oder weniger grossen äussern Kraft, sowohl um die Moleküle von einander zu trennen, also von einander zu entfernen, als auch dieselben ohne Vergrösserung der Entfernung gegen einander zu verschieben.

2. Die flüssigen Körper. Sie haben ein selbständiges Volumen, das heisst ein gegebenes Quantum füllt einen bestimmten, wesentlich nur von der Grösse des Quantums abhängigen Raum aus, sie haben aber keine selbständige Gestalt, sondern die Gestalt des Gefässes, in welchem sie sich befinden. Die Cohäsionskräfte halten also die Moleküle in bestimmten Entfernungen von einander, aber nicht in bestimmten gegenseitigen Lagen, die Moleküle sind vielmehr bei constant erhaltener Entfernung vollkommen frei gegen einander verschiebbar.

3. Die gasförmigen Körper. Dieselben haben weder eine selbständige Gestalt, noch ein selbständiges Volumen, vielmehr füllt ein gegebenes Quantum Gas jeden ihm dargebotenen Raum aus. Die Moleküle der Gase werden also durch die Cohäsionskräfte nicht mehr in bestimmten Entfernungen von einander gehalten.

Wir besprechen in diesem Kapitel die festen Körper.

§. 30.

Elasticität durch Zug oder Druck. Unter der Wirkung der Cohäsionskräfte halten sich die Moleküle der festen Körper in bestimmten gegenseitigen Abständen und in bestimmten gegenseitigen Lagen. Sind die Körper sich selbst überlassen, so befinden sich die Moleküle in stabilen Gleichgewichtslagen, die anziehenden und abstossenden Kräfte halten sich das Gleichgewicht. Lassen wir nun auf einen festen Körper irgend welche Kräfte wirken, so muss dieses Gleichgewicht gestört werden und in Folge dessen muss eine Verschiebung der Moleküle eintreten. Ueben wir auf einen festen Körper einen Druck aus, so wirkt derselbe in der Richtung der Anziehung der Moleküle. Dieselben müssen sich also näher rücken, üben wir einen Zug aus, so wirkt derselbe in der Richtung der die Mole-

küle von einander abstossenden Kraft, die Moleküle müssen von einander entfernt werden. Die Erfahrung bestätigt diesen Schluss. Denn legen wir auf einen, auf einer festen horizontalen Grundlage stehenden Cylinder

Fig. 23.

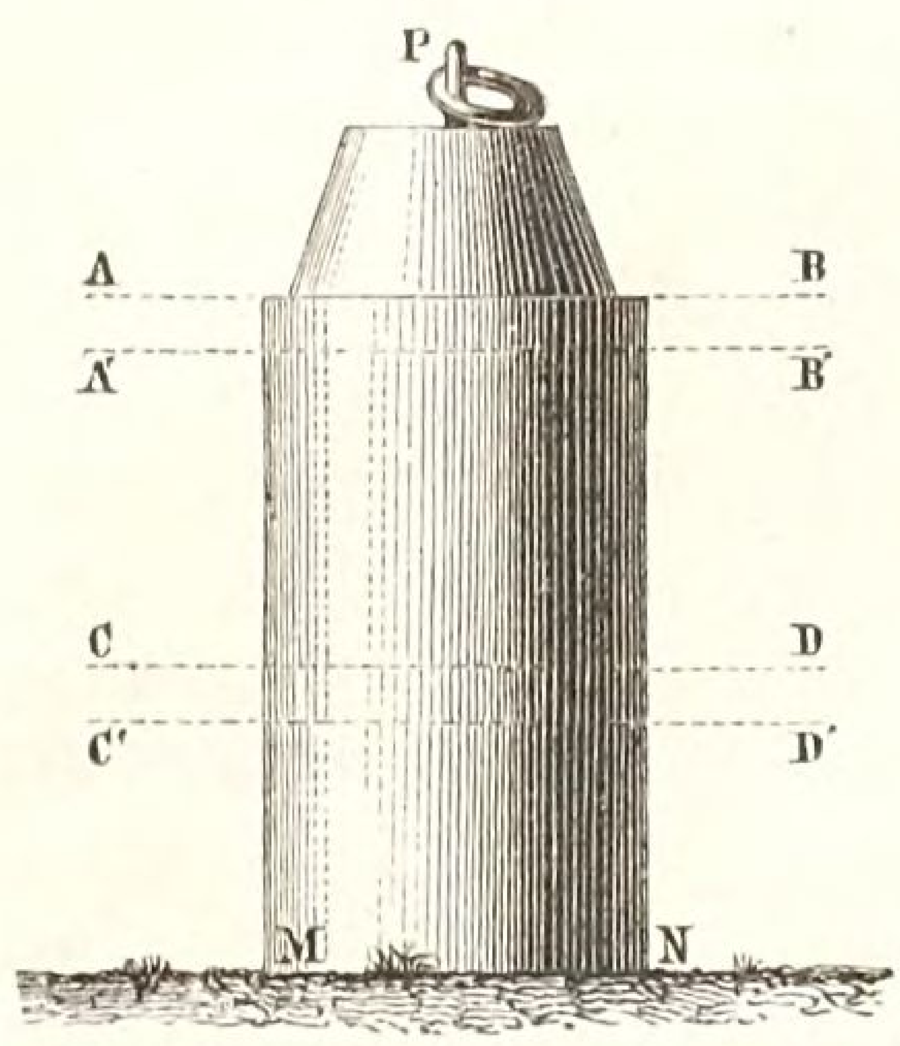


Fig. 23, etwa von Kautschuk, ein Gewicht P, so wird derselbe verkürzt und zwar um so mehr, je grösser das Gewicht P ist. Betrachten wir den Cylinder als bestehend aus einer Reihe paralleler auf einander gelagerter Molekülschichten AB, $A'B'$.. CD, $C'D'$, so tritt demnach eine Annäherung dieser Molekülschichten ein. Da nun die Verkürzung um so grösser ist, je grösser das Gewicht P ist, so folgt, dass die Molekülschichten um so mehr einander genähert werden, je grösser der äussere Druck ist. Da somit einem bestimmten Drucke auch eine bestimmte Annäherung entspricht, folgt weiter, dass mit einer Annäherung der Molekülschichten die zwischen denselben thätige abstossende Kraft zunimmt, und zwar in rascherem Verhältnisse zunimmt, als die anziehende Kraft; durch den Druck P nähert sich dann die Schicht AB der Schicht $A'B'$ so weit, bis die Differenz zwischen Abstossung und Anziehung gleich wird dem Drucke P. Eine gleiche Annäherung erfahren alle übrigen Schichten. Denn die zwischen den Schichten AB und $A'B'$ thätige abstossende Kraft wirkt auf AB von unten nach oben, dem Drucke P das Gleichgewicht haltend, auf die Schicht $A'B'$ aber genau ebenso von oben nach unten. Die Schicht $A'B'$ befindet sich daher in demselben Verhältniss, wie wenn das Gewicht P direkt auf ihr stände, sie muss sich also der folgenden Schicht ebenfalls soweit nähern, bis die Differenz zwischen Abstossung und Anziehung dem Druck P gleich geworden ist. Gleiches gilt für alle folgenden Schichten; der Cylinder verkürzt sich somit um die Summe der Annäherungen der einzelnen Schichten, und in Folge dieser Annäherungen pflanzt sich der oben auf den Cylinder ausgeübte Druck durch denselben bis zur Unterlage fort.

Hängt man einen Draht oder einen Kautschukstreifen wie Fig. 24 vertical auf und hängt dann an das untere Ende ein Gewicht P, so tritt eine Verlängerung ein, die wieder bei einem bestimmten Gewichte eine ganz bestimmte und eine um so grössere ist, je grösser das Gewicht P ist. Es folgt daraus, dass durch einen solchen Zug die einzelnen Molekülschichten von einander entfernt werden, und dass in Folge der Entfernung zwischen denselben eine anziehende Kraft thätig wird. Denn jetzt kann Gleichgewicht nur eintreten, wenn die Differenz zwischen Anziehung und Abstossung gleich ist dem an dem untern Ende des Streifens ausgeübten Zuge.

Das Auftreten einer abstossenden Kraft zwischen genäherten, einer anziehenden Kraft zwischen von einander entfernten Molekülschichten gibt sich auch direkt zu erkennen, wenn wir die äussern Kräfte, welche die Veränderung hervorgebracht haben, aufhören lassen zu wirken. Die comprimirten Körper dehnen sich dann wieder aus, die verlängerten ziehen sich wieder zusammen zu ihrer früheren Länge, es tritt also eine Bewegung der Molekülschichten im Sinne der soeben abgeleiteten Kräfte ein.

Die Kraft, welche in einem Körper die aus ihrer Gleichgewichtslage gebrachten Moleküle in dieselbe zurückzuführen strebt, bezeichnet man als elastische Kraft oder als Elasticität. Das Auftreten derselben beweist uns, dass das Gesetz, nach welchem sich die zwischen den Molekülen thätigen anziehenden Kräfte mit wachsender Entfernung ändern, ein ganz anderes sein muss, als jenes, nach welchem sich die abstossenden ändern. Die beiden Kräfte halten sich in den Gleichgewichtslagen der Moleküle das Gleichgewicht; wächst die Entfernung, so werden sowohl die anziehenden als die abstossenden Kräfte kleiner, denn sobald die Entfernung eine für uns direkt messbare geworden ist, nehmen wir keine abstossende Kraft mehr wahr, eine Anziehung nur mehr so weit, als sie der allgemeinen Massenanziehung entspricht. Da nun eine Vergrösserung der Entfernung der Molekülschichten eine Anziehung derselben zur Folge hat, eine Verkleinerung der Entfernung eine Abstossung, so folgt, dass die abstossenden Kräfte mit wachsender Entfernung sehr viel rascher abnehmen, mit abnehmender Entfernung viel rascher wachsen als die anziehenden Kräfte. Nur dadurch ist es möglich, dass die elastische Kraft bei der Verlängerung eines Körpers als Anziehung der Moleküle, bei der Verkürzung dagegen als Abstossung hervortritt.

Fig. 24.



Da die elastische Kraft in jedem Falle die Differenz zwischen den anziehenden und abstossenden Kräften ist, so würden wir die einer Veränderung der Molekülabstände, also einer Verlängerung oder Verkürzung eines Körpers entsprechende elastische Kraft sofort bestimmen können, wenn wir das Gesetz kennten, nach welchem sich jede der beiden Kräfte bei einer Veränderung der Molekularabstände ändert. Da das nicht der Fall ist, können wir die Abhängigkeit der elastischen Kraft von den an einem Körper vorgenommenen Aenderungen, also Verlängerungen oder Verkürzungen nur durch den Versuch bestimmen.

Welchen Weg wir dazu einzuschlagen haben, ergibt sich aus den vorhin durchgeführten Betrachtungen unmittelbar. Wir sahen, dass wenn wir auf einen Körper einen Zug oder Druck ausüben, der Körper stets soweit verlängert oder verkürzt wird, bis die geweckte elastische Kraft der wirksamen äussern Kraft entgegengesetzt gleich wird. Wir haben deshalb nur die Abhängigkeit der Veränderungen von den wirksamen äussern Kräften experimentell zu untersuchen, und wissen dann, dass die den eingetretenen Aenderungen entsprechenden elastischen Kräfte jedesmal den äussern Kräften, welche diese Veränderungen hervorgebracht haben, entgegengesetzt gleich sind.

In dieser Weise sind die Gesetze der Elasticität, welche durch einen auf einen Körper nach einer Richtung ausgeübten Zug oder Druck geweckt wird, von Hooke, S'Gravesande, Th. Young, Wertheim u. a. untersucht worden; die bequemste Methode ist die von Wertheim angewandte, welcher Drähte verschiedener Länge, verschiedenen Durchschnitts und verschiedenen Materials in der Fig. 24 angedeuteten Weise aufhing und deren Verlängerungen durch verschiedene Gewichte mass.

Die von diesen Experimentatoren erhaltenen Resultate lassen sich in folgenden Sätzen zusammenfassen.

1. Bei Drähten gleichen Querschnitts und verschiedener Länge ist die Längenzunahme, welche ein und dasselbe spannende Gewicht hervorruft, der Länge des Drahtes direkt proportional. Dividiren wir also die Längenzunahme durch die ursprüngliche Länge des Stabes, bestimmen wir also die Verlängerung in Bruchtheilen der ursprünglichen Länge, so ist diese für Stäbe gleichen Durchschnitts und gleichen Materials bei gleichem spannenden Gewichte immer dieselbe.

2. Die Verlängerung von Drähten desselben Materials, aber verschiedenen Querschnittes ist bei gleichem spannenden Gewichte der Grösse des Querschnittes umgekehrt proportional, von der Form des Querschnittes aber unabhängig.

3. Bei Drähten gleichen Querschnitts und gleichen Materials ist die Verlängerung der Grösse der spannenden Gewichte direkt proportional.

4. Die Verlängerung hängt unter sonst gleichen Umständen von dem Material des Stabes ab.

Ist demnach l die Länge eines Drahtes vom Querschnitte q, der durch das Gewicht p gespannt wird, ist c eine für das Material des Drahtes charakteristische Constante, und ist l' die durch das spannende Gewicht hervorgebrachte Länge, so ist die Verlängerung

$$\frac{l' - l}{l} = \delta = c \, . \, \frac{p}{q} \, .$$

Die Constante c gibt uns hiernach die Verlängerung ausgedrückt in Bruchtheilen der ursprünglichen Länge, oder was dasselbe ist, die Verlängerung der Längeneinheit durch die Gewichtseinheit $p = 1$, wenn der Querschnitt des Drahtes gleich der Flächeneinheit, $q = 1$ ist. Man bezeichnet deshalb die Constante c als den linearen Verlängerungscoefficienten des betreffenden Materials. Als Einheit des Gewichtes nimmt man das Kilogramm, als Einheit des Querschnitts das Quadratmillimeter. Der lineare Verlängerungscoefficient gibt uns also die Verlängerung eines Drahtes von 1 Qmm. Querschnitt in Bruchtheilen der ursprünglichen Länge durch das Gewicht von 1 Kilogr.

Die zwischen zwei Molekülschichten des verlängerten Stabes geweckte elastische Kraft ist nun, wie wir sahen, einfach gleich dem spannenden Gewichte, lösen wir die soeben für die Verlängerung erhaltene Gleichung nach p auf, so erhalten wir deshalb die Grösse der durch diese Verlängerung geweckten elastischen Kraft. Dieselbe wäre

$$p = \frac{1}{c} \, . \, q \, . \, \delta,$$

sie ist somit der Verlängerung δ, dem Querschnitte q des Stabes und dem reciproken Werthe des linearen Verlängerungscoefficienten proportional.

Dividiren wir obige Gleichung durch q, so wird

$$\frac{p}{q} = \pi = \frac{1}{c} \cdot \delta \, .$$

Die Grösse π gibt uns die in der Querschnittseinheit durch die Verlängerung δ geweckte Elasticität; dieselbe ist der Verlängerung δ direkt proportional. Die Verlängerung δ ist die Längenzunahme des Drahtes, dividirt durch die ursprüngliche Länge des Stabes. Da nun die Längen-

zunahme gleich ist der Summe der Zunahme der Abstände der einzelnen Molekülschichten, und da die ursprüngliche Länge des Stabes gleich ist der Summe der ursprünglichen Abstände der Molekülschichten, so folgt, dass uns die Grösse δ auch die Zunahme des Abstandes zweier benachbarter Molekülschichten dividirt durch deren ursprünglichen Abstand oder die Vergrösserung dieses Abstandes, gemessen nach dem ursprünglichen Abstande gibt. Wir gelangen somit zu dem wichtigen Resultate, dass die durch eine Vergrösserung des Abstandes zwischen zwei Molekülschichten geweckte elastische Kraft der Vergrösserung dieses Abstandes, dieselbe ausgedrückt in Bruchtheilen dieses Abstandes, einfach proportional ist. Wir haben für die Flächeneinheit nur die so gemessene Vergrösserung mit einem constanten Coefficienten, dem reciproken Werthe des linearen Verlängerungscoefficienten zu multipliciren, um die geweckte Elasticität zu erhalten. Deshalb nennt man diesen reciproken Werth des Verlängerungscoefficienten den Elasticitätsmodulus oder den Elasticitätscoefficienten des betreffenden Materials. Bezeichnen wir denselben mit E, so wird

$$\pi = E \,.\, \delta \,.$$

Man bestimmt denselben aus der beobachteten Verlängerung als den reciproken Werth des Verlängerungscoefficienten; man kann denselben aber auch als ein Gewicht definiren. Wird nämlich $\delta = 1$, so wird $\pi = E$. Der Elasticitätscoefficient kann also als das Gewicht definirt werden, welches einen Draht von 1 Quadratmillimeter Querschnitt um seine eigene Länge ausdehnen würde, vorausgesetzt, dass die nur bei kleinen Veränderungen gültigen Gesetze der Elasticität noch bei solchen Verlängerungen gültig wären. Dieser Definition entsprechend drückt man die Elasticitätscoefficienten gewöhnlich durch Kilogramme aus. Im Folgenden sind, um ein Bild von der Grösse derselben zu geben, die Elasticitätscoefficienten einiger Metalle in verschiedenen Zuständen und verschiedenen Temperaturen nach den Bestimmungen von Wertheim mitgetheilt.

Name der Metalle		Werthe von E bei 15—20° C	100° C	200° C
Blei	gezogen	1883	—	—
	angelassen	1727	1630	
Gold	gezogen	8131		
	angelassen	5584	5482	5408
Silber	gezogen	7357		
	angelassen	7140	7274	6374
Kupfer	gezogen	12449		
	angelassen	10519	9827	7862
Platin	gezogen	17044		
	angelassen	15518	14187	12964
Eisen	gezogen	20869		
	angelassen	20794	21877	17700.

Die Zahlen zeigen, dass bei einem und demselben Metall, je nachdem es als hartgezogener Draht oder nach vorheriger Erhitzung und langsamer Abkühlung untersucht wird, und in verschiedenen Temperaturen der Elasticitätscoefficient merklich verschieden sein kann.

Ganz dieselben Gesetze, welche für die durch Zug geweckte Elasticität gültig sind, gelten auch für die durch Druck geweckte Elasticität. Die Elasticität ist dort der Verkürzung, diese gemessen nach der ursprünglichen Länge proportional, und die Elasticitätscoefficienten haben genau denselben Werth, immer vorausgesetzt, dass wir nur kleine Veränderungen in Betracht ziehen, so dass nach dem Aufhören der die Veränderung bewirkenden Kraft die Körper wieder genau ihre ursprüngliche Gestalt annehmen.

§. 31.

Quercontraction und kubische Compressibilität. Die der Zug- oder Druckrichtung parallele Veränderung, Verlängerung oder Verkürzung ist nicht die einzige Wirkung des auf einen Körper ausgeübten Zuges oder Druckes; es tritt vielmehr gleichzeitig in den zur Kraftrichtung senkrechten Dimensionen eine Aenderung hervor, indem bei Verlängerungen eine Quercontraction, bei Verkürzungen nach den Querdimensionen eine Verlängerung stattfindet. Dass das der Fall sein muss, ergibt schon die einfache Ueberlegung, dass die Moleküle eines Stabes nicht in der Zugrichtung parallelen Fasern liegen; werden dann durch einen Druck zwei Molekülschichten einander genähert, so tritt deshalb auch eine Annäherung in der zur Zurückrichtung senkrechten Richtung und damit eine Zunahme der Abstossung nach dieser Richtung ein, es muss also nach dieser Richtung eine Ausdehnung eintreten. Das Umgekehrte ist der Fall bei einer Verlängerung, es muss also in den Querdimensionen eine Zusammenziehung stattfinden.

Diese Veränderung der Querdimensionen kann man leicht an einem wie in Fig. 24 aufgehängten Kautschukstreifen sichtbar machen. Nimmt man Streifen von quadratischem Querschnitt und etwa 20 Mm. Seitenlänge, so ist schon bei einer Belastung von einigen Kilogramm die Veränderung der Querdimension direkt messbar; gleichzeitig kann man dann erkennen, dass die Aenderung der Querdimension ebenfalls der Grösse der ziehenden Gewichte, also der stattfindenden Verlängerung proportional ist.

Eine genauere Untersuchung dieser Aenderung der Querdimensionen lässt sich durch die gleichzeitige Beobachtung der Verlängerung eines Stabes und der dabei eintretenden Veränderung seines Volumens durchführen.

Hat der Stab die Länge L und ist die Verlängerung desselben durch irgend ein Gewicht δ, so ist die Länge desselben nach Anhängung des Gewichtes $L\,(1 + \delta)$. Ist B seine Breite vor der Verlängerung, so wird dieselbe nach der Verlängerung eine kleinere. Wie wir oben angaben, ist die Verkürzung nach der Breitendimension dem angehängten Gewichte, also auch der Verlängerung δ proportional. Ist μ eine Constante, so können wir deshalb die Verkürzung der Breite in Bruchtheilen der ursprünglichen Breite gleich $\mu\,\delta$, somit die Breite nach dem Anhängen des Gewichtes $B\,(1 - \mu\,\delta)$ setzen. Ganz ebenso erhalten wir dann für die dritte Dimension des Stabes die Dicke D, nach dem Anhängen des Gewichtes $D\,(1 - \mu\delta)$. Das Volumen des Stabes vor dem Zuge ist

$$v = B\,L\,D,$$

das Volumen nach dem Zuge dann

$$v_1 = BLD(1 + \delta)\,(1 - \mu\,\delta)^2.$$

Da nun δ immer nur einen kleinen Werth hat, können wir $(1 - \mu\delta)^2 = 1 - 2\mu\delta$ setzen, und erhalten dann

$$v_1 = v(1 + \delta)(1 - 2\mu\delta).$$

In dem Producte $(1 + \delta)(1 - 2\mu\delta)$ können wir dann auch das Glied $2\mu\delta^2$ vernachlässigen und setzen

$$v_1 = v(1 + \delta - 2\mu\delta)$$

$$\frac{v_1 - v}{v} = \delta(1 - 2\mu).$$

Beobachtet man also gleichzeitig die Volumverminderung in Bruchtheilen des ursprünglichen Volumens und die stattgefundene Verlängerung δ, so lässt sich daraus der Coefficient μ, mit dem wir die Verlängerung δ multipliciren müssen, um die Veränderung jeder der Querdimensionen in Bruchtheilen der ursprünglichen Dimension zu erhalten, leicht ableiten. Dieser Coefficient μ ist dann das Maass für die Aenderung der Querdimension.

In dieser Weise hat zuerst Cagniard Latour diesen Coefficienten zu bestimmen versucht, indem er einen Draht in der Axe einer mit Wasser gefüllten Röhre ausspannte, denselben dann mit Hülfe einer Hebelvorrichtung verlängerte und aus der Niveauänderung des Wassers in der Röhre die Aenderung des Volumens ableitete. Er schloss aus seinen Versuchen, dass die Aenderung des Volumens des ausgezogenen Drahtes in Bruchtheilen des ursprünglichen Volumens gleich der Hälfte der Verlängerung δ, somit dass

$$1 - 2\mu = 1/2; \qquad \mu = 1/4$$

sei. Die Aenderung der Querdimension sollte also $1/4$ der Aenderung der Längendimension sein, wenn beide in Bruchtheilen der ursprünglichen Dimension ausgedrückt werden.

Die theoretischen Entwicklungen von Navier, Poisson u. a. waren zu demselben Resultate gelangt, dass für alle Körper der Werth von $\mu = 0{,}25$ sein müsste; der Versuch von Cagniard Latour wurde deshalb als eine Bestätigung der Theorie angesehen.

Die späteren genaueren theoretischen Untersuchungen von Cauchy, Lamé und Kirchhoff ergaben aber, dass ein solcher bestimmter Werth von μ sich aus der Theorie nicht ableiten lasse, dass die Theorie nur ergebe, dass eine Aenderung der Querdimension eintrete und dass $\mu < 1/2$ sein müsse, das heisst also, dass bei Verlängerung eine Volumzunahme eintreten müsse. Die spätern Versuche haben dann auch ergeben, dass μ nicht für alle Körper denselben Werth hat, dass es im Allgemeinen zwischen $1/4$ und $1/3$ liegt.

Die ersten genauern Versuche zur Bestimmung von μ rühren von Wertheim her. Die Anordnung derselben zeigt Fig. 25. Es wurden Glasröhren oder ohne Naht gezogene Messingröhren A benutzt, welche mit ihren Enden an kurze weitere Röhren B, B' befestigt waren, so dass die Hohlräume dieser beiden Röhren durch die Röhre A mit einander in Verbindung standen. Die Röhre B' war unten geschlossen und mit einer Vorrichtung zum Anhängen von Gewichten versehen. Die obere Röhre konnte durch einen Deckel ganz dicht verschlossen werden, durch dessen

Mitte ein sehr feines Glasrohr hindurchgeführt war, welches mit einer Theilung versehen war. Der ganze Apparat wurde dann mit Wasser gefüllt, so dass dasselbe etwa bis F in die enge Röhre hineinreichte und das Volumen dieses Wassers durch Wägung bestimmt. Man kannte dadurch den Hohlraum des Apparates. Die so vorgerichteten Röhren wurden dann an ihrem obern Ende befestigt, dass sie vertical herabhingen, und dann der Abstand zweier auf der Röhre A nahe dem obern und dem untern Ende angebrachter Marken gemessen. Dann wurde unten an den Apparat ein Gewicht p angehängt; die Röhre dehnte sich aus und die Aenderung des Volumens des Hohlraums war genau dieselbe, wie die eines massiven Stabes von gleichem Querschnitte bei der gleichen Verlängerung. Die Verlängerung δ ergab sich dann aus der Vergrösserung des Abstandes der beiden Marken, die Aenderung des Volumens aus der Niveausenkung des Wassers in der capillaren Röhre F. Indem man die Volumänderung durch das ursprüngliche Volumen und die gefundene Verlängerung δ dividirte, ergab sich $1 - 2\mu$. Für μ ergab sich aus diesen Versuchen an 3 Messingröhren

Fig. 25.



0,340 0,345 0,342 Mittel 0,342,

an 4 Glasröhren

0,320 0,351 0,329 0,334 Mittel 0,333.

Wir werden später sehen, dass sich der Coefficient der Quercontraction noch nach andern Methoden durch Beobachtungen anderer elastischer Erscheinungen ableiten lässt, besonders durch Beobachtung der Torsion. Vielfache Versuche mit Benutzung der Torsion von Kirchhoff, Okatow, Wertheim und Schneebeli haben für μ Werthe gegeben, welche für die verschiedenen Körper etwas verschieden sind, im Allgemeinen aber, wie schon vorhin erwähnt wurde, nicht sehr weit von 0,3 abweichen. Wir werden an den betreffenden Stellen auf diese Versuche hinweisen.

Die Kenntniss der Quercontraction ist uns nöthig, um aus dem linearen Verlängerungscoefficienten eines Körpers den kubischen Compressionscoefficienten desselben ableiten zu können. Denken wir uns ein parallelepipedisches Stück eines festen Körpers, dasselbe sei von allen Seiten ganz gleichmässig zusammengepresst, und zwar durch einen solchen Druck, dass auf das Quadratmillimeter der Druck eines Kilogramms wirkt. Jede Dimension des Parallelepipeds wird dann in demselben Verhältnisse verkürzt, und das Volumen des Parallelepipeds wird kleiner. Die Verkürzung der Dimensionen können wir leicht in folgender Weise erhalten. Sei L die Länge, B die Breite, D die Dicke des Körpers, c der lineare Verlängerungscoefficient.

Durch den parallel der Längsrichtung ausgeübten Druck geht, da wir als Druck auf die Flächeneinheit das Kilogramm angenommen haben, über

die Länge L in $L\,(1 - c)$ die Breite B in $B\,(1 + \mu c)$ die Dicke D in $D\,(1 + \mu c)$,

denn so wie eine Verlängerung nach L eine Verkürzung der Querdimension

zur Folge hat, hat die Verkürzung nach L genau dieselbe Vergrösserung der Querdimensionen zur Folge.

Der Druck parallel B verändert, für sich betrachtet,

die Länge L	die Breite B	die Dicke D
in $L(1+\mu c)$	in $B(1-c)$	in $D(1+\mu c)$.

Der Druck parallel D würde allein wirkend

die Länge L	die Breite B	die Dicke D
in $L(1+\mu c)$	in $B(1+\mu c)$	in $D(1-c)$

verwandeln. Wirken alle Drucke gleichzeitig, so ist die Veränderung nach jeder Dimension gleich der Summe der Veränderungen, welche jeder Druck für sich bewirken würde; demnach wird die Länge

$$L(1-c+2\mu c) = L(1-(1-2\mu)c),$$

und ebenso werden Breite und Dicke

$$B(1-(1-2\mu)c) \qquad D(1-(1-2\mu)c).$$

Das Volumen des Körpers vor dem Drucke

$$v = LBD$$

wird dann nach demselben

$$v_1 = LBD(1-(1-2\mu)c)^3 = v(1-3(1-2\mu)c),$$

somit die Compression in Bruchtheilen des ursprünglichen Volumens

$$\frac{v-v_1}{v} = 3(1-2\mu)c.$$

Da wir vorausgesetzt haben, dass der Druck auf die Flächeneinheit das Kilogramm sei, gibt uns dieser Ausdruck den kubischen Compressionscoefficienten, das heisst den Coefficienten, mit dem wir den auf die Flächeneinheit wirkenden Druck multipliciren müssen, um die Volumverminderung eines Körpers in Bruchtheilen des ursprünglichen Volumens zu erhalten. Da wir im vorigen §. gesehen haben, dass die durch Zug oder Druck hervorgebrachten Aenderungen nicht von der Form des Querschnitts abhängen, folgt, dass auch dieser kubische Compressionscoefficient von der Form der Körper unabhängig ist. Wir erhalten somit allgemein für den kubischen Compressionscoefficienten c_1

$$c_1 = 3c(1-2\mu) = 3\cdot\frac{1-2\mu}{E},$$

derselbe ist somit gleich dem dreifachen linearen Verlängerungscoefficienten multiplicirt mit $1-2\mu$. Würde $\mu = 1/3$ sein, wie es sich nach den Versuchen von Wertheim für Glas ergab, so ist auch $1-2\mu = 1/3$ und es würde

$$c_1 = c$$

der kubische Compressionscoefficient gleich dem linearen sein. Ist $\mu < 1/3$, so ist der kubische Compressionscoefficient grösser als der lineare, für $\mu = 0{,}3$ würde $c_1 = 1{,}2\,c$.

Der Zusammenhang des kubischen Compressionscoefficienten mit dem linearen und dem Coefficienten der Quercontraction macht es möglich, aus

der Beobachtung der beiden erstern auch den letztern abzuleiten, denn wir erhalten

$$1 - 2\mu = \frac{1}{3}\frac{c_1}{c}.$$

Einige dahin gerichtete Versuche liegen von Regnault vor, der dieselben bei Gelegenheit seiner Untersuchung über die Compressibilität von Flüssigkeiten anstellte. Wir werden dieselben im nächsten Kapitel kennen lernen, wenn wir die Zusammendrückbarkeit der Flüssigkeiten besprechen. Regnault erhielt

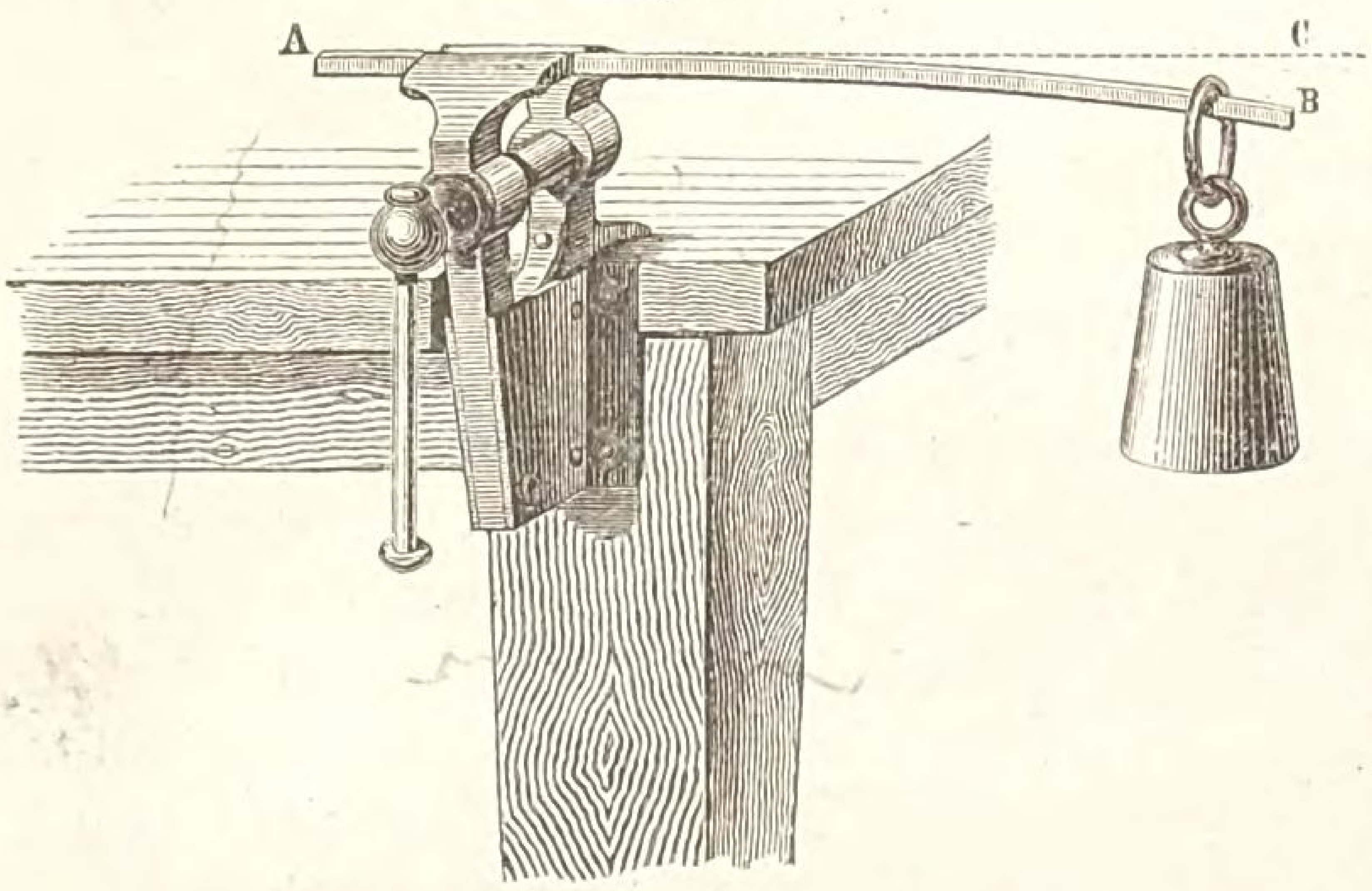
für weiches Kupfer	$\frac{c_1}{c} = 1{,}2618$;	$\mu = 0{,}2897$	
„ Messing	„ $= 1{,}025$	„ $= 0{,}3292$	
„ Glas	„ $= 1{,}086$	„ $= 0{,}319$.	

Auch aus diesen Versuchen ergibt sich somit, dass der Coefficient der Quercontraction für die verschiedenen Substanzen ein verschiedener ist.

§. 32.

Biegungselasticität. Wenn man einen stabförmigen festen Körper an seinem einen Ende A Fig. 26 horizontal einklemmt und dann das andere Ende mit einem Gewichte belastet, so tritt eine Biegung des Stabes ein; er nimmt die Gestalt einer Curve und in dieser eine neue Gleichgewichtslage an, wenn das Ende B durch eine gewisse, von der Grösse des Gewichtes und den Dimensionen des Stabes abhängige Grösse herabgesunken ist. Das Annehmen einer neuen Gleichgewichtslage beweist, dass auch durch die Biegung in dem Stabe elastische Kräfte geweckt werden, welche dem biegenden Gewichte das Gleichgewicht halten; diese elastischen Kräfte führen auch den Stab in die ursprüngliche Gleichgewichtslage zurück, wenn das biegende Gewicht fortgenommen wird, vorausgesetzt, dass das biegende Gewicht nicht zu gross genommen wird, so dass eine bleibende Biegung eintritt.

Fig. 26.

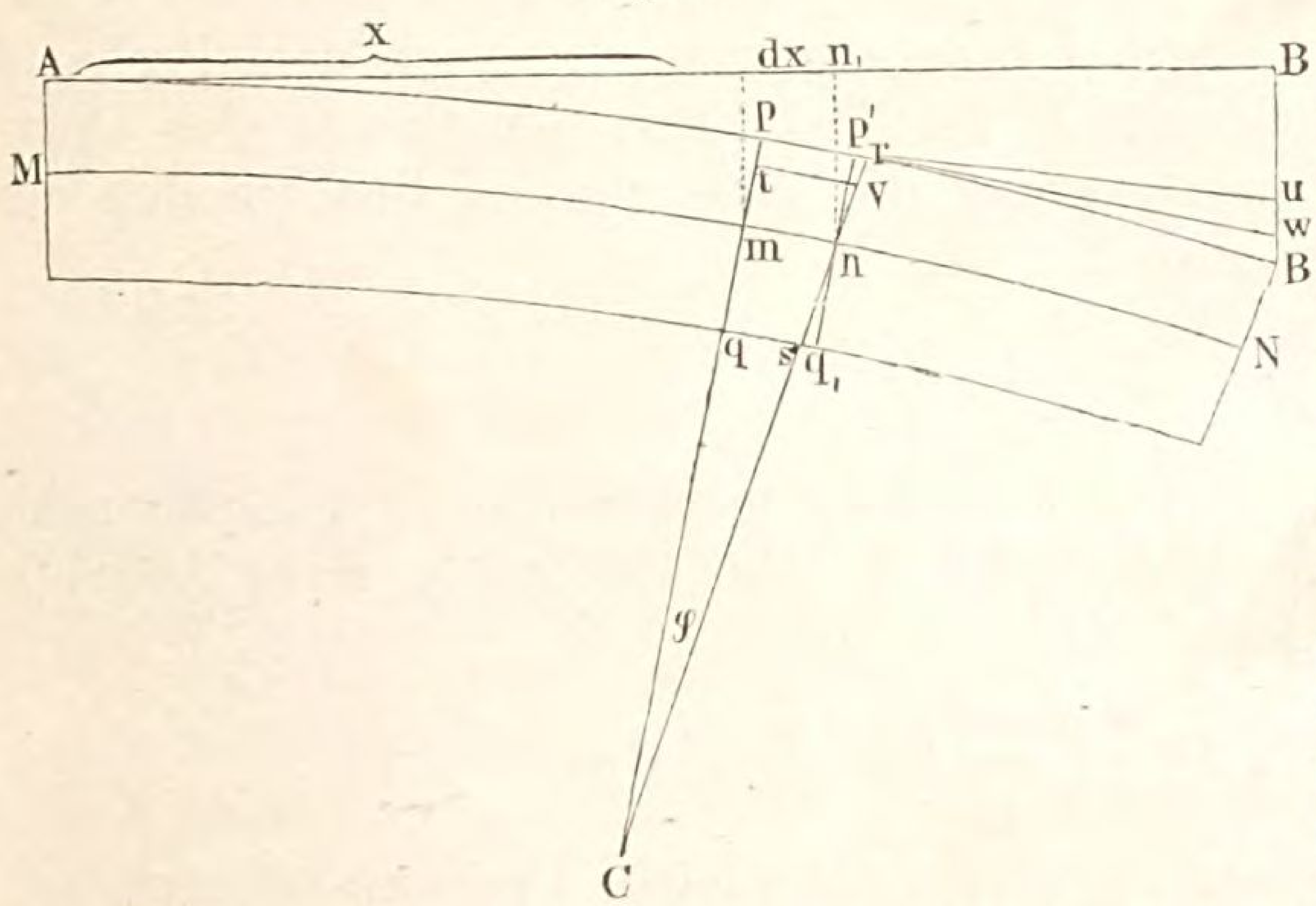


Die Gesetze der durch Biegung geweckten elastischen Kraft könnten wir ganz in derselben Weise experimentell untersuchen, wie wir es vorher mit der durch Zug oder Druck erregten Elasticität gethan haben. Wir können dieselben indess auch aus den für die Zugelasticität erkannten Gesetzen durch eine etwas genauere Betrachtung des Biegungsvorganges ableiten.

Wir wollen zu dem Zwecke einen rechteckigen Stab betrachten, dessen Länge von der Einklemmungsstelle bis zu dem Ende, an welchem das Gewicht hängt, gleich l sei, dessen Breite gleich b sei und dessen Dicke,

also die Dimension in der Richtung, in welcher die Biegung stattfindet, gleich h sei. Die Biegung kommt nun dadurch zu Stande, dass an der obern Seite des Stabes, welche bei der Biegung convex wird, die Fasern des Stabes eine Dehnung erfahren, dagegen die an der untern concaven Seite zusammengedrückt werden. Im Innern des Stabes muss es daher eine Faserschicht geben, welche bei der Biegung weder verlängert, noch verkürzt wird. Ist der Stab überall ganz gleich beschaffen, so muss diese ungeänderte Faserschicht gerade in der Mitte des Stabes liegen. Stelle nun AB Fig. 27 einen Längsdurchschnitt durch den gebogenen Stab dar; A sei die Einklemmstelle, B das mit dem Gewichte P belastete Ende und MN der Durchschnitt durch die nicht veränderte Faser. Nun sei pq ein Querschnitt des Stabes, der von dem Ende A um die Strecke x entfernt ist und rs ein diesem benachbarter, der von dem erstern um die unmessbar kleine Strecke dx entfernt sei. In der ungebogenen Lage des Stabes sind die beiden in diesen Querschnitten liegenden Molekülschichten einander parallel, nach der Biegung dagegen haben sich die Schichten oberhalb mn von einander entfernt, unterhalb mn einander genähert, sie bilden somit einen Winkel φ mit einander, der um so grösser ist, je stärker der Stab gebogen ist. Legen wir nun durch den Durchschnitt der Schicht rs mit der nicht verlängerten Faser, also durch n den Schnitt $p'q'$ parallel pq, so können wir die Biegung an dieser Stelle auffassen als eine Drehung des Schnittes $p'q'$ in die Lage rs, also durch einen Winkel φ um die durch n gelegte horizontale Axe.

Fig 27.



Um nun die Bedingungen des Gleichgewichts zu erhalten, betrachten wir die Schicht $p'q'$ als Theil eines um n drehbaren Winkelhebels, dessen anderer Hebelarm nN ist, an dessen Ende N das Gewicht P angreift. Das Drehungsmoment, welches das Gewicht P dem Schnitt $p'q'$ ertheilt, ist dann, da wir bei der Kleinheit der Biegung nN als horizontal, somit als senkrecht zur Richtung der Kraft ansehen können, gleich $P.nN = P(l - (x - dx))$, oder da dx unendlich klein ist, gleich $P(l - x)$. Diesem Drehungsmoment folgt der Schnitt $p'q'$ dann bis in die Lage rs, bis die an allen Punkten der Schicht oberhalb n angreifenden, in Folge der Vergrösserung des Abstandes von pq und rs gegen pq gerichteten anziehenden und die an allen Punkten unterhalb n angreifenden abstossenden Kräfte der Schicht rs ein ebenso grosses, nach rückwärts gerichtetes Drehungsmoment ertheilen.

Um dieses Drehungsmoment zu erhalten, denken wir uns bei v im Abstande y von n einen der Axe n parallelen Streifen der Schicht, dessen Höhe unendlich klein gleich dy, dessen Flächeninhalt also $b.dy$ ist. In

der ungebogenen Lage ist der Abstand dieses Streifens von dem entsprechenden t der Schicht pq gleich mn, in der gebogenen dagegen gleich tv; der Abstand der beiden Schichten ist also um $tv - mn$ oder in Bruchtheilen des ursprünglichen Abstandes um

$$\frac{tv - mn}{mn} = \frac{tv - mn}{dx}$$

grösser geworden. Die Differenz $tv - mn$ können wir nun direkt gleich der Länge des Bogens setzen, welchen der Streifen v beschrieben hat, um aus der Lage $p'q'$ in rs überzugehen, also da der Abstand des Streifens von der Drehungsaxe y ist, gleich $y \,.\, \varphi$. Nach §. 30 ist dann die Kraft, mit welcher der Streifen v nach t hingezogen wird, gleich dem Producte aus dem Elasticitätscoefficienten E des Materials, der Grösse des Querschnitts $b \,.\, dy$ und der Vergrösserung des Abstandes in Bruchtheilen des ursprünglichen Abstandes, also

$$E \,.\, b\, dy \frac{\varphi \,.\, y}{dx}.$$

Das dadurch der Schicht rs nach rückwärts ertheilte Drehungsmoment ist dann das Product aus dieser Kraft in den Abstand y ihres Angriffspunktes von der Drehungsaxe oder

$$y \,.\, Eb\, dy \frac{\varphi\, y}{dx} = E\, b \frac{\varphi}{dx} y^2\, dy.$$

Jeder Streifen von der Breite dy erhält das gleiche Drehungsmoment, wir erhalten also für die ganze Schicht $r's'$ das zurückdrehende Moment, wenn wir für jeden einzelnen Streifen das Moment mit dem entsprechenden Werthe von y bilden und alle Momente summiren. Die Abstände y der Streifen liegen nun oberhalb mn zwischen 0 und $\frac{h}{2}$ und unten zwischen 0 und $-\frac{h}{2}$, denn wenn wir die Abstände y nach oben positiv rechnen, müssen wir sie nach unten negativ rechnen. Wir müssen also die Summe aller Drehungsmomente bilden, indem wir für y alle Werthe zwischen $-\frac{h}{2}$ und $\frac{h}{2}$ einsetzen, also in der schon §. 1 angewandten Schreibweise

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} Eb \frac{\varphi}{dx} y^2\, dy = Eb \frac{\varphi}{dx} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} y^2\, dy.$$

Man erkennt leicht, dass der Ausdruck unter dem Summenzeichen

$$y^2\, dy = \tfrac{1}{3}\,(y + dy)^3 - \tfrac{1}{3} y^3,$$

und daraus folgt nach §. 1, dass die Summe gleich ist

$$\tfrac{1}{3} \left(\frac{h}{2}\right)^3 - \tfrac{1}{3} \left(-\frac{h}{2}\right)^3 = \tfrac{1}{12}\, h^3,$$

somit dass das ganze den Schnitt zurückdrehende Drehungsmoment

$$\frac{E}{12} \frac{b\, h^3}{dx} \varphi$$

ist. Damit ist die Bedingung des Gleichgewichts gegeben, denn dieses Drehungsmoment muss gleich dem vom Gewichte P ausgeübten, oder

$$\frac{E}{12}\frac{b\,h^3}{d\,x}\varphi = P(l - x),$$

ein Ausdruck, der zeigt, wie der Biegungswinkel φ zweier benachbarter Schichten von der Stelle im Stabe, dem Elasticitätscoefficienten u. s. w. abhängt. Diesen Winkel φ, den zwei benachbarte Schichten mit einander bilden, können wir nicht beobachten, wir können aber aus demselben leicht berechnen, um welche Strecke BB die obere Kante des Stabes herabgebogen werden muss, wenn an den verschiedenen Stellen des Stabes die benachbarten Schichten den durch obige Gleichung gegebenen Winkel φ bilden. Diese Strecke $BB = \alpha$ nennt man den Biegungspfeil, den wir, da seine Grösse durch die einzelnen Winkel φ bedingt ist, als Maass der Biegung betrachten können. Legen wir an r die Tangente rw an den Stab senkrecht zu rs und ziehen gleichzeitig ru parallel der an p gelegten Tangente, also senkrecht zu pq, so ist der Winkel $wru = \varphi$, und das dadurch aus dem Biegungspfeil herausgeschnittene Stückchen $uw = d\alpha$ können wir als Bogen des um r mit $ru = nN = l - x$ beschriebenen Kreises betrachten, dann ist

$$uw = d\alpha = \varphi\,(l - x),$$

und daraus

$$\varphi = \frac{d\alpha}{l - x}.$$

Setzen wir den Werth von φ in unsere Gleichung, so wird

$$\frac{E}{12}\,b\,h^3\,d\,\alpha = P\,(l - x)^2\,d\,x$$

$$d\,\alpha = 12\,\frac{P}{E\,b\,h^3}\,(l - x)^2\,d\,x.$$

Bilden wir die Summe aller den einzelnen Werthen von x zwischen 0 und l entsprechenden $d\alpha$, so erhalten wir den ganzen Biegungspfeil α, derselbe wird somit

$$\alpha = 12\,\frac{P}{E\,b\,h^3}\int_0^l (l - x)^2\,d\,x = 4\,\frac{P}{E}\,\frac{l^3}{b\,h^3},$$

oder der Biegungspfeil ist dem biegenden Gewichte und der dritten Potenz der Länge des Stabes direkt, dem Elasticitätscoefficienten, der Breite und der dritten Potenz der Dicke umgekehrt proportional. Nennen wir den Coefficienten

$$\frac{4}{E} = B = 4\,c$$

den Biegungscoefficienten, so sehen wir, dass derselbe für einen rechteckigen Stab gleich ist dem vierfachen linearen Verlängerungscoefficienten.

Die Gleichung für den Biegungspfeil α zeigt, dass die Biegung in viel complicirterer Weise von den Dimensionen des Stabes abhängig ist, als die Verlängerung; gleichzeitig erkennt man aus derselben und aus der Ableitung des die Schicht rs zurückdrehenden Momentes, dass dasselbe

auch von der Form des Querschnittes abhängig sein muss, da die über den ganzen Querschnitt ausgedehnte Summe der an den Streifen von der Höhe dy angreifenden Drehungsmomente mit der Form des Querschnitts sich ändert. Für einen cylindrischen Stab von der Länge l und dem Radius r erhält man z. B.

$$\alpha_1 = \frac{4}{3} \frac{P}{E} \frac{l^3}{r^4 \pi}.$$

Um diese Biegung mit der eines rechteckigen Stabes von gleichem Querschnitt und gleicher Länge zu vergleichen, denken wir uns einen Cylinder, dessen Durchmesser gleich der Höhe h des rechteckigen Stabes sei, und dessen Querschnitt $r^2 \pi = b\,h = q$ sei. Für den rechteckigen Stab ist dann

$$\alpha = 4 \frac{P}{E} \cdot \frac{l^3}{q \cdot h^2},$$

für den cylindrischen Stab α, da für diesen $h = 2\,r$ ist,

$$\alpha_1 = \frac{16}{3} \frac{P}{E} \frac{l^3}{q\,h^2}.$$

Die Biegung des cylindrischen Stabes ist somit bei gleichem Querschnitt und gleicher Höhe nicht unbeträchtlich grösser als die des parallelepipedischen Stabes.

Für die durch die Biegung im Stabe geweckte elastische Kraft erkennt man durch Auflösung der obigen Gleichungen nach P, dass sie stets der Grösse der durch den Biegungspfeil gemessenen Biegung proportional, im Uebrigen aber von der Grösse und Form des Querschnitts und der Länge des Stabes abhängig ist. Für den rechteckigen Querschnitt ist

$$P = \frac{E}{4} \frac{q\,h^2}{l^3} \cdot \alpha.$$

Kennt man die biegende Kraft P und beobachtet die Biegung α, so lässt sich aus der Biegung der Elasticitätscoefficient ebenso gut ableiten, als aus der beobachteten Verlängerung.

Eine Biegung von Stäben tritt auch ein, wenn sie an beiden Enden eingeklemmt und dann zwischen den Einklemmungsstellen belastet werden, etwa in der Mitte. Wir wollen diesen Fall nicht näher untersuchen, indess bemerken, dass stets die Grösse der Biegung dem biegenden Gewichte, somit auch die durch Biegung geweckte Elasticität der Grösse der Biegung proportional ist. Es folgt das aus der der obigen analogen Ableitung der Biegung in allen Fällen, als auch aus den Versuchen, welche die Resultate der Theorie bestätigen.

§. 33.

Torsionselasticität. Die festen Körper sind dadurch charakterisirt, dass ihre Moleküle sich nicht nur in bestimmten Abständen, sondern auch in bestimmten gegenseitigen Lagen halten. Daraus folgt, dass wenn wir in einem festen Körper zwei Molekülschichten gegen einander verschieben, auch dann eine elastische Kraft auftreten muss, wenn wir dieselben nicht von einander entfernen. Eine solche Verschiebung der einzelnen Schichten eines Stabes können wir erhalten durch Torsion des Stabes, indem wir also das eine Ende des Stabes fest einklemmen und ihn nun an seinem

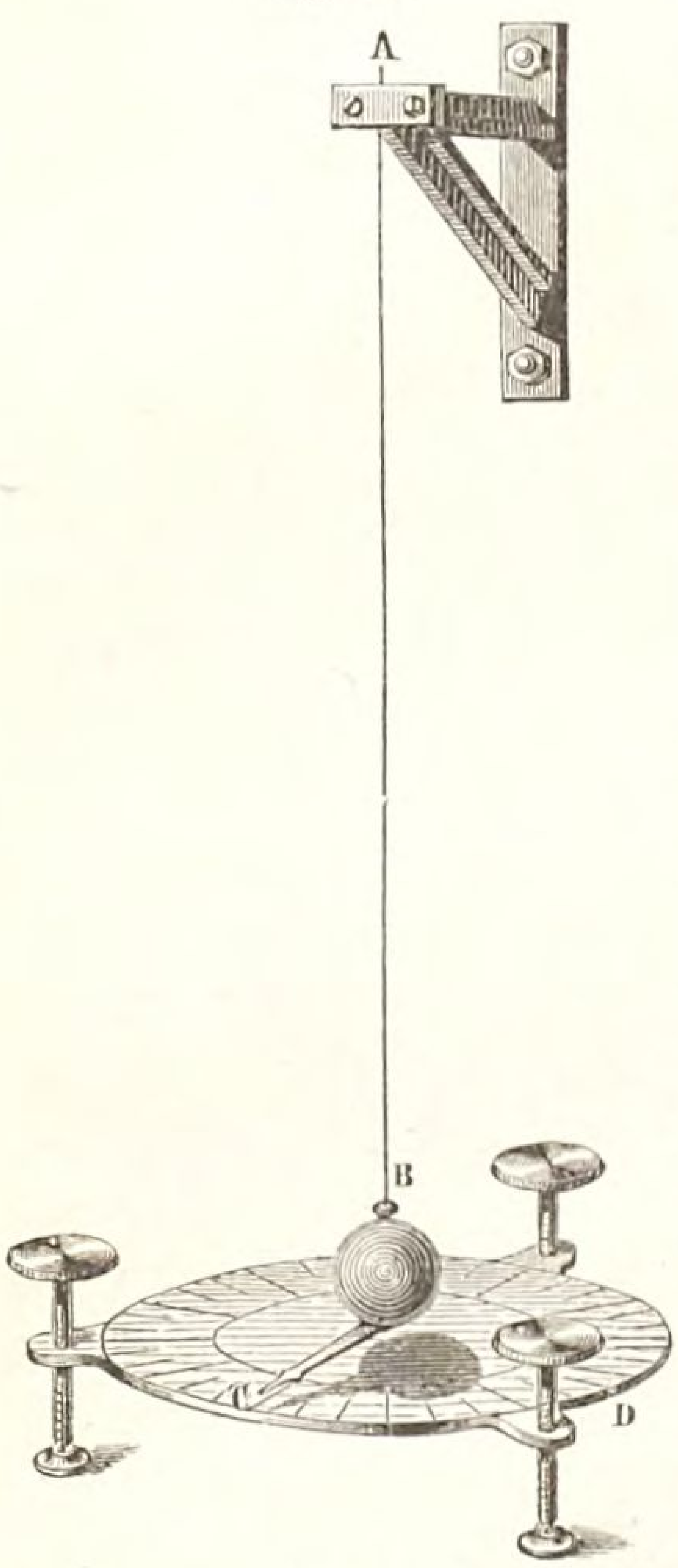
andern Ende um eine im Innern des Stabes liegende Axe drehen. Dadurch werden die zur Stabaxe senkrechten Molekülschichten gegen einander gedreht, indem die dem freien Stabende nähern Schichten eine grössere Drehung erhalten, als die von demselben fernern. Dass in der That durch eine solche Torsion eine elastische Kraft auftritt, ergibt sich sowohl daraus, dass ein gegebener Stab durch ein auf sein freies Ende wirkendes Drehungsmoment eine bestimmte, von der Grösse des Drehungsmomentes abhängige Torsion erhält, als auch daraus, dass nach dem Aufhören der tordirenden Kraft der Stab in die untordirte Lage zurückkehrt.

Die Gesetze der Torsionselasticität, deren Abhängigkeit von der Grösse der Torsion und den Dimensionen des tordirten Stabes lassen sich in der eben schon angedeuteten Weise, also dadurch untersuchen, dass man das eine Ende des Stabes einklemmt, dann auf das andere Ende ein Drehungsmoment einwirken lässt, etwa indem man dieses Ende in der Axe einer drehbaren Rolle einklemmt, und nun die Grösse der Torsion, also der Drehung des in die Rolle eingeklemmten Stabendes in ihrer Abhängigkeit von der Grösse der drehenden Kraft, der Länge des Stabes und der Grösse und Form des Querschnitts beobachtet. Da die Torsionselasticität bei dünnen Stäben einen nicht sehr grossen Werth hat, ist dieses Verfahren zu genauern Messungen nur bei Stäben von nicht zu kleiner Dicke anwendbar. Bei sehr dünnen Drähten, deren Torsionselasticität zu messen für uns das grösste Interesse hat, da wir dieselbe vielfach zu Messungen von Kräften benutzen werden, ist dieses Verfahren nicht anwendbar. Für diese ist eine andere, zuerst von Coulomb angewandte Methode, die Methode der Oscillationen sehr geeignet. Da wir stets nur die Torsion dünner Drähte benutzen werden, wollen wir nur die Coulomb'sche Methode besprechen.

Zur Messung der Torsionselasticität nach derselben klemmt man den zu untersuchenden, wir setzen voraus, genau cylindrischen Draht oder Faden an seinem obern Ende A Fig. 28 fest ein, und befestigt an dem untern Ende einen hinreichend schweren Körper, etwa eine metallische Kugel oder kreisförmige Scheibe. Man dreht dann, ohne den Faden aus der Verticalen zu bringen, die Kugel oder Scheibe um die Axe des Fadens als Drehungsaxe durch einen beliebigen Winkel und überlässt nun die Vorrichtung sich selbst. In Folge der Torsion ist dann in dem Faden ein zurückdrehendes Moment entstanden, in Folge dessen der Faden wieder aufgedreht und die Kugel in eine mit der Zeit an Geschwindigkeit wachsende Rotation versetzt wird, da, so lange der Faden noch nicht ohne Torsion ist, die Drehungsgeschwindigkeit durch die Torsionselasticität beschleunigt wird. Wenn der Draht dann in die untordirte Lage zurückgekehrt ist, ist die Rotationsgeschwindigkeit der Kugel oder Scheibe am grössten geworden, die Bewegung dauert deshalb fort, und der Draht erhält die entgegengesetzte Torsion. Dadurch wird die Bewegung nach und nach verzögert, und die Geschwindigkeit wird Null, wenn der Winkel der entgegengesetzten Torsion gleich dem der ursprünglichen geworden ist, da es in diesem Theile der Bewegung ganz dieselben Kräfte sind, welche die Bewegung verzögern, welche in der ersten Hälfte der Bewegung dieselbe beschleunigten. Die Bewegung kehrt sich dann um u. s. f., so dass in Folge der Torsionselasticität eine hin- und hergehende Bewegung entsteht, bei der, wenn keine Hindernisse vorhanden wären, die Kugel sich

stets um denselben Winkel bald in dem einen, bald in dem andern Sinne drehen würde. Reibung und Widerstand der Luft, sowie die nicht ganz vollkommene Elasticität des Drahtes bewirken aber, dass die Amplituden der Drehung immer kleiner werden.

Fig. 28.



Wir erhalten hier somit eine pendelnde Bewegung und können, gerade wie bei dem unter Wirkung der Schwere schwingenden Pendel aus der Beobachtung der Schwingungsdauer ableiten, in welcher Weise die bewegende Kraft von der Grösse der Torsion und den sonstigen Umständen abhängt.

Um die Abhängigkeit der bewegenden Kraft von der Grösse der Torsion zu erkennen, haben wir nur die Abhängigkeit der Schwingungsdauer eines gegebenen Drahtes bei gleicher angehängter Kugel von der Grösse der der Kugel ursprünglich gegebenen Drehung zu untersuchen. Ist die Grösse des den tordirten Faden zurückdrehenden Momentes der Grösse der Torsion proportional, so muss die Dauer der Schwingungen nach §. 17 von der Grösse der Amplitude, also der Grösse der dem Faden ursprünglich ertheilten Torsion unabhängig sein, und umgekehrt ist die Schwingungsdauer von der Grösse der Amplitude unabhängig, so ist die Torsionskraft dem Torsionswinkel direkt proportional.

Befestigt man an der Kugel einen Zeiger C und stellt unter derselben eine Kreistheilung auf, deren Mittelpunkt von der verlängerten Axe des Drahtes getroffen wird, so kann man die Grösse der dem Faden ertheilten Torsion messen. Der Versuch ergibt dann, dass bei nicht zu kurzen Fäden die Schwingungsdauer von der Torsion unabhängig ist, selbst wenn man dem unteren Ende des Fadens mehrfache ganze Umdrehungen gibt. Daraus folgt, dass selbst bei sehr grossen Torsionswinkeln die Grösse der geweckten Torsionselasticität der Grösse der Torsionswinkel ganz genau proportional ist.

Daraus folgt, dass wir die Grösse der tordirenden Kraft nach den §. 17 abgeleiteten Gesetzen der Pendelbewegung gemäss der §. 19 diesen Gesetzen gegebenen Verallgemeinerung ableiten können. Denn nennen wir das einem Torsionswinkel ω entsprechende, den Faden mit der daran gehängten Kugel zurücktreibende Drehungsmoment $D\omega$, und nennen wir die in den Angriffspunkt der Kraft versetzte, die Masse unseres sich drehenden Systems ersetzende Masse M, so erhalten wir für die in der abgelenkten Lage ω unserem System ertheilte Beschleunigung

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{D}{M}\omega,$$

woraus nach §. 17 und §. 19 sich unmittelbar für die Schwingungsdauer ergibt

$$t = \pi \sqrt{\frac{M}{D}}.$$

Zur Benutzung der Gleichung haben wir nur noch die Bedeutung von D und M etwas genauer zu definiren.

Die Grösse $D\omega$ bedeutet das Drehungsmoment, welches den Faden wieder aufzudrehen sucht, wenn das untere Ende um den Winkel ω gedreht ist. Ein solches Drehungsmoment können wir nur messen durch eine an einem Hebelarm angreifende Kraft, ein solches Maass müssen wir daher auch für das durch die Torsionselasticität bewirkte Drehungsmoment anwenden. Wir gelangen dazu durch folgende Ueberlegung; denken wir uns unten an dem Drahte einen Hebelarm von der Länge eins, senkrecht zur Axe des Fadens, wir wollen uns denselben, damit keine Ablenkung des Drahtes aus der Verticalen eintritt, als gewichtslos denken, so können wir am Ende dieses Hebels einen Faden befestigen, diesen horizontal und senkrecht zum Hebelarm über eine in verticaler Ebene drehbare Rolle führen und nun an diesem Faden ein Gewicht befestigen, so dass der Draht gerade in der tordirten Lage gehalten wird. Das durch dieses am Hebelarm von der Länge eins bewirkte Drehungsmoment ist dann gleich dem Drehungsmoment $D\omega$, da es demselben das Gleichgewicht hält, es ist uns also das Maass für das Drehungsmoment $D\omega$. Die Grösse D ist dann das durch die Torsion bedingte Drehungsmoment, wenn $\omega = 1$ ist; es ist also gleich dem am Ende des Hebels von der Länge eins angreifenden Gewichte, wenn das Ende des Hebels einen Bogen zurückgelegt hat, der selbst der Einheit gleich ist.

Die Grösse M ist diejenige Masse, welche in dem Angriffspunkte der Kraft concentrirt ganz dieselbe Beschleunigung erhält, wie die wirklich vorhandene Masse. Da wir nun durch die Art, wie wir das Drehungsmoment der Torsion messen, als Angriffspunkt der Kraft den Endpunkt eines Hebels von der Länge eins eingeführt haben, ist M jene Masse, welche in der Abstandseinheit von der Drehungsaxe die vorhandene Masse ersetzt. Es ist also nichts anders als das Trägheitsmoment der zu bewegenden Masse, des Drahtes und der unten anhängenden Kugel in Bezug auf die Axe des Drahtes. Ist uns dieses Trägheitsmoment M bekannt, so liefert uns

$$D = \frac{\pi^2 M}{t^2}$$

das Drehungsmoment der Torsion, wenn $\omega = 1$ ist.

Ist der Faden hinreichend fein und das Gewicht der unten angehängten Kugel oder Scheibe hinreichend gross, so kann man als Trägheitsmoment einfach das des unten angehängten Körpers nehmen und dasselbe nach den für den betreffenden Körper gültigen Formeln berechnen. Da diese Formeln indess stets eine genau bestimmte regelmässige geometrische Gestalt des Körpers, dessen Trägheitsmoment bestimmt werden soll, voraussetzen, sind sie nur anwendbar, wenn zur Befestigung der Kugel oder Scheibe keine Ansatzstücke benutzt sind. Ist das der Fall, so muss man das Trägheitsmoment des Systemes auf experimentellem Wege bestimmen, ein Verfahren, auf welches wir schon §. 19 hinwiesen, und welches immer anwendbar ist, welches auch die Form des an dem Drahte hängenden Körpers ist.

Wir gelangen dazu auf folgende Weise. Wir beobachten zuerst die Schwingungsdauer t unseres Drahtes mit der daran hängenden Kugel oder Scheibe. Wir befestigen dann unten an der Kugel, so dass er horizontal schwebt, einen leichten Holzstab, dessen Länge an beiden Seiten der Axe des Drahtes gleich gross ist, so dass nach Anbringen desselben der Draht nach wie vor vertical hängt. Der Stab ist an beiden Seiten in gleichen Abständen r_1, r_2 von dem Drahte mit nach oben gerichteten Spitzen versehen. Wir hängen nun zuerst in den Abständen r_1 vom Drahte auf die Spitzen an Ringen befestigte, am bequemsten cylindrische Gewichte p. Da wir den Stab so an beiden Seiten gleich stark belasten, bleibt er horizontal und der Faden bleibt vertical. Wir bringen dann dieses System in Torsionsschwingungen und beobachten die Schwingungsdauer t_1.

Da nämlich die zu bewegende Masse jetzt grösser geworden, die bewegende Kraft dagegen genau die gleiche geblieben ist, muss die Schwingungsdauer eine grössere werden; nennen wir das Trägheitsmoment der jetzt schwingenden Masse M_1, so wird

$$t_1 = \pi \sqrt{\frac{M_1}{D}}.$$

Dieses Trägheitsmoment M_1 ist nun gleich der Summe folgender Trägheitsmomente: erstens des Trägheitsmomentes M des unbelasteten Systemes, zweitens des Trägheitsmomentes des Holzstabes, das wir mit C bezeichnen wollen, und drittens des der beiden Gewichte in Bezug auf die Axe des Drahtes. Die Gewichte hängen sich nun so, dass ihr Schwerpunkt vertical unter den Spitzen hängt. Bezeichnen wir nun das Trägheitsmoment jedes der Gewichte, welche beide genau dieselbe Form haben, in Bezug auf eine verticale, durch ihren Schwerpunkt gelegte Axe mit $\frac{p}{g} \cdot a^2$, so ist nach §. 18 das Trägheitsmoment jedes der Gewichte in Bezug auf die Axe des Drahtes, da die durch den Schwerpunkt gelegte Axe derjenigen des Drahtes parallel und von derselben um den Abstand r_1 entfernt ist,

$$\frac{p}{g}(a^2 + r_1^2).$$

Somit wird

$$M_1 = M + C + 2\frac{p}{g}(a^2 + r_1^2),$$

oder setzen wir

$$C + 2\frac{p}{g}a^2 = A,$$

$$M_1 = M + A + 2\frac{p}{g} \cdot r_1^2,$$

oder

$$t_1 = \pi \sqrt{\frac{M + A + 2\frac{p}{g} \cdot r_1^2}{D}}.$$

Nach Bestimmung der Schwingungsdauer t_1 hängen wir dann die Gewichte p auf die Spitzen, welche sich im Abstande r_2 befinden, und beobachten die Schwingungsdauer t_2. Dieselbe ist dann, da dieser Versuch sich von

dem vorigen nur dadurch unterscheidet, dass an Stelle des Abstandes r_1 derjenige r_2 getreten ist,

$$t_2 = \pi \sqrt{\frac{M + A + 2\frac{p}{g} r_2{}^2}{D}}.$$

In den drei Gleichungen für t, t_1, t_2 haben wir drei Unbekannte, M, A, D, wir können deshalb jede derselben, also auch M und D bestimmen. Wir erhalten

$$D \,.\, t^2 = \pi^2 M; \quad D \,.\, t_1{}^2 = \pi^2 \left(M + A + 2\frac{p}{g} \cdot r_1{}^2\right)$$

$$D \,.\, t_2{}^2 = \pi^2 \left(M + A + 2\frac{p}{g} r_2{}^2\right).$$

Subtrahiren wir die zweite von der dritten, so wird

$$D = \pi^2 \frac{2\frac{p}{g}\left(r_2{}^2 - r_1{}^2\right)}{t_2{}^2 - t_1{}^2},$$

und indem wir diesen Werth von D in die erste setzen

$$M = t^2 \frac{2\frac{p}{g}\left(r_2{}^2 - t_1{}^2\right)}{t_2{}^2 - t_1{}^2}.$$

Handelt es sich nur um die Bestimmung D, so ist es hiernach nicht erforderlich M zu berechnen.

Ebenso wie D und M kann man auch A berechnen, und dann bedarf es, wenn man immer denselben Stab und dieselben Gewichte p benutzt, bei Untersuchung eines andern Drahtes oder Anwendung eines andern unten angehängten Körpers nur mehr zweier Beobachtungen zur Bestimmung von M oder D.

Misst man nun so die Torsionselasticität von Drähten verschiedener Länge, verschiedenen Durchmessers und verschiedenen Materials, so ergibt sich

1. Das Drehungsmoment der Torsion ist umgekehrt proportional der Länge des Drahtes.

2. Es ist proportional der vierten Potenz des Radius des Drahtes.

3. Es ist proportional einem von der Natur des Materials abhängigen Coefficienten, den wir als den Torsionscoefficienten des betreffenden Materials bezeichnen können. Bezeichnen wir diesen Coefficienten mit T, den Radius des Drahtes mit ϱ, die Länge desselben mit l, so wird

$$D\,\omega = T \frac{\varrho^4}{l}\,\omega,$$

oder

$$D = T \frac{\varrho^4}{l}.$$

Setzen wir einen Draht von der Länge eins und dem Radius eins voraus, so wird

$$D = T,$$

oder der Torsionscoefficient ist jenes Drehungsmoment, also auch jenes an einem Hebelarm von der Länge eins angreifende Gewicht, welches bei einem Drahte von der Länge 1 Meter und dem Radius 1 Mm., da wir bei Bestimmung der Elasticität als Einheit der Länge 1 Meter, und des Querschnitts Millimeter gewählt haben, den Draht in der tordirten Lage erhält, wenn die Torsion des untern Endes der Einheit gleich ist. Als Einheit der Torsion nimmt man dabei gewöhnlich jene, bei welcher der von dem Endpunkte des gedachten Hebels von der Länge eins beschriebene Bogen die Länge eins hat, bei dem also die Länge des Bogens gleich der des Radius ist. Diese Torsion entspricht einem Drehungswinkel von

$$\frac{360}{2\pi} = 57^0{,}3;$$

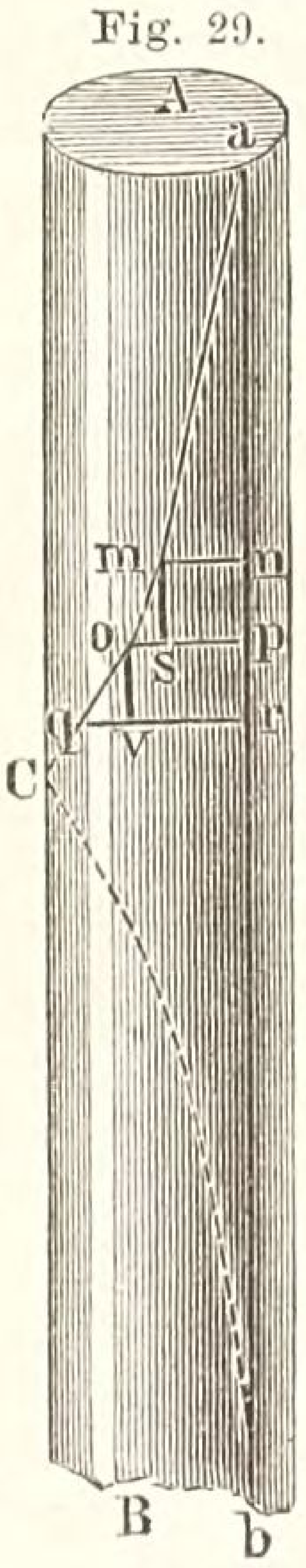
es ist selbstverständlich, dass wir bei dieser Definition ω stets als Bogen zu messen haben, dessen Längeneinheit der Radius ist, so dass eine ganze Umdrehung gleich 2π ist. Drücken wir die Torsion in Winkelgraden ψ aus, so ist

$$\omega = \frac{\psi}{57{,}3}.$$

Die soeben aus den Versuchen abgeleiteten Torsionsgesetze lassen sich aus dem zuerst bewiesenen Satze, dass die Grösse der Torsionselasticität proportional der Grösse der Torsion ist, durch eine etwas genauere Betrachtung der Torsion unmittelbar theoretisch ableiten.

Wie wir schon im Beginn dieses §. bemerkten, wird in einem cylindrischen, an seinem untern Ende tordirten Drahte jede zur Drahtaxe senkrechte Molekülschicht um ihren Mittelpunkt gedreht, und zwar um so mehr, je näher sie dem gedrehten Ende des Cylinders liegt.

Fig. 29.



So wird in einem Cylinder AB durch die Torsion des untern Endes die Schicht n durch den Bogen nm, die Schicht p durch den Bogen po, die Schicht r durch den Bogen rq gedreht. Die Verbindungslinie np zweier Punkte der Schichten n und p, welche im untordirten Zustande lothrecht war, bildet jetzt mit der Verticalen einen Winkel φ, und einen ganz eben solchen Winkel bildet die Verbindungslinie oq mit der Verticalen, während auch diese beiden Punkte als p und r im untordirten Zustande vertical unter einander lagen. Eine Faser des Stabes wie ab, welche vor der Torsion der Stabaxe parallel war, bildet somit nach der Torsion eine Schraubenlinie, welche an allen Stellen um den Winkel φ gegen die Verticale geneigt ist. Die Grösse dieses Winkels, der die Verschiebung der Moleküle gegen einander misst und den deshalb Clebsch den Verschiebungswinkel nennt, kann man aus der Grösse des Torsionswinkels in folgender Weise ableiten. Hat der unterste Querschnitt die Drehung ω erhalten, so wird die erwähnte Schraubenlinie bei dem Abwickeln von dem Cylinder Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen eine Kathete die Länge l des Cylinders, dessen andere Kathete die Länge des von dem untern Ende der Schraubenlinie beschriebenen Bogens ω ist. Betrachten wir also eine Faser im Innern des Cylinders, welche die Ent-

fernung r von der Axe hat, so ist diese Kathete $r \,.\, \omega$; der Winkel φ liegt in dem Dreiecke dieser Kathete gegenüber, wir erhalten deshalb für denselben

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{r\,\omega}{l}$$

oder auch da φ immer ein sehr kleiner Winkel ist,

$$\varphi = \frac{r\,\omega}{l}.$$

Der Verschiebungswinkel ist demnach der Grösse der Torsion proportional. Da nun die in dem Stabe geweckte Torsionselasticität der Grösse der Torsion proportional ist, folgt, dass sie auch dem Verschiebungswinkel proportional ist. Wir werden ferner annehmen können, dass bei gleichem Verschiebungswinkel die durch die Verschiebung geweckte Elasticität der Grösse der gegen einander verschobenen Fläche proportional ist. Ist demnach dq der Querschnitt der im Abstande r von der Axe befindlichen Faser, und ist k eine Constante, so werden wir die elastische Kraft, welche die benachbarten Schichten der Faser in die unverschobene Lage zurückzutreiben sucht, setzen können

$$p = k \varphi\, dq \,. = k \frac{r\,\omega}{l}\, dq,$$

da die einzelnen Punkte des Flächenelementes dq gegen die Punkte des darüber liegenden Querschnitts alle um den gleichen Winkel φ verschoben sind. Diese an dem im Abstande r von der Axe in der untersten Schicht des Stabes angreifende Kraft p ertheilt dieser Schicht ein gegen die untordirte Lage gerichtetes Drehungsmoment pr

$$p \,.\, r = k r \frac{r\,\omega}{l}\, dq.$$

Ein genau gleiches Drehungsmoment erhält die unterste Schicht des Stabes von allen Flächenelementen dq, welche den Fasern des Cylinders angehören, die sich im gleichen Abstande r von der Axe befinden. Setzen wir die Dicke jeder einzelnen dieser Fasern gleich dr, so schneiden alle diese Fasern die betrachtete Schicht in einem Ringe, dessen innerer Radius gleich r und dessen äusserer Radius gleich $r + dr$ ist. Der Flächeninhalt dieses Ringes ist somit

$$(r + dr)^2 \pi - r^2 \pi = 2 \pi\, r\, dr,$$

da $dr^2 \pi$ gegen den selbst unendlich kleinen Flächeninhalt des Ringes wieder unendlich klein, also zu vernachlässigen ist. Das von den an diesem Ringe angreifenden Kräften herrührende die betrachtete Schicht zurückdrehende Drehungsmoment ist dann, da wir in obiger Gleichung nur dq durch die Fläche des Ringes zu ersetzen haben,

$$d = k r \frac{r\,\omega}{l}\, 2 \pi\, r\, dr = 2 \pi k \frac{\omega}{l} \cdot r^3\, dr.$$

Daraus erhalten wir dann das Drehungsmoment D, welches die in allen Punkten der untersten Schicht angreifenden Kräfte derselben gegen die untordirte Lage hin ertheilen, wenn wir den gleichen Ausdruck für alle

Ringe, deren Radien zwischen 0 und ϱ, dem Radius des Cylinders, liegen, bilden und alle diese Drehungsmomente d summiren. Damit wird

$$D = \int_0^\varrho 2\pi k \frac{\omega}{l} r^3\, dr = \frac{\pi}{2} k \frac{\omega}{l} \varrho^4,$$

da $r^3\, dr = \frac{1}{4} \{(r + dr)^4 - r^4\}$ ist.

Wir erhalten somit ganz denselben Ausdruck, den auch unsere Versuche ergaben, in welchem nur der Torsionscoefficient T ersetzt ist durch

$$T = k \frac{\pi}{2},$$

worin k die Constante ist, mit der wir die Verschiebungswinkel multipliciren müssen, um die durch eine Verschiebung zweier Schichten, deren Grösse gleich der Flächeneinheit ist, geweckte elastische Kraft zu erhalten. Für diese Constante k ergibt nun die Theorie der Elasticität eine sehr einfache Beziehung zu dem Elasticitätscoefficienten E und dem Coefficienten μ der Quercontraction, nämlich

$$k = \frac{E}{2(1 + \mu)},$$

so dass damit das durch eine Torsion ω am Ende eines Stabes von der Länge l und dem Radius ϱ entstehende gegen die untordirte Lage zurückgerichtete Drehungsmoment wird

$$D = \frac{E}{2(1 + \mu)} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\omega}{l} \varrho^4.$$

Dieser Werth für das Drehungsmoment D durch Torsion gilt unserer Ableitung nach nur für cylindrische Drähte und da der Radius ϱ in unserer Ableitung gar keiner Beschränkung unterworfen ist, auch für dickere Stäbe. Dass er für letztere auch erfahrungsgemäss gilt, ist von Wertheim durch direkte Versuche gezeigt worden. Für Stäbe, deren Querschnitt nicht kreisförmig ist, gilt der Ausdruck nicht, für diese ist die Abhängigkeit der Torsionselasticität von den Dimensionen des Querschnitts viel verwickelter.

Wegen der Beziehung zwischen der Torsionselasticität, dem Elasticitätscoefficienten und dem Coefficienten der Quercontraction lässt sich aus einer gleichzeitigen Bestimmung des Elasticitätscoefficienten und des Torsionscoefficienten auch der Coefficient der Quercontraction ableiten. Wir haben im §. 31 schon erwähnt, dass Kirchhoff, Okatow, Wertheim und Schneebeli diese Methode zur Bestimmung von μ benutzt haben.

§. 34.

Elastische Nachwirkung; Grenze der Elasticität; Festigkeit. Wir haben in den letzten §§. stets vorausgesetzt, dass die an den Körpern hervorgebrachten Aenderungen so klein seien, dass sofort nach Aufhören der wirkenden Kräfte die Körper wieder ihre ursprünglichen Dimensionen und Form annehmen. Das ist indess keineswegs immer der Fall, sondern nur, wenn die äussern Kräfte, welche auf die Körper verändernd einwirkten, nur eine kurze Zeit thätig sind, und dann auch nur, wenn sie nicht zu gross sind. Lässt man kleine Kräfte, welche bei kurz dauernder Ein-

wirkung rasch vorübergehende Aenderungen hervorbringen, längere Zeit einwirken, so zeigt sich zunächst, dass die Aenderungen, also Dehnungen, Biegungen oder Torsionen mit der Zeit noch zunehmen, eine Zunahme, die zwar sehr langsam stattfindet, aber stundenlang, ja tagelang dauern kann. Lässt man dann die äussern Kräfte aufhören zu wirken, so findet man auch, dass die an den Körpern eingetretenen Aenderungen nicht sofort rückgängig werden, sondern dass die Rückkehr in die natürliche Gleichgewichtslage ebenfalls nur sehr allmählich erfolgt. Man bezeichnet diese durch länger dauernde Einwirkung eintretende allmähliche Aenderung, welche ebenso auch nur allmählich rückgängig wird, als elastische Nachwirkung, eine Erscheinung, welche zuerst von W. Weber, später von F. Kohlrausch, Boltzmann, Braun u. a. vielfach untersucht worden ist.

Ausser dieser elastischen Nachwirkung, welche doch nur eine, wenn auch langsam vorübergehende Aenderung der Körper bewirkt, zeigt sich, besonders wenn man an einem Körper zu grosse Aenderungen hervorgerufen hat, dass die Aenderungen überhaupt nicht wieder vollständig rückgängig werden. Ein durch ein zu grosses Gewicht, also zu stark gedehnter Draht behält eine bleibende Ausdehnung, seine Moleküle haben eine neue Gleichgewichtslage angenommen; dasselbe zeigt sich bei Compression, Biegung oder Torsion. Auf dieser Eigenschaft der Körper beruht die bleibende Verlängerung eines Drahtes, wenn man ihn durch einen Drahtzug gezogen hat; der Abdruck eines Stempels auf Münzen, das Auswalzen der Bleche, die Herstellung von Radkränzen und alle ähnliche Formänderungen von Körpern, welche ohne eine Trennung des Zusammenhanges ihrer Theile eintreten.

Es gibt demnach eine Elasticitätsgrenze, eine Grenze der Veränderungen, die man bei einem Körper nicht überschreiten darf, wenn die Form oder die Dimensionen des Körpers nicht dauernd geändert werden sollen. Setzt man nur kurz dauernde Einwirkungen von Kräften voraus, so kann man die Elasticitätsgrenze auch als eine Kraft bezeichnen, da die Grösse der Aenderungen den wirksamen Kräften proportional ist.

Um in dieser Weise die Elasticitätsgrenze durch bestimmte Zahlen, wenigstens in einem Falle ausdrücken zu können, ist man übereingekommen als Elasticitätsgrenze beim Zuge jenes Gewicht zu bezeichnen, welches bei kurz dauernder Belastung einem Drahte von 1 Quadratmillimeter Querschnitt eine bleibende Verlängerung von 0,0005 seiner ursprünglichen Länge gibt, also ein Meter um 0,5 Millim. ausdehnt.

Es ist das immerhin ein ziemlich willkührliches Maass, denn schon viel kleinere als das so bestimmte Gewicht bringen eine bleibende Veränderung hervor, wenn ihre Einwirkung nur von hinreichend langer Dauer ist, ja wenn man einen Stab an seinem einen Ende einklemmt und ihn dann vertical herabhängen lässt, so verlängert er sich schon durch sein eigenes Gewicht. Klemmt man ihn so ein, dass das eingeklemmte Ende das untere ist, so verkürzt er sich durch sein eigenes Gewicht; klemmt man ihn an seinem einen Ende ein, so dass der Stab horizontal ist, oder stützt man einen horizontal liegenden Stab an beiden Enden, so biegt er sich durch sein eigenes Gewicht dauernd durch. Man erkennt das daran, dass mit der Zeit alle Federn, wie z. B. die Uhrfedern, erlahmen, dass alle Balken in Gebäuden mit der Zeit sich durchbiegen. Deshalb hat die

Untersuchung, resp. Bestimmung der Elasticitätsgrenze in der angegebenen Art mehr ein praktisches als wissenschaftliches Interesse.

Das Gleiche gilt von der Untersuchung der Festigkeitsgrenze oder der Festigkeit der Körper. Geht man nämlich in der Einwirkung äusserer Kräfte über die Elasticitätsgrenze weiter und weiter hinaus, so kommt man schliesslich zu einer Einwirkung, bei welcher der Zusammenhang der Theile eines Körpers gelöst wird. Ein zu starker Zug zerreisst, ein zu starker Druck zerquetscht oder zerstampft einen Körper, biegt man einen Stab zu stark, so bricht er und tordirt man ihn zu stark, so wird er abgedreht.

Den Widerstand eines Körpers gegen die Lösung des Zusammenhanges seiner Theile nennt man seine Festigkeit, und zwar unterscheidet man so viele verschiedene Arten von Festigkeiten, als es Formen der Einwirkung gibt, welche eine Zertheilung der Körper bewirken können. Als absolute Festigkeit bezeichnet man den Widerstand eines Körpers gegen das Zerrissenwerden, als rückwirkende Festigkeit den Widerstand gegen das Zerdrücktwerden, die Bruchfestigkeit wird als die relative bezeichnet.

Ueber die Festigkeit der Körper und die Abhängigkeit derselben von den Dimensionen lassen sich keine allgemeinen Gesetze aufstellen; man hat die absolute Festigkeit der Körper dadurch zu messen versucht, dass man das Gewicht bestimmt hat, welches bei langsamer Belastung einen Draht von beliebiger Länge und einem Millimeter Querschnitt zu zerreissen im Stande ist, und mit diesem als Festigkeitscoefficienten die Festigkeit für grössere Querschnitte berechnet unter der Voraussetzung, dass die Festigkeit wie die Elasticität dem Querschnitt proportional ist. Indess können die so gemessenen Festigkeiten nur ein ungefähres Bild der Festigkeit geben und die aus den Dimensionen berechnete nur eine annähernde Richtigkeit haben. Es ergibt sich das schon aus der Ueberlegung, dass das Zerreissen immer an einer Stelle eintreten muss, an der der Zusammenhalt der Moleküle geringer ist als an andern; ein ganz homogener Stab von überall gleichem Querschnitt kann gar nicht zerreissen, er müsste, da die molekülaren Kräfte zwischen je zwei beliebigen Molekulschichten stets die gleichen sind, bei hinreichend grosser Belastung in die einzelnen Molekülschichten zerfallen. Tritt eine Zerreissung an einer bestimmten Stelle ein, so beweist das, dass die dort getrennten Molekülschichten weniger an einander hafteten als die übrigen, somit dass der Stab nicht ganz homogen war. Schon daraus, dass das Zerreissen Folge eines Mangels an Homogenität ist, folgt, dass es keine für eine Substanz charakteristische Festigkeitsgrenze und keine sichern Gesetze über die Abhängigkeit der Festigkeit von den Dimensionen geben kann. Ganz dasselbe gilt für die andern Arten der Festigkeit.

Um ein Bild von den Grenzen der Elasticität und Festigkeit zu geben, sind im Folgenden für einige Metalle die von Wertheim in der vorhin angegebenen Weise bestimmten Werthe der Elasticitätsgrenzen und Festigkeitsgrenzen zusammengestellt.

Name der Metalle.		Elasticitätsgrenze. Kilogramme	Festigkeitsgrenze. Kilogramme
Blei	gezogen	0,25	2,07
	angelassen	0,20	1,80

Name der Metalle.		Elasticitätsgrenze. Kilogramme	Festigkeitsgrenze. Kilogramme
Gold	gezogen	13,50	27,00
	angelassen	3,00	10,08
Silber	gezogen	11,25	29,00
	angelassen	2,75	16,02
Kupfer	gezogen	12,0	40,30
	angelassen	3,0	30,54
Platin	gezogen	26,0	34,10
	angelassen	14,5	23,50
Eisen	gezogen	32,5	61,10
	angelassen	5,0	46,88

Auch hier zeigt sich ein grosser Unterschied zwischen gezogenem und angelassenem Metall; im Grossen und Ganzen, erkennt man weiter, gehen Elasticitätsgrenze und Festigkeit einander, und wie eine Vergleichung mit den Zahlen des §. 31 zeigt, auch die Elasticitäten einander parallel, ohne dass sich indess eine innigere Beziehung zwischen den verschiedenen Zahlen zeigt.

Ausser den erwähnten kann man noch eine weitere Art von Festigkeit unterscheiden, die Härte; man versteht darunter den geringern oder grössern Widerstand, den ein Körper dem Eindringen von Spitzen oder Schneiden entgegensetzt. Man kann denselben durch Bestimmung des Druckes messen, mit welchem man eine Spitze über die Oberfläche des Körpers hinführen muss, damit die Oberfläche geritzt wird, wie es u. a. Calvert und Johnson gethan haben. Gewöhnlich bestimmt man den Härtegrad eines Körpers nach einer Härteskala, man theilt die Körper in 10 Klassen und bestimmt den Härtegrad durch Untersuchung, welche Körper den zu bestimmenden bei passendem Druck ritzen können, und welche derselbe zu ritzen im Stande ist. Die Normalkörper der Härteskala vom weichsten bis zum härtesten sind

1. Talk	4. Flussspath	7. Quarz
2. Steinsalz	5. Apatit	8. Topas
3. Kalkspath	6. Feldspath	9. Korund
		10. Diamant.

Ein Körper hat z. B. den Härtegrad 5, wenn er Flussspath ritzen kann, selbst aber von Feldspath geritzt wird. Körper gleicher Härte ritzen sich gegenseitig.

§. 35.

Vom Stoss der Körper. Auf der Eigenschaft der Elasticität beruhen die Bewegungserscheinungen, welche sich zeigen, wenn zwei feste Körper auf einander stossen.

Haben zwei Körper mit den Massen m und m' die Geschwindigkeiten v und v', und liegt die Bewegungsrichtung ihrer Schwerpunkte in derselben geraden Linie, oder gehen die Bewegungsrichtungen der Schwerpunkte einander parallel, so dass der Abstand dieser Parallelen kleiner ist, als die Dimensionen der Körper, so müssen, wenn die Geschwindigkeit v der Masse m grösser ist als diejenige der Masse m', die Körper nach einiger Zeit auf einander treffen und sich stossen.

Wir wollen zunächst annehmen, die Körper seien Kugeln und die Bewegungsrichtung ihrer Mittelpunkte falle in ein und dieselbe Linie. Treffen die Körper auf einander, so werden sie während einer gewissen Zeitdauer einen Druck auf einander ausüben, durch den die Geschwindigkeit des langsamern vergrössert, die des raschern verkleinert wird. Sind die Geschwindigkeiten der Körper nach dem Stosse c und c', so ist der Zuwachs an Geschwindigkeit des langsamer bewegten $c' - v'$, die Abnahme des rascher bewegten $v - c$. Diese Geschwindigkeitsänderungen sind durch den Druck der Kugeln auf einander entstanden; da nun der Druck, da er ein gegenseitiger ist, für beide Kugeln genau derselbe und genau von gleicher Dauer ist, muss die aus diesem Drucke für die beiden Kugeln entstehende Bewegungsgrösse nach §. 8 den gleichen Werth haben. Diese aus diesem Druck sich ergebende Bewegungsgrösse ist gleich dem Producte aus der Masse jedes der Körper in die ihm ertheilte Geschwindigkeitsänderung, es ist somit

$$m(v - c) = m'(c' - v')$$

oder

$$mv + m'v' = mc + m'c'.$$

Diese Beziehung gilt für alle Körper, welches auch ihre elastischen Eigenschaften sein mögen. Um eine weitere Beziehung zu erhalten, müssen wir die elastischen Eigenschaften in Betracht ziehen.

1. Setzen wir voraus die Körper seien absolut unelastisch, das heisst es trete bei einer Verschiebung oder Annäherung der Moleküle keine Kraft auf, welche die Moleküle in ihre ursprüngliche Gleichgewichtslage zurücktreibe. Dann wird durch den Stoss eine Deformation der Körper eintreten, sie werden sich aber nach dem Stosse nicht mehr von einander trennen, sondern mit gemeinsamer Geschwindigkeit weiter gehen, es ist $c = c'$, oder

$$mv + m'v' = (m + m')\,c$$

$$c = \frac{mv + m'v'}{m + m'}.$$

Waren die Geschwindigkeiten v und v' einander entgegengesetzt, so müssen wir in dieser Gleichung die eine, etwa v' mit dem negativen Vorzeichen versehen, es ist

$$c = \frac{mv - m'v'}{m + m'}.$$

Ist nun $mv = m'v'$, so wird $c = 0$, die beiden Körper bleiben nach dem Stosse in Ruhe. Da somit die lebendige Kraft der bewegten Massen nach dem Stosse gleich 0 ist, scheint hier ein Widerspruch mit dem in §. 8 entwickelten Princip von der Erhaltung der Arbeit vorzuliegen; indess ist dieser Widerspruch nur ein scheinbarer, indem bei diesem Stosse der Massen die lebendige Kraft zu einer im Innern der Körper geleisteten Arbeit verwandt wird. Die Gestalt der stossenden Körper ist geändert und besonders wird durch den Stoss, wie wir im dritten Theile ausführlicher betrachten werden, Wärme erzeugt. Eben deshalb tritt bei diesem Stosse nicht nur, wenn $c = 0$ ist, sondern unter allen Umständen ein Verlust an lebendiger Kraft ein, für den man leicht findet

$$V = \frac{mm'}{m + m'} (v - v')^2,$$

worin ebenfalls v' negativ zu setzen ist, wenn die Bewegung beider Kugeln entgegengesetzt gerichtet ist.

2. Sind beide Körper vollkommen elastisch, so gleicht sich die Gestaltsänderung nach dem Stosse sofort wieder aus, es werden die Körper wieder auseinander getrieben, und es tritt kein Verlust an Arbeit ein; denn die Arbeit, welche in dem ersten Momente zur Compression der Körper geleistet wird, wird durch die nachfolgende Ausdehnung in Folge der geweckten elastischen Kraft sofort wieder gewonnen. Es muss also nach dem Stosse die lebendige Kraft der bewegten Massen ganz dieselbe sein wie vor dem Stosse, es muss somit

$$mv^2 + m'v'^2 = mc^2 + m'c'^2$$

oder

$$m(v^2 - c^2) = m'(c'^2 - v^2).$$

Dividiren wir diese Gleichung durch die erste für jeden Stoss gültige

$$m(v - c) = m'(c' - v'),$$

so wird

$$v + c = c' + v'$$

und aus diesen beiden Gleichungen

$$c = \frac{2m'v' + (m - m')v}{m + m'} \qquad c' = \frac{2mv + (m' - m)v'}{m + m'}$$

in denen wieder das Vorzeichen von v' negativ zu setzen ist, wenn die Geschwindigkeit beider Körper die entgegengesetzte ist.

Sind die beiden Massen von gleicher Grösse, also $m = m'$, so wird

$$c = v', \quad c' = v.$$

Die beiden Körper haben nach dem Stosse ihre Geschwindigkeit ausgetauscht; ist also $v' = 0$, so wird $c = 0$, $c' = v$, der stossende Körper gelangt zur Ruhe, der gestossene geht mit der Geschwindigkeit des stossenden weiter.

Man kann dieses Verhalten zweier sich stossender Kugeln leicht experimentell nachweisen, indem man zwei Elfenbeinkugeln als Pendel neben einander hängt, so dass sie in der Gleichgewichtslage sich gerade berühren. Hebt man die eine und lässt sie fallen, so dass sie die ruhende central stösst, so bleibt sie in Ruhe, die andere bewegt sich, und hebt sich so weit, wie die stossende als Pendel an der andern Seite der Gleichgewichtslage aufgestiegen wäre, wenn sie die ruhende nicht gestossen hätte. Fällt dann die gestossene zurück, so bleibt sie, in der Gleichgewichtslage angekommen, in Ruhe und die zuerst stossende hebt sich jetzt als gestossene wieder nahezu zu der Höhe, bis zu welcher sie ursprünglich gehoben war, u. s. f. Die beiden Kugeln bewegen sich zusammen als ein Pendel, indem jede die Hälfte der ganzen Pendelschwingung zurücklegt.

Ebenso kann man an diesen Kugeln den Austausch der Geschwindigkeiten erkennen, indem man beide, die eine mehr, die andere weniger hebt, und dann gegen einander fallen lässt. Nach dem Stosse prallen beide Kugeln zurück, die weniger gehobene bis zur Höhe der stärker gehobenen,

die stärker gehobene bis zur Höhe der weniger gehobenen, es legt einfach die gestossene Kugel den Weg zurück, welchen die stossende Kugel bei ungehinderter Schwingung zurückgelegt haben würde.

Wird eine Kugel normal gegen eine feste Wand geworfen, so haben wir, um auszudrücken, dass die feste Wand durch den Stoss keine Bewegung annehmen kann, m' unendlich gross zu setzen, und gleichzeitig $v' = 0$. Dann wird

$$c = \frac{m - m'}{m + m'}\, v = -\frac{m'}{m'}\, v = -v.$$

Denn da m' gegen m unendlich gross ist, so ist im Zähler und Nenner m gegen m' gleich Null zu setzen, deshalb wird auch

$$c' = \frac{2\, m v}{m + m'} = 0,$$

weil der Nenner gegenüber dem Zähler unendlich gross ist. Die Geschwindigkeit der Kugel nach dem Stosse ist also an Grösse derjenigen vor dem Stosse gleich, der Richtung nach entgegengesetzt. Lässt man also eine Elfenbeinkugel auf eine ebene horizontale Marmorplatte fallen, so muss sie bis zu der ursprünglichen Höhe aufsteigen, wieder fallen und so ihre Bewegung ohne Ende fortsetzen.

Sowohl wenn man die Elfenbeinkugeln gegen einander stossen lässt, als auch wenn man eine solche Kugel fallen lässt, sieht man, dass die Geschwindigkeiten nach jedem Stosse etwas kleiner werden, dass sie also unserer Theorie entgegen bei jedem Stosse etwas an Geschwindigkeit verlieren. Der Grund dieser Abweichung liegt darin, dass für dieselben unsere Voraussetzung der vollkommenen Elasticität nicht besteht; die durch die elastische Kraft geleistete Arbeit ist niemals genau gleich der in der ersten Hälfte des Stosses geleisteten Arbeit, es wird vielmehr immer im Innern sowohl des stossenden als des gestossenen Körpers ein Theil der geleisteten Arbeit in andere Formen umgesetzt.

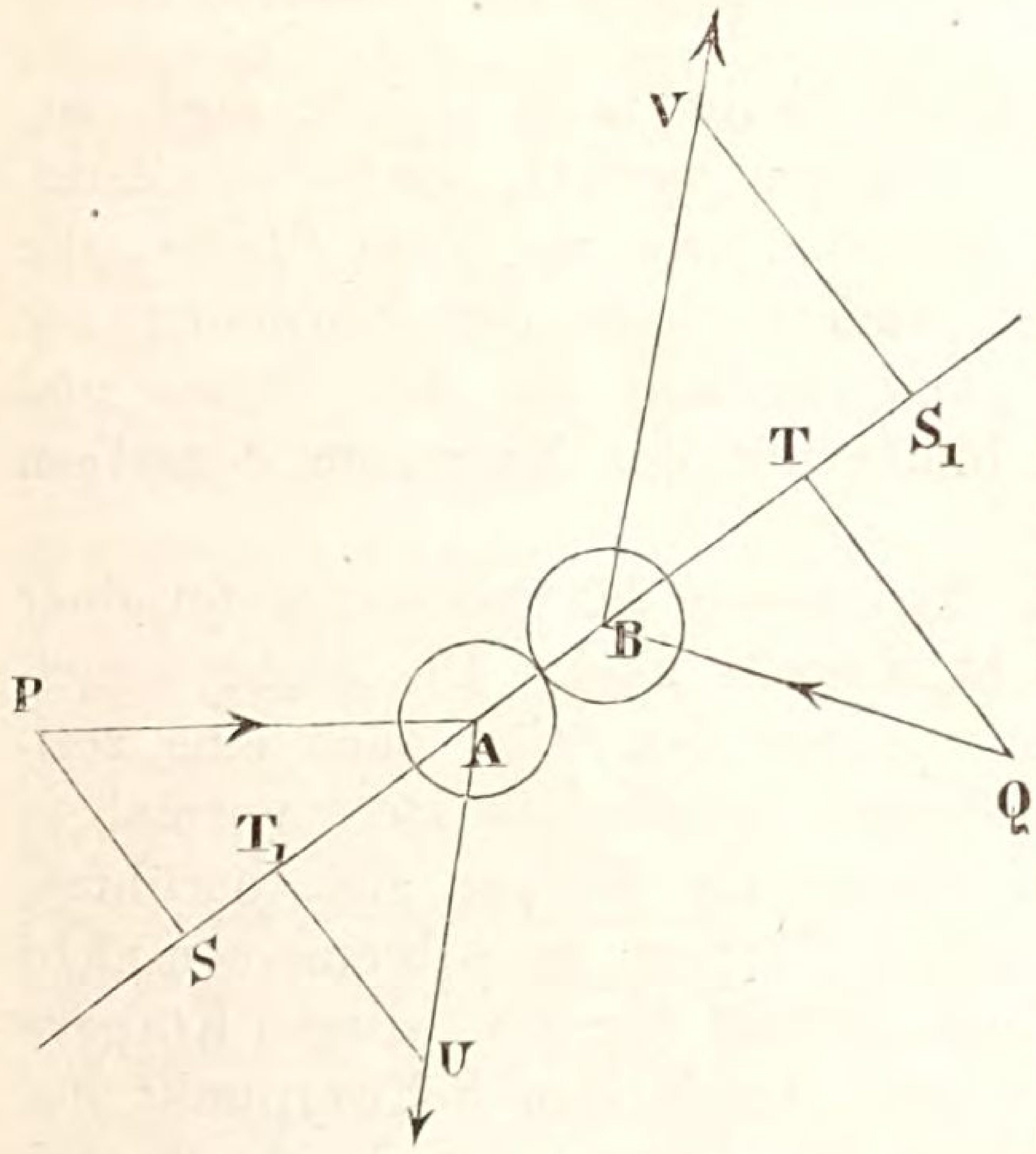
Die in dem Bisherigen abgeleiteten Stossgesetze gelten nicht nur für Kugeln, sondern für Körper beliebiger Form, wenn wir voraussetzen, dass die Körper sich in der Verbindungslinie ihrer Schwerpunkte stossen, so dass also der durch den Stoss ausgeübte Druck und der elastische Gegendruck direkt durch den Schwerpunkt geht. Lassen wir diese Voraussetzung fallen, so ist die Wirkung des Stosses je nach der Form der Körper verschieden.

Für Kugeln ist es leicht, bei solchen nicht nach dem Centrum gerichteten, also excentrischen oder schiefen Stössen die Bewegung nach dem Stosse abzuleiten.

Seien zu dem Ende A und B Fig. 30 die Mittelpunkte zweier Kugeln im Momente des Zusammenstosses und sei AP der Richtung und Grösse nach die Geschwindigkeit v der Kugel A, BQ jene v' der Kugel B, und sei die Masse der ersten gleich m, die Masse der zweiten gleich m'. Die Verbindungslinie AB der beiden Mittelpunkte geht dann stets durch den Berührungspunkt, und steht, da der Radius einer Kugel stets normal ist zu dem Elemente der Kugel, an welches er gezogen ist, normal zu den sich berührenden Elementen. Zerlegen wir nun die Geschwindigkeit AP in ihre zu AB parallele Componente AS und in die zu AB senkrechte

PS, und ebenso die Geschwindigkeit *BQ* in *BT* parallel und *QT* senkrecht zu *AB*, so sind *PS* und *TQ* gleichzeitig parallel der Berührungsfläche der beiden Kugeln; diese Componenten können daher durch den Stoss nicht geändert werden, dieselben sind nach dem Stosse die gleichen wie vor dem Stosse. Die beiden andern Componenten, senkrecht zur Berührungsfläche, sind, wie wir sahen, nach den Mittelpunkten der Kugeln gerichtet, auf diese sind daher unmittelbar die Gesetze des centralen Stosses anwendbar. Bezeichnen wir den Winkel, den *AP* mit *AB* bildet, mit α, den Winkel zwischen *BQ* und *AT* mit α', so ist

Fig. 30.



$$AS = v \cdot \cos\alpha, \quad BT = v' \cos\alpha'$$

und es werden die Geschwindigkeiten von *A* und *B* parallel *AS* und *BT* nach dem Stosse

$$\zeta = \frac{-2mv'\cos\alpha' + (m - m')v \cdot \cos\alpha}{m + m'} \qquad \zeta' = \frac{2mv\cos\alpha - (m' - m)v'\cos\alpha'}{m + m'}$$

worin wir $v'\cos\alpha'$ mit dem negativen Vorzeichen schreiben müssen, weil die Richtung der Componente *BT* jener von *AS* entgegengesetzt ist. Setzen wir voraus, dass die Massen beider Kugeln einander gleich sind, so wird

$$\zeta = -v'\cos\alpha' \qquad \zeta' = v\cos\alpha,$$

die beiden Kugeln tauschen einfach ihre parallel *AB* gerichteten Geschwindigkeiten aus.

Die totalen Geschwindigkeiten nach dem Stosse erhalten wir als Resultirende der beiden zu einander senkrechten Componenten,

$$c^2 = v^2 \sin^2\alpha + \zeta^2; \qquad c'^2 = v'^2 \sin^2\alpha' + \zeta'^2$$

und die Richtung der Bewegungen nach dem Stosse, resp. den Winkel, den dieselbe mit *AB* bilden,

$$\operatorname{tang}\alpha_1 = \frac{v\sin\alpha}{\zeta} \qquad \operatorname{tang}\alpha'_1 = \frac{v'\sin\alpha'}{\zeta'}.$$

Ist also $m = m'$, so wird

$$\operatorname{tang}\alpha_1 = -\frac{v\sin\alpha}{v'\cos\alpha'} \qquad \operatorname{tang}\alpha'_1 = -\frac{v'\sin\alpha'}{v\cos\alpha}.$$

Das negative Vorzeichen bedeutet, dass die Richtungen der Bewegungen *AU* und *BV* an der andern Seite von *AB* liegen, als die Bewegungen vor dem Stosse. Wir erhalten dieselben, indem wir $AT_1 = BT$, $T_1U = PS$ ziehen in der Linie *AU* und ebenso indem wir $BS_1 = AS$, $S_1V = QT$ ziehen in *BV*, für beide Kugeln der Grösse und Richtung nach.

Einer Besprechung einzelner Fälle wird es nach dem Frühern nicht

bedürfen, nur möge erwähnt sein, dass wenn $m' = \infty$, $v' = 0$ ist, die Kugel A also gegen eine feste Wand stösst,

$$\zeta = -v \cos\alpha \quad c = v \quad \operatorname{tang} \alpha_1 = -\frac{v \sin\alpha}{v \cos\alpha} = -\operatorname{tang}\alpha$$

wird. Die zur Wand normale Componente bleibt ihrer Grösse nach ungeändert, sie wird der Richtung nach die entgegengesetzte, die Geschwindigkeit c nach dem Stosse ist deshalb dieselbe, wie vor dem Stosse, die Richtung der Bewegung liegt an der andern Seite der Normalen zur festen Wand in der durch die Bewegungsrichtung vor dem Stosse und der Normalen gegebenen Ebene, und bildet mit der Normalen denselben Winkel wie vor dem Stosse.

Sehr viel verwickelter werden die Wirkungen des Stosses, wenn einer der stossenden Körper oder beide nicht Kugeln sind. Die nicht kugelförmigen Körper erhalten im Allgemeinen durch den Stoss auch eine rotirende Bewegung. Die Wirkung des Stosses ist nämlich stets normal zu dem Flächenelement, in welchem die stossenden Körper sich berühren, diese Richtung geht bei nicht kugelförmigen Körpern im Allgemeinen nicht durch den Schwerpunkt derselben, deshalb ertheilt der Stoss diesen Körpern ein Drehungsmoment um eine Axe, welche durch den Schwerpunkt der Körper geht, und welche senkrecht ist zu der Ebene, die durch die Bewegungsrichtung vor dem Stosse und die zur Berührungsfläche normale Richtung gegeben ist. Es wird deshalb ein Theil der lebendigen Kraft der stossenden Körper zur Erzeugung einer rotirenden Bewegung verwandt, es muss daher die lebendige Kraft der fortschreitenden Bewegung um diesen Betrag vermindert werden, somit muss die Geschwindigkeit nach dem Stosse eine kleinere sein, als sie sich aus den vorher durchgeführten Rechnungen für die Kugel ergibt.

Ganz vollständig ist indess eine solche Rotation auch bei den Kugeln nicht ausgeschlossen, wenigstens dann nicht, wenn die Stosszeit nicht verschwindend klein ist. Die beiden Kugeln reiben nämlich an einander, so lange die Berührung dauert, und diese Reibung wirkt auf beide Kugeln gerade so, wie eine der zur Berührungsfläche parallelen Bewegungscomponente entgegengesetzt gerichtete Kraft. Diese muss als senkrecht zum Radius an der Peripherie angreifende Kraft eine Rotation der Kugeln zur Folge haben. Wegen der Kürze der Berührungsdauer wird man indess diese Rotation im Allgemeinen ausser Acht lassen können.

§. 36.

Adhäsion. In ähnlicher Weise wie die Moleküle eines und desselben Körpers ziehen sich auch die Moleküle zweier getrennter Körper an, wenn man dieselben hinreichend einander nähert. Am deutlichsten zeigt sich diese als Adhäsion der Körper bezeichnete Anziehung, wenn man zwei Körper mit grossen Flächen zu recht inniger Berührung bringt. Schleift man zwei Platten möglichst eben und schiebt sie dann vorsichtig über einander, so dass sie sich in ihrer ganzen Ausdehnung einander berühren, so bedarf es einer grossen Kraft, um die Platten von einander zu reissen. Diese Adhäsion zeigt sich indess nicht nur, wenn man die Platten zur Berührung bringt, sondern auch, wenn man dieselben mit genau parallelen

Flächen einander sehr nahe bringt. In dieser Anordnung hat vor Kurzem Stefan das Phänomen der Adhäsion etwas näher untersucht, indem er eine Platte genau horizontal fest aufstellte und eine andere an einer Wage aequilibrirte in kleinen Abständen darüber schweben liess. Es zeigte sich dann, dass stets zu den die Platte aequilibrirenden Gewichten ein Uebergewicht hinzugefügt werden musste, um die Platten von einander zu entfernen. In einer Beziehung zeigte sich dann aber ein grosser Unterschied zwischen der Adhäsion und der Cohäsion. Wir sahen, dass die Verlängerung eines Stabes stets dem verlängernden Gewichte proportional ist, dass also die Vergrösserung der Abstände der Molekülschichten bei einem bestimmten ziehenden Gewichte eine bestimmte ist; dieselben entfernen sich soweit von einander, bis die durch die Vergrösserung der Abstände hervortretenden anziehenden Kräfte den ziehenden Gewichten gleich geworden sind. Bei der Adhäsion zeigt sich dagegen, dass mit Vergrösserung des Abstandes der Platten durch ein auf die Wagschale gebrachtes Uebergewicht eine solche neue Gleichgewichtslage nicht eintritt. Vielmehr schon das kleinste Uebergewicht vermag die Platten vollständig von einander zu trennen, aber je kleiner das Uebergewicht ist, einer in demselben Verhältnisse grössern Zeit bedarf es, bis der Abstand der Platten von einem gegebenen anfänglichen Werth auf einen gewissen grössern Werth gewachsen ist. Die Zunahme des Abstandes findet unter sonst gleichen Umständen ferner um so rascher statt, je grösser der ursprüngliche Abstand war, und zwar ist die zur Vergrösserung des Abstandes um einen bestimmten Werth erforderliche Zeit nahezu dem Quadrate des ursprünglichen Abstandes umgekehrt proportional. Bedarf es demnach bei gegebenen Platten und gegebenem Uebergewicht einer gewissen Zeit, um die Platten von 0,1 Mm. auf 0,2 Mm. zu entfernen, so bedarf es nur $^1/_4$ der Zeit, um die Platten von 0,2 auf 0,3 Mm. zu entfernen. Ausserdem hängt unter sonst gleichen Umständen die Zeit zur gleichen Vergrösserung des Abstandes ab von der Grösse der Platten; bei kreisförmigen Platten ist sie der 4. Potenz der Radien proportional. Diese von Stefan aus seinen Beobachtungen abgeleiteten Gesetze zeigen, dass bei den Adhäsionserscheinungen nur mehr die anziehenden zwischen den Molekülen thätigen Kräfte merkbar sind, dass die Abstände der Moleküle getrennter Körper schon zu gross sind, als dass die abstossenden auf die Erscheinung noch von Einfluss sein können. Das kleinste Uebergewicht muss schon eine, wenn auch sehr kleine Vergrösserung des Abstandes zur Folge haben; da nun in diesem grössern Abstande die anziehenden Kräfte kleinere sind, so muss die Vergrösserung des Abstandes durch dasselbe Uebergewicht eine immer raschere werden, je grösser der schon erreichte Abstand ist. Daraus folgt dann weiter, dass es bei sehr kleinen Abständen der adhärirenden Flächen, wie wir sie bei inniger Berührung derselben herstellen, sehr grosser Zeiten bedarf, um durch kleine Kräfte eine Vergrösserung des Abstandes, also eine Trennung der Flächen hervorzubringen, oder was dasselbe ist, dass es sehr grosser Kräfte bedarf, um die Flächen von einander zu reissen.

Auf diesem Aneinanderhaften der Körper bei inniger Berührung beruhen alle Methoden der Verbindung zweier Körper durch irgend ein Bindemittel. Um die Berührung möglichst innig zu machen, werden die

Bindemittel in flüssiger Form zwischen die zu verbindenden Körper gebracht und dann erstarren gelassen. Die Berührung des Bindemittels mit den Flächen der Körper ist dann häufig eine so innige, dass bei einem Versuche die Körper auseinander zu reissen oft eher die Cohäsion der Bindemittel aufgehoben wird als die Adhäsion derselben an die verbundenen Körper.

§. 37.

Reibung. Wenn man zwei Körper über einander hin bewegt, so bedarf es immer eines gewissen Kraftaufwandes, um die Bewegung zu unterhalten, selbst wenn dieselbe in genau horizontaler Richtung vor sich geht. Es folgt somit, dass in Folge der Berührung zweier Körper der Bewegung derselben an einander oder über einander her ein Widerstand entgegenwirkt, den man als Reibungswiderstand bezeichnet.

Dieser Reibungswiderstand ist um so grösser, je rauher die über einander bewegten Flächen sind, so dass eben in dieser Rauhigkeit ein Hauptgrund desselben zu erkennen ist. Die Theile der Körper greifen in-Folge derselben theilweise über einander, so dass bei jeder Bewegung eines Körpers über einer Unterlage ein geringes Heben desselben nothwendig ist. Dass aber in diesen Unebenheiten nicht der einzige Grund der Reibung zu suchen ist, sondern dass auch die molekularen Anziehungen der Körper dabei eine Rolle spielen, ergibt sich daraus, dass bei gleichmässig glatt abgeschliffenen Flächen die Grösse des Reibungswiderstandes von der Natur der sich reibenden Körper abhängig ist. So ist die Reibung eine andere, wenn man zwei glattgeschliffene Stahlflächen über einander führt, als wenn man eine Stahlfläche unter denselben Umständen über eine Messingfläche oder Holzfläche führt.

Man unterscheidet gleitende und rollende Reibung; erstere tritt dann ein, wenn der bewegte Körper den festen immer mit derselben Fläche berührt, wenn also eine Ebene über eine andere hingezogen wird, oder ein Zapfen sich in seinem Lager dreht. Rollende Reibung tritt z. B. ein, wenn ein Körper mit krummen Flächen so über einen andern von ebenen Flächen begrenzten hin bewegt wird, dass in jedem Momente andere Punkte des bewegten Körpers andere Punkte des festen Körpers berühren, so also, wenn ein Körper auf dem Boden rollt.

Für die gleitende Reibung hat sich aus Versuchen, bei denen man Körper mit glatten Flächen auf glatten horizontalen Unterlagen bewegt, und die zur Erhaltung einer gleichförmigen Bewegung erforderliche Kraft misst, folgendes ergeben:

1. Die Reibung ist dem Drucke der Körper auf ihre Unterlage proportional.

2. Die Reibung hängt bei gleichem Drucke nicht von der Grösse der sich berührenden Flächen ab, sofern diese keine Spitzen und Kanten haben, sondern nur von deren Natur und Glätte.

3. Die Reibung ist unabhängig von der Geschwindigkeit der Bewegung.

Das Verhältniss der Reibung zum Drucke, also den Bruchtheil des Druckes, der beim Hinführen eines Körpers über den andern bei vorausgesetzten glatten Flächen eine gleichförmige Bewegung unterhält, nennt man den Reibungscoefficienten. Derselbe ist nach dem Vorigen nur von

der Natur der reibenden Körper abhängig. Es ist z. B. der Reibungscoefficient für Eisen auf Eisen 0,108, für Messing auf Gusseisen 0,189 u. s. f.

Im Allgemeinen ist die Kraft, welche man aufwenden muss, um einen Körper aus der Ruhe in Bewegung zu versetzen, etwas grösser, als um ihn in gleichförmiger Bewegung zu erhalten, man spricht deshalb zuweilen wohl von einem Reibungswiderstande der Ruhe und einem der Bewegung.

Zweites Kapitel.

Von den tropfbar flüssigen Körpern.

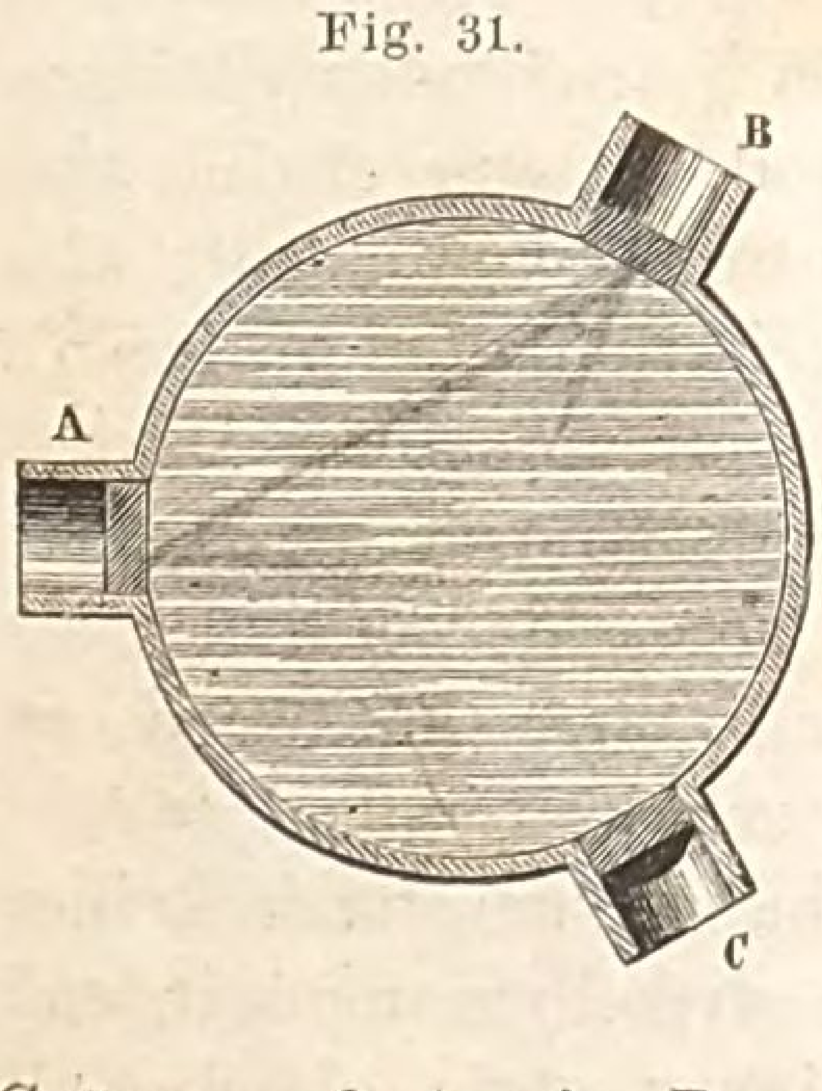
§. 38.

Constitution der Flüssigkeiten. Neben den festen Körpern unterschieden wir §. 26 die flüssigen Körper, die wir erfahrungsgemäss dahin definirten, dass es Körper mit selbständigem Volumen aber ohne selbständige Gestalt seien. Füllen wir eine Flüssigkeit in ein Gefäss, so füllt sie ein von ihrer Menge abhängiges Volum aus, die Gestalt, welche die Flüssigkeit momentan annimmt, ist die Gestalt des Gefässes. Aus dieser Beschaffenheit der Flüssigkeiten schlossen wir, dass die Moleküle durch die zwischen ihnen thätigen Cohäsionskräfte in festbestimmten Abständen, aber nicht in festen gegenseitigen Lagen gehalten werden, dass sie vielmehr bei constanten Abständen sich vollkommen frei gegen einander verschieben können.

Aus dieser vollkommen freien Beweglichkeit der Moleküle folgt weiter, dass eine flüssige Masse nur dann im Gleichgewicht sein kann, wenn die auf irgend ein Molekül derselben wirkenden Kräfte sich im Gleichgewicht halten, wenn also die etwa auf ein Molekül von entgegengesetzten Seiten her wirkenden Drucke genau gleich sind und deshalb sich aufheben. Denn wäre das nicht der Fall, so müsste das Molekül dem stärkern Drucke folgend in der Richtung desselben sich bewegen.

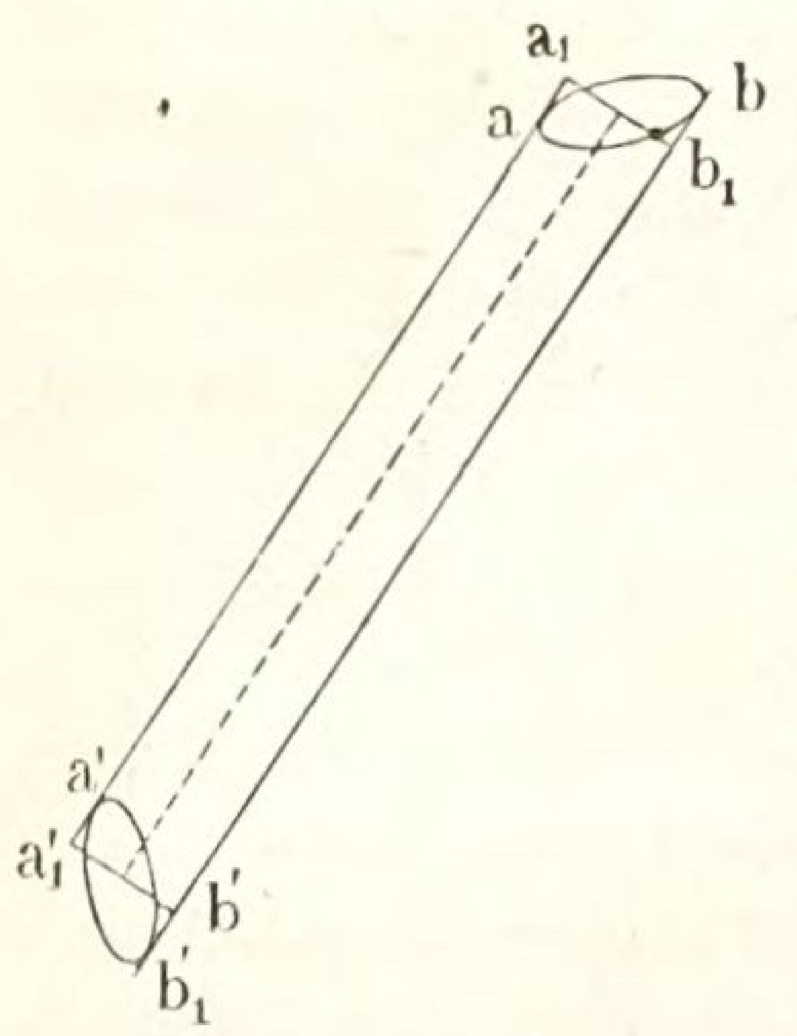
Es folgt weiter aus dieser Eigenschaft, dass wenn in einem rings geschlossenem Gefässe eine Flüssigkeit im Gleichgewicht ist, und nun durch einen Stempel B Fig. 31 auf die Flüssigkeit ein Druck ausgeübt wird, dass dann dieser Druck durch die Flüssigkeit nach allen Richtungen ganz ungeändert sich ausbreiten muss, das heisst, dass jede mit der gedrückten gleich grosse Fläche der Flüssigkeit den genau gleichen Druck erhalten muss. Sei der Druck auf den Stempel normal zu der Berührungsfläche der Flüssigkeit und des Stempels gleich P, so dass, wenn die Grösse der Berührungsfläche gleich S gesetzt wird, die Flächeneinheit den Druck $\frac{P}{S}$ auszuhalten hat, so wirkt auf jede Fläche im Innern oder in der Grenze der Flüssigkeit, welche die Grösse s hat, ein Druck $\frac{P}{S} \cdot s$, also überall auf die Flächeneinheit der Druck $\frac{P}{S}$.

Fig. 31.



Um diesen Satz aus der Eigenschaft der Flüssigkeiten abzuleiten, nehmen wir an, die Flüssigkeit in dem Gefässe Fig. 31 sei unter der Wirkung der Schwere im Gleichgewicht, und nun wirke auf den Stempel B ein normal gegen die Flüssigkeit gerichteter Druck, der für die Flächeneinheit gleich p_0 sei. Da die Flüssigkeit in dem Gefässe keine Bewegung annehmen kann, muss auch nach Herstellung des Druckes die Flüssigkeit überall im Gleichgewicht sein. Denken wir uns nun von dem Mittelpunkte des Stempels B eine gerade Linie in das Innere der Flüssigkeit gelegt von der Länge l, etwa nach dem Mittelpunkte des Stempels A, und um diese Linie als Axe einen Kreiscylinder, dessen Durchmesser gegen die Länge l nur klein sei. Die an B anliegende Basis dieses Cylinders steht dann schief zur Axe, ihre Normale bildet mit der Axe denselben Winkel α, welchen die zur Stempelfläche normale Richtung des Druckes mit der Axe bildet. An dem andern Ende denken wir uns den Cylinder wieder durch eine schiefe Endfläche $a' b'$ Fig. 32, etwa die Fläche des Stempels A begrenzt, deren Normale mit der Axe des Cylinders den Winkel α' bilde. Schliesslich bilde die Axe des Cylinders mit der Richtung der Schwere, der Verticalen, den Winkel β. Da die Flüssigkeit auch nach Herstellung des Druckes im Gleichgewicht bleibt, so kann sie weder im Innern des Cylinders eine Bewegung annehmen, noch kann der Cylinder als solcher sich in der andern Flüssigkeit bewegen. Da nun aber in Folge des Druckes auf ab und der Schwere der im Innern des Cylinders vorhandenen Flüssigkeit auf dieselbe Kräfte einwirken, so kann die Flüssigkeit wegen der vollkommen freien Beweglichkeit ihrer Theile nur dann in dem Cylinder eingeschlossen und in Ruhe bleiben, wenn die auf die äussere Begrenzung des Cylinders wirkenden durch die umgebende Flüssigkeit, resp. die Wandfläche bei A ausgeübten Drucke gleich den bewegenden Kräften sind, oder wenn die überhaupt auf die Begrenzung des Cylinders wirkenden Kräfte sich das Gleichgewicht halten.

Fig. 32.



Wir denken uns nun die überhaupt auf die Begrenzung des Cylinders wirkenden Drucke an jedem Flächenelement, auf welches sie wirken, in zwei Componenten zerlegt, deren eine normal zu dem betreffenden Flächenelement, deren andere zu demselben parallel sein soll. Dann ergibt sich zunächst, dass die der Begrenzungsfläche parallelen Componenten für sich im Gleichgewicht sein müssen, da sonst die Flüssigkeitstheilchen im Innern des Cylinders der grössern Kraft folgend sich bewegen müssten. Daraus folgt dann, dass die zur Begrenzungsfläche des Cylinders normalen Drucke für sich allein im Gleichgewicht sein müssen, weil sonst der Cylinder als solcher sich bewegen, oder wenn sie an einer Stelle sich aufhöben, an einer andern nicht, eine Veränderung seiner Form erhalten müsste.

Wenn Kräfte sich gegenseitig aufheben, so haben sie nach keiner Richtung eine Resultirende; projiciren wir demnach dieselben nach irgend einer Richtung, so muss die Summe dieser Projectionen stets gleich Null sein. Projiciren wir nun die auf die Begrenzungsfläche normalen Componenten, welche, wie wir sahen, für sich gleich Null sind, auf die Axe

des Cylinders, so ergibt sich zunächst, dass die Summe der Projectionen aller auf die Seitenflächen oder den Mantel des Cylinders normalen Kräfte für sich Null sind, da diese Kräfte auf der Cylinderaxe senkrecht sind, somit die Projection jeder einzelnen für sich Null ist. Es müssen also auch die Projectionen der auf die schiefe Endfläche wirkenden Kräfte für sich gleich Null sein. Setzen wir nun den Druck auf die Fläche ab gleich p, den auf die Fläche $a'b'$ gleich p' und das Gewicht der Flüssigkeit im Cylinder gleich q, dessen Druck vertical abwärts wirkt, dessen der Axe paralleler von dem höhern zum tiefern Ende wirkender Druck somit $q \cos \beta$ ist, so folgt

$$p \cos \alpha + p' \cos \alpha' + q \cos \beta = 0.$$

Ist nun der Querschnitt unseres Cylinders gleich σ, so können wir nach bekannten stereometrischen Sätzen, wenn wir die Grössen der schiefen Endflächen mit s resp. s' bezeichnen, deren Normalen mit der Axe die Winkel α resp. α' bilden, setzen

$$\cos \alpha = \frac{\sigma}{s} \quad \cos \alpha' = \frac{\sigma}{s'}.$$

Das Gewicht q der im Cylinder enthaltenen Flüssigkeit ist gleich dem Producte aus dem Volumen desselben und dem specifischen Gewichte d der Flüssigkeit. Da nun das Volumen eines schief abgeschnittenen Kreiscylinders gleich ist demjenigen eines geraden Kreiscylinders von gleicher Länge der Axe, den wir also erhalten, wenn wir durch die Mittelpunkte der schiefen Endflächen die geraden Endflächen $a_1 b_1$ und $a'_1 b'_1$ legen, so ist

$$q = \sigma . l . d.$$

Setzen wir diese Werthe von $\cos \alpha$, $\cos \alpha'$, q in die Gleichung, welche uns die Gleichgewichtsbedingung darstellt, so wird

$$\frac{p}{s} \cdot \sigma + \frac{p'}{s'} \sigma + \sigma l d \cos \beta = 0.$$

Da nun β der Winkel ist, den die Axe des Cylinders mit der Verticalen bildet, so ist $l \cos \beta = h$, der lothrechte Abstand der beiden Endflächen des Cylinders. Nehmen wir nun an, dass B höher liegt als A, so wirkt die Schwerkraft in derselben Richtung wie der Druck p, und wir erhalten

$$-\frac{p'}{s'} = \frac{p}{s} + hd.$$

Die Quotienten $\frac{p}{s}$ und $\frac{p'}{s'}$ geben uns die auf die Flächeneinheit wirkenden Drucke, vorausgesetzt, dass die Drucke auf derselben gleichmässig vertheilt sind, dass also jedes Flächenstück von der Grösse s denselben Druck p erfährt. Dann folgt aus der letztern Gleichung, dass auf der Endfläche $a'b'$ des Cylinders ein gegen das Innere des Cylinders gerichteter Druck vorhanden ist, welcher für die Flächeneinheit genau so gross ist als der auf die Flächeneinheit des andern Cylinderendes wirkende Druck vermehrt um das Gewicht eines Flüssigkeitscylinders, dessen Querschnitt gleich der Flächeneinheit und dessen Höhe gleich ist dem lothrechten Abstande der beiden Endflächen des Cylinders.

Da nun eine Flüssigkeit nur im Gleichgewicht sein kann, wenn die

auf die Moleküle wirkenden Drucke nach entgegengesetzten Richtungen einander gleich sind, so folgt, dass auf die Endfläche des Cylinders von innen nach aussen ein genau ebensolcher Druck wirksam ist, somit auch, dass der auf die Fläche *a b* ausgeübte Druck sich ganz ungeändert auf die Fläche *a' b'* fortpflanzt. Da wir nun weder über die Lage der Flächen *ab* und *a' b'*, noch auch über die Richtung der Cylinderaxe irgend welche specielle Voraussetzung gemacht haben, so gilt der Satz ganz allgemein, dass sich der auf irgend eine Fläche an der Grenze oder im Innern einer Flüssigkeit ausgeübte Druck nach jeder beliebigen Richtung ganz ungeändert fortpflanzt, so dass auf die Flächeneinheit immer derselbe Druck kommt. Wirkt also irgendwo im Innern oder an der Grenze einer flüssigen Masse auf eine Fläche von der Grösse S ein Druck P, so wirkt in Folge dieses Druckes auf jede Fläche in der Flüssigkeit, welches auch ihre Lage sein mag von der Grösse s der Druck $\frac{P}{S} \cdot s$. Daraus folgt dann auch weiter, dass die im Anfange dieses Paragraphen aus der vollkommen freien Beweglichkeit der Moleküle abgeleitete Gleichgewichtsbedingung, dass die auf ein Molekül nach entgegengesetzten Richtungen wirkenden Drucke einander gleich sind, dahin erweitert werden muss, dass die im Innern einer Flüssigkeit auf ein Molekül wirkenden Drucke im Gleichgewichtszustande nach allen Richtungen des Raumes gleich sind.

§. 39.

Zusammendrückbarkeit der Flüssigkeiten. Die gleichmässige Fortpflanzung des Druckes in einer Flüssigkeit haben wir soeben als eine nothwendige Folge der vollkommen freien Beweglichkeit der Moleküle erkannt; wir können aber leicht auch den physikalischen Vorgang auffinden, durch welchen dieselbe zu Stande kommt.

Wenn eine Flüssigkeit im Gleichgewicht ist, so befinden sich die Moleküle in bestimmten durch die molekularen Kräfte bedingten Entfernungen, wie sich das aus der Selbständigkeit des Volums einer gegebenen Flüssigkeitsmasse ergibt. Wenn wir nun auf eine rings geschlossene Flüssigkeit in einer Richtung einen Druck ausüben, so muss zunächst ebenso wie bei den festen Körpern in der Druckrichtung eine Annäherung der Molekülschichten eintreten, bis die in Folge der Annäherung vergrösserte Abstossung der Moleküle gleich ist der durch den äussern Druck vermehrten Anziehung der Moleküle. Wegen der freien Beweglichkeit und da eine Annäherung zweier Molekülschichten, wie wir das schon §. 31 hervorhoben, auch eine zur Druckrichtung senkrechte Annäherung der Moleküle zur Folge hat, weichen die Moleküle seitlich aus, so lange, bis der in Folge dieser seitlichen Annäherung ausgeübte Gegendruck ein weiteres Ausweichen verhindert. Das ist aber erst dann der Fall, wenn sich nach allen Richtungen die Moleküle um ebensoviel genähert haben, als nach der Richtung des Druckes, wenn also überall im Innern der Flüssigkeit die Moleküle sich so weit genähert haben, bis der aus der wachsenden Abstossung für die Flächeneinheit sich ergebende Druck überall derselbe geworden ist. Darin unterscheiden sich die Flüssigkeiten von den festen Körpern, bei diesen ist bei einer Compression nach der einen Richtung die Querdilatation nur ein Bruchtheil der Compression,

weil die Moleküle nicht ausweichen können, eben deshalb bedarf es auch nur eines ebenso grossen Bruchtheils der in der Compressionsrichtung wirkenden Kraft, wenn die Verschiebung, die Ausdehnung nach der Querrichtung verhindert werden soll.

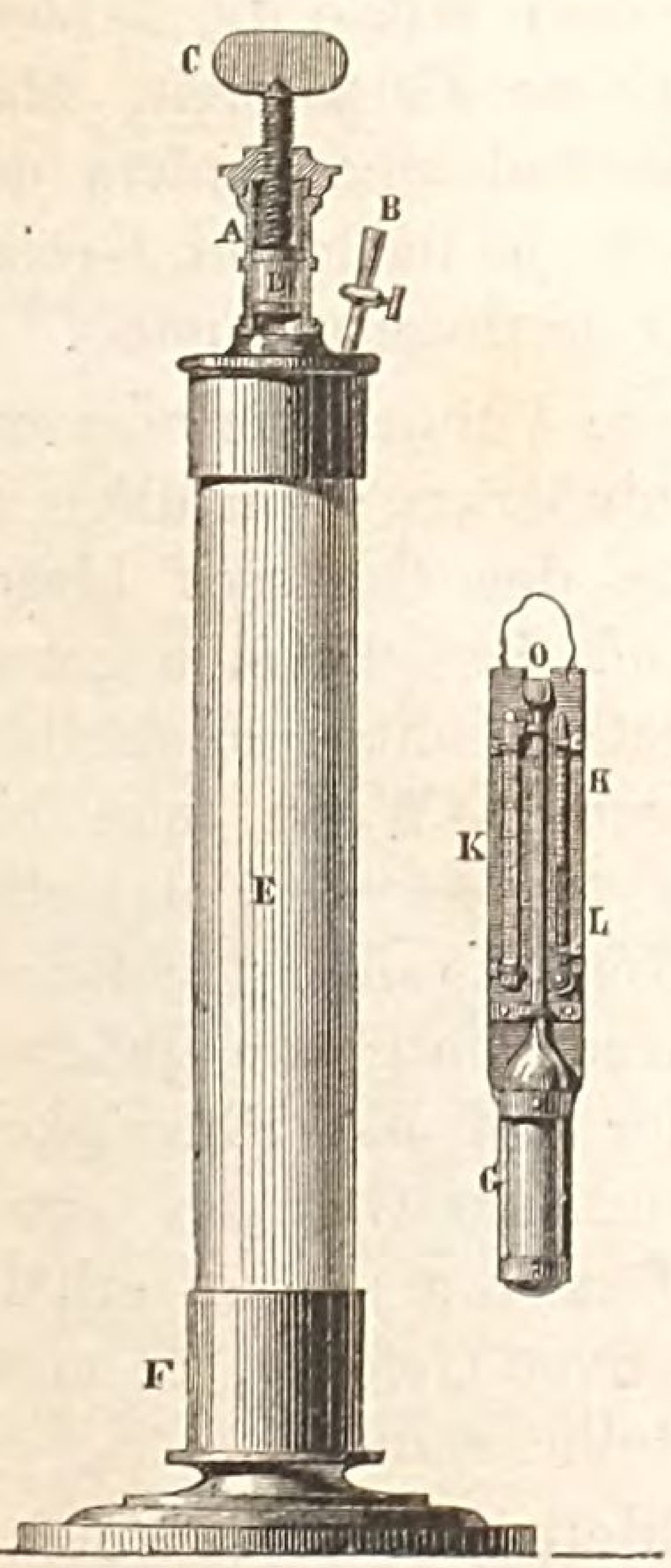
Die gleichmässige Fortpflanzung des Druckes würde demnach eine Folge davon sein, dass die Flüssigkeiten in einer Beziehung ebenso wie die festen Körper elastisch sind, es treten in ihnen elastische Kräfte immer dann, aber auch nur dann auf, wenn die Moleküle so gegen einander verschoben werden, dass sie sich einander nähern; eine Verschiebung ohne Annäherung kann keine elastischen Kräfte hervorrufen, da die Moleküle keine durch die Molekularkräfte bedingte feste gegenseitige Lage haben.

Um den Nachweis zu liefern, dass die gleichmässige Fortpflanzung des Druckes in der That eine Folge der Elasticität der Flüssigkeiten ist, haben wir den Nachweis zu liefern, dass dieselben durch Druck eine Volumverminderung erfahren. Durch Messung der verschiedenen Drucken entsprechenden Volumverminderungen erhalten wir dann gleichzeitig Aufschluss darüber, ob auch bei den Flüssigkeiten die Volumverminderungen den Drucken proportional, ob also die abstossenden Kräfte den Annäherungen der Moleküle proportional sind. Ist das der Fall, so muss die einem auf die Flächeneinheit wirkenden Drucke P entsprechende Volumverminderung

$$\varDelta v = k P$$

sein, worin k eine Constante ist, welche die dem Drucke $P = 1$ entsprechende Compression bedeutet; sie ist der Compressionscoefficient der Flüssigkeit. Der reciproke Werth dieses Coefficienten oder

Fig. 33.



$$\frac{1}{k} = E$$

ist dann der Elasticitätscoefficient der Flüssigkeit, jener Coefficient, mit dem wir die in Bruchtheilen des ursprünglichen Volumens gegebene Volumverminderung multipliciren müssen, um die durch diese geweckte elastische Kraft zu erhalten.

Die Zusammendrückbarkeit der Flüssigkeiten lässt sich nachweisen und ihrer Grösse nach messen durch den zuerst von Oersted angewandten Compressionsapparat; derselbe, Fig. 33, besteht aus zwei Theilen, dem Compressionsgefäss E und dem Piezometer OG. Letzteres besteht aus einem weitern Glasgefäss G, von 100—200 Cubikcent. Inhalt, an welches eine sehr enge, mit einer Theilung versehene Glasröhre angesetzt ist, die oben eine trichterförmige Erweiterung besitzt. Durch Auswägen des einmal bis zu dem Nullpunkte der Theilung, dann in mehreren folgenden Versuchen bis zu verschiedenen Theilstrichen mit Quecksilber gefüllten Piezometers ist das Verhältniss des zwischen zwei Theilstrichen eingeschlossenen Raumes des engen Rohres zu dem Rauminhalt des ganzen Gefässes bestimmt. Das Piezometer ist dann

an einer Platte H befestigt, welche neben dem Rohre des Piezometers einerseits ein Thermometer L, andererseits ein Manometer K trägt, welches, in im nächsten Kapitel zu beschreibender Weise, den im Compressionsgefässe ausgeübten Druck zu messen gestattet. Das Piezometer wird dann mit der zu untersuchenden Flüssigkeit bis zum Trichter gefüllt, und in den letztern ein Tropfen Quecksilber gebracht, der das Innere des Piezometers abschliesst und bei der stattfindenden Compression als Index dient, der die Grösse der Zusammendrückung der Flüssigkeit anzeigt.

Das so vorgerichtete Piezometer wird dann an einem am Deckel desselben befindlichen Haken in das Compressionsgefäss hineingehängt. Dasselbe besteht aus einem Cylinder von starkem Glase, der unten in einen Fuss F eingelassen und oben mit einer Fassung versehen ist, in welche der Deckel des Gefässes wasserdicht eingeschraubt ist. Der Deckel hat in seiner Mitte eine Durchbohrung, über welcher sich eine starke, in den Deckel eingeschraubte Röhre A befindet, in welcher ein dichtschliessender Kolben D durch Drehung der in die Kolbenstange CD eingeschnittenen Schraube auf und nieder bewegt werden kann. Auf eine zweite Durchbohrung ist die mit dem Hahne verschliessbare Röhre D aufgesetzt. Man füllt nun das ganze Gefäss, während der Kolben D emporgeschraubt ist, durch die Röhre B mit Wasser, so weit, dass dasselbe aus einer Oeffnung bei A ausfliesst, schliesst den Hahn der Röhre B und schraubt den Kolben herab. Sobald derselbe unter A herabgeschraubt ist, kann kein Wasser mehr entweichen und das des Gefässes wird zusammengedrückt. Der Druck, der dadurch auf das Wasser des Compressionsgefässes ausgeübt wird, trifft nach den Entwicklungen des vorigen §. in ganz gleicher Weise die äussere Wand des Piezometers und die in demselben enthaltene Flüssigkeit. Man erkennt dann sofort, dass die Flüssigkeiten compressibel sind, indem der Quecksilbertropfen in die Röhre hinabsinkt und zwar je nach der Grösse des ausgeübten Druckes bis zu einer grössern oder geringern Tiefe.

Die an der Theilung des Piezometers beobachtete Volumverminderung der Flüssigkeit ist noch nicht die ganze Volumverminderung; um diese zu erhalten, muss zu der beobachteten noch diejenige des Gefässes hinzuaddirt werden. Dass eine solche eintreten muss, und dass dieselbe genau gleich derjenigen ist, welche ein massives Glasgefäss unter demselben Drucke erfahren würde, ergibt folgende Ueberlegung. Wenn man ein massives Glasgefäss einem allseitigen Drucke aussetzt, so wird dasselbe comprimirt, und in Folge der Compression erfahren die oberflächlichen Schichten von den innern einen, dem von aussen wirkenden genau gleichen Gegendruck. In dem Piezometer sind nun, da der auf die Flüssigkeit des Piezometers wirkende Druck auf die Innenwand des Gefässes einen gerade ebensolchen Druck ausübt, wie ihn das Gefäss von aussen erhält, die Verhältnisse genau dieselben, wie bei einem massiven Gefässe, es muss deshalb auch die Compression des Piezometers dieselbe sein.

Bezeichnen wir daher die in dem Gefässe beobachtete scheinbare Volumverminderung in Bruchtheilen des ursprünglichen Volumens mit v_1, diejenige des Gefässes mit v_2, so ist die wirkliche Volumverminderung der Flüssigkeit

$$v = v_1 + v_2.$$

Ist nun C der kubische Compressionscoefficient des Glases und P der auf die Flächeneinheit wirkende Druck, so ist nach §. 31

$$v_2 = C . P.$$

Ist nun die Zusammendrückbarkeit der Flüssigkeit ebenfalls dem Drucke proportional, also

$$v = k . P,$$

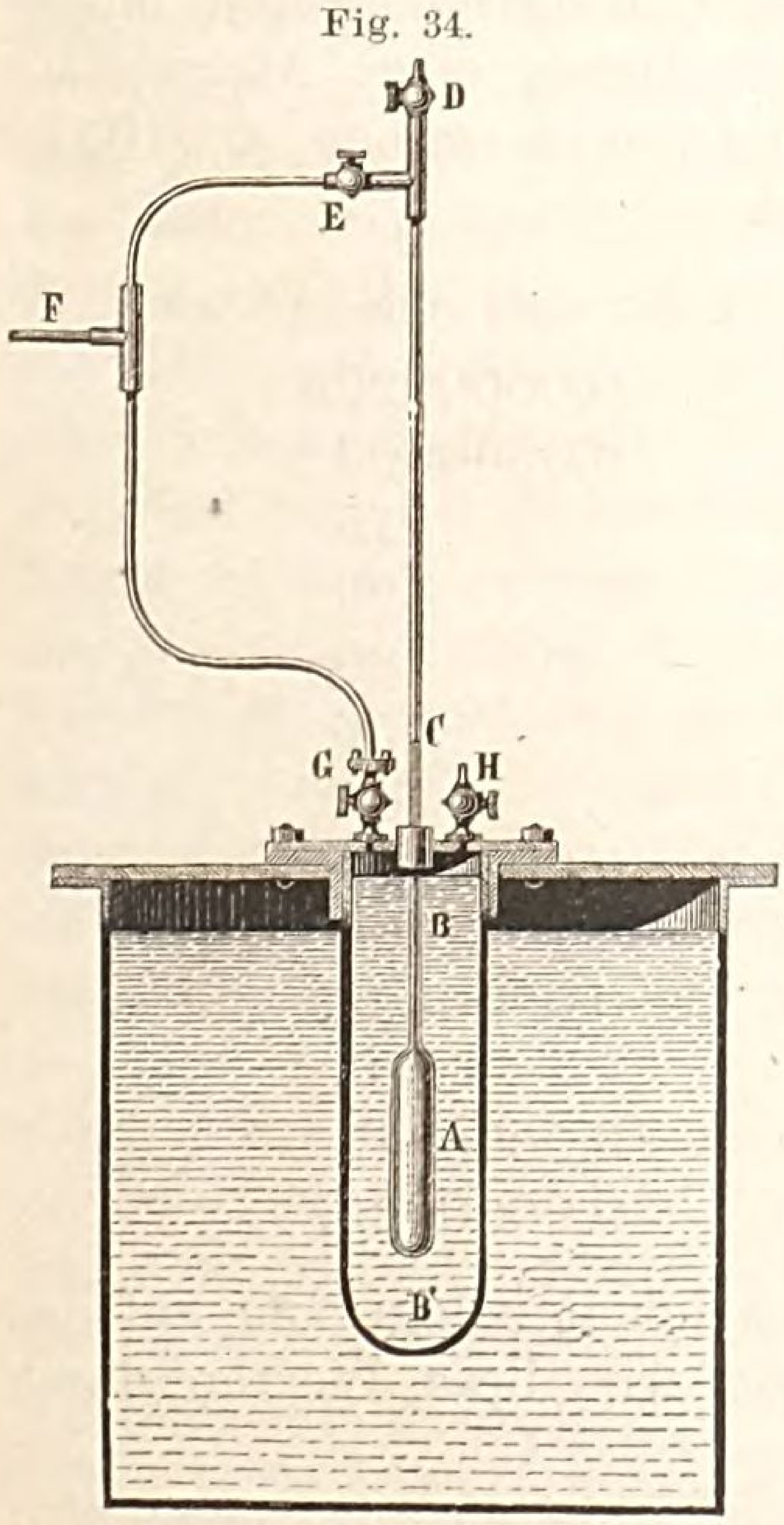
so folgt $$v_1 = v - v_2 = (k - C) P,$$

oder auch die scheinbare Compression muss dem ausgeübten Drucke proportional sein, und der aus derselben abgeleitete scheinbare Compressionscoefficient ist gleich der Differenz des wirklichen Compressionscoefficienten der Flüssigkeit und des kubischen Compressionscoefficienten der Gefässsubstanz.

Die Versuche von Oersted und ebenso die spätern von Colladon und Sturm führten nun zu dem Resultate, dass die scheinbare, somit auch die wirkliche Zusammendrückbarkeit der Flüssigkeiten dem ausgeübten Drucke proportional sei; die wahren Werthe der Compressionscoefficienten konnten diese Versuche indess nicht geben, da die Compressionscoefficienten der Gefässe nicht bekannt waren.

Diese Werthe wurden erst durch Versuche von Regnault und von Grassi, der die Versuche Regnaults fortsetzte, geliefert, indem Regnault eine Anordnung traf, welche den Compressionscoefficienten des Gefässes direkt zu bestimmen gestattete. Die Einrichtung zeigt Fig. 34. Als Piezometer wurden Gefässe von geometrisch bestimmter Form, entweder Kugeln oder Cylinder mit halbkugelförmigen Endflächen gewählt, deren innere und äussere Durchmesser man genau bestimmte. An den Gefässen A war ebenfalls eine getheilte Glasröhre C angesetzt.

Fig. 34.



Das Gefäss des Piezometers wird in einen mit Wasser gefüllten Kupfercylinder B eingesetzt, der durch einen mit Schrauben befestigten Deckel luftdicht verschlossen wird. Durch eine Oeffnung des Deckels reicht der Stiel des Piezometers aus dem Deckel hervor, der mit einem Kitt in der Oeffnung luftdicht befestigt ist. Das Innere der Piezometerröhre kann durch einen Hahn D entweder von der äussern Luft abgeschlossen oder mit ihr in Verbindung gesetzt werden. Durch den Hahn E und die Röhre EF kann das Innere der Röhre CD ferner mit einem mit comprimirter Luft gefüllten Gefässe in Verbindung gebracht und so beliebigen Drucken ausgesetzt werden. Durch die Röhre FG kann dieselbe comprimirte Luft, wenn der Hahn G geöffnet und der das Innere des Gefässes B mit der äussern Luft verbindende Hahn H geschlossen wird, einen Druck auf das Wasser des Gefässes B ausüben.

Man kann somit auf diese Weise 1. auf die Aussenwand des Piezometers einen Druck ausüben, indem man die Hähne *E* und *H* schliesst, *G* und auch *D* öffnet; 2. einen Druck sowohl auf das Innere als auch die Aussenwand des Piezometers ausüben, wie in dem Oersted'schen Apparate, indem man die Hähne *D* und *H* schliesst und *G* und *E* öffnet; 3. den Druck nur auf das Innere wirken lassen, indem man *D* und *G* schliesst, dagegen *E* und *H* öffnet.

Der erste Versuch gestattet, aus der Theorie der Elasticität den Compressionscoefficienten der Gefässsubstanz abzuleiten, da die Compression eines Hohlraums in bestimmter Weise von der Form, den Dimensionen desselben und dem kubischen Compressionscoefficienten abhängt. Der zweite Versuch liefert den scheinbaren Compressionscoefficienten der Flüssigkeiten, wie die Versuche von Oersted, er gibt somit in Verbindung mit dem ersten den gesuchten Werth. Der dritte Versuch ist eine Controle der beiden ersten. Durch den allein auf das Innere des Piezometers wirkenden Druck wird die Flüssigkeit in demselben comprimirt, wie bei dem zweiten Versuch, das Gefäss dagegen wird ausgedehnt, da es wie bei dem ersten Versuche nur einen einseitigen Druck erfährt. Nach der Theorie der Elasticität muss die bei diesem Versuche beobachtete Volumänderung gleich der Summe der beiden bei den ersten Versuchen beobachteten Volumänderungen sein, eine Beziehung, die Regnault bei allen seinen Versuchen bestätigt fand.

Im Folgenden sind für einige der von Regnault und Grassi untersuchten Flüssigkeiten die so bestimmten Compressionscoefficienten mitgetheilt. Als Einheit des Druckes ist dabei der Druck einer Atmosphäre angenommen, der, wie wir im nächsten Kapitel zeigen werden, 0,010333 Kilogramm auf den Quadratmillimeter beträgt.

Flüssigkeit	Temperatur	k für eine Atmosphäre
Quecksilber	0^0	0,00000295
Wasser	0^0	0,0000503
„	$1^0,5$	515
„	$4^0,8$	499
„	$10^0,1$	480
„	25^0	456
„	53^0	441
Aethyläther	0^0	0,0001110
„	14	1400
Aethylalkohol	7^0	0,0000828
„	$13^0,1$	904
Methylalkohol	$13^0,5$	0,0000913
Chloroform	$8^0,5$	0,0000625.

Um die Compressionscoefficienten für die Druckeinheit Kilogramm auf den Quadratmillimeter hieraus zu erhalten, müssen wir diese Werthe durch 0,010333 dividiren.

Als Maass der Elasticität der Flüssigkeiten erhielten wir vorhin den reciproken Werth des Compressionscoefficienten; wollen wir, wie bei den festen Körpern, den einer gegebenen Volumänderung entsprechenden elastischen Gegendruck in Kilogrammen pro Quadratmillimeter ausdrücken, so

ist der Elasticitätscoefficient gleich dem reciproken Werth des auf das Kilogramm als Druckeinheit bezogenen Compressionscoefficienten, somit

$$E = \frac{0,010333}{k}.$$

In dieser Weise erhalten wir für

Quecksilber	bei	0^0	$E = 3503$
Wasser	„	0^0	255
„	„	53^0	234
Aethyläther	„	0^0	93
„	„	14^0	74
Aethylalkohol	„	7^0	124
„	„	13^0	114
Methylalkohol	„	13^0	113
Chloroform	„	8^0	165.

Diese Zahlen zeigen, dass das Quecksilber einen Elasticitätscoefficienten besitzt, der zwischen denen der festen Metalle liegt, während diejenigen der übrigen Flüssigkeiten beträchtlich kleiner sind.

§. 40.

Hydrostatischer Druck. Wir gehen jetzt dazu über, die Vertheilung der Drucke auf Grund der in den letzten §§. abgeleiteten Sätze in einer flüssigen Masse aufzusuchen, und zwar zunächst in einer solchen, welche nur der Wirkung der Schwere unterworfen ist.

Als erste Folgerung der im §. 38 abgeleiteten Gleichung ergibt sich, dass im Gleichgewichtszustande die Oberfläche einer der Schwere unterworfenen Flüssigkeit horizontal sein muss. Als Bedingung, dass die Oberfläche einer Flüssigkeit im Gleichgewicht ist, ergibt sich nämlich, dass die auf irgend einen Punkt der Oberfläche einer Flüssigkeit wirkenden, der Oberfläche parallelen Kräfte sich aufheben müssen, da, wenn das nicht der Fall ist, die Flüssigkeit sich nach der Richtung der grössern Kraft bewegen muss. Dieses Aufheben der der Oberfläche parallelen Drucke findet aber nur statt, wenn die vorhandenen Drucke an allen Punkten zur Oberfläche normal und einander gleich sind. Denn sind die Drucke nicht normal, so haben sie eine der Oberfläche parallele Componente, welche dann das Gleichgewicht stören würde; sind die Drucke an verschiedenen Stellen verschieden, so tritt wegen der gleichmässig nach allen Seiten stattfindenden Fortpflanzung des Druckes ebenfalls eine der Oberfläche parallele Kraft auf, welche nicht durch einen entsprechenden Gegendruck aufgehoben wird. Deshalb schliesst die erste Bedingung die zweite schon in sich, so dass dieselbe nicht gesondert aufzustellen ist. Flächen in flüssigen Massen, in denen überall der Druck normal zur Oberfläche, somit auch überall derselbe ist, nennt man Niveauflächen; die Bedingung des Gleichgewichts für die Oberfläche einer Flüssigkeit können wir daher kurz dahin aussprechen, dass sie eine Niveaufläche sein muss.

Nach §. 38 ist nun der Druck p, welcher auf die Flächeneinheit irgend einer Fläche der Flüssigkeit wirkt,

$$p = p_0 + dh,$$

wenn p_0 der in der Einheit der Fläche wirkende Druck ist, deren verticaler Abstand von der betrachteten Fläche gleich h ist, und wenn d das specifische Gewicht der Flüssigkeit bedeutet.

Für eine Niveaufläche muss nun, wie wir eben sahen, an allen Punkten der Druck derselbe, es muss somit für alle zu ihr gehörigen Punkte

$$p = p_0 + dh = \text{const.}$$

In einer nur der Schwere unterworfenen Flüssigkeit ist demnach in einer solchen Fläche für alle Punkte p derselbe, wenn

$$h = \text{const.},$$

wenn also der verticale Abstand von einem gegebenen Punkte überall denselben Werth hat. Das ist aber eine horizontale Ebene. Da somit die Niveauflächen die horizontalen Ebenen sind, folgt, die freie Oberfläche der Flüssigkeit muss eine horizontale Ebene sein.

Ganz dasselbe gilt auch für die Grenzfläche zweier nicht mischbarer Flüssigkeiten verschiedenen specifischen Gewichtes, welche über einander geschichtet sind; da in der obern Flüssigkeit die horizontalen Ebenen Niveauflächen sind, folgt, dass der Druck auf die obere Grenzfläche der untern Flüssigkeit nur dann überall derselbe sein kann, wenn sie ebenfalls horizontal ist, denn auf diese übt nur die darüber stehende Flüssigkeit einen Druck aus.

Der letztere Fall ist gewöhnlich der in der Natur realisirte, indem auf der Oberfläche der Flüssigkeiten die Luft liegt und, wie wir im nächsten Kapitel nachweisen werden, durch ihr Gewicht einen Druck ausübt. Da auch die Theilchen der Luft gegen einander frei beweglich sind, gelten die Gesetze über die Fortpflanzung des Druckes für sie ebenso wie für die Flüssigkeiten.

Da die Niveauflächen bei einer nur der Schwere unterworfenen Flüssigkeit auch im Innern horizontale Ebenen sind, so folgt weiter, dass die Drucke auf eine horizontale, durch die Flüssigkeit gelegte Ebene überall die gleichen, und zwar wenn wir von dem Drucke der Luft absehen, also $p_0 = 0$ setzen,

$$p = dh$$

gleich dem Gewichte des über der Flächeneinheit der betrachteten Ebene stehenden Flüssigkeitscylinders ist. Hat die Fläche die Grösse s, so folgt für den auf die ganze Fläche wirkenden Druck

$$ps = sdh,$$

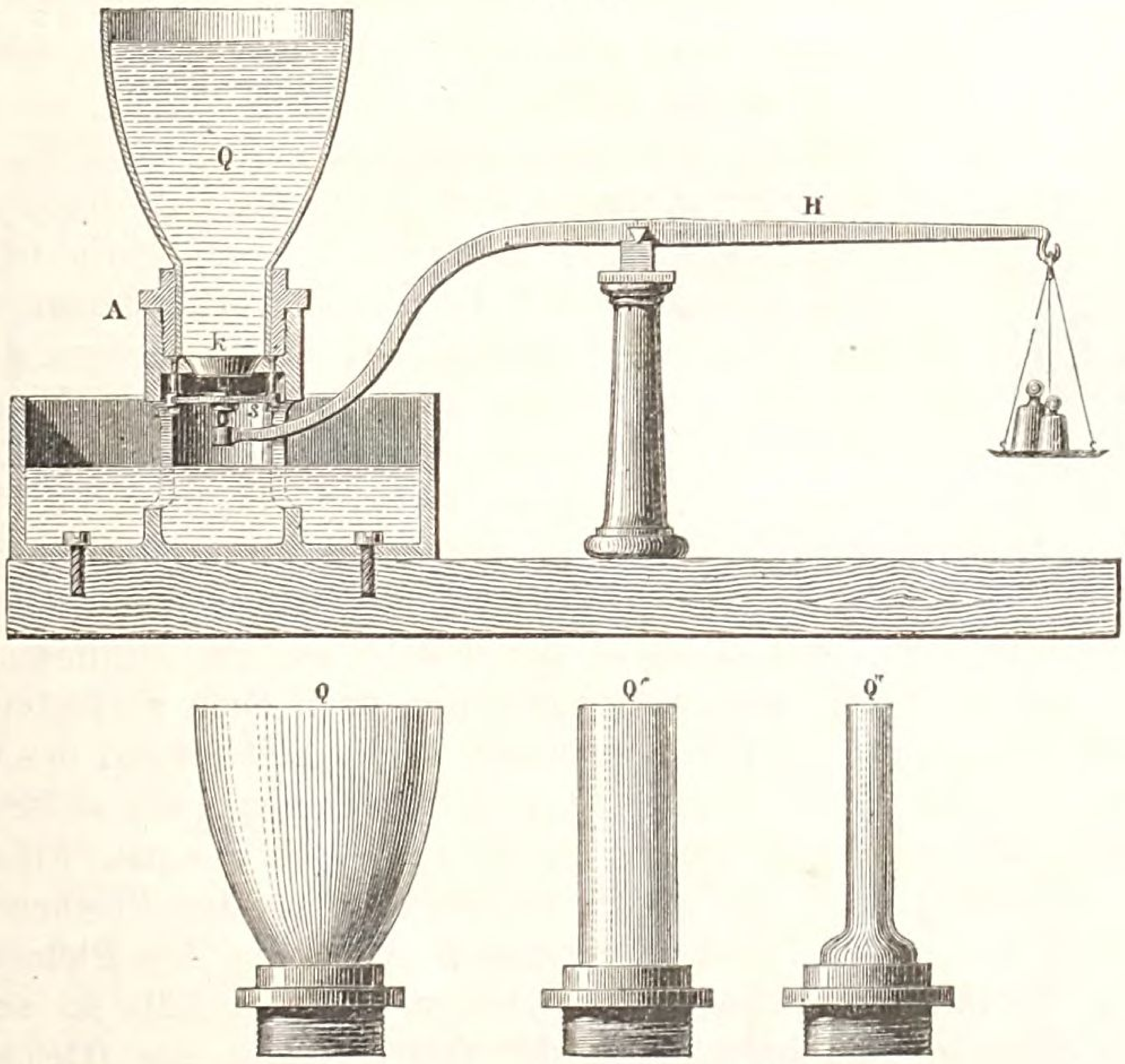
derselbe ist also gleich dem Drucke einer Flüssigkeitssäule, deren Querschnitt gleich ist der Grösse der betrachteten Fläche, und deren Höhe h gleich ist dem Abstande derselben von der Oberfläche der Flüssigkeit.

Dieser Satz schliesst den von Pascal zuerst erkannten und als hydrostatisches Paradoxon bezeichneten Satz ein, dass der Druck, welchen der Boden eines mit Flüssigkeit gefüllten Gefässes erfährt, nur abhängig ist von der Grösse der Bodenfläche und der Höhe der Flüssigkeit in dem Gefässe, nicht von der Form des Gefässes oder der Menge der in demselben enthaltenen Flüssigkeit. Der Druck ist nach obiger Gleichung stets gleich dem Gewichte einer Flüssigkeitssäule, welche überall einen der

Bodenfläche gleichen Querschnitt und die der Höhe der Flüssigkeit gleiche Höhe hat, einerlei ob sich das Gefäss nach oben hin verengert oder erweitert, ob also in demselben eine kleinere oder eine grössere Flüssigkeitsmenge sich befindet.

Man kann die Richtigkeit dieses Satzes leicht mit dem Apparate Fig. 35 experimentell nachweisen und so gleichzeitig den experimentellen Nachweis des allgemeinern Satzes liefern, dass auf die Flächeneinheit in

Fig. 35.

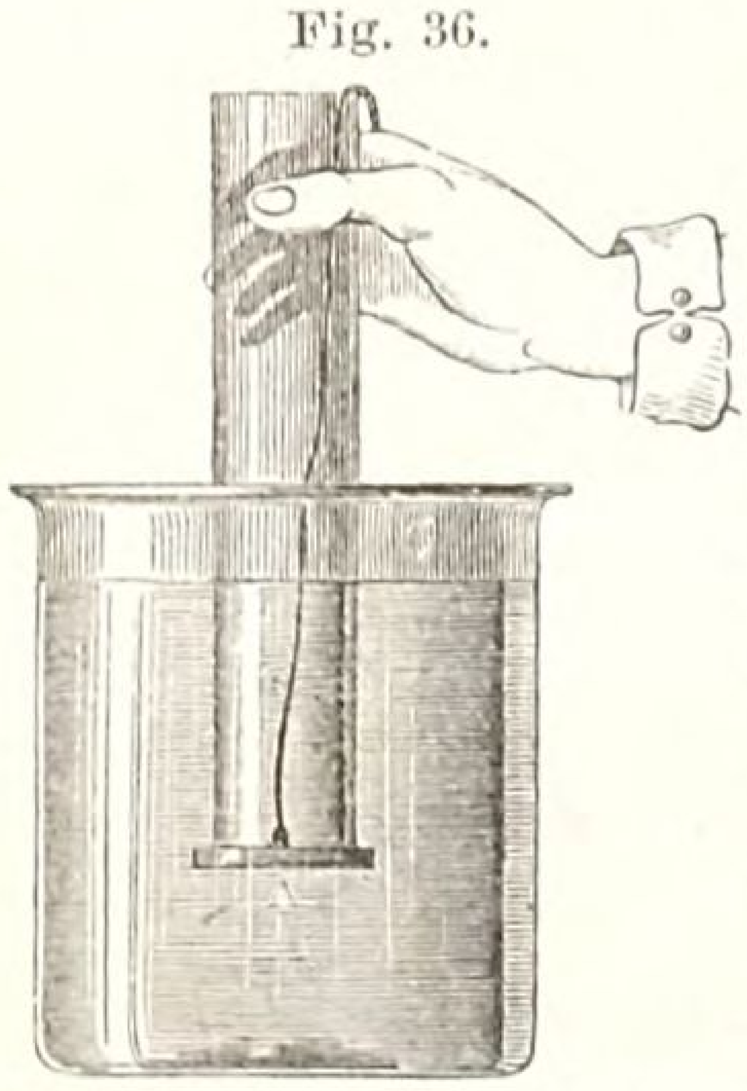


der Tiefe h unter der Oberfläche ein vertical abwärts gerichteter Druck wirkt, der gleich ist dem Gewichte eines Flüssigkeitscylinders vom Querschnitte eins und der Höhe h. Auf den metallischen Hohlcylinder A können Gefässe verschiedener Form Q, Q', Q'' wasserdicht aufgeschraubt werden; die Gefässe sind unten offen, in dem Cylinder A befindet sich aber eine Platte, auf welcher die Messingfassungen der Gefässe unten aufgepasst sind. Ein in diese Platte eingeschliffenes konisches Ventil, welches sich von unten nach oben öffnen kann, bildet dann den für alle Gefässe gleichen Boden. Wenn dann das aufgesetzte Gefäss mit Flüssigkeit gefüllt ist, wird das Ventil durch den Druck derselben fest in die Platte eingedrückt und wasserdicht geschlossen. Das Ventil kann durch einen von unten nach oben gerichteten Druck des an dem gleicharmigen Hebel H angesetzten Stiftes s, der das Ventil berührt, geöffnet werden. Diesen Druck übt man durch Gewichte aus, welche in die am andern Ende des Hebels befindliche Wagschale eingelegt werden. Durch allmähliches Zulegen von Gewichten lässt sich genau der Druck ermitteln, der für irgend ein Gefäss und eine bestimmte Höhe h der Flüssigkeit in demselben das Ventil gerade zu heben im Stande ist. Der Versuch zeigt dann, dass es immer desselben Gewichtes zur Hebung des Ventiles bedarf, welches der Gefässe man auch

anwendet, vorausgesetzt, dass man sie stets mit derselben Flüssigkeit und bis zu derselben Höhe h anfüllt.

Dem von oben nach unten gerichteten Drucke in einer im Innern der Flüssigkeit befindlichen Ebene muss nach §. 38 ein genau ebenso grosser von unten nach oben gerichteter Druck entgegenwirken. Auch dieser Druck lässt sich ohne Mühe experimentell nachweisen. Wenn man gegen das untere gut abgeschliffene Ende einer Glasröhre Fig. 36 eine ebenfalls geschliffene recht leichte Metallplatte mittels eines durch die Röhre hindurchgehenden Fadens fest anlegt, und dann dieses Rohr mit der Platte nach unten hinreichend tief in ein Gefäss mit Wasser taucht, so fällt die Platte, auch wenn man den Faden loslässt, nicht ab, sie wird vielmehr fest gegen die Glasröhre gedrückt. Dass dieser von unten nach oben gerichtete Druck dem in der Ebene der Platte vorhandenen von oben nach unten gerichteten Drucke an Grösse gleich ist, erkennt man, wenn man in die Röhre Wasser eingiesst. Das Wasser muss im Innern der Röhre annähernd, und um so mehr, je leichter die Platte ist, so hoch stehen als ausserhalb, wenn die Platte niederfallen soll. Die Platte fällt ab, wenn der Druck der innern Flüssigkeit und das Gewicht der Platte um ein Minimum grösser ist als der auf die Platte wirkende von unten nach oben gerichtete Druck.

Fig. 36.



Ebenso muss auch ein Flächenelement in der Seitenwand des Gefässes, sei sie vertical oder geneigt, einen normal von innen nach aussen gerichteten Druck erfahren, der gleich ist dem Gewichte eines Flüssigkeitscylinders, dessen Querschnitt gleich ist der Grösse des Flächenelements, und dessen Höhe gleich ist dem verticalen Abstande des Elementes von dem obern Niveau der Flüssigkeit. Diesem Drucke hält in einem geschlossenen Gefässe der Gegendruck der festen Wand das Gleichgewicht. Man kann ihn sichtbar machen, wenn man in einem beweglichen Gefässe die Wand an einer Stelle durchbohrt; in Folge des auf der der Durchbohrungsstelle diametral gegenüberliegenden Fläche fortdauernden Druckes tritt dann eine Bewegung in der Richtung dieses Druckes ein. Man sieht das an den sogenannten Reactionsrädern, deren Einrichtung Fig. 37 zeigt. Sie bestehen aus einem weitern, mit Wasser gefüllten Gefässe, welches um eine mit der Axe des Gefässes zusammenfallende verticale Axe sich drehen kann. An dem untern Ende des Gefässes befinden sich zwei oder mehrere horizontale Ausflussröhren, deren Enden alle in demselben Sinne umgebogen sind. Beim Ausfliessen des Wassers aus diesen Röhren treibt der gegen die den Ausflussöffnungen gegenüberliegenden Wände gerichtete Druck den Apparat herum.

Fig. 37.



Die hier abgeleiteten Drucke müssen im Innern jeder Flüssigkeit vorhanden sein, welches auch die Gestalt des Gefässes ist, in welchem die Flüssigkeit sich befindet. Die abgeleiteten Sätze haben daher auch Gültigkeit, wenn wir die Flüssigkeit in zwei Gefässe vertheilen und die Gefässe durch eine Röhre mit einander verbinden, so dass die in beiden vorhandene Flüssigkeit zusammenhängt. Man nennt solche mit einander in Verbindung stehende Gefässe, da sie gewöhnlich in Röhrenform angewandt werden, communicirende Röhren. Wenn demnach in solchen Röhren Fig. 38 AB und CD dieselbe Flüssigkeit enthalten ist, so muss wegen des Zusammenhanges der

Fig. 38.

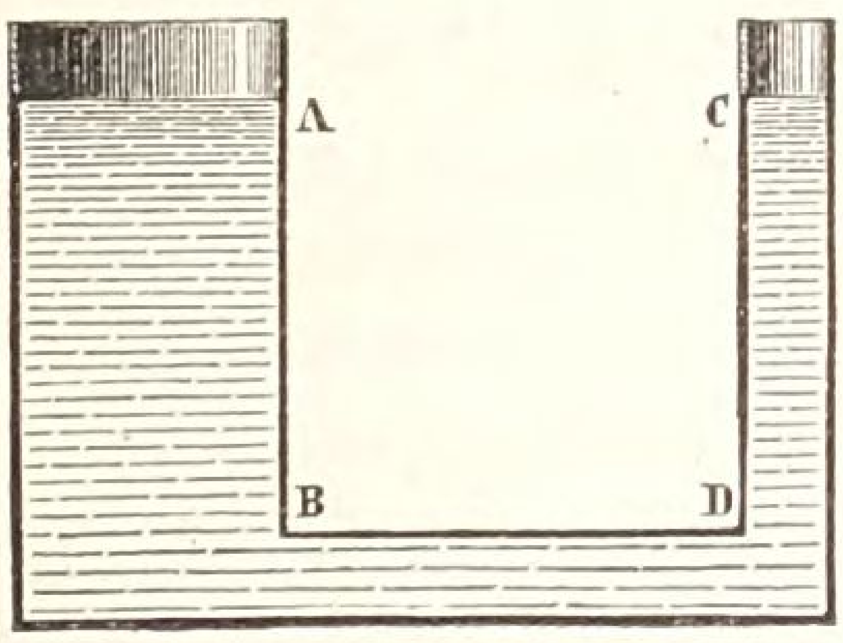
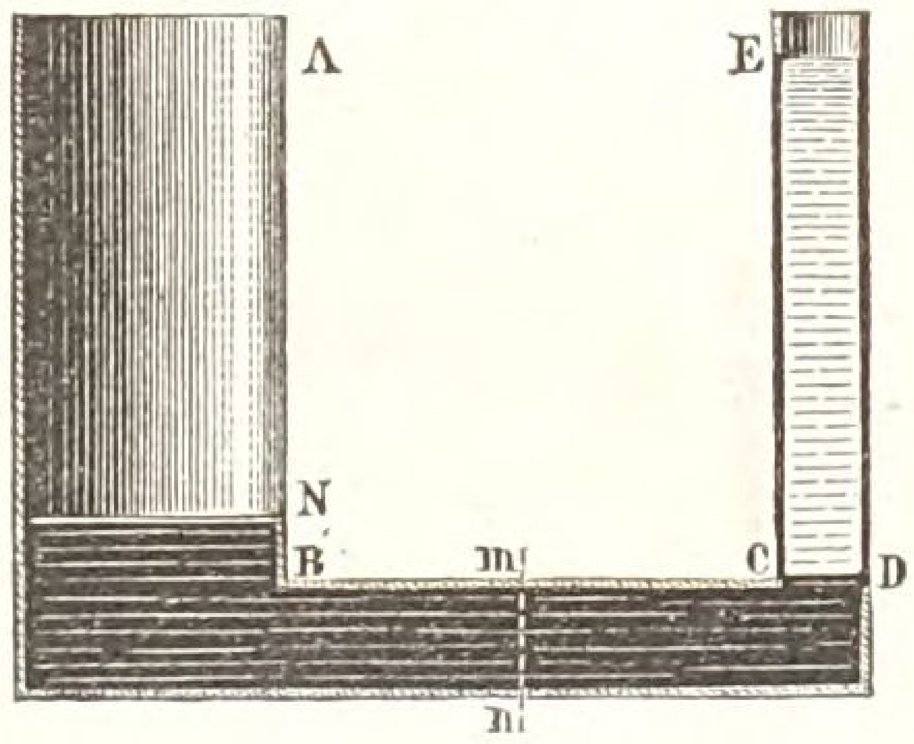


Fig. 39.



Flüssigkeit in beiden Röhren die Oberfläche derselben in einer Horizontalebene sich befinden, oder in beiden Röhren muss die Flüssigkeit von genau gleicher Höhe sein.

Wenn aber in den beiden Röhren verschiedene Flüssigkeiten vorhanden sind, so muss die Höhe derselben in beiden Röhren eine verschiedene sein. Haben wir z. B. in das Gefäss Fig. 39 erst Quecksilber gegossen und dann in die Röhre CDE Wasser, so muss die Höhe der Wassersäule über der Trennungsfläche CD in demselben Verhältnisse höher sein als die über demselben Niveau in der andern Röhre gehobene Quecksilbersäule, als das Quecksilber specifisch schwerer ist als das Wasser.

Es folgt das unmittelbar aus den Gleichgewichtsbedingungen; dieselben sind für die Trennungsfläche CD der beiden Flüssigkeiten, dass der von oben nach unten und der von unten nach oben gerichtete Druck für die Flächeneinheit derselbe ist. Der von oben nach unten gerichtete Druck ist nun in dieser Fläche, wenn h_1 die Höhe der Wassersäule und d_1 das specifische Gewicht des Wassers ist, gleich $h_1\, d_1$. Der von unten nach oben gerichtete Druck ist gleich jenem des Quecksilbers, welches in dem andern Schenkel über das Niveau der Fläche CD gehoben ist. Ist diese Höhe $NB = h_2$ und die Dichte des Quecksilbers d_2, so ist der Druck $h_2\, d_2$. Die Bedingung des Gleichgewichtes ist somit

$$h_1\, d_1 = h_2\, d_2,$$

oder

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{d_2}{d_1},$$

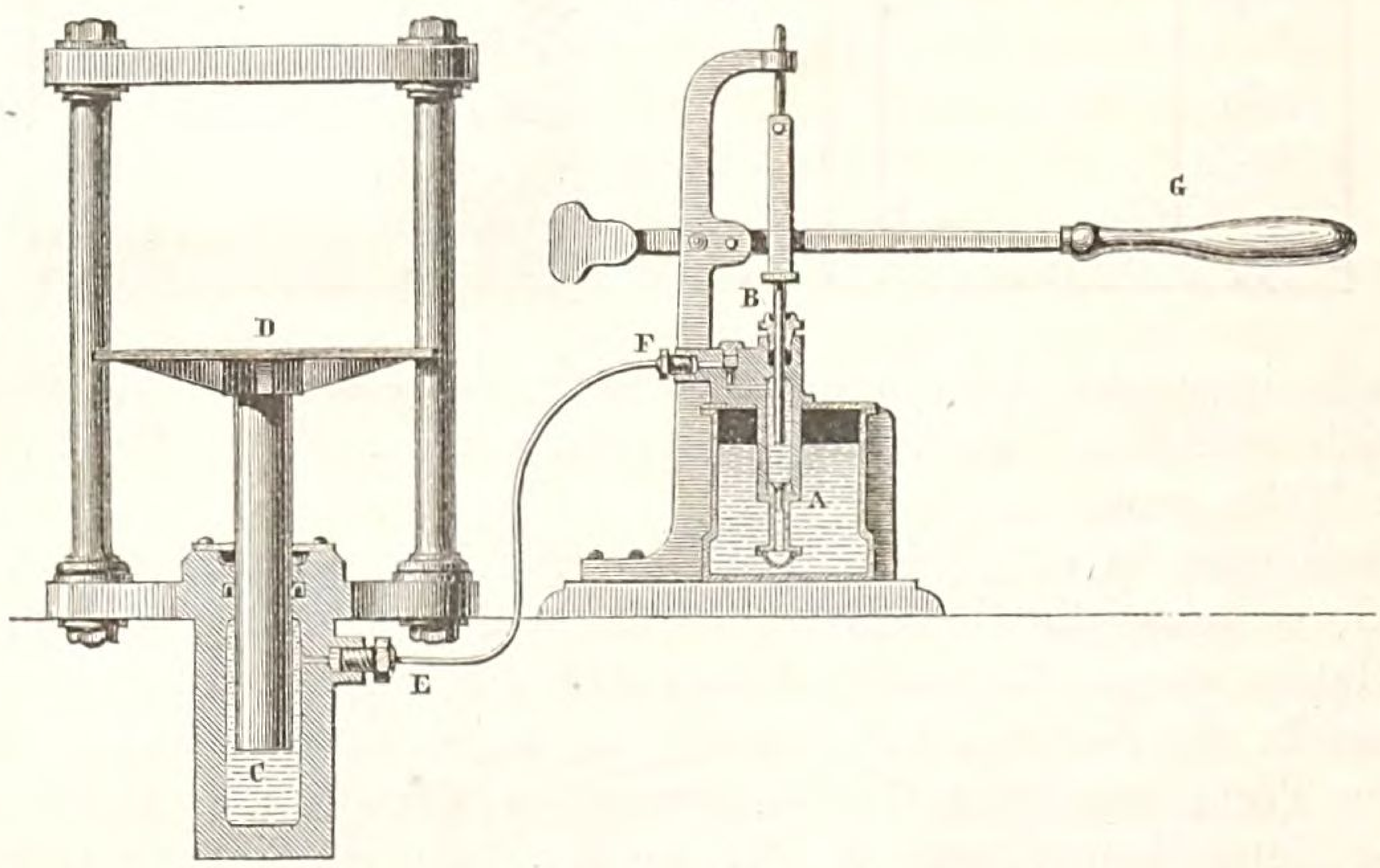
also die Höhen der beiden Flüssigkeiten über der Trennungsfläche müssen sich umgekehrt verhalten, wie die specifischen Gewichte derselben.

In Fig. 38 hält die kleine Wassermenge in der Röhre CD der grossen Wassermenge in der Röhre AB das Gleichgewicht. Würden wir deshalb aus der Röhre AB das Wasser entfernen und statt dessen bei B einen wasserdicht schliessenden Kolben anbringen, so müsste derselbe zur Her-

stellung des Gleichgewichtes dasselbe Gewicht haben, wie die Wassermasse in AB. Das Gewicht dieses Kolbens verhält sich somit zu dem Gewichte des Wassers in CD, wie der Querschnitt der Röhre AB zum Querschnitt der Röhre CD. Würde man nun auf die obere Fläche der Flüssigkeit in CD einen vertical abwärts gerichteten Druck p ausüben, so müssen wir, wenn der Kolben in der weiten Röhre diesem Drucke das Gleichgewicht halten soll, denselben mit einem Gewichte P belasten, welches sich zu p verhalten muss wie der Querschnitt der Röhre AB zum Querschnitt der Röhre CD.

In Bramah's hydraulischer Presse Fig. 40 ist dieser Umstand benutzt, um durch Anwendung kleiner Kräfte sehr grosse Drucke zu erzielen. Dieselbe besteht im Wesentlichen aus einer kleinen Druckpumpe AB, mit

Fig. 40.



welcher man das Wasser durch die Verbindungsröhre FE in die weite, durch EF mit AB communicirende Röhre C hineinpumpt. In diese passt wasserdicht der Kolben CD. Das in die Röhre C gepumpte Wasser hebt den Kolben, der die zu pressenden Gegenstände gegen einen festen Widerhalt drückt. Ist der Querschnitt der Röhre C vielleicht 1000 mal so gross als der Querschnitt der Pumpe, so kann man durch einen auf den Pumpenkolben wirkenden Druck von einem Kilogramm auf der andern Seite durch den Kolben CD einen Druck von 1000 Kilogramm ausüben.

Es möge hier bemerkt werden, dass bei Erzielung dieser grossen Drucke durch kleine Kräfte doch kein Gewinn an Arbeit, sondern nur eine Uebertragung einer solchen stattfindet; die Arbeit, welche von dem Kolben CD geleistet werden kann, ist genau gleich der, welche an dem Pumpenkolben geleistet wird. Denn soll CD um 1 Millimeter gehoben werden, so muss der Kolben der Pumpe um 1000 Millimeter herabgedrückt werden, um das zur Hebung des Kolbens CD nöthige Wasser in die weite Röhre zu schaffen. Es ist also auf beiden Seiten das Product aus Weg und Druck, also die geleistete Arbeit dieselbe.

Wir haben in dem Bisherigen die Drucke in einer flüssigen Masse betrachtet, welche nur der Schwere oder wie bei der hydraulischen Presse einem verticalen auf die Oberfläche der Flüssigkeiten wirkenden Drucke unterworfen sind. Die Verhältnisse werden andere, wenn auf die Flüs-

sigkeit noch andere und anders gerichtete Kräfte wirken. Die Gleichgewichtsbedingungen bleiben aber auch dann immer die gleichen, die Oberfläche der Flüssigkeit muss eine Niveaufläche sein, und im Innern der Flüssigkeit ist in Niveauflächen der zu denselben normale Druck überall der gleiche. Die Gestalt, welche die Niveauflächen dann aber annehmen, hängt von den überhaupt wirksamen Kräften ab, sie lässt sich immer berechnen, wenn man die Kräfte kennt. Wir wollen hier auf die Betrachtung specieller Fälle nicht eingehen, da wir später doch solche Flächen untersuchen müssen.

§. 41.

Eingetauchte und schwimmende Körper. Wenn ein Körper in eine Flüssigkeit eingetaucht wird, so erfährt die Oberfläche desselben von der Flüssigkeit ringsumher einen Druck, welcher an allen Stellen normal zu dem betreffenden Elemente der Oberfläche gerichtet ist, und welcher an jedem Elemente gleich ist dem Drucke eines Flüssigkeitscylinders, dessen Querschnitt gleich ist der Grösse des betreffenden Elementes und dessen Höhe gleich ist dem verticalen Abstande des Elementes von dem obern Niveau der Flüssigkeit. Wenn wir nun diese rings auf alle Elemente der Körperoberfläche wirkenden Drucke in eine verticale und eine horizontale Componente zerlegen, so erkennt man, dass letztere an den entgegengesetzten Seiten des Körpers paarweise gleich und entgegengesetzt sind, da sie von Flüssigkeitsschichten herrühren, welche gleich tief unter der Oberfläche liegen. Diese Drucke werden daher den Körper nur mehr oder weniger zusammendrücken. Anders aber mit den verticalen Drucken; auch diese sind zwar auf den den Körper nach oben begrenzenden Flächenelementen vertical abwärts, auf den ihn nach unten begrenzenden vertical aufwärts gerichtet, also gerade entgegengesetzt, sie sind sich aber nicht gleich, da die obern Elemente den Druck von einer weniger hohen Flüssigkeitsschicht erhalten als die untern. Mit der Differenz dieser Drucke muss mithin der Körper einen Auftrieb erhalten.

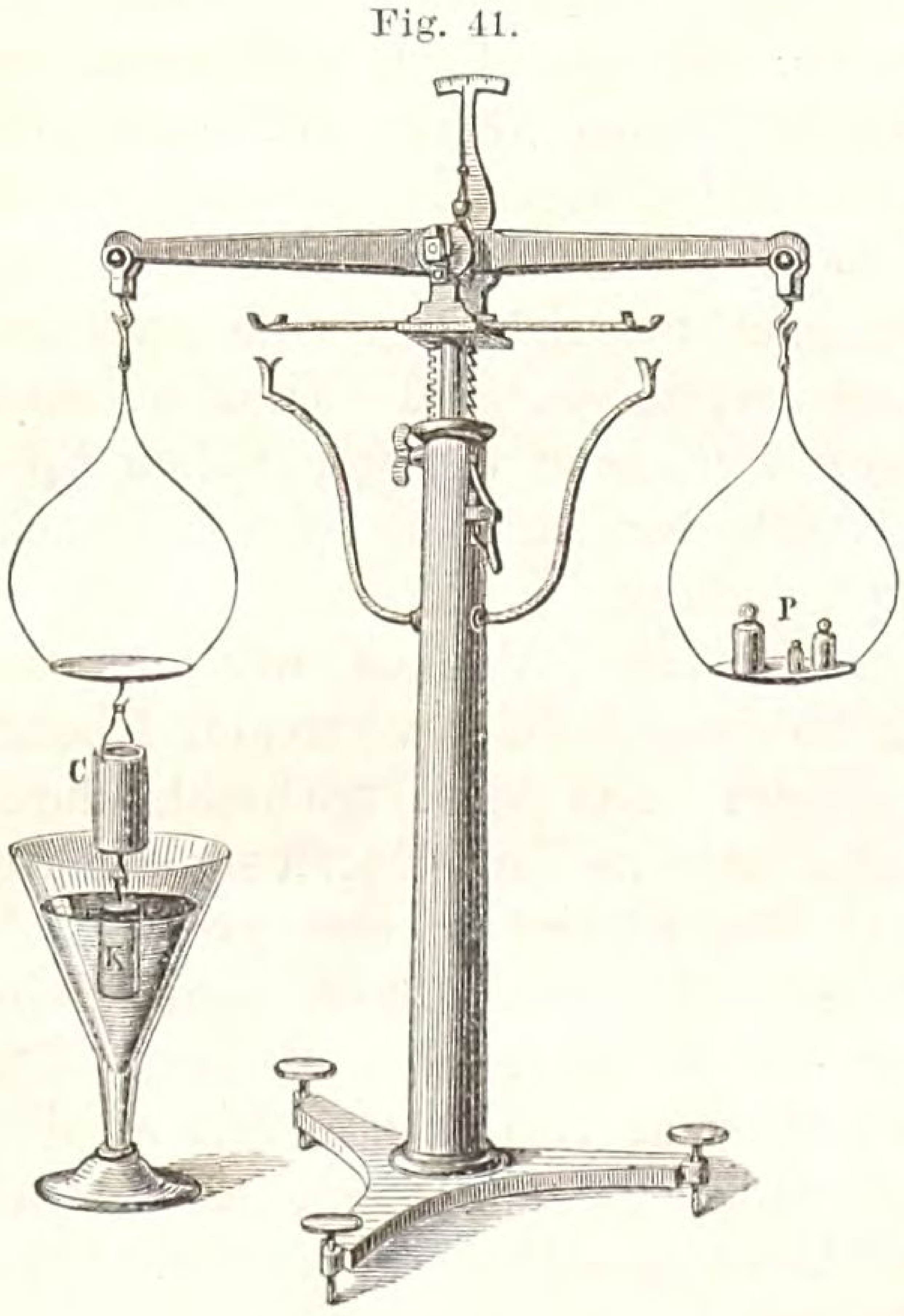
Um die Grösse dieses Auftriebes zu erhalten, denken wir uns den Körper durch eine Schaar einander sehr naher paralleler verticaler Ebenen in eine Reihe sehr schmaler Scheiben zerlegt, und diese nochmals durch eine ebensolche Schaar paralleler verticaler, aber zu den erstern senkrechter Ebenen zerschnitten. Wir haben dadurch den Körper in eine grosse Zahl elementarer Prismen zerlegt, deren obere und untere Basis sehr kleine Flächenstücke sind, die wir als einander gleich betrachten können. Der Druck, den die obere Basis eines solchen Prismas vertical abwärts erfährt, ist gleich dem Gewichte der Flüssigkeitssäule, dessen Querschnitt gleich der Grösse der obern Basis und dessen Höhe gleich dem verticalen Abstande dieser obern Basis von der Oberfläche der Flüssigkeit ist; der vertical aufwärts gerichtete, auf die untere Basis wirkende Druck ist das Gewicht der Flüssigkeitssäule von demselben Querschnitt, deren Höhe gleich dem verticalen Abstand der untern Basis von der Oberfläche ist. Die Differenz der Drucke ist also das Gewicht einer Flüssigkeitssäule, deren Querschnitt und Höhe jene des betrachteten Prismas sind. Es wird also ein solches Prisma mit einem Drucke aufwärts getrieben, der gleich ist dem Gewichte einer Flüssigkeitssäule, welche dasselbe Volum hat, wie

das betrachtete Prisma. Was von dem einzelnen Prisma gilt, dasselbe gilt von der Summe derselben, also von dem ganzen eingetauchten Körper, derselbe erhält einen Auftrieb, welcher gleich ist dem Gewichte einer Flüssigkeitsmasse, die dasselbe Volumen hat wie der Körper, oder kurz gleich ist dem Gewichte der von dem Körper aus der Stelle gedrängten Flüssigkeit.

Man kann diesen Satz sich noch in anderer Weise ableiten; denken wir uns im Innern der Flüssigkeit eine irgend wie begrenzte Menge von der umgebenden Flüssigkeit isolirt, so wird diese im Zustande des Gleichgewichts von der umgebenden Flüssigkeit getragen, ihrem Gewichte wird durch die von der umgebenden Flüssigkeit auf ihre Grenzfläche ausgeübten Drucke vollständig das Gleichgewicht gehalten. Da nun aber diese Drucke auf die gedachte Grenzfläche vollkommen unabhängig sind von dem, was die Grenze umschliesst, ob Flüssigkeit oder einen andern Körper, so folgt, dass wenn wir einen Körper eintauchen, dem Theile seines Gewichtes, welcher gleich ist dem Gewichte der verdrängten Flüssigkeit, durch die umgebenden Drucke das Gleichgewicht gehalten wird, oder der eingetauchte Körper verliert so viel an Gewicht, als die Flüssigkeit wiegt, die er aus der Stelle drängt.

Dieser schon von Archimedes aufgestellte und als das archimedische Princip bezeichnete Satz lässt sich leicht experimentell nachweisen. Man hängt an die eine Wagschale einer Wage Fig. 41 einen metallischen Hohlcylinder *C* und unter denselben einen massiven Cylinder *K*, der ganz genau in den Hohlcylinder passt, so dass das Volumen des massiven Cylinders genau gleich ist dem Hohlraum. Nachdem man durch auf die andere Wagschale gelegte Gewichte das Gleichgewicht hergestellt hat, bringt man unter die angehängten Cylinder ein mit Wasser gefülltes Gefäss und senkt den massiven Cylinder in das Wasser, so dass er gerade vollständig eintaucht. Das Gleichgewicht ist dadurch gestört, und das Sinken der die Gewichte tragenden Schale beweist, dass der eingetauchte Körper einen Auftrieb erfährt. Zur Herstellung des Gleichgewichtes genügt es dann, den Hohlraum des Hohlcylinders mit Wasser zu füllen, ihn also mit dem Gewichte jenes Wassers zu beschweren, welches der massive Cylinder verdrängt hat.

Fig. 41.



Da die Gewichtsverminderung eines eingetauchten Körpers ihren Grund darin hat, dass der betreffende Theil seines Gewichtes durch die umgebende Flüssigkeit getragen wird, so folgt, dass das Gewicht der Flüssigkeit in dem Gefäss, in welche der Körper eingetaucht ist, gerade so viel zunehmen muss, als das Gewicht des eingetauchten Körpers vermindert wird.

Der Versuch bestätigt diese Folgerung, denn setzen wir das mit Wasser gefüllte Gefäss auf die Wage, bringen es durch auf die andere Wagschale gelegte Gewichte ins Gleichgewicht, so wird das Gleichgewicht sofort gestört, wenn der Cylinder K in das Wasser eingetaucht wird. Hängt man denselben neben der Wage an einem Stativ auf, so bedarf es jetzt zur Herstellung des Gleichgewichtes nur der Herausnahme einer solchen Wassermenge, dass der Hohlcylinder davon gerade angefüllt wird, ein Beweis, dass die Gewichtszunahme der Flüssigkeit genau gleich ist dem Gewichtsverluste des eingetauchten Körpers.

Es folgt aus diesen Versuchen, dass auf einen eingetauchten Körper zwei Kräfte einwirken, das Gewicht des Körpers und der Auftrieb, gleich dem Gewichte der verdrängten Flüssigkeit. Ist v das Volumen des Körpers, d das specifische Gewicht desselben und d' das specifische Gewicht der Flüssigkeit, so ist vd das Gewicht des Körpers, welches ihn vertical abwärts treibt, vd' der Auftrieb, der ihn vertical aufwärts treibt, es ist somit

$$vd - vd' = v(d - d')$$

die Differenz jener beiden Kräfte, welche den Körper vertical abwärts treibt. Die Bewegung, welche ein in die Flüssigkeit eingetauchter, frei beweglicher Körper annimmt, hängt mithin ab von der Differenz der specifischen Gewichte des eingetauchten Körpers und der Flüssigkeit.

Ist $d > d'$, so sinkt der Körper in der Flüssigkeit mit beschleunigter Geschwindigkeit, aber langsamer, als wenn er frei fällt, zu Boden, da die Masse des Körpers von einer Kraft bewegt wird, welche kleiner ist als das Gewicht des Körpers.

Ist $d = d'$, so wird das Gewicht des Körpers durch den Auftrieb gerade aufgehoben, es wirkt auf denselben keine bewegende Kraft ein, er kann keine Bewegung annehmen, sondern schwebt im Innern der Flüssigkeit im Gleichgewicht an der Stelle, an welche man ihn gebracht hat. Man kann das leicht experimentell zeigen; ein homogenes Gemenge von einem Theil Zinnober und 225 Theilen weissem Wachs hat dasselbe specifische Gewicht wie Wasser, taucht man dasselbe in Wasser, so schwebt es in demselben an allen Stellen im Gleichgewicht. Ebenso schwebt ein Ei in einer passend concentrirten Kochsalzlösung, Oeltropfen in einer passenden Mischung von Wasser und Alkohol.

Ist $d < d'$, so ist der Auftrieb des ganz eingetauchten Körpers grösser als sein Gewicht, und die Kraft, welche ihn emportreibt, ist gleich $v(d' - d)$, er steigt deshalb mit beschleunigter Geschwindigkeit auf und die Beschleunigung ist so lange constant, als er ganz eingetaucht ist. Sobald aber ein Theil des Körpers aus der Flüssigkeit hervorragt, somit das Volumen der verdrängten Flüssigkeit kleiner wird, nimmt auch der Auftrieb an Grösse ab; ist das Volum der verdrängten Flüssigkeit v', so ist die Kraft, welche den Körper emportreibt, $vd - v'd'$.

Da nun das Gewicht des Körpers constant vd ist, erfährt der Körper so lange einen nach oben gerichteten Antrieb, als $vd < v'd'$ ist, er steigt mit beschleunigter Geschwindigkeit auf, bis das Volum v' so klein geworden ist, dass $vd = v'd'$ ist. Wegen der nach oben gerichteten Geschwindigkeit, die er in diesem Momente besitzt, steigt er dann, da

$v\,d > v'd'$ wird, mit verzögerter Bewegung weiter, kommt in einer gewissen Lage zur Ruhe, sinkt wieder nieder u. s. f., bis er nach einigen Oscillationen in einer solchen Lage zur Ruhe kommt, dass $v\,d = v'd'$. Körper, welche specifisch leichter sind als die Flüssigkeit, in welche sie eingetaucht sind, sind also im Gleichgewicht, wenn sie zum Theil und zwar soweit eingetaucht sind, dass das Gewicht der verdrängten Flüssigkeit dem Gewichte des Körpers gleich ist.

Die Körper können dann zwar keine fortschreitende Bewegung mehr annehmen, aber wohl noch eine drehende. Soll auch diese nicht eintreten, so müssen die beiden auf den Körper einwirkenden Kräfte in derselben Verticalen angreifen. Das Gewicht des Körpers greift nun in dem Schwerpunkte desselben an, der Auftrieb dagegen, als das Gewicht der verdrängten Flüssigkeit, dort wo sich der Schwerpunkt derselben befinden würde, wenn sie an ihrer Stelle wäre. Es müssen demnach diese beiden Schwerpunkte sich in einer und derselben verticalen Linie befinden. Eine homogene Kugel ist deshalb in allen Lagen im Gleichgewicht, ein Ellipsoid, wenn eine seiner Axen vertical ist, ein Parallelepiped, wenn seine Kanten vertical sind.

Damit das Gleichgewicht ein stabiles ist, muss der Körper nach jeder kleinen Drehung in seine frühere Lage zurückkehren. Man sieht sofort, dass das immer dann der Fall ist, wenn sein Schwerpunkt tiefer liegt, als der der verdrängten Flüssigkeit. Es kann aber auch der Fall sein, wenn der Schwerpunkt höher liegt, er muss nur tiefer liegen als das sogenannte Metacentrum. Um die Bedeutung dieses Punktes zu erkennen, sei der schwimmende Körper S Fig. 42 aus seiner Lage gebracht, so dass die frühere Verticale PG, welche die beiden Schwerpunkte in sich enthielt, die Lage $P'G'$ erhalten habe.

Fig. 42.

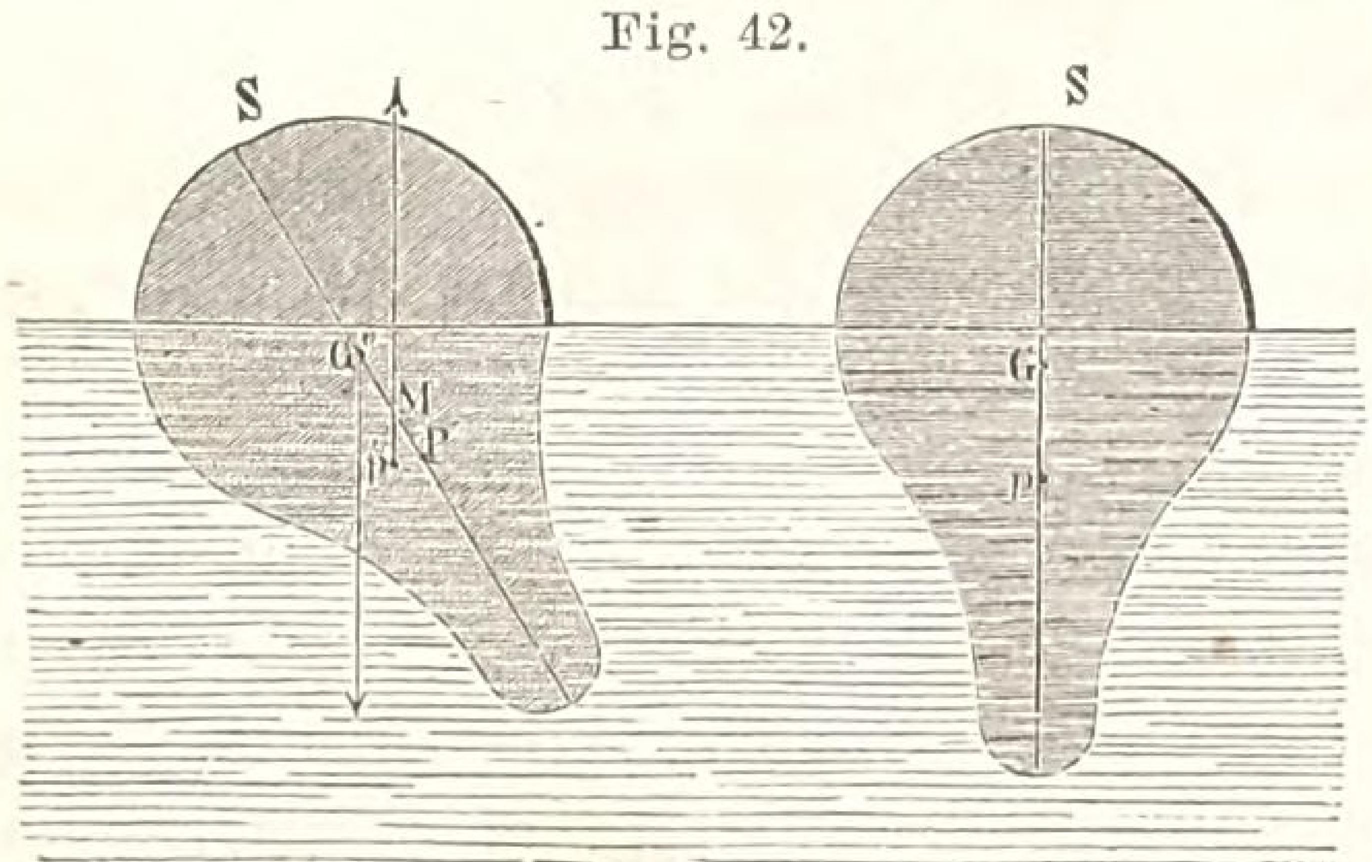
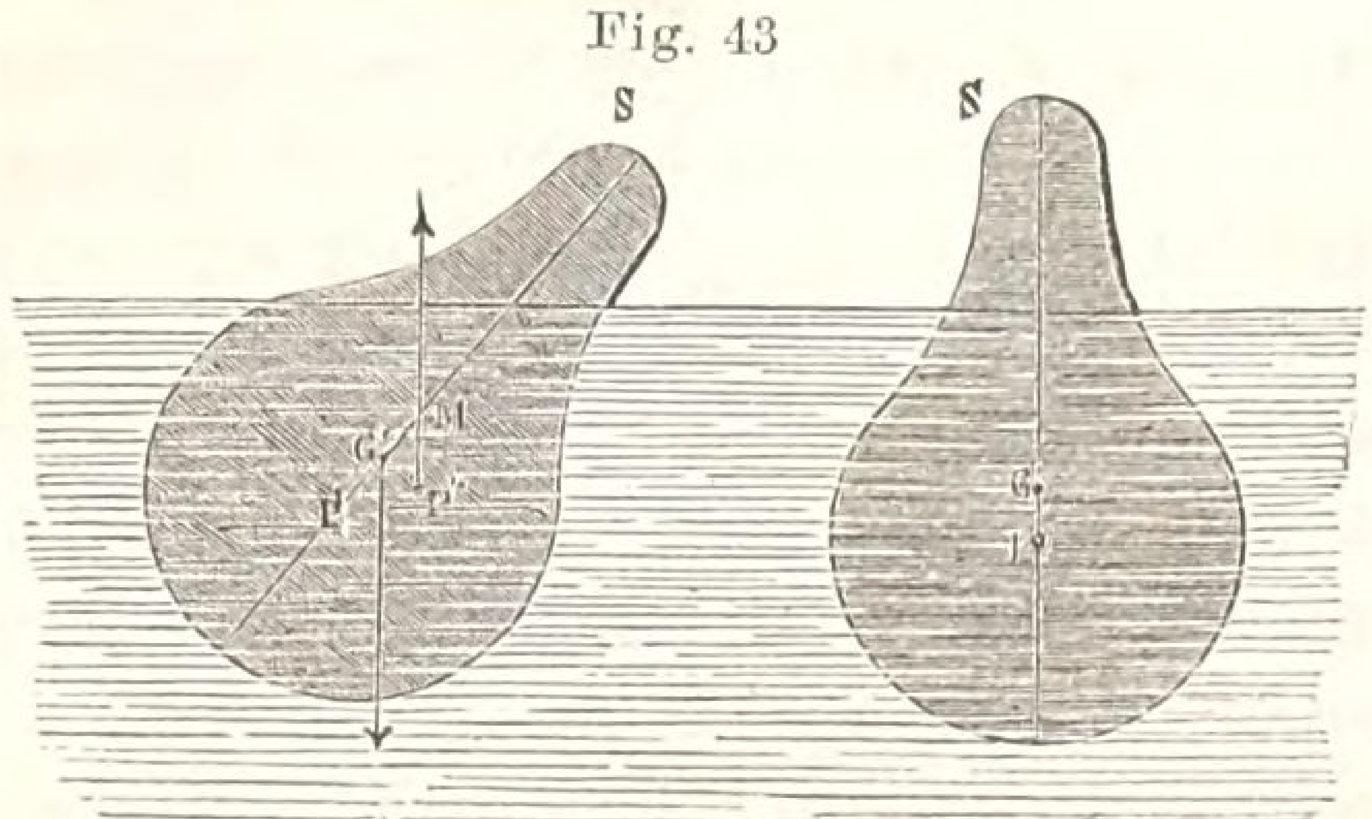


Fig. 43



Der Schwerpunkt G des Körpers hat in demselben seine Lage behalten, er befindet sich in G'; der Mittelpunkt des Auftriebs ist dann aber nicht mehr P', sondern P'', weil die Gestalt der verdrängten Flüssigkeit eine andere geworden ist. Der Auftrieb greift demnach bei P'' an von unten nach oben, das Gewicht den Körper nach unten treibend in G'. Beide Kräfte suchen somit dem Körper eine Drehung zu ertheilen, welche ihn von seiner frühern Lage entfernt, das Gleichgewicht war ein labiles. Man erkennt in der Figur, dass das immer dann der Fall ist, wenn der Schnittpunkt M, der durch den Schwerpunkt der nach der Drehung verdrängten Flüssigkeit gelegten Verticalen und der durch die beiden Schwerpunkte in der ungedrehten Lage gelegten Linie $P'G'$ tiefer liegt als der Schwerpunkt des schwimmenden Körpers. Diesen Schnitt-

punkt M nennt man das Metacentrum. Wäre dagegen die Lage des schwimmenden Körpers diejenige in Fig. 43 und wiederum G sein Schwerpunkt, P der Mittelpunkt des Auftriebes, so ist der Körper, wenn P'' der Schwerpunkt der nach der Drehung verdrängten Flüssigkeit ist, im stabilen Gleichgewicht. Das Metacentrum M liegt jetzt über dem Schwerpunkt und das Gewicht des Körpers sowohl als der Auftrieb drehen ihn in die frühere Lage. Die durch den Schwerpunkt P'' gelegte Verticale schneidet die Linie PG um so leichter oberhalb des Schwerpunktes G, je tiefer derselbe liegt; es ist daher für Körper, die im stabilen Gleichgewicht schwimmen sollen, wie Schiffe, immer rathsam, den Schwerpunkt möglichst tief zu legen.

§. 42.

Bestimmung des specifischen Gewichtes fester Körper. Die in dem vorigen §. abgeleiteten Sätze über den Gewichtsverlust eingetauchter Körper führen uns leicht dahin, das specifische Gewicht der Körper zu bestimmen. Wir definirten im §. 16 das specifische Gewicht eines Körpers als das Gewicht der Volumeinheit, wobei dann stets als Gewichtseinheit das im metrischen System allgemein als Gewichtseinheit eingeführte Gewicht der Volumeinheit Wasser genommen wird. Wie wir nun im vorigen §. sahen, verliert ein in eine Flüssigkeit, deren specifisches Gewicht kleiner ist als das des Körpers, eingetauchter Körper so viel an Gewicht, als die Flüssigkeit wiegt, die er aus der Stelle drängt. Ist v das Volumen des Körpers, s sein specifisches Gewicht, s' jenes der Flüssigkeit, so ist das Gewicht des Körpers $P = vs$, das der verdrängten Flüssigkeit $p = vs'$, es ist somit der Quotient dieser Gewichte

$$\frac{P}{p} = \frac{vs}{vs'} = \frac{s}{s'}$$

gleich dem Quotienten der specifischen Gewichte des Körpers und der Flüssigkeit. Da wir nun das Gewicht der Volumeinheit Wasser als Gewichtseinheit wählen, ist das specifische Gewicht des Wassers gleich eins. Tauchen wir demnach einen Körper vom Gewichte P in Wasser und bestimmen dessen Gewichtsverlust p, so gibt uns der Quotient

$$\frac{P}{p} = s$$

das specifische Gewicht des Körpers. Wir können das noch in anderer Weise erkennen; da wir das Gewicht der Volumeinheit Wasser in unserm Gewichtssystem als Einheit nehmen, gibt uns der Gewichtsverlust des Körpers im Wasser das Volumen des Körpers, es ist $p = v$; der Quotient der beiden Gewichte ist somit der Quotient aus dem Gewichte des Körpers und seinem Volumen, also das Gewicht der Volumeinheit oder das specifische Gewicht.

Das einfachste Verfahren zur Bestimmung des specifischen Gewichtes, welches sich hiernach ergibt, ist die Anwendung der hydrostatischen Wage, welche sich von der gewöhnlichen Wage nur dadurch unterscheidet, dass die eine Wagschale nur etwa halb so tief unter dem Wagbalken hängt als die andere, und dass dieselbe in der Mitte ihrer untern Fläche mit einem Häkchen versehen ist. Man hängt an dieselbe mit einem möglichst feinen Drahte von bekanntem Gewichte den zu untersuchenden Körper und

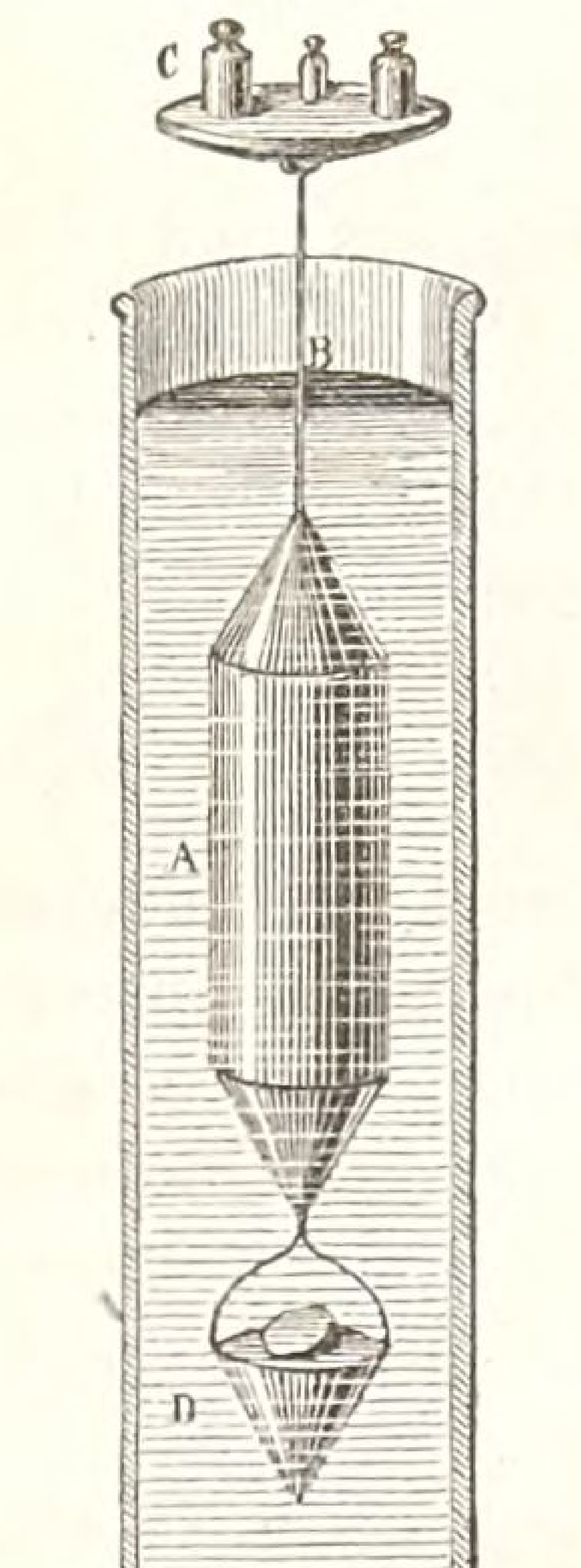
bestimmt sein Gewicht in der Luft. Darauf senkt man ihn in ein mit destillirtem Wasser gefülltes Gefäss, so dass von dem Drahte möglichst wenig eintaucht, und bestimmt den Gewichtsverlust, den er im Wasser erfährt. Der Quotient aus dem Gewichte und dem Gewichtsverluste liefert uns das specifische Gewicht des Körpers.

An diesem Quotienten müssen aber, wenn er genau das specifische Gewicht des untersuchten Körpers sein soll, mehrere Correctionen angebracht werden, die wir ausführlich in der Wärmelehre besprechen werden, auf welche wir deshalb hier nur hinweisen. Als specifisches Gewicht eines Körpers bezeichnen wir nämlich das Gewicht der Volumeinheit bei 0^0, und als Gewichtseinheit das Gewicht der Volumeinheit Wasser bei 4^0. Mit Hülfe der bekannten Ausdehnung der Körper und des Wassers durch die Wärme müssen wir deshalb die direkt beobachteten Werthe auf die Normaltemperaturen reduciren.

Dass es ausserdem nothwendig ist, wenn der Draht nicht hinreichend fein ist, den Gewichtsverlust des Stückes, welches in das Wasser taucht, direkt zu bestimmen und von dem in der angegebenen Weise bestimmten Gewichtsverluste des Körpers zu subtrahiren, bedarf wohl kaum der Erwähnung.

Die Wage kann bei diesem Verfahren ersetzt werden durch das Nicholsonsche Aräometer, welches das Gewicht des Körpers und den Gewichtsverlust desselben im Wasser mit Hülfe des Satzes bestimmt, dass ein schwimmender Körper stets so viel Wasser aus der Stelle drängt, als er selbst wiegt. Dasselbe besteht Fig. 44 aus einem oben und unten conisch zugespitzten und wasserdichten hohlen Cylinder von Messingblech. An der Spitze des untern Kegels hängt ein in der Regel conisch geformtes Gewicht D, welches oben eine schwach concave Fläche hat, so dass dort der zu untersuchende Körper aufgelegt werden kann. Das Gewicht bewirkt, dass das Aräometer in stabilem Gleichgewicht schwimmt, aber nur so tief eintaucht, dass noch ein Theil des Cylindermantels aus dem Wasser hervorsteht. Von der Spitze des obern Kegels steigt ein dünnes Stäbchen vertical auf, das an seinem obern Ende ein kleines Schüsselchen C trägt, auf welches man Gewichte und den zu untersuchenden Körper legen kann. An dem Stäbchen ist etwa in der Mitte bei B durch einen Feilstrich eine Marke angebracht.

Fig. 44.

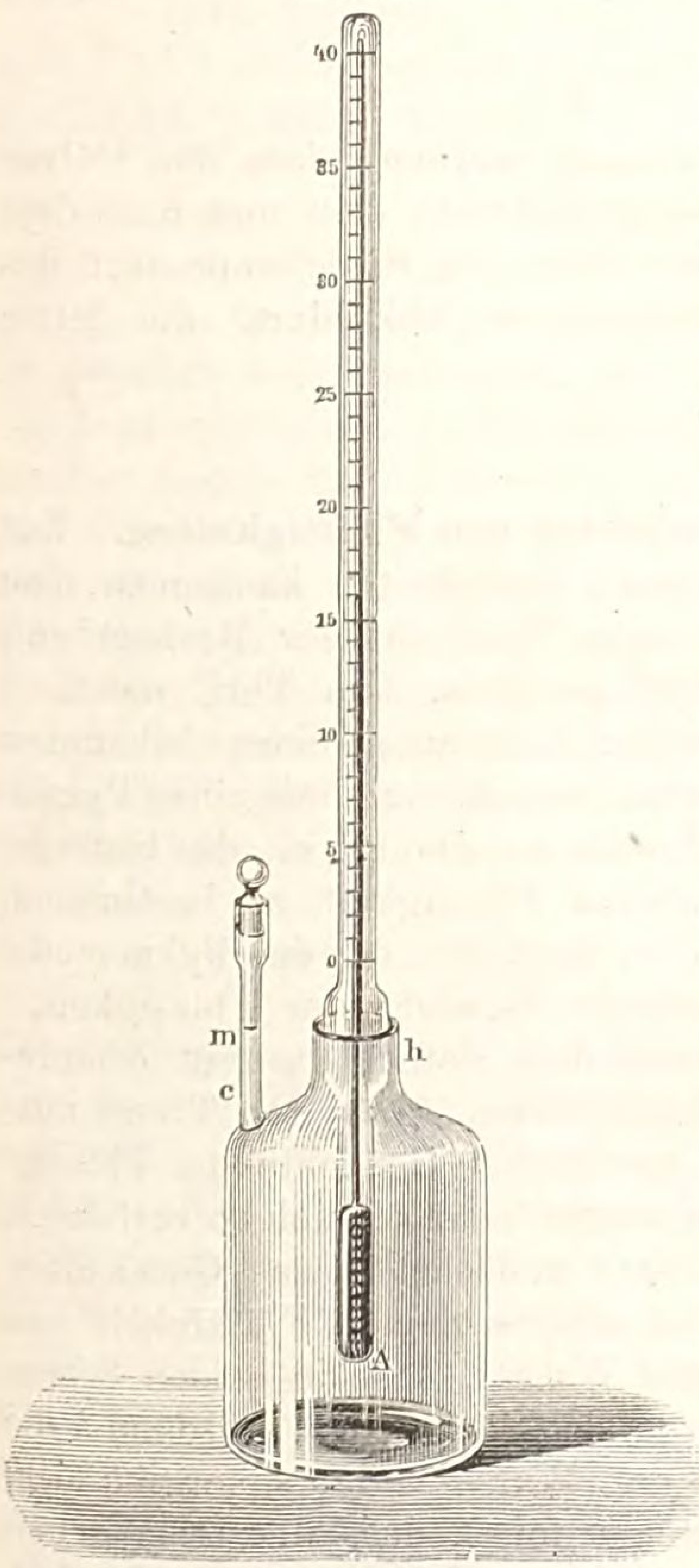


Man bestimmt nun, indem man den Apparat in ein hinreichend tiefes Gefäss mit destillirtem Wasser setzt, zunächst das Gewicht, mit dem man das Schüsselchen beschweren muss, damit das Aräometer bis zur Marke B eintaucht. Nach Entfernung des Gewichtes legt man den zu untersuchenden Körper, der nicht schwerer sein darf als das eben bestimmte Gewicht, auf die Schüssel, und bestimmt das Zulagegewicht, welches etwa nöthig ist, damit das Aräometer wieder bis zur Marke einsinkt. Da dann das Aräometer jetzt wieder ebensoviel Wasser verdrängt wie bei der vorigen Bestimmung, ist sein Gewicht dasselbe; die Differenz des vorher bestimmten Gewichtes

und des jetzt erforderlichen Zulagegewichtes ist also das Gewicht des Körpers. Man legt dann den zu untersuchenden Körper auf die Fläche des Gewichtes D. Das Gewicht des Apparates wird dadurch nicht geändert, er taucht aber jetzt nicht wieder bis zur Marke ein, da der unten hingelegte Körper jetzt Wasser verdrängt, er taucht deshalb nur so weit ein, dass das verdrängte Wasser gleich seinem Gewichte ist. Soll er wieder bis zur Marke eintauchen, so muss auf die Schüssel so viel Gewicht zugelegt werden, als das Wasser wiegt, welches der jetzt unten liegende Körper aus der Stelle drängt. Das jetzt wieder erforderliche Zulagegewicht gibt uns also den Gewichtsverlust des Körpers im Wasser und mit dem vorher bestimmten Gewichte des Körpers dessen specifisches Gewicht.

Man kann diese Methode nur anwenden bei Körpern, welche nicht porös, nicht im Wasser löslich und welche specifisch schwerer sind als das Wasser. Sind die Körper porös, so muss man sie mit einer feinen Lackschicht überziehen, so dass durch dieselbe das Eindringen des Wassers gehindert wird, ohne dass das Gewicht oder Volumen des Körpers merklich geändert wird. Man kann dann, wenn der Körper specifisch schwerer ist als Wasser, verfahren wie vorhin. Ist der Körper im Wasser löslich oder specifisch leichter als Wasser, so muss man eine andere Flüssigkeit, deren specifisches Gewicht s' bekannt ist, wählen und in der angegebenen Weise verfahren. Ist dann p der Gewichtsverlust des Körpers in dieser Flüssigkeit, so ist

Fig. 45.



$$\frac{P}{p} = \frac{v\,s}{v\,s'}; \qquad s = s' \frac{P}{p}.$$

Man hat also zur Bestimmung des specifischen Gewichtes s nur den Quotienten der beiden Gewichte mit dem specifischen Gewichte der gewählten Flüssigkeit zu multipliciren.

Zur Bestimmung des specifischen Gewichtes pulverförmiger Körper wendet man am besten die sogenannten Pyknometer an. Dieselben sind, Fig. 45, kleine Flaschen, welche einen ziemlich weiten Hals h haben, in den ein Glasstöpsel sorgfältig eingeschliffen ist, so dass, wenn derselbe eingesetzt ist, ein bestimmter, bei allen Versuchen gleicher Raum der Flasche abgeschlossen ist. Da man bei diesen Versuchen stets die Temperatur des Wassers kennen muss, wendet man sehr bequem als Stopfen, wie es die Figur zeigt, ein Thermometer an. An der Flasche ist als zweiter Hals eine capillare Röhre c

angesetzt, welche oben erweitert ist und welche durch einen eingeriebenen Glasstöpsel ebenfalls geschlossen werden kann. An der Röhre c ist nahe unter der Erweiterung eine Marke m angebracht. Man füllt nun das Gefäss zunächst mit Wasser, setzt bei offenem Rohr c den Stöpsel auf und tupft das Wasser bei constant erhaltener Temperatur bis zur Marke m ab. Man schliesst die capillare Röhre und wiegt das Gefäss ab. Es sei das Gewicht P. Man öffnet dann das Gefäss, schüttet eine gewogene Quantität p des Pulvers ein, schliesst wieder bei h, tupft bis zur Marke ab, und bestimmt neuerdings das Gewicht; es sei P'. Dasselbe ist gleich dem Gewichte P, dasselbe vermehrt um das Gewicht p des eingeschütteten Pulvers, aber vermindert um das Gewicht π des von dem Pulver aus der Flasche verdrängten Wassers oder es ist

$$P' = P + p - \pi$$

oder

$$\pi = P + p - P'$$

und damit das gesuchte specifische Gewicht

$$s = \frac{p}{\pi} = \frac{p}{P + p - P'}.$$

Bei diesen Versuchen muss dafür gesorgt werden, dass das Pulver keine Luft eingeschlossen enthält, am besten dadurch, dass man nach dem Einfüllen des Pulvers erst das Gefäss bis nahe zur Siedetemperatur des Wassers erwärmt, und dann nach eingetretener Abkühlung die letzte Wägung macht.

§. 43.

Bestimmung des specifischen Gewichtes von Flüssigkeiten. Zur Bestimmung des specifischen Gewichtes von Flüssigkeiten kann man eine Reihe von Methoden anwenden, welche zum Theil auf der Beobachtung des Gewichtsverlustes eingetauchter Körper beruhen, zum Theil nicht.

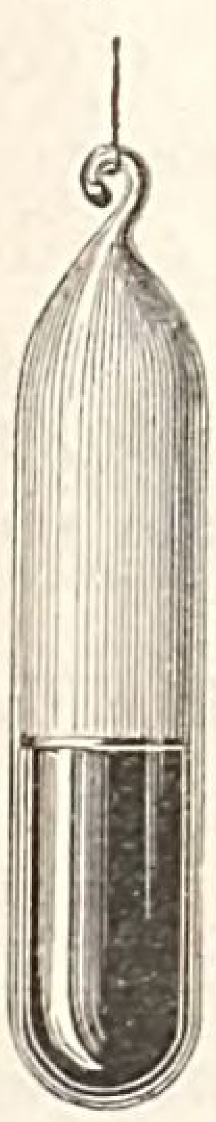
Die einfachste Methode ist die direkte Abwägung eines bekannten Volumens einer Flüssigkeit. Hat man einmal den Rauminhalt eines Pyknometers durch Auswägen mit Wasser bestimmt, so genügt es, das Gewicht der dasselbe ausfüllenden zu untersuchenden Flüssigkeit zu bestimmen. Der Quotient aus diesem Gewichte und dem Gewichte des das Pyknometer füllenden Wassers ist das gesuchte specifische Gewicht der Flüssigkeit.

Ein zweites Verfahren ergibt sich aus dem Satze, dass in communicirenden Röhren die Höhen zweier Flüssigkeiten über der Trennungsfläche sich umgekehrt verhalten wie die specifischen Gewichte der Flüssigkeiten. Man kann zur Anwendung dieses Satzes sehr einfach so verfahren, dass man in eine U-förmig gebogene Röhre zunächst etwas Quecksilber füllt, dann in den einen Schenkel die zu untersuchende Flüssigkeit und schliesslich in den andern Schenkel so viel Wasser, dass in beiden Schenkeln das Niveau des Quecksilbers genau gleich hoch ist. Ist dann h die Höhe der Flüssigkeitssäule, h_1 die Höhe der Wassersäule, so ergibt sich, da aus der Gleichheit des Quecksilberniveaus folgt, dass die Drucke beider Flüssigkeitssäulen dieselben sind, für das gesuchte specifische Gewicht der Flüssigkeit

$$s = \frac{h_1}{h}.$$

Um den Gewichtsverlust eingetauchter Körper zur Bestimmung des specifischen Gewichtes von Flüssigkeiten zu benutzen, wendet man am besten einen passend geformten Körper, etwa ein kleines Glasröhrchen Fig. 46 an, welches unten und oben zugeschmolzen ist, nachdem man etwas Quecksilber hineingefüllt hat, so dass es in allen Flüssigkeiten untersinkt, und welches dann an einem feinen Drahte befestigt ist. Auch ein kleines Thermometer ist zu dem Zwecke sehr geeignet. Man bestimmt ein für allemal den Gewichtsverlust des Körpers in Wasser und hat dann zur Bestimmung eines specifischen Gewichtes nur mehr den Gewichtsverlust beim Eintauchen in die zu untersuchende Flüssigkeit zu beobachten; der Quotient aus diesem und dem bekannten Gewichtsverluste in Wasser gibt das gesuchte specifische Gewicht der Flüssigkeit.

Fig 46.



Man erkennt leicht, dass man auch das Nicholson'sche Aräometer zu demselben Zwecke benutzen kann, wenn man dessen Gewicht kennt. Ist dasselbe gleich P und ist p_1 das erforderliche Zulagegewicht, damit es in Wasser, dagegen p, damit es in der zu untersuchenden Flüssigkeit bis zur Marke einsinkt, so ist das specifische Gewicht derselben

$$s = \frac{P + p}{P + p_1}.$$

Ein anderes mit grosser Schnelligkeit auszuführendes und deshalb für praktische Zwecke vielfach angewandtes Verfahren ist die Benutzung von Aräometern mit veränderlichem Volumen. Man vergleicht dabei nicht, wie bei dem Nicholsonschen Aräometer die Gewichte gleicher Volume, sondern die Volume gleicher Gewichte, indem man Apparate von constantem Gewichte in die verschiedenen Flüssigkeiten eintaucht, so dass sie ohne ganz unterzutauchen, schwimmen, und die Volumina bestimmt, welche sie in den verschiedenen Flüssigkeiten aus der Stelle drängen. Ist dann das Gewicht des Apparates P und v das Volumen, welches er in einer Flüssigkeit vom Gewichte s, v' das Volumen, das er in einer Flüssigkeit vom Gewichte s' aus der Stelle drängt, so ist

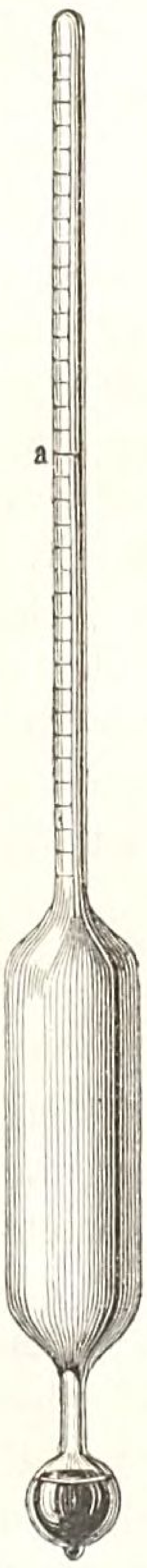
$$P = vs; \quad P = v's'; \quad \frac{s}{s'} = \frac{v'}{v};$$

die specifischen Gewichte der beiden Flüssigkeiten verhalten sich umgekehrt wie die Volume, welche ein und dasselbe Aräometer beim Einsenken in denselben aus der Stelle drängt. Weil man so das specifische Gewicht der Flüssigkeiten aus der Vergleichung zweier Volume ableitet, nennt man diese Apparate meistens Volumeter.

Man gibt den Volumetern meist die Form Fig. 47; an ein weiteres Glasrohr ist unten eine kleine Kugel angeblasen, in welche etwas Quecksilber gefüllt wird, damit der Apparat im stabilen Gleichgewicht schwimmt, an dieselbe ist oben eine engere Röhre angesetzt, welche mit der betreffenden Theilung versehen ist. Der Zweck dieser Form leuchtet ein, sie soll bewirken, dass die Tiefe, bis zu welcher das Volumeter in Flüssigkeiten einsinkt, deren specifisches Gewicht nur geringe Unterschiede hat, eine sehr verschiedene ist. Setzen wir z. B. voraus, dass das Volumeter bis zum

untern Ende der Theilung ein Volumen von 10 Cubikcentimeter hat, dass die enge Röhre bei 10 Centimeter Länge nur das Volumen von 1 Cubikcentimeter hat, so würde dasselbe, wenn sein Gewicht so gewählt ist, dass es im Wasser gerade bis zu dem untersten Punkte der Theilung einsänke, bis zum Ende der engen Röhre in eine Flüssigkeit einsinken, deren specifisches Gewicht gleich 0,909 wäre, bis in die Mitte der engen Röhre in eine Flüssigkeit vom specifischen Gewichte 0,952. Würde man dem Apparate ein Gewicht von 11 Gramm gegeben haben, so dass er in Wasser bis zu dem obern Ende einsänke, so würde er in eine Flüssigkeit vom specifischen Gewichte 1,1 nur bis zu dem untern Ende einsinken.

Fig. 47.



In der Regel sind die Volumeter mit einer specifischen Gewichtsskala versehen, das heisst, es ist an der Theilung sofort das specifische Gewicht angegeben, welches die Flüssigkeit besitzt, in welche das Volumeter bis zu einem bestimmten Punkte der Theilung einsinkt. Bei dem ersten der beiden eben erwähnten Volumeter würde an das untere Ende der Skala 1 hingeschrieben, in die Mitte 0,952, an das obere Ende 0,909, bei dem zweiten würde an das obere Ende 1, an das untere Ende 1,1 angeschrieben. Feinere Volumeter werden dann in der Regel so construirt, dass der Abstand zweier Theilstriche der Skala einer Aenderung des specifischen Gewichtes um 0,001 entspricht.

Besonders bequem sind diese Volumeter zur Bestimmung der Zusammensetzung eines Gemisches zweier Flüssigkeiten, deren specifisches Gewicht von den Mengenverhältnissen der beiden Bestandtheile abhängig ist, wie das immer der Fall ist, wenn man zwei Flüssigkeiten von verschiedenem specifischen Gewichte mit einander mischt. Bei solchen für die Untersuchung bestimmter Flüssigkeiten bestimmten Aräometern sind dann an der Skala anstatt der specifischen Gewichte, welche dem Eintauchen bis zu einem gewissen Punkte entsprechen, die Mengenverhältnisse der Flüssigkeiten in dem Gemische angegeben. So z. B. ist bei dem Alkoholometern an der nach Tralles entworfenen Skala angegeben, wie viel Volumprocente Alkohol ein Gemisch aus Alkohol und Wasser hat, das heisst also, wie viel Cubikcentimeter Alkohol in 100 Cubikcentimeter der Mischung enthalten sind. Es ist selbstverständlich, dass eine solche Skala auf Grund vorhergegangener genauer Bestimmungen der specifischen Gewichte der Mischungen entworfen wird.

In Bezug auf solche Volumeter ist indess zu beachten, dass sie die Zusammensetzung der Gemische nur bei einer bestimmten Temperatur angeben können, da die specifischen Gewichte, nicht aber die Zusammensetzung, mit der Temperatur sich ändern. An den Alkoholometern und allen zu ähnlichen Zwecken dienenden Aräometern ist deshalb stets auch die Temperatur angegeben, für welche sie graduirt sind.

§. 44.

Molekularwirkungen zwischen flüssigen und festen Körpern.

In unsern bisherigen Entwicklungen über den Gleichgewichtszustand der

Flüssigkeiten haben wir keine Rücksicht genommen auf die Wirkungen der Kräfte, welche an den Wänden der Gefässe zwischen den Molekülen der festen und flüssigen Körper, sowie zwischen den Molekülen der Flüssigkeit selbst vorhanden sind, also auf die Adhäsion des flüssigen am festen und die Cohäsion der Flüssigkeiten. Bei der freien Beweglichkeit der Flüssigkeitsmoleküle müssen diese Kräfte auf den Gleichgewichtszustand von Einfluss sein.

Dass die Flüssigkeiten an den festen Körpern adhäriren, und dass zwischen den Theilchen der Flüssigkeiten Cohäsionskräfte thätig sind, kann man durch den einfachsten Versuch beweisen. Man tauche ein reines Glasstäbchen in Wasser und ziehe es wieder heraus; man sieht dann, dass eine Wasserschicht an demselben haftet. Hält man das Stäbchen dann vertical, so rinnt das anhaftende Wasser zum Theil herab, es bildet sich an dem untern Ende ein Tropfen, der, so lange er eine gewisse Grösse nicht überschreitet, getragen wird. Das Haften der flüssigen Schicht an dem Stäbchen beweist die Adhäsion des Wassers am Glase, und das Schweben des Tropfens an dem untern Ende des Stäbchens die Cohäsion der Wassertheile. Denn wenn auch die oberste Schicht des Tropfens an dem Glase haftet, so werden doch die untern Theile desselben dadurch getragen, dass sie von den obern festgehalten werden, also durch die zwischen den Wassertheilchen thätigen Anziehungen.

Der Versuch zeigt weiter, dass diese molekularen Kräfte beträchtlich grösser sind als die Wirkungen der Schwere, da sonst die Flüssigkeit nicht der Schwere entgegen getragen werden könnte, und dass die Adhäsion des Wassers am Glase grösser ist als die Cohäsion des Wassers, da sonst die am Stabe haftende Wasserschicht nicht von dem umgebenden Wasser, mit dem sie durch Cohäsion zusammenhängt, losgerissen worden wäre.

Taucht man das Glasstäbchen in Quecksilber, so bleibt bei dem Herausziehen kein Quecksilber an demselben haften, es folgt daraus indessen nicht, dass zwischen Quecksilber und Glas keine Adhäsion vorhanden ist, sondern nur, dass die Adhäsion nicht ausreicht, um eine Quecksilberschicht von dem umgebenden Quecksilber loszureissen. Dass auch das Quecksilber am Glase adhärirt, ergibt folgender Versuch. Man hänge eine Glasplatte mittelst dreier an ihr befestigter Schnüre an eine Wage, so dass die untere Fläche genau horizontal hängt, und bringe sie durch in die andere Wagschale gelegte Gewichte ins Gleichgewicht. Das geringste in diese Wagschale gelegte Uebergewicht bewirkt dann eine Hebung der Glasplatte. Nun nähere man der Glasplatte von unten her eine mit Quecksilber gefüllte Schale, so dass die untere Seite der Platte das Quecksilber gerade berührt. Es bedarf dann eines ganz beträchtlichen Uebergewichtes auf der andern Wagschale, um die Glasplatte von dem Quecksilber loszureissen, ein Beweis, dass das Quecksilber am Glase adhärirt.

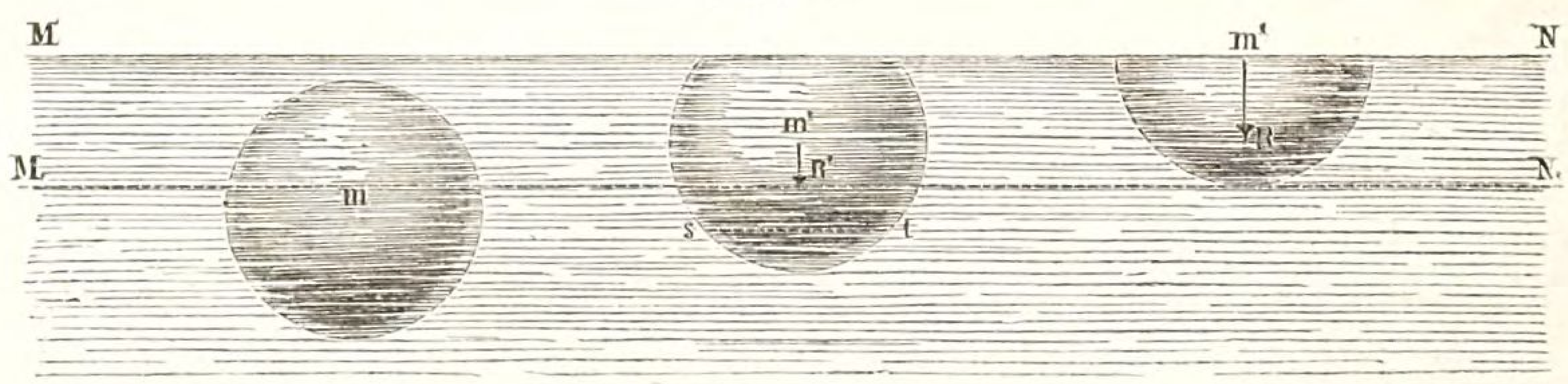
Die Cohäsion der Flüssigkeiten sowie die Adhäsion derselben an festen Körpern hängt, wie schon obiges Beispiel zeigt, ab von der Natur der Flüssigkeiten und der festen Körper, mit denen sie in Berührung gebracht werden. Dass letzteres der Fall ist, zeigt sich auch darin, dass ein fettiges Glasstäbchen nicht vom Wasser benetzt wird, die Adhäsion an der fettigen Glasfläche ist also nicht gross genug, um die Cohäsion des Wassers zu überwinden.

Wir haben zu untersuchen, welchen Einfluss diese molekularen Kräfte auf den Gleichgewichtszustand der Flüssigkeiten haben. Wir beginnen mit dem Einfluss der Cohäsion der Flüssigkeitstheile.

§. 45.

Normaldruck und Oberflächenspannung in Flüssigkeiten. Es ergibt sich für die Wirkung der Cohäsionskräfte zunächst, dass dieselben nur auf die Grenzflächen einer Flüssigkeit von Einfluss sein können, nicht auf die im Innern befindlichen Theile. Betrachten wir eine flüssige Masse, welche durch irgend eine Oberfläche MN Fig. 48 begrenzt werde. Sei m ein Molekül im Innern der Flüssigkeit. Die molekularen Kräfte er-

Fig. 48



strecken sich, wie wir wissen, nur auf äusserst kleine bisher für uns unmessbare Entfernungen. Sei nun r die grösste Entfernung, bis auf welche sich die molekularen Anziehungen erstrecken, so dass eine mit dem Radius r um m herumgelegte Kugel alle die Theilchen enthält, auf welche sich die Anziehungen von m erstrecken, welche also auch rückwärts eine Anziehung auf das Theilchen m ausüben.

So lange nun m so weit von der Grenze der Flüssigkeit entfernt ist, dass die mit r um m beschriebene Kugel sich ganz im Innern der Flüssigkeit befindet, ist die Kugel überall gleichmässig mit Molekülen ausgefüllt. Diese Moleküle ziehen das Molekül m ganz gleichmässig nach allen Richtungen des Raumes, die auf m wirkenden Kräfte heben sich also gegenseitig auf, das Molekül verhält sich gerade so, als wenn keine Kräfte auf dasselbe einwirkten.

Das Molekül m'' dagegen, welches in der Grenze der Flüssigkeit liegt, erfährt einen einseitigen Zug. Die mit dem Radius r der Wirkungssphäre des Moleküls um m'' gelegte Kugel ist nur in der untern Hälfte mit Flüssigkeit gefüllt, in der obern nicht, es erfährt daher nur von diesen unter ihm befindlichen Molekülen eine Anziehung, welche, da die Flüssigkeit in der Halbkugel ganz gleichmässig um die in m zur Oberfläche gezogene Normale vertheilt ist, eine der Normale parallele und gegen das Innere der Flüssigkeit gerichtete Resultirende hat. Die zur Oberfläche der Flüssigkeit parallelen Componenten der Anziehungen heben sich auf.

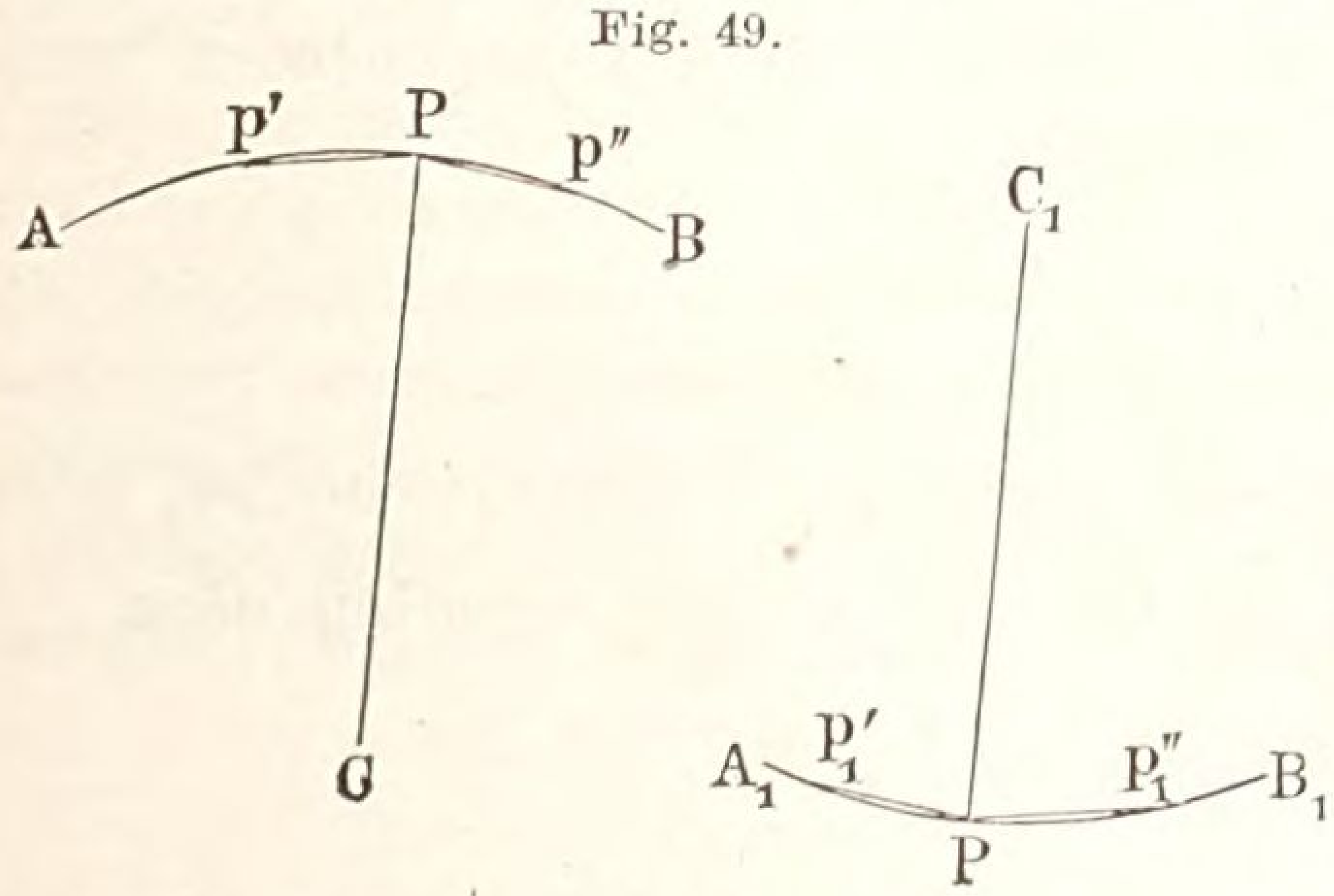
Aehnliches gilt für das Molekül m' und so für alle Moleküle, welche um weniger als den Radius r der Wirkungssphäre von der Oberfläche der Flüssigkeit entfernt sind. Auch deren Wirkungssphäre ist nicht ganz mit Flüssigkeit ausgefüllt, es bleibt also eine gewisse Anzahl von Molekülen übrig, welche einen gegen das Innere der Flüssigkeit gerichteten Zug ausüben, denen kein nach aussen gerichteter Zug das Gleichgewicht hält. Legen wir z. B. durch die um m' beschriebene Kugel die Fläche st parallel

der Oberfläche und ebenso tief unter m', als die Oberfläche sich oberhalb m' befindet, so üben die in dem Kugelsegment unterhalb st befindlichen Moleküle einseitig einen zur Oberfläche normalen und gegen das Innere der Flüssigkeit gerichteten Zug aus.

Legen wir deshalb im Innern der Flüssigkeit eine der Oberfläche parallele Fläche, deren Abstand von der Oberfläche überall gleich r ist, so werden alle in der dadurch abgegrenzten Schicht befindlichen Moleküle nach innen gezogen. Diese Schicht wird also z. B. auf eine Flüssigkeitskugel wirken wie ein elastisches Häutchen, welches sich zusammen zu ziehen sucht, oder auf jede Flüssigkeit, die sich in einem Gefässe befindet, einen rings gegen das Innere der Flüssigkeit gerichteten Druck ausüben, da sie auch an den von den Wänden begrenzten Flächen vorhanden sein muss. Man nennt daher diese Flüssigkeitsschicht das Flüssigkeitshäutchen und den von demselben ausgeübten Druck den Normaldruck.

Dieser gegen das Innere einer Flüssigkeit gerichtete in der Oberfläche wirkende Normaldruck muss ein verschiedener sein je nach der Gestalt der Oberfläche, denn in gekrümmten Oberflächen tritt zu dem eben abgeleiteten Druck noch eine durch die Krümmung der Oberfläche bewirkte Spannung, herrührend von der Wechselwirkung der in der Oberfläche liegenden Moleküle. Diese Oberflächenspannung vermehrt den Normaldruck in nach aussen convexen, vermindert denselben in nach aussen concaven Flächen; ihre Grösse ist abhängig von der Krümmung der Oberfläche. Es sei AB Fig. 49 der Durchschnitt durch eine convexe, A_1B_1 durch eine concave Oberfläche, und sei P ein Punkt in jeder derselben. Die dem in P liegenden Flüssigkeitsmoleküle, dessen Masse m sei, in der Oberfläche benachbarten Moleküle ziehen dann das Molekül m an, und da die Anziehungen in diesem Falle wegen der Krümmung der Oberfläche nicht gerade entgegengesetzt sind, heben sie sich nicht auf, sondern geben eine zur Oberfläche normale Resultirende.

Fig. 49.



Ist in P' in der Entfernung r von P nämlich ein Massentheilchen m', so zieht dieses das Molekül m in der Richtung PP' mit einer Kraft an, die wir proportional dem Producte der Massen mm' und irgend einer Function $f(r)$ der Entfernung r setzen können. Von dieser Function $f(r)$ wissen wir nur, dass sie mit wachsender Entfernung rasch abnimmt, und dass sie Null wird, sobald r grösser als der Radius der Wirkungssphäre geworden ist.

Genau dieselbe aber nach PP'' gerichtete Anziehung $mm'f(r)$ übt ein in P'' in der gleichen Entfernung r von P in demselben Oberflächenschnitt AB gelegenes Massentheilchen m' auf m aus.

Zerlegen wir diese Anziehungen jede in zwei Componenten, von denen die eine parallel der im Punkte P an die Oberfläche gelegten Normalen PC, die andere senkrecht zur Normalen, also parallel der in P an die Oberfläche gelegten Tangente ist, so heben die letztern als gleich und

einander gerade entgegengesetzt sich auf. Die erstern sind aber beide gegen C gerichtet, sie summiren sich also und geben eine das Massentheilchen m gegen C treibende Kraft, welche gleich ist

$$2\, m m' f(r) \cos P'PC.$$

In der Nähe des Punktes P und soweit der Radius der Wirkungssphäre reicht, fällt nun der Schnitt AB, welches auch die Gestalt der Oberfläche sein mag, mit einem Kreisbogen zusammen, dessen Mittelpunkt in C liegen möge, und dessen Radius ϱ gleich dem Radius des Krümmungskreises des Schnittes AB im Punkte P ist. Daraus folgt, da das über dem Durchmesser eines Kreises beschriebene Dreieck, dessen dritte Ecke in der Peripherie liegt, an dieser dritten Ecke rechtwinklig ist, dass

$$\cos P'PC = \frac{P'P}{2\,PC} = \frac{r}{2\varrho},$$

somit, dass die aus der anziehenden Wirkung der in P' und P'' vorhandenen Elemente sich ergebende der Normale PC parallele Componente gleich ist

$$2\, m m' f(r) \frac{r}{2\varrho} = m m' f(r) \frac{r}{\varrho}\cdot$$

Die normale Componente sämmtlicher in dem Schnitt AB innerhalb des Radius der Wirkungssphäre von P liegender Massenelemente auf das in P liegende Element erhalten wir, indem wir für alle je zwei Elemente m', deren Abstand von P zwischen Null und dem Radius der Wirkungssphäre liegt, diese Componenten bilden und alle diese Componenten summiren. Wir können diese Summe schreiben

$$\Sigma\, m m' f(r) \frac{r}{\varrho}$$

oder da der Factor $\frac{1}{\varrho}$ in jedem Gliede der Summe der gleiche ist, können wir denselben vor das Summenzeichen setzen, und erhalten dann

$$\frac{1}{\varrho} \Sigma\, m m' f(r)\, r = \frac{h}{\varrho},$$

wenn wir die Summe mit h bezeichnen.

Nehmen wir jetzt einen zweiten durch P gelegten Schnitt der Oberfläche, der zu AB senkrecht ist, und dessen Krümmungsradius ϱ' sei, so können wir für diesen ganz genau dieselbe Betrachtung durchführen und erhalten dann für die aus der Wirkung der in diesem Schnitte vorhandenen Massentheilchen auf m sich ergebende normale Componente den Werth $\frac{h}{\varrho'}$, der sich von dem oben gefundenen nur dadurch unterscheidet, dass an die Stelle des Krümmungsradius ϱ derjenige dieses Schnittes ϱ' tritt. Für die normale Componente der Wirkung beider Schnitte erhalten wir somit

$$h\left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'}\right)\cdot$$

Denken wir uns nun die ganze Oberfläche um P durch unzählig viele Paare von solchen je zwei zu einander senkrechten durch den Punkt P gelegten Normalschnitten gegeben, so wird die gesammte durch die Gestalt

der Oberfläche bewirkte Spannung gleich sein der Summe aller der Spannungen, die wir für jedes Schnittpaar erhalten. Für irgend ein beliebiges Paar, deren Krümmungsradien ϱ_n und ϱ'_n ist, erhalten wir dann

$$h\left(\frac{1}{\varrho_n} + \frac{1}{\varrho'_n}\right).$$

Bezeichnen wir nun mit R den Radius der stärksten Krümmung unserer Fläche, also den kleinsten Krümmungsradius und mit R_1 den Radius der schwächsten Krümmung, also den grössten bei den Schnitten vorkommenden Krümmungsradius, so ist nach einem von Euler bewiesenen Satze immer

$$\frac{1}{\varrho_n} + \frac{1}{\varrho'_n} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}$$

oder die Summe der reciproken Werthe der Krümmungsradien zweier zu einander senkrechter Schnitte hat bei einer gegebenen Oberfläche immer denselben Werth und ist gleich der Summe der reciproken Werthe des grössten und kleinsten Krümmungsradius. Darnach können wir unsere die ganze Oberflächenspannung darstellende Summe schreiben

$$\Sigma h\left(\frac{1}{\varrho_n} + \frac{1}{\varrho'_n}\right) = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}\right)\Sigma h,$$

indem wir den für alle Glieder der Summe gleichen Factor vor das Summenzeichen schreiben. Die in diesem Ausdrucke vorkommende Summe können wir in folgender Weise bestimmen. Wir bezeichnen den auf die Flächeneinheit einer Kugel vom Radius 1 in Folge der Oberflächenspannung wirkenden Druck mit H. Indem wir dann den eben abgeleiteten Ausdruck für die Grösse der Oberflächenspannung auf die Einheit der Oberfläche beziehen, vorausgesetzt, dass die Fläche in dieser Ausdehnung überall die gleiche Krümmung hat als im Punkte P, muss uns derselbe auch die Oberflächenspannung in einer Kugel vom Radius 1 geben. Für diese ist dann $R = 1$, $R_1 = 1$, somit

$$\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}\right)\Sigma h = 2\,\Sigma h = H; \quad \Sigma h = \frac{H}{2}.$$

Damit wird dann die Oberflächenspannung für die Einheit der Oberfläche einer irgendwie gekrümmten Fläche

$$\frac{H}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}\right).$$

In einer Ebene tritt zu dem vorhin abgeleiteten Normaldruck, den wir für die Einheit der Fläche mit K bezeichnen wollen, eine solche Oberflächenspannung nicht hinzu; unsere Gleichung zeigt das, denn für die Ebene sind R und R_1 unendlich gross, ihre reciproken Werthe sind somit Null.

Für nach aussen convexe Flächen tritt diese Oberflächenspannung zu dem Normaldruck additiv hinzu, indem in jedem Punkte die Oberflächenspannung parallel der Normalen gegen das Innere der Flüssigkeit gerichtet ist.

Bei nach aussen concaven Flächen, $A_1\,B_1$ Fig. 49 ist die Oberflächenspannung ebenfalls nach der Normale PC, aber von der Oberfläche fort nach aussen gerichtet. Bei diesen wird also der Normaldruck um die

Grösse der Oberflächenspannung vermindert. Für den auf die Einheit der Oberfläche bezogenen Normaldruck, für eine irgendwie gekrümmte Fläche können wir daher setzen

$$P = K \pm \frac{H}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}\right),$$

worin das positive Vorzeichen für nach aussen convexe, das negative für nach aussen concave Flächen gilt. Unterscheiden wir convexe und concave Flächen dadurch, dass wir die Krümmungsradien ersterer positiv, letzterer negativ setzen, so brauchen wir in dem Ausdrucke für P das zweite Glied nur mit dem positiven Vorzeichen zu versehen.

Dass ein solcher Unterschied des Normaldruckes in convexen und concaven Flächen in der That vorhanden ist, kann man leicht an Seifenblasen erkennen. Die Wände einer kugelförmigen mit irgend einem Gase gefüllten Seifenblase sind auf der äussern convex, auf der innern concav; Die Radien der äussern und innern Kugelflächen können wir bei der geringen Dicke der Seifenschicht als gleich setzen. Der auf der äussern Fläche der Blase gegen den Mittelpunkt der Kugel gerichtete Druck ist somit

$$P = K + H\frac{1}{R},$$

der auf die innere Seite wirkende vom Mittelpunkt der Kugel fort gerichtete ist

$$P_1 = K - H\frac{1}{R}.$$

Die beiden Drucke liefern als Resultirende einen gegen den Mittelpunkt gerichteten Druck auf die Blase, der gleich der Differenz der Drucke

$$P - P_1 = 2\,H\frac{1}{R}$$

ist. Man erkennt den Druck leicht; denn lässt man das Rohr, durch welches man die Blase hergestellt hat, offen, so wird die Kugel allmählich kleiner und um so rascher, je kleiner R ist, indem durch den Druck der Blase das in ihr befindliche Gas hinausgetrieben wird. Wendet man ein gefärbtes Gas oder Leuchtgas zur Herstellung an, so kann man sehen, wie das Gas mit ziemlicher Geschwindigkeit ausgetrieben wird, indem man eine ziemlich weit aus der Oeffnung hervortretende Leuchtgasflamme erhält.

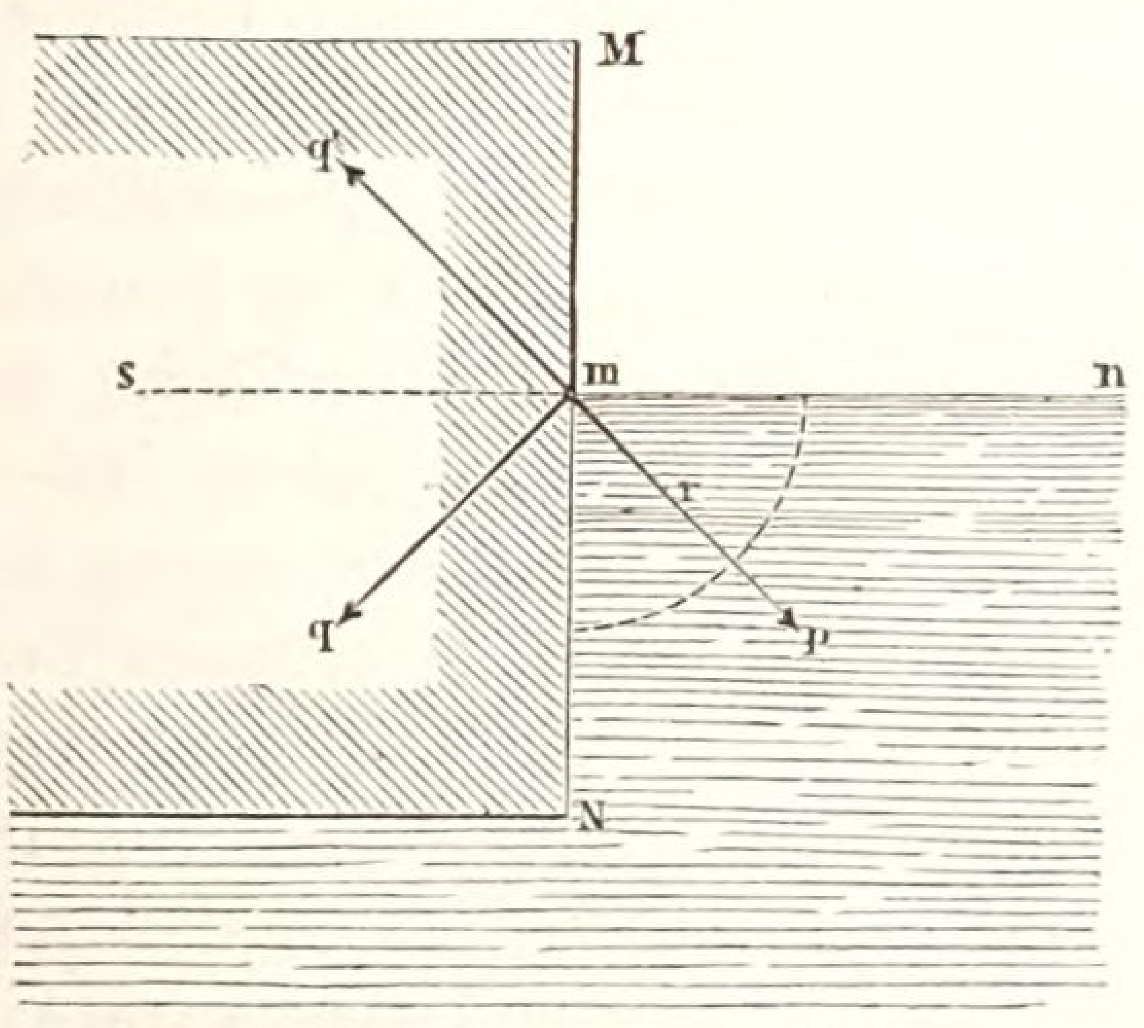
§. 46.

Einfluss der Wände. Durch den Einfluss der Adhäsion der Flüssigkeiten an die Wände der Gefässe muss im Allgemeinen eine Aenderung der nach unsern frühern Untersuchungen ebenen Oberflächen in der Nähe der Wände eintreten.

Ist nämlich MN Fig. 50 die Grenzfläche eines festen Körpers, welcher in eine Flüssigkeit eintaucht, deren Oberfläche mn ist, so werden die in der oberflächlichen Schicht der Flüssigkeit liegenden, den festen Körper berührenden oder von ihm nicht weiter als der Radius der Wirkungssphäre der Moleküle des festen Körpers entfernten Moleküle der Flüssigkeit durch drei Kräfte angegriffen; nämlich erstens durch die Anziehung der Flüssig-

keitsmoleküle, zweitens durch die Anziehung der Moleküle des festen Körpers, drittens durch ihr eigenes Gewicht. Letzteres können wir gegenüber den Wirkungen der Molekularkräfte als verschwindend klein vernachlässigen, wie sich aus der §. 44 erwähnten Erfahrung ergibt, dass an dem untern Ende eines verticalen Glasstäbchens ein ziemlich grosser Flüssigkeitstropfen getragen wird.

Fig. 50.



Die anziehende Wirkung der Flüssigkeitsmoleküle auf die in der Grenze den festen Körper berührenden Elemente rührt her von denjenigen Flüssigkeitstheilchen, welche in dem vierten Theil einer mit dem Radius der Wirkungssphäre beschriebenen Kugel enthalten sind, da nur dieser Theil der Anziehungssphäre der Elemente mit Flüssigkeit gefüllt ist. Die resultirende Anziehung, wir wollen sie mit C bezeichnen, ist nach der Halbirungslinie des Winkels Nmn nach p gerichtet.

Eine Anziehung gegen die feste Wand üben auf das Molekül m alle diejenigen Theile des festen Körpers aus, welche in einer um m mit dem Radius der Wirkungssphäre der Moleküle beschriebenen Halbkugel sich befinden. Die Resultirende dieser Anziehungen ist normal zur Wandfläche gegen das Innere nach ms gerichtet. Wir wollen dieselbe mit A bezeichnen.

Zerlegen wir nun die von der Anziehung der Flüssigkeitsmoleküle herrührende Anziehung in zwei Componenten, eine horizontale parallel mn und eine verticale nach mN, deren jede gleich $C.\cos 45^0$ ist, so ergibt sich, dass das Molekül m in horizontaler Richtung eine Anziehung gegen die Wand hin erfährt, welche gleich ist

$$A - C.\cos 45^0 = A - P$$

und vertical abwärts einen Zug gleich $C.\cos 45^0$.

Die Grösse der horizontalen Anziehung hängt nun wesentlich ab von dem Verhältnisse der Adhäsion des flüssigen zum festen zu der Cohäsion des flüssigen. Je nach der Grösse von A und P kann

$$A - P = 0 \qquad A - P > 0 \qquad A - P < 0$$

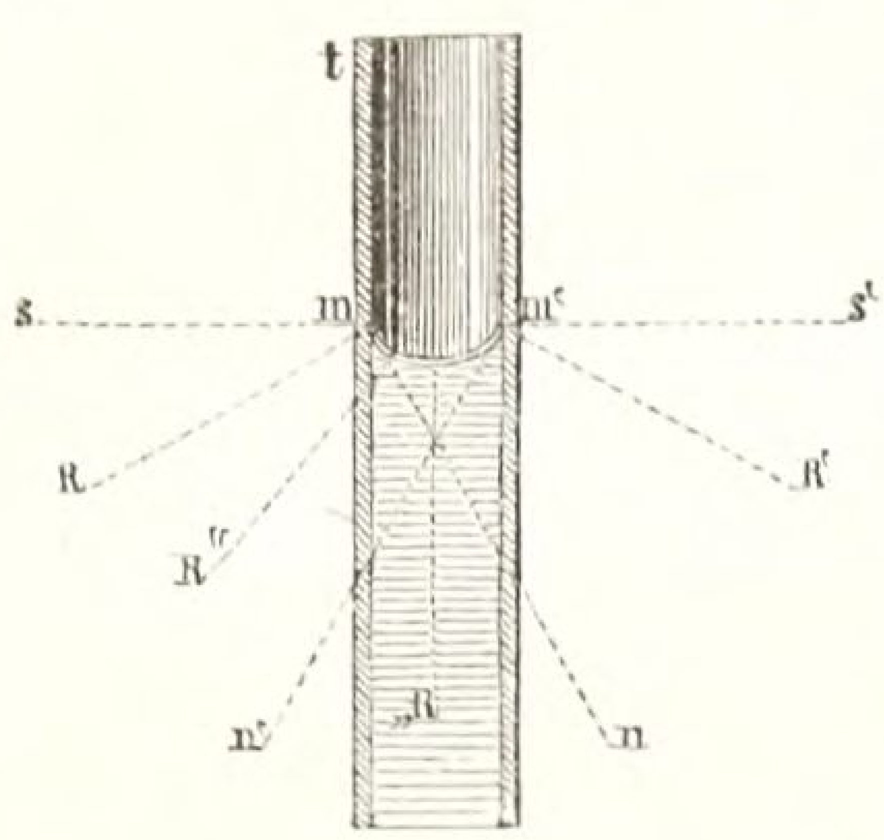
sein. Je nachdem ist die Gestalt der Oberfläche an der Wand eine verschiedene. -

1. Ist $A - P = 0$, heben sich also die horizontalen Componenten der Adhäsion und Cohäsion gerade auf, so ist die aus sämmtlichen auf die in der Grenze liegenden Theilchen wirkenden Kräften Resultirende vertical gerichtet. Da nun im Gleichgewichtszustande die Oberfläche einer Flüssigkeit normal zu den resultirenden Kräften ist, so folgt, dass in diesem Falle die Oberfläche der Flüssigkeit auch an den Wänden der Gefässe horizontal bleibt; es wird somit durch das Eintauchen des festen Körpers die Oberfläche der Flüssigkeit nicht geändert.

2. Ist $A > P$, so wirkt auf das Molekül m eine gegen die feste Wand gerichtete Anziehung neben der vertical nach unten gerichteten. Diese

beiden Kräfte haben als Resultirende nicht mehr eine verticale Kraft, sondern eine nach R Fig. 51 gerichtete Kraft. Die Oberfläche der Flüssigkeit, welche stets normal zu der resultirenden Kraft sein muss, kann also in diesem Falle nicht mehr horizontal sein, sie muss eine Richtung $mn \perp mR$ annehmen, so dass mn Tangente zur Oberfläche im Punkte m wird. Da die Anziehung der festen Wand direkt nur auf die Flüssigkeitsmoleküle wirkt, welche sich in unmessbar kleiner Entfernung von der Wand befinden, so kann diese Aenderung der Form der Oberfläche zunächst nur in einer ebenfalls unmessbaren Ausdehnung stattfinden, indess durch eine andere Einwirkung der Anziehung der festen Wand muss sie sich bis zu messbaren Entfernungen von der Wand erstrecken. Ueberwiegt nämlich die Anziehung der festen Wand die Anziehung der Flüssigkeiten, so werden in der ganzen an der festen Wand anliegenden Grenze-Anziehungen auf die Flüssigkeitsmoleküle, welche innerhalb des Radius der Wirkungssphäre von der festen Wand aus sich befinden, eine stärkere Anziehung gegen die feste Wand hin erfahren als gegen das Innere der Flüssigkeit. Die Moleküle müssen dieser Anziehung folgen und in der Grenzschicht in grösserer Zahl sich ansammeln, es muss also durch die Einwirkung der festen Wand die Grenzschicht der Flüssigkeit eine Verdichtung erfahren. Die Verdichtung in der Grenzschicht hat dann eine Verdichtung einer folgenden Schicht, nur in geringerm Grade zur Folge, weil die Anziehung der verdichteten Flüssigkeitsschicht stärker ist als die der nicht verdichteten Flüssigkeit, aber nicht so stark ist als die der festen Wand, u. s. f., so dass also vom Innern der Flüssigkeit aus gerechnet in einer gewissen Entfernung von der festen Wand die Flüssigkeit eine grössere Dichtigkeit anzunehmen beginnt, die stetig wächst, je näher man an die feste Wand herankommt. Da nun die Flüssigkeit in der Wandschicht eine grössere Dichtigkeit hat als in der nächstfolgenden und in der jedesmal der Wand nähern eine grössere als in der entferntern, so folgt, dass so weit die Verdichtung in die Flüssigkeit hineinreicht, auf die in der Oberfläche der Flüssigkeit liegenden Moleküle eine gegen die feste Wand gerichtete horizontale Anziehung wirken muss, deren Stärke abnimmt mit Entfernung von der festen Wand und welche von dem Punkte ab Null wird, wo die Verdichtung der Flüssigkeit aufhört. Bis zu diesem Punkte kann also die Resultirende aller auf die Oberfläche wirkenden Kräfte nicht vertical sein, sie muss gegen die Verticale geneigt sein und zwar um so mehr, je näher die betrachteten Punkte der Oberfläche der festen Wand liegen. Daraus folgt dann, dass die Oberfläche der Flüssigkeit in der Nähe der festen Wand eine stetig gekrümmte nach aussen concave Fläche bilden muss, deren Neigung gegen die horizontale an der Wand am stärksten sein muss, welche erst in einiger Entfernung von der festen Wand in die horizontale Ebene übergeht.

Fig. 51.



Der Winkel tmn, unter welchem diese stetig gekrümmte Fläche die feste Wand schneidet, hängt nur ab von den molekularen Kräften, welche auf das letzte an der Wand anliegende Flüssigkeitselement von Seiten der

festen Wand und der Flüssigkeit einwirken, es muss daher für ein und dieselbe Flüssigkeit und ein und dieselbe feste Wand dieser Winkel, den wir stets mit Θ bezeichnen wollen, und der der Randwinkel genannt wird, immer denselben Werth haben oder es muss

$$\Theta = \text{const.}$$

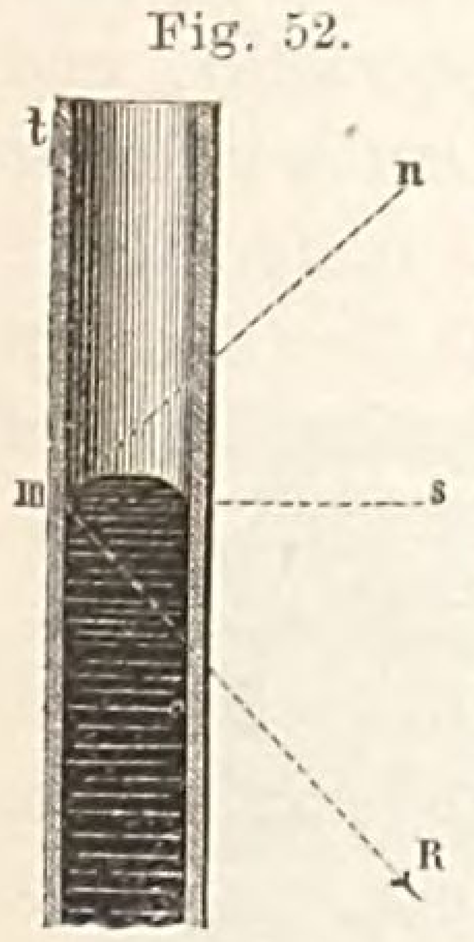
Wir haben als Randwinkel den Winkel bezeichnet, den die concave Fläche aussen mit der festen Wand bildet, also hier den stumpfen Winkel, und man erkennt, dass derselbe um so grösser sein muss, je stärker die von der Wand her ausgeübten Kräfte gegenüber den durch die Cohäsion der Flüssigkeit bedingten sind.

Stellt man der festen Wand eine andere hinreichend nahe gegenüber, oder schliesst man die Flüssigkeit in eine enge sogenannte capillare Röhre ein wie Fig. 51, so muss sich diese Formänderung der Oberfläche an allen Wänden zeigen; stehen sich die Wände nahe genug gegenüber, oder ist die Röhre enge genug, so gehen die von den Wänden ausgehenden Krümmungen in einander über, und die ganze Oberfläche der Flüssigkeit wird im Innern des Raumes eine nach aussen concave gekrümmte Fläche. In cylindrischen Röhren muss diese Fläche eine Rotationsfläche sein, sind die Röhren hinreichend enge, so wird dieselbe ein Segment einer Kugel.

Dass diese Folgerungen der Theorie sich experimentell bestätigen, erkennt man, wenn man einen festen Körper in eine Flüssigkeit eintaucht, welche denselben benetzt, man sieht dann immer, wie sich die Flüssigkeit an der Wand emporzieht und wie die Oberfläche in der Nähe derselben concav wird.

3. Wenn $A - P < 0$ ist, so ist die horizontale Componente der Anziehungen, welche von der festen Wand und der Flüssigkeit herrühren, von der festen Wand fortgerichtet. Die aus der verticalen Componente und dieser horizontalen sich ergebende ist demnach gegen die Verticale geneigt und von der festen Wand fortgerichtet, sie wirkt nach mR Fig. 52.

Fig. 52.



Die auf der Resultirenden mR senkrechte Oberfläche muss somit in dem Falle die feste Wand unter einem Winkel schneiden, welcher kleiner ist als 90^0, sie nimmt die Richtung mn an und schneidet die Wand unter dem spitzen Winkel tmn. Ganz die gleichen Betrachtungen, die wir in dem vorigen Falle angestellt haben, führen dann in diesem zu dem Resultate, dass in der Nähe der Wandfläche eine Abnahme der Dichtigkeit der Flüssigkeit stattfinden muss, und dass in Folge derselben eine von der festen Wand fortgerichtete horizontale Kraft bis in einiger Entfernung von der festen Wand vorhanden sein muss. Es folgt daraus, dass die Oberfläche in der Nähe der festen Wand eine convexe sein muss, und dass ebenso zwischen nahen Wänden oder in engen Röhren die Oberfläche eine stetig gekrümmte nach aussen convexe werden muss.

Dieser Fall wird realisirt, wenn man einen festen Körper in eine Flüssigkeit taucht, welche denselben nicht benetzt, etwa Glas in Quecksilber; der Versuch zeigt auch, dass in dem Falle die Oberfläche der Flüssigkeit in der Nähe der festen Wand stets convex ist, oder dass in eine cylindrische Röhre gefülltes Quecksilber stets eine in der ganzen Ausdehnung convexe Oberfläche zeigt.

§. 47.

Niveauänderungen durch die Molekularkräfte. Die in den beiden letzten §§. abgeleiteten Sätze über den Normaldruck und den Einfluss der Adhäsion, die wir in der Gleichung ausgesprochen haben, der Normaldruck in einer gekrümmten Oberfläche ist für die Flächeneinheit

$$p = K + \frac{H}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}\right)$$

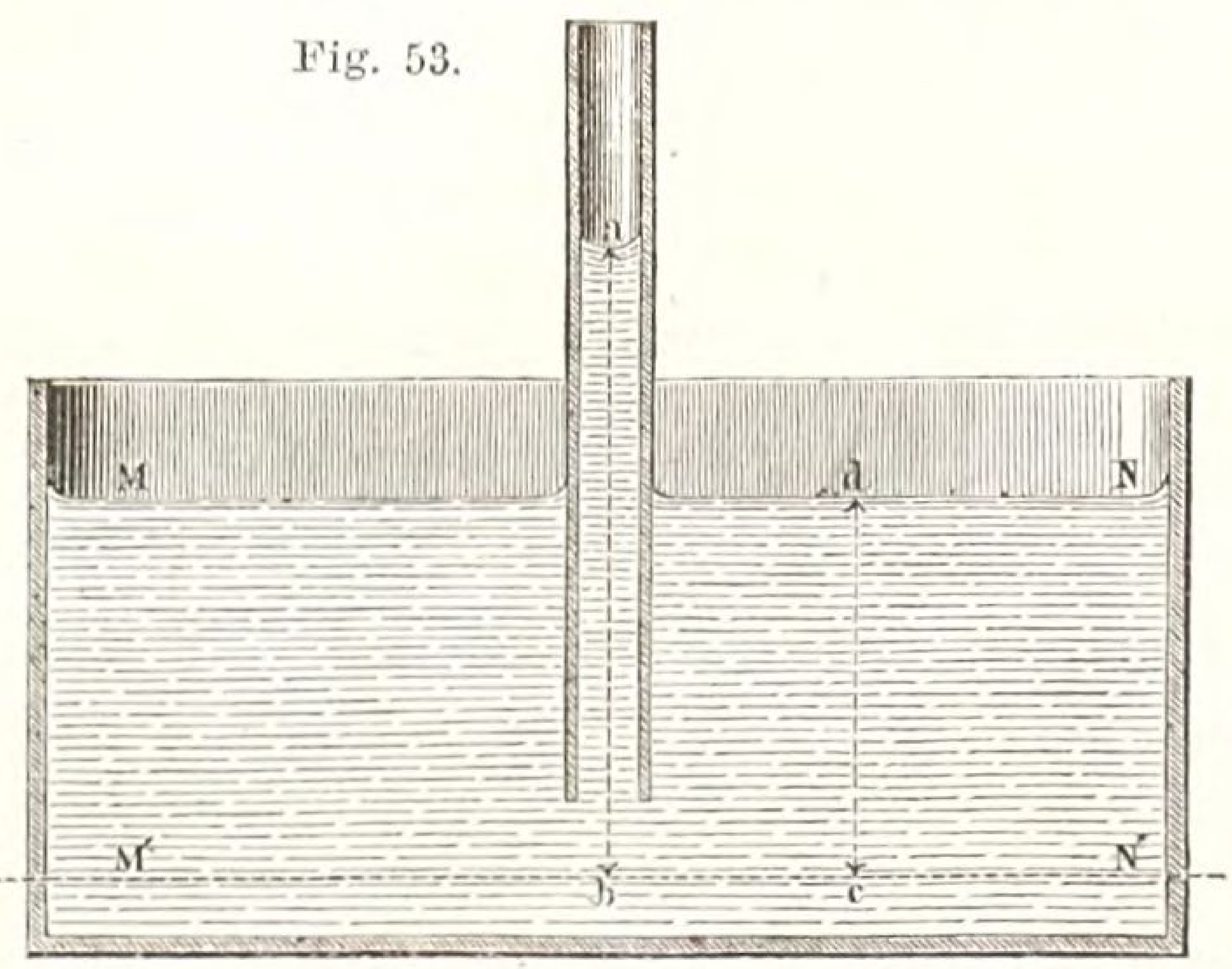
und in der Beziehung für den Randwinkel

$$\Theta = \text{const.},$$

dass derselbe nur abhängig ist von der Natur der Flüssigkeit und der festen Wand, bilden die Grundlage, aus welcher sich das ganze Gebiet der sogenannten Capillaritätserscheinungen, welche die Niveauänderungen von Flüssigkeiten, die Bildung und die Formen von Tropfen etc. umfassen, durch Rechnung ableiten lässt.

Wir begnügen uns damit, von der grossen Zahl der Erscheinungen nur eine abzuleiten, nämlich die Niveauänderungen, welche in Folge dieser Kräfte in engen Röhren eintreten, und betrachten zuerst die Niveauänderung in einer solchen Röhre, deren Wandungen durch die Flüssigkeit benetzt werden. Tauchen wir eine Glasröhre wie Fig. 53 in ein grosses mit Wasser gefülltes Gefäss, dessen Oberfläche MN eine horizontale Ebene ist, so muss, wenn wir die Röhre als hinreichend enge annehmen, die Oberfläche des Wassers in der Röhre eine stetig gekrümmte nach aussen concave werden. In Folge dieser Krümmung ist der Normaldruck in dieser Oberfläche ein kleinerer als in einem entsprechenden Flächenstücke der ebenen Oberfläche ausserhalb, und als Folge dieser Druckdifferenz muss die Flüssigkeit in der Röhre sich über das Niveau der äussern Flüssigkeit emporheben. Legen wir nämlich eine Ebene $M'N'$ im Innern der Flüssigkeit parallel der Oberfläche MN, so erhält ein Flächenstück f, welches etwa bei c liege und dessen Grösse gleich dem Querschnitte der Röhre sein möge, einen Druck, der gleich ist der Summe des Gewichtes der über c stehenden Flüssigkeitssäule und des Normaldruckes, der in dem ebenen Flächenstück der Oberfläche von der Grösse f wirkt. Ist s das specifische Gewicht der Flüssigkeit, so ist dieser Druck

Fig. 53.



$$f.s.cd + fK.$$

Im Zustande des Gleichgewichtes muss nun das vertical unter der Röhre bei b liegende Flächenstück f in dieser Ebene genau denselben Druck erhalten. Dieser Druck setzt sich zusammen aus dem Gewicht der Flüssigkeitssäule vom Querschnitt f der Röhre und der Höhe ba bis zu dem tiefsten Punkte der concaven Fläche, dem Gewichte des Flüssigkeits-

meniscus, der über der durch a gelegten horizontalen Ebene steht, und der verticalen Componente des in der gekrümmten Fläche vorhandenen Normaldrucks. Bezeichnen wir den letztern mit $K - q$, so ist derselbe für ein Oberflächenelement von der Grösse Δf gleich $(K - q) \Delta f$. Bildet die Normale dieses Flächenelementes mit der Verticalen den Winkel φ, so ist die verticale Componente des auf dieses Flächenelement wirkenden Normaldruckes gleich $(K - q) \Delta f . \cos \varphi$. Da nun das Flächenelement mit der Horizontalen ganz denselben Winkel φ bildet, den die Normale des Flächenelementes mit der Verticalen bildet, ist $\Delta f . \cos \varphi$ die horizontale Projection des Flächenelementes. Die verticale Componente des auf ein Flächenelement der gekrümmten Oberfläche wirkenden Normaldruckes ist somit gleich dem Producte aus dem Normaldruck in die horizontale Projection des betrachteten Flächenelementes. Was für dieses eine Flächenelement gilt, gilt für alle, so dass die verticale Componente des auf die gekrümmte Fläche wirkenden Normaldruckes gleich ist dem Producte aus der Grösse des in der Fläche vorhandenen Normaldruckes in die horizontale Projection der gekrümmten Fläche. Letztere ist aber der Querschnitt der Röhre f, so dass $(K - q) . f$ die verticale Componente des Normaldruckes ist. Nennen wir nun das Gewicht des über a liegenden Flüssigkeitsmeniscus m, so ist die Bedingung des Gleichgewichtes

$$(K - q) f + m + sfab = fK + fs\,cd$$

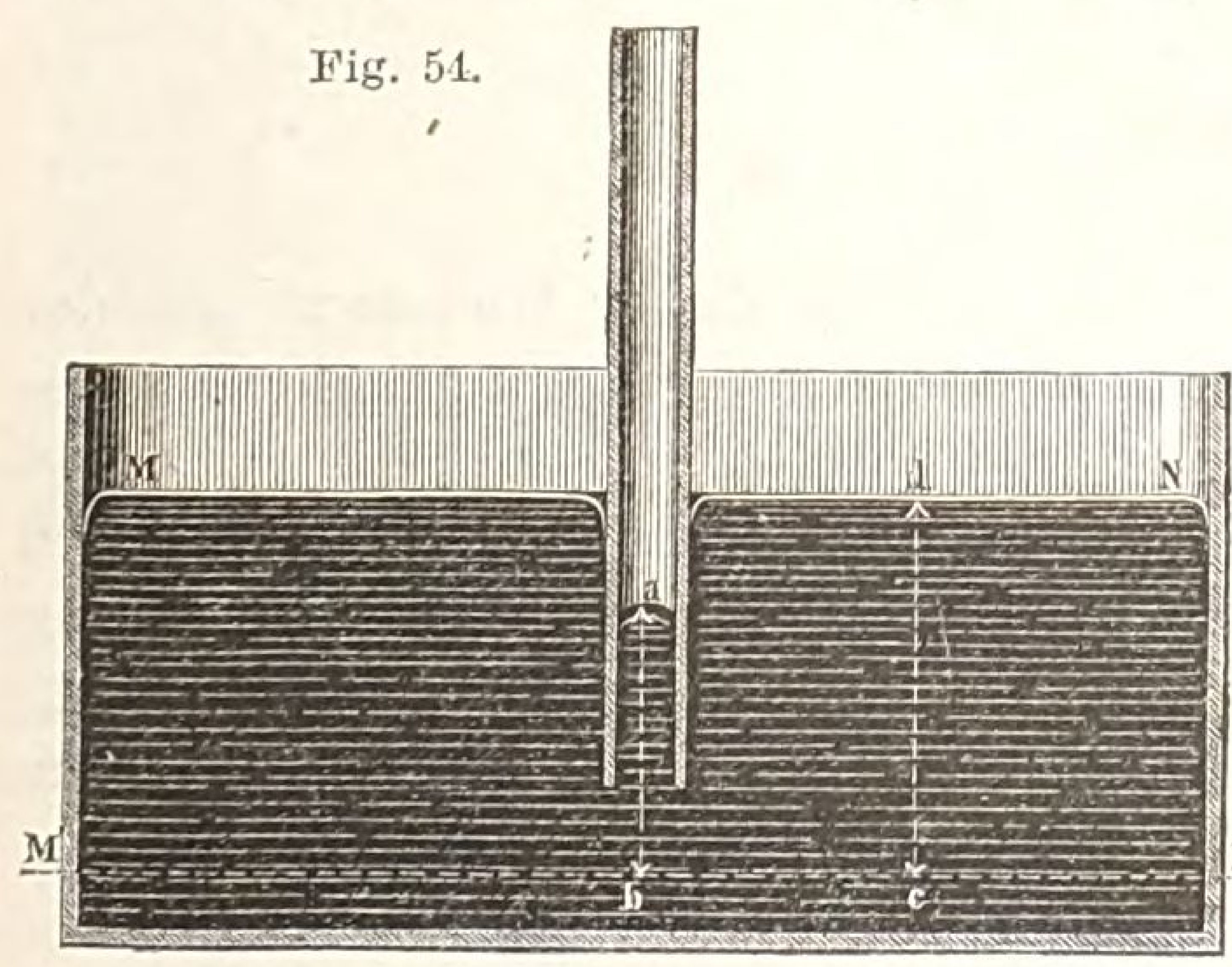
oder

$$sf(ab - cd) + m = fq,$$

oder es muss eine solche Hebung der Flüssigkeit eintreten, dass das Gewicht der über MN gehobenen Flüssigkeit gleich ist der verticalen Componente der Oberflächenspannung.

Wenn die Flüssigkeit die Röhre nicht benetzt, tauchen wir also eine Glasröhre wie Fig 54 in Quecksilber, so muss in derselben die Flüssigkeit tiefer stehen; die Niveaudifferenz erhalten wir ganz in derselben Weise wie oben. Der Druck in c ist $Kf + fs . cd$, der Druck in b ist, da in diesem Falle die Oberfläche convex, also der Normaldruck grösser ist wie ausserhalb $(K + q) f + fs . ab - m$, wenn wir mit m das Gewicht des Meniscus bezeichnen, der den um die convexe Fläche liegenden Raum ausfüllen müsste, um dieselbe zu einer horizontalen Ebene zu ergänzen, so dass die Flüssigkeitssäule von der Höhe ab überall denselben Querschnitt f hätte. Die Gleichgewichtsbedingung ist somit

Fig. 54.



$$(K + q) f - m + sfab = Kf + fs . cd$$

$$q . f = fs (cd - ab) + m.$$

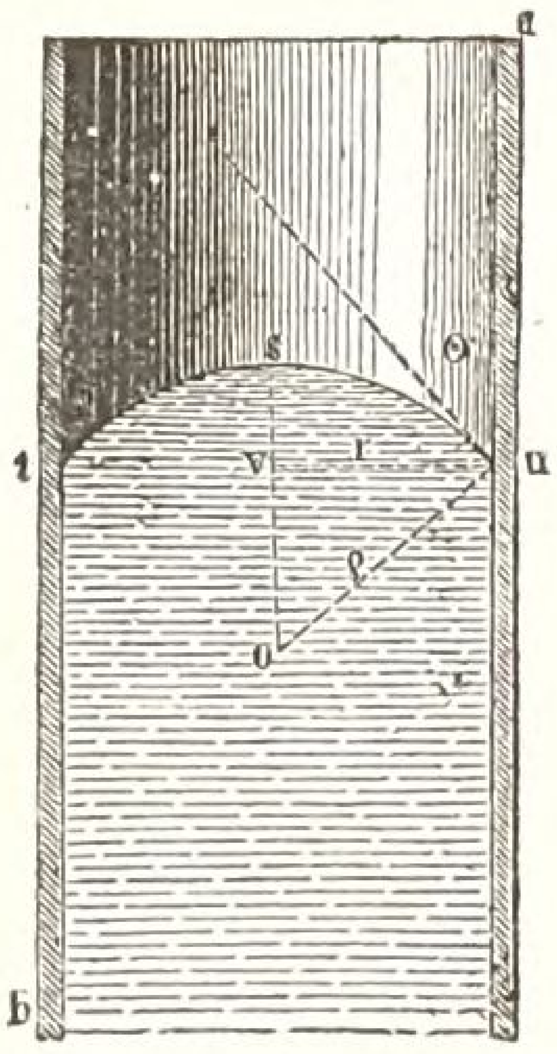
Die Depression der Flüssigkeit in der Röhre geht also so weit, dass die in der Röhre bis zum äussern Niveau einzufüllende Flüssigkeit gleich ist der verticalen Componente der Oberflächenspannung.

Um nun diese Erhebung oder Depression genauer zu bestimmen, müssen wir die Grösse der Oberflächenspannung kennen. Wir wollen voraussetzen, wir hätten so enge Röhren, dass die Oberfläche ein Kugelsegment ist, dessen Radius gleich ϱ sei. Dann wird, wenn wir die Differenz $ab - cd$, die Steighöhe der Flüssigkeit in der capillaren Röhre mit h bezeichnen,

$$sfh + m = f \cdot \frac{H}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}\right) = fH \cdot \frac{1}{\varrho}.$$

Den Krümmungsradius der Oberfläche ϱ können wir nun leicht durch den Winkel Θ und den Radius der Röhre ausdrücken. Ist ab Fig. 55 ein Durchschnitt der Röhre und ust die Oberfläche der Flüssigkeit, o der Mittelpunkt derselben und der Radius der Röhre $uv = r$, so ist

Fig. 55.



$$uo = \varrho = \frac{uv}{\cos ouv} = \frac{r}{\cos ouv}.$$

Legen wir nun im Punkte u eine Tangente an die Oberfläche, so bildet diese mit der oberen Seite der Röhrenwand den Winkel Θ. Da nun ou als Radius senkrecht zur Tangente und uv senkrecht zur Axe der Röhre, also auch zur Röhrenwand gezogen ist, so ist $ouv = \Theta$ und

$$\varrho = \frac{r}{\cos \Theta}.$$

Damit wird die Gleichung für die gehobene Flüssigkeitsmenge

$$sfh + m = f \cdot H \cdot \cos \Theta \frac{1}{r}.$$

Da nun der Querschnitt f der Röhre gleich $r^2\pi$ ist, so wird

$$sfh + m = H \cos \Theta \pi r$$

und

$$\frac{sfh + m}{2\pi r} = \frac{H}{2} \cos \Theta.$$

Der Nenner des Ausdrucks auf der linken Seite dieser Gleichung ist der innere Umfang der Röhre; der Quotient aus dem ganzen gehobenen Gewichte und dem innern Umfange der Röhre gibt uns das Gewicht Flüssigkeit, welches von der Längeneinheit der Berührungslinie zwischen Flüssigkeit und fester Wand gehoben ist. Damit sagt diese Gleichung dann aus, dass das Gewicht der von der Längeneinheit der Berührungslinie gehobenen Flüssigkeit von der Röhrenweite unabhängig, dass es nur von der Natur der Flüssigkeit und des festen Körpers resp. den beiden Capillaritätsconstanten H und Θ abhängig ist.

Unsere Gleichung für das Gewicht der gehobenen Flüssigkeit liefert für die Steighöhe h

$$h + \frac{m}{sf} = \frac{H}{s} \cdot \cos \Theta \frac{1}{r}.$$

Wenn wir hinreichend enge Röhren voraussetzen, so dürfen wir das Gewicht m des Meniscus vernachlässigen, und erhalten

$$h = \frac{H}{s} \cos \Theta \frac{1}{r} = a^2 \cos \Theta \frac{1}{r},$$

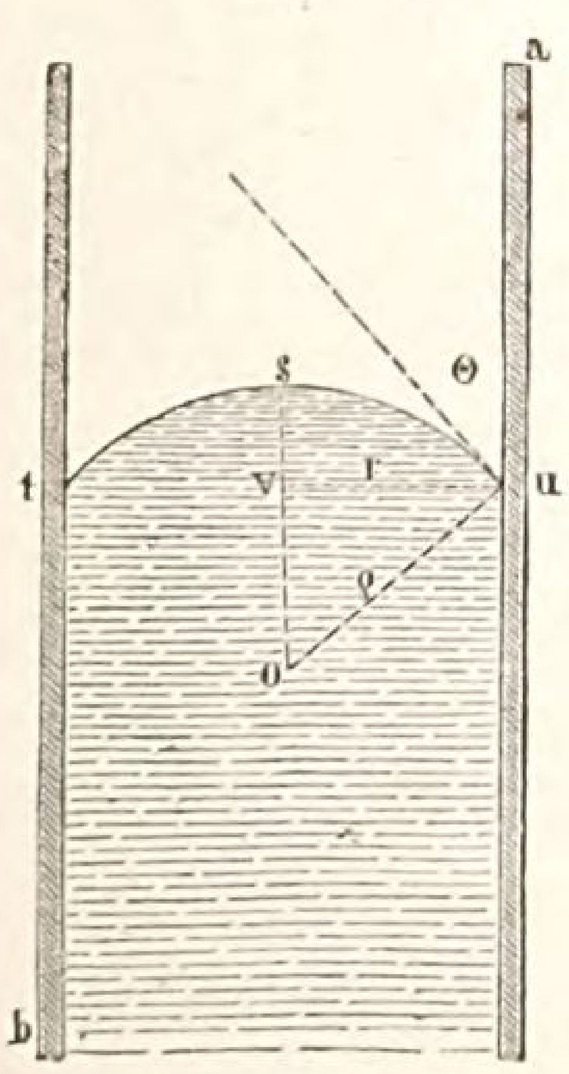
wenn wir den Quotienten aus der Constanten H und dem specifischen Gewicht der Flüssigkeit mit a^2 bezeichnen. Demnach ist die Steighöhe bei benetzenden, die Depression bei nicht benetzenden Flüssigkeiten dem Radius der capillaren Röhre umgekehrt proportional, ein Satz, der durch vielfache Versuche von Gay-Lussac, Brunner, Bède, Desains u. a. bestätigt worden ist.

Die Gleichung für das gehobene Flüssigkeitsgewicht gibt uns auch die Steighöhe in anders geformten Räumen, wenn wir die Krümmungsradien R und R_1 der Oberfläche bestimmen können, denn dieselbe gilt ganz allgemein, wie aus ihrer Ableitung hervorgeht. Nehmen wir z. B. zwei parallele im Abstande d einander gegenüber gestellte Platten und tauchen dieselben in eine Flüssigkeit ein, so muss die Oberfläche der Flüssigkeit zwischen den beiden Platten ein Theil einer Cylinderfläche werden. Ein den Platten parallel durch die Oberfläche geführter Schnitt schneidet die Fläche in einer Geraden; der Krümmungsradius dieses Schnittes ist also unendlich gross. Der zu diesem Schnitte senkrechte Schnitt schneidet die Fläche, wenn d hinreichend klein ist, in einem Kreisbogen, dessen Radius ϱ, wie sich durch dieselbe Ableitung, die wir bei der Röhre anwandten, unmittelbar ergibt, gleich ist

$$\varrho = \frac{d}{2 \cos \Theta}.$$

Um das zu erkennen, haben wir nur den Durchschnitt Fig. 56 als durch zwei Platten geführt zu betrachten, es ist dann $r = \frac{1}{2} d$. Damit wird die Oberflächenspannung für diesen Fall

Fig. 56.



$$q = H . \cos \Theta \frac{1}{d}$$

und das zwischen den beiden Platten gehobene Flüssigkeitsgewicht, wenn f der Querschnitt des zwischen den Platten eingeschlossenen Raumes ist,

$$shf + m = H \cos \Theta \frac{1}{d} \cdot f \cdot$$

Ist die Länge dieses Querschnittes gleich l, so ist $f = ld$ und

$$\frac{shf + m}{2l} = \frac{H}{2} \cos \Theta.$$

Die linke Seite ist wieder das von der Längeneinheit der Berührungslinie an jeder der beiden Platten, welche zusammen die Flüssigkeit in der Länge $2l$ berühren, getragene Flüssigkeitsgewicht, wir erhalten also hier denselben Ausdruck für dieses Gewicht, wie bei der Röhre, finden also wieder, dass dasselbe nur von der Natur der Flüssigkeit und des festen Körpers abhängt.

Für die Steighöhe h erhalten wir

$$h + \frac{m}{sf} = \frac{H}{s} \cdot \cos \Theta \frac{1}{d} \cdot$$

Die Steighöhe zwischen zwei Platten ist somit dem Abstande der Platten umgekehrt proportional und weiter ist die Steighöhe zwischen zwei Platten halb so gross als in Röhren, deren Durchmesser gleich dem Abstande der beiden Platten ist. Auch dieser Satz ist durch Versuche hinreichend bestätigt worden; so erhielt Gay-Lussac für Wasser, dessen specifisches

Gewicht $s = 1$ ist, aus Versuchen mit Glasröhren das Product $2rh = 30{,}262$, aus Versuchen mit Platten das Product $dh = 14{,}524$, ein Werth, der nur wenig von der Hälfte des für Röhren gefundenen Werthes abweicht.

Versuche mit capillaren Röhren oder einander sehr nahe stehenden Platten gestatten, wenn man gleichzeitig den Randwinkel Θ bestimmen kann, die Capillaritätsconstante H, die den Druck in einer Kugel vom Radius 1, welcher von der Oberflächenspannung herrührt, misst, abzuleiten. Bei vollkommen die feste Wand benetzenden Flüssigkeiten, von denen, wie wir erwähnten, eine Schicht an der festen Wand haften bleibt, wenn wir dieselbe aus der Flüssigkeit herausziehen, überwiegt nun die Adhäsion derartig die Cohäsion, dass sich das letzte Element der flüssigen Oberfläche einfach parallel an die Wand anlegt. Für diese ist also Θ gleich 180^0, somit $\cos\Theta = -1$. Für den Krümmungsradius der Oberfläche in einer capillaren Röhre, in der die Flüssigkeit die Wand vollkommen benetzt, erhalten wir somit

$$\varrho = \frac{r}{\cos\Theta} = -r,$$

worin das negative Vorzeichen dann bedeutet, dass der Mittelpunkt nicht wie in Fig. 55 im Innern, sondern ausserhalb der Flüssigkeit liegt. Wir brauchen deshalb das negative Vorzeichen in der Gleichung nicht beizubehalten, sondern können für die Steighöhe schreiben

$$h + \frac{m}{sf} = \frac{H}{s} \cdot \frac{1}{r}.$$

Die Grösse des Meniscus können wir hier leicht berechnen, denn aus $\varrho = r$ folgt, dass die Oberfläche eine Halbkugel ist, der Meniscus ist also gleich der Differenz zwischen einem Cylinder, dessen Querschnitt gleich dem der Röhre und dessen Höhe gleich r ist und einer Halbkugel von dem Radius r, also gleich

$$fr - \frac{2}{3} r^3 \pi = f\left(r - \frac{2}{3} r\right),$$

somit ist

$$m = sf \cdot \frac{r}{3}$$

und

$$h + \frac{1}{3} r = \frac{H}{s \,.\, r}; \quad s\left(h + \frac{1}{3} r\right) r = H.$$

Die Capillaritätsconstante H ist somit gleich dem Producte aus der um $1/3$ des Röhrenradius vermehrten Steighöhe in einer Röhre vom Radius r multiplicirt mit dem Radius der Röhre und dem specifischen Gewichte der Flüssigkeit. Wenn wir nun als Einheiten Millimeter wählen, so gibt uns H den Druck auf die Fläche eines Quadratmillimeters einer Kugel von einem Millimeter Radius und zwar, da s dann das Gewicht von einem Kubikmillimeter der betreffenden Flüssigkeit bedeutet, in Milligrammen.

Für die Grösse H haben sich in dieser Weise unter andern ergeben für

Wasser	15,116
Aethylalkohol . . .	4,650
Aethylaether . . .	3,630.

Für Quecksilber, für das sich der Winkel Θ direkt messen lässt, erhielt Quincke

$$\Theta = 51^0\,8' \qquad H = 101{,}06.$$

Dieser für Quecksilber erhaltene Werth von H zeigt, wie sehr viel grösser die Cohäsion bei nicht benetzenden Flüssigkeiten ist als bei benetzenden.

§. 48.

Grösse der Wirkungssphäre. Wir haben bisher die Grösse der Radien der Wirkungssphären als unmessbar klein bezeichnet; mit Hülfe der capillaren Wirkungen selbst ist es aber Quincke gelungen nachzuweisen, dass dieselben eine messbare Grösse haben. Das Princip der von Quincke angewandten Methode ist folgendes. Wir sahen vorhin, dass die Steighöhe benetzender Flüssigkeiten zwischen parallelen Platten

$$h = \frac{H}{s}\cos\Theta\,\frac{1}{d}$$

ist, wenn s das specifische Gewicht der Flüssigkeit und d der Abstand der Platten ist. Die Steighöhe hängt also ab von H und dem Winkel Θ, welcher selbst von dem Verhältnisse der Adhäsion des Flüssigen am Festen und der Cohäsion des Flüssigen abhängt.

Bringt man nun auf eine Glasplatte sehr dünne keilförmige Schichten einer Substanz, an welche das Wasser anders adhärirt als an das Glas, so wird, so lange die Dicke der Schicht nicht so gross ist als der Radius der Wirkungssphäre des Glases, der Randwinkel, unter welchem das Wasser die Platte schneidet, abhängig sein von der Anziehung des Glases und der auf dem Glase befindlichen Substanz auf das Wasser. Je dicker nun aber die Schicht der Substanz wird, um so mehr muss die Anziehung des Glases zurücktreten, und ist die Dicke der Substanz gleich oder grösser als der Radius der Wirkungssphäre des Glases geworden, so ist nur mehr die Anziehung der Substanz auf das Wasser wirksam. Es folgt daraus, dass der Randwinkel dort, wo Glas und Substanz wirksam sind, ein anderer sein muss als dort, wo nur die Substanz wirksam ist, dass also der Randwinkel von dort ab, wo die Substanz am dünnsten ist, mit wachsender Dicke der Schicht sich allmählich ändern muss und dass er erst dort einen constanten Werth annehmen kann, wo die Dicke der Schicht gleich oder grösser ist als der Radius der Wirkungssphäre.

Stellt man nun zwei solcher Platten mit der bedeckten Seite einander parallel gegenüber, so folgt, dass die Steighöhe h eine andere sein muss, wo die Schicht dünner, eine andere, wo die Schicht eine Dicke hat, die grösser ist als der Radius der Wirkungssphäre.

Solche keilförmige Schichten auf Glas kann man nun sehr gut durch Silber erzeugen; Quincke stellte zwei solcher Glasplatten mit keilförmigen Silberschichten bedeckt her, deren Dicke er nach einem im zweiten Theile zu besprechenden optischen Verfahren zu messen im Stande war. Zwei solcher Platten wurden einander gegenüber in einen Trog mit destillirtem Wasser gestellt, so dass die Silberflächen einander parallel und die Schneiden der Silberkeile vertical waren. Um sicher zu sein, dass die etwa sich zeigenden Differenzen in den Höhen h nicht einem Abweichen der Platten vom Parallelismus zuzuschreiben seien, war auf jeder Platte die Silber-

schicht doppelkeilförmig aufgetragen, so dass die Silberschicht am dünnsten in der Mitte der Platten war und von da nach beiden Seiten an Dicke zunahm. Da Silberschichten von einer Dicke, die kleiner als 0,00006 Mm. ist, durchsichtig sind, konnte man die Höhen h, bis zu denen das Wasser zwischen den Platten aufstieg, direkt messen.

Es zeigte sich nun in der That, dass die Höhe h, bis zu welcher das Wasser zwischen den Platten aufstieg, dort am grössten war, wo die Silberschicht die geringste Dicke hatte, und dass die Höhe mit wachsender Schichtdicke immer kleiner wurde, somit also dass der Winkel Θ nach der Gleichung

$$\cos\Theta = \frac{s\,d\,h}{H}$$

immer kleiner wurde. Denn da Θ bei benetzenden Flüssigkeiten stumpf ist, entsprechen kleineren Werthen des Cosinus auch kleinere Winkel.

So erhielt Quincke z. B. bei einem Plattenabstande $d = 0{,}633$ Mm. folgende Werthe

Schichtdicke Mm	h Mm	Θ
0,0000040	13,74	$125^0 27'$
0,0000142	12,82	$122^0 45'$
0,0000284	9,73	$114^0 22'$.

Zur Berechnung von Θ wurde, wie im vorigen §. angegeben ist, $H = 15$ gesetzt.

Bis zu den dicksten noch durchsichtigen Silberschichten, deren Dicke Quincke zu 0,0000542 Mm. bestimmte, liess sich noch eine Abnahme der Höhe h beobachten, so dass der Radius der Wirkungssphäre des Glases mindestens diesen Werth hat.

Führt man die Silberschicht durch Behandeln mit Schwefelwasserstoff in Schwefelsilber über, so kann man den Winkel Θ bestimmen, unter dem Quecksilber eine solche Platte schneidet. Auch hier zeigte sich, dass derselbe mit der Dicke der Schicht verschieden war, dass er erst constant wurde, wenn die Schichtdicke etwa 0,00005 Mm. war.

Wenn man bei der Schwierigkeit dieser Versuche auch keine absolut genauen Werthe für den Radius der Wirkungssphäre erhalten kann, so beweisen sie doch, dass derselbe mit grosser Annäherung gleich 50 Milliontheile eines Millimeters gesetzt werden darf, eine zwar sehr kleine, aber doch noch messbare Grösse. Aehnliche kleine Längen werden wir noch häufig zu messen in der Lage sein.

§. 49.

Auflösung. Von den Erscheinungen, welche durch die zwischen den festen und flüssigen Körpern thätigen molekularen Kräfte bedingt sind, haben wir in den letzten §§. jene betrachtet, welche sich zeigen, wenn die Cohäsion der Flüssigkeit grösser, oder wenn sie kleiner ist als die Adhäsion der Flüssigkeit an den festen Körpern. Bei diesen bleibt der feste Körper ungeändert, die Erscheinungen bestehen in Aenderungen der Gestalt der Oberfläche der Flüssigkeit und aus dieser folgend in Aenderungen des Niveaus derselben. Noch ein dritter Fall ist möglich und in der Natur vorhanden, nämlich, dass die Adhäsion des flüssigen zu dem festen Körper, also die Anziehung der Moleküle der Flüssigkeit auf die-

jenigen des festen Körpers grösser ist als die Kraft, mit der die letztern einander anziehen, somit als die Cohäsion des festen Körpers. In dem Falle muss bei einer Berührung der festen und flüssigen Körper eine Trennung der Moleküle des festen und eine Vermischung derselben mit den Molekülen der Flüssigkeit eintreten. Wir beobachten diesen Fall bei der Auflösung fester Körper in Flüssigkeiten; es tritt z. B. bei der Auflösung eines Salzes in Wasser eine allmähliche Zertheilung des festen Körpers und eine Verbreitung der Theile durch die Flüssigkeit ein, so dass sich in allen Theilen der Flüssigkeit gleichmässig die Theilchen des festen Körpers verbreitet finden.

Man hat häufig die Auflösung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit als eine chemische Verbindung angesehen; von den eigentlichen chemischen Verbindungen unterscheidet sie sich aber dadurch, dass Lösungen keine Verbindungen nach festen Verhältnissen sind. Im Gegentheil eine Flüssigkeit kann einen in ihr löslichen Körper in allen Verhältnissen bis zu einer gewissen bei einer constanten Temperatur festen Grenze in sich aufnehmen und eine überall gleich beschaffene Lösung bilden, das heisst eine Lösung, wo überall dasselbe Verhältniss zwischen gelöster Substanz und Lösungsmittel vorhanden ist. Jene feste Grenze nennt man die Löslichkeitsgrenze, sie tritt dann ein, wenn durch Aufnahme einer hinreichenden Menge des gelösten Körpers die Adhäsion der Lösung an den festen Körper nicht mehr die Cohäsion des festen überschreitet, es muss deshalb die Löslichkeit eines bestimmten festen Körpers in einer bestimmten Flüssigkeit eine feste, von den ins Spiel tretenden molekularen Kräften abhängige Grenze haben.

Bei der Lösung eines Körpers, z. B. eines Salzes in Wasser, geben sich die Anziehungen der Wasser- und Salzmoleküle auch dadurch zu erkennen, dass eine Contraction der Lösung eintritt, das heisst, dass das Volumen der Lösung kleiner wird als die Summe der Volume der Bestandtheile, oder auch darin, dass bei Mischung einer Salzlösung mit Wasser das Volumen der neu entstandenen Lösung kleiner ist als das Volumen des Wassers und der mit demselben gemischten Salzlösung. So ergab sich z. B. aus einigen Versuchen mit Lösungen von Kalisalpeter, welche 8 Theile Salz auf 100 Theile Wasser enthielten, bei Mischung mit etwa dem 25fachen Volumen Wasser eine Contraction von 0,8 Procent; 21,522 Kubikcentimeter (44,293 Gr.) einer solchen Lösung gemischt mit 554,077 Kubikcentimeter Wasser gaben nicht 575,599 Kubikcentimeter, sondern nur 570,838, so dass also das entstandene Volumen der Lösung um 4,762 Kubikcentimeter kleiner war als die Summe der zur Herstellung der Mischung verwandten Volumina. In welcher Beziehung diese Contraction zur Concentration der Lösung steht, ist noch nicht bekannt.

§. 50.

Mischung und Schichtung der Flüssigkeiten. Wenn man zwei Flüssigkeiten zusammenschüttet, so erkennt man, dass die Anziehungen der verschiedenen Flüssigkeiten auf einander ebenso verschieden sind, als die Anziehungen der Flüssigkeiten auf die verschiedenen festen Körper, es kann auch hier die Adhäsion der Flüssigkeiten aneinander grösser oder kleiner sein als die Cohäsion der einzelnen. Man sieht nämlich entweder,

dass die Flüssigkeiten, wenn sie ein verschiedenes Gewicht haben, sich einfach demselben entsprechend über einander lagern, oder dass sie sich mischen, dass eine die andere vollständig durchdringt, dass die schwerere in die leichtere emporgezogen, die leichtere in die schwerere hinabgezogen und in derselben verbreitet wird. So mischen sich Wasser und Alkohol, Alkohol und Schwefelkohlenstoff in allen Verhältnissen, während Schwefelkohlenstoff und Wasser, Wasser und Oel sich nicht mischen, sondern sich über einander lagern.

Ein Flüssigkeitsgemische ist eine homogene Flüssigkeit, deren einzelne Bestandtheile sich nicht durch mechanische Mittel, sondern nur durch Aenderung des Aggregatzustandes trennen lassen. Dadurch unterscheidet sich ein Gemische wesentlich von einem Gemenge, wie man es z. B. erhält, wenn man zwei nicht mischbare Flüssigkeiten von nahezu gleichem specifischen Gewichte zusammengiesst und lebhaft schüttelt. Bei der geringsten Verschiedenheit der specifischen Gewichte scheiden sich die gemengten Flüssigkeiten und lagern sich über einander.

Bei der Mischung zweier Flüssigkeiten tritt in der Regel auch eine Contraction des Gemisches ein, weil eben die Moleküle der gemischten Flüssigkeiten sich stärker anziehen als die Moleküle der einzelnen. So ist das Volumen einer Mischung von Wasser und Alkohol stets kleiner als die Summe der Volumina der gemischten Flüssigkeiten, das specifische Gewicht des Gemisches also grösser als das mittlere specifische Gewicht. So geben z. B. nach Versuchen von Baumhauer

90	Volume	Wasser	und	10	Volume	Alkohol	99,4	V. Mischung
70	„	„	„	30	„	„	97,2	„ „
50	„	„	„	50	„	„	96,0	„ „
40	„	„	„	60	„	„	94,8	„ „
30	„	„	„	70	„	„	96,2	„ „
10	„	„	„	90	„	„	97,7	„ „

Wie man sieht, ist die Contraction je nach den Mengeverhältnissen sehr verschieden, die stärkste tritt bei dem Gemische von 40 Wasser und 60 Alkohol ein.

Wenn man zwei nicht mischbare Flüssigkeiten gleichen specifischen Gewichtes zusammenbringt, so z. B. Oel und ein passendes Gemisch von Alkohol und Wasser, so zeigt sich, dass die Flüssigkeiten sich nicht in unregelmässiger Weise durch einander lagern, sondern dass stets die eine in der andern in kugelförmigen Tropfen schwimmt; so schwimmt Oel in das Alkoholgemisch gebracht, stets in einzelnen kugelförmigen Tropfen.

Es folgt das mit Nothwendigkeit aus den Sätzen über die Oberflächenspannung. Denn da das Oel in dem Alkohol schwimmt, ist es ganz ohne Schwere, die Gestalt, welche eine solche Oelmasse annimmt, hängt daher nur von den hier thätigen Molekularkräften ab. Diese sind die Anziehungen des Gemisches auf das Oel, die Adhäsion, und die Anziehungen, welche die Oelmoleküle auf einander ausüben. Da die Flüssigkeiten sich nicht mischen, folgt, dass die letztern die erstern überwiegen. Bezeichnen wir daher den aus der Differenz der Anziehungen des Oels und des Gemisches auf das Oel sich ergebenden Normaldruck in der Ebene mit K', die Ober-

flächenspannung mit H', so ist die Gleichgewichtsbedingung für das im Alkohol schwimmende Oel, dass der Normaldruck

$$p = K' + \frac{H'}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}\right)$$

überall denselben Werth haben muss. Dieser kann aber nur dann an allen Stellen der Oberfläche denselben Werth haben, wenn für dieselben

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} = \text{const.},$$

also die Summe der reciproken Werthe des grössten und kleinsten Krümmungsradius überall denselben Werth hat, wenn also die Krümmung überall dieselbe ist; das ist bei einer begrenzten Masse nur der Fall, wenn sie die Gestalt einer Kugel hat.

Lässt man auf einen solchen schwimmenden Oeltropfen noch andere Kräfte einwirken, so kann derselbe noch andere Gestalten annehmen, deren Oberflächen aber stets der Bedingung genügen müssen, dass die Summen $\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}$ an allen Punkten der freien Oberflächen denselben Werth haben müssen.

Plateau hat in ausgedehnten Versuchsreihen gezeigt, dass diese Sätze sich im Versuche bestätigen. Stellt man ein Gemische aus Alkohol und Wasser her, welches dasselbe specifische Gewicht wie Oel hat, und bringt man dann in die Mischung durch eine Pipette etwas Oel, welches man am besten etwas gefärbt hat, so bildet das einen kugelförmigen Tropfen, der an der Stelle bleibt, an welche man ihn hingebracht hat.

Wenn man dann den Tropfen an gewissen Stellen mittels vorher mit Oel bestrichener Drähte fixirt, so dass er an denselben adhärirt, so gilt natürlich für diese Stellen der erwähnte Satz nicht, da dort die Oberfläche nicht frei ist, an allen zwischen den Drähten befindlichen freien Oberflächen muss aber jener Satz erfüllt werden. Wenn man den Tropfen wie Fig. 57 in einen Drahtring legt, so nimmt er die Form einer biconvexen Linse an, welche auf beiden Seiten durch gleiche Kugelflächen begrenzt ist. Die Radien dieser Kugelfläche können je nach der Menge des in dem Ringe schwebenden Oeles sehr verschieden sein. Ja es gelingt, wenn man mit einer Pipette das Oel vorsichtig aussaugt, zu bewirken, dass sich in dem Ringe nur mehr eine Oelhaut befindet, welche äusserst dünn ist, so dass man die obere und untere Fläche von einer Ebene nicht mehr unterscheiden kann.

Fig. 57.

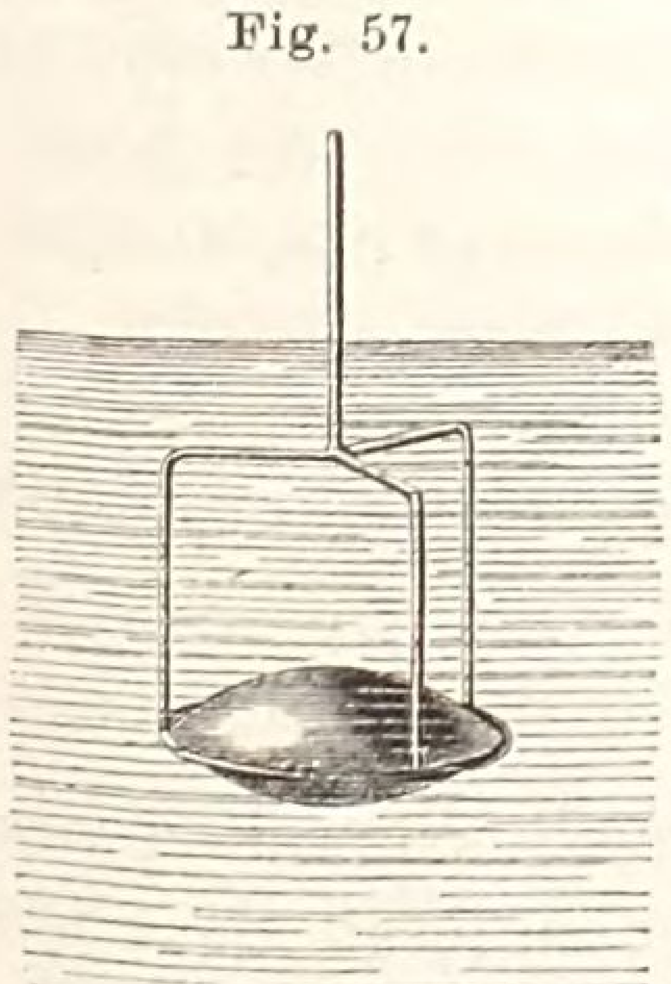
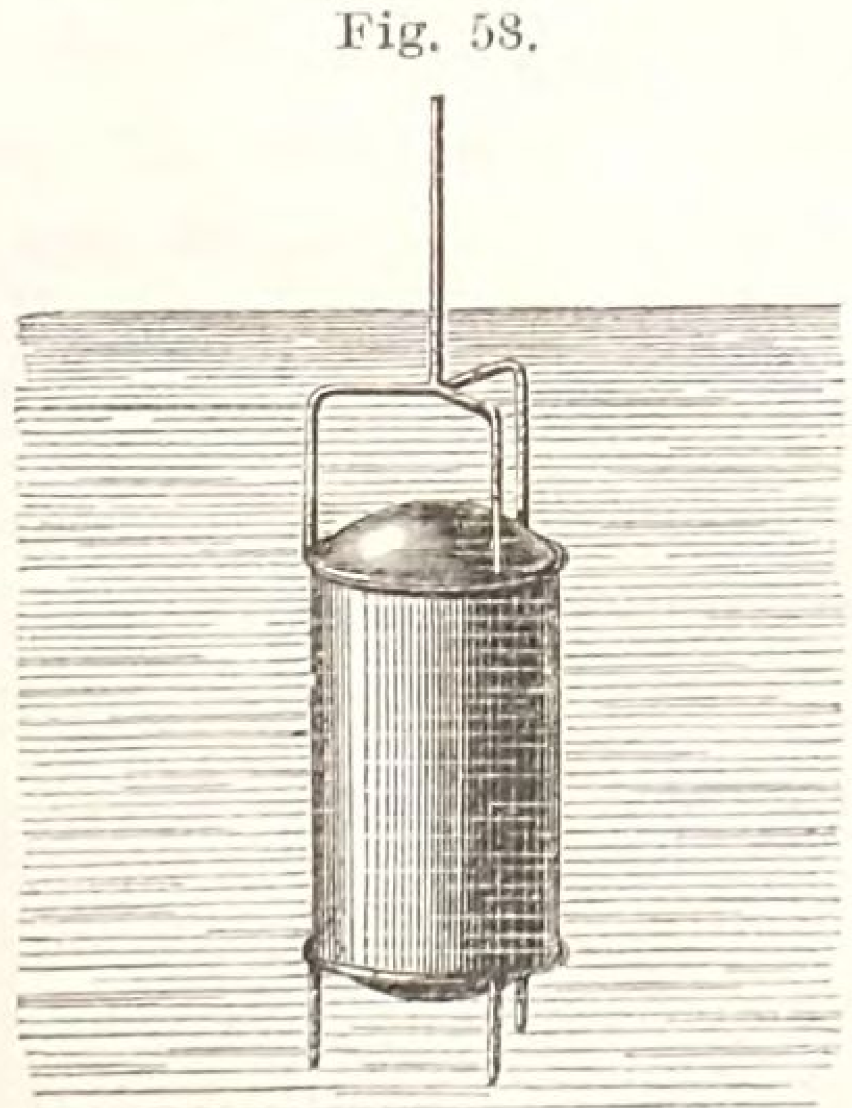


Fig. 58.



Macht man den in einem Ringe liegenden Tropfen sehr gross und bringt, Fig. 58, mit dem Tropfen einen zweiten Ring zur Berührung, so entsteht durch passende Entfernung zwischen den Ringen ein gerader Kreis-

cylinder, der oben und unten von Kugelsegmenten begrenzt ist. Die Radien der Kugelsegmente sind dann doppelt so gross wie der Radius des Cylinders, wie es auch nach unserer Gleichung sein muss. Denn da der Schnitt des Mantels parallel der Axe eine gerade Linie ist, deren Krümmungsradius unendlich gross ist, ist der reciproke Werth dieses Radius gleich Null. Nennen wir nun den Radius des Cylindermantels R, den Radius der Kugelsegmente R', so muss im Gleichgewichtszustande

$$K' + \frac{H'}{2}\frac{1}{R} = K' + H'\frac{1}{R'}$$

$$R' = 2R$$

sein. Füllt man bei constantem Abstande der beiden Ringe Oel in den Cylinder, so wölbt er sich nach aussen; mit dieser Wölbung wächst auch die Krümmung der Kugelsegmente, das heisst der Radius derselben wird kleiner. Saugt man Oel aus dem Cylinder heraus, so wölbt sich der Mantel nach innen, die Segmente werden flacher.

Bringt man in das Gemische Drahtgestelle von Würfeln, Octaedern, Tetraedern etc., so kann man dieselben mit Oel füllen und je nach der Menge desselben Würfel etc. mit ebenen Flächen oder mit concaven oder convexen Flächen bilden.

Wenn man den kugelförmigen Tropfen an eine feste Axe bringt, die dann in Rotation versetzt wird, so nimmt der an der Axe adhärirende Tropfen ebenfalls eine rotirende Bewegung an, und in Folge der Centrifugalkraft wird der Tropfen parallel der Rotationsaxe abgeplattet und am Aequator stärker gewölbt. Diese Annahme einer verschiedenen Krümmung an den verschiedenen Stellen ist hier nothwendig, weil, wie wir §. 26 ableiteten, die Centrifugalkraft an den verschiedenen Stellen der Kugeloberfläche dem gegen den Mittelpunkt der Kugel gerichteten Normaldrucke in verschiedenem Grade entgegenwirkt. Dort wo die Centrifugalkraft grösser ist, muss sich die Krümmung der Kugel verstärken, da im Gleichgewichtszustande der resultirende Normaldruck an allen Stellen der freien Oberfläche derselbe sein muss; die freie Oberfläche muss unter allen Umständen eine Niveaufläche sein. Man erkennt leicht, wie man auf Grund dieser Bedingung die Gestalt der Oberfläche, welche eine solche rotirende Kugel annehmen muss, berechnen kann. In dieser Weise ist es auch möglich gewesen, die Gestalt der Erde zu berechnen, eine Berechnung, welche indess dadurch ziemlich complicirt ist, dass man selbst bei der Voraussetzung, dass die Erde früher einmal eine flüssige Masse war, doch nicht annehmen darf, dass diese flüssige Masse homogen war.

§. 51.

Diffusion; Endosmose. Wenn man zwei mischbare Flüssigkeiten von verschiedenem specifischen Gewichte vorsichtig so zusammengiesst, dass die leichtere anfangs über der schwereren gelagert ist, so tritt, wie schon im vorigen §. beiläufig erwähnt wurde, doch allmählich eine Mischung beider Flüssigkeiten ein, indem die Moleküle der verschiedenen Flüssigkeiten sich stärker anziehen als diejenigen der einzelnen Flüssigkeiten. Es werden demnach die Moleküle der einen Flüssigkeit nach und nach in der andern verbreitet. Dieses allmähliche Durchdringen der beiden Flüssigkeiten bezeichnet man als Diffusion.

Am genauesten ist die Diffusion von Salzlösungen in Wasser untersucht. Die Versuche von Graham, Fick, Beilstein und Voit in Verbindung mit den theoretischen Entwicklungen von Wild haben ergeben, dass die Diffusion der gelösten Salztheile in Wasser proportional ist der Grösse der Fläche, in welcher sich die Lösung und das Wasser berühren und weiter proportional der Dichtigkeit der Salzlösung, wenn man die Salzlösungen in reines Wasser diffundiren lässt. Als Dichtigkeit der Lösung wird dann die Gewichtsmenge Salz in 100 Gewichtstheilen Wasser betrachtet, und als Einheit der Dichtigkeit jene, wenn 1 Theil Salz in 100 Theilen Wasser gelöst ist. Der Satz heisst also, dass in gleichen Zeiten durch die Flächeneinheit der Berührungsoberfläche von Salzlösung und Wasser Salzmengen zum Wasser hinüberwandern, welche der Menge des gelösten Salzes proportional sind.

Für verschiedene Salze ist jedoch die Diffusionsgeschwindigkeit verschieden, das heisst bei gleicher Concentration ist die in gleichen Zeiten übergehende Salzmenge je nach der Natur des Salzes eine verschiedene. Nach den Versuchen Beilsteins ergibt sich z. B., wenn man die Diffusionsgeschwindigkeit des Chlorkaliums gleich 1 setzt,

Chlorkalium	1,000
Kochsalz	0,833
Kohlens. Natron	0,543
Schwefels. Kupferoxyd	0,344.

Wie man sieht, zeigt sich in diesen Werthen eine grosse Verschiedenheit.

Die Diffusion der Flüssigkeiten tritt nicht nur dann ein, wenn man die Flüssigkeiten direkt sich berühren lässt, sondern auch dann, wenn man dieselben durch eine poröse Membran, etwa eine thierische Membran von einander trennt. Füllt man z. B. eine Röhre, welche an dem untern Ende durch eine thierische Membran geschlossen ist, mit Alkohol und taucht sie dann in Wasser, so dass das Wasser die Membran berührt, so tritt ein Austausch der beiden Flüssigkeiten ein, es geht Alkohol durch die Membran zum Wasser und umgekehrt Wasser zum Alkohol, und dieser Durchgang dauert so lange fort, bis die Flüssigkeit an beiden Seiten der Membran gleichmässig gemischt ist. Ganz dasselbe ist der Fall, wenn wir eine Salzlösung und Wasser durch eine solche Membran trennen.

In den meisten Fällen beobachtet man hierbei eine Zunahme der Flüssigkeitsmenge auf der einen Seite der Membran; so wächst z. B. bei dem Versuche mit Alkohol die Flüssigkeitsmenge in der Röhre, ein Beweis, dass in gleichen Zeiten ein grösseres Volumen Wasser durch die Membran geht als Alkohol. Ebenso findet man, dass in der Röhre die Menge der Flüssigkeit zunimmt, wenn man sie mit Salzlösung gefüllt hat, füllt man die Röhre mit Wasser und taucht sie in eine Salzlösung, so nimmt die Menge des Wassers in der Röhre ab.

Schon dieser Umstand beweist, dass die Membran bei diesem Vorgange eine wesentliche Rolle spielt, und dass wir es hier nicht lediglich mit einer durch Zwischenschaltung der Membran etwas verzögerten Diffusion zu thun haben. Das tritt noch mehr dadurch hervor, dass die Natur der Membran auf die Mengen der sich austauschenden Flüssigkeiten von bestimmendem Einfluss ist. Ersetzt man nämlich die thierische Membran

bei dem vorhin erwähnten Versuche durch eine dünne Kautschukplatte und füllt dann Alkohol in die Röhre, so sinkt beim Eintauchen der Röhre in Wasser jetzt das Niveau der Flüssigkeit in der Röhre. Während also durch eine thierische Membran der Strom des Wassers zum Alkohol der stärkere ist, ist durch eine Kautschukplatte der Strom des Alkohols zum Wasser der stärkere.

Man unterscheidet daher die Diffusion durch Membranen von der zuerst betrachteten und bezeichnet sie mit dem Namen Endosmose.

Schon die ältern Versuche von Dutrochet, Jerichau, Brücke und Vierordt, welche als Maass der Endosmose die Volumänderungen im Innern der Röhre nahmen, führten zu dem Resultate, dass unter sonst gleichen Umständen, also bei Anwendung gleicher und gleich grosser Membranen die Stärke der Endosmose von Salzlösungen der Dichtigkeit der Lösungen, die Dichtigkeit in der vorhin angegebenen Weise definirt, proportional sei, das heisst, dass die Wassermengen, welche in gleicher Zeit durch die Membran in die Röhre treten, in demselben Verhältnisse su einander stehen, wie die Dichtigkeit der Lösung in der Röhre.

Dieser Satz wurde durch die spätern genauen Versuche von Jolly bestätigt, der nicht die Volumzunahme in der Röhre, sondern durch eine Analyse des Röhreninhaltes die Menge der sich austauschenden Substanzen, also die Menge des Wassers, welche für eine gewisse Menge austretenden Salzes in die Röhre eintrat, bestimmte. Es ergab sich, dass die Menge des austretenden Salzes und die des dafür eintretenden Wassers in gleichen Zeiten der Dichtigkeit der Lösung proportional war.

Jolly schloss weiter aus seinen Versuchen, dass bei gleichbleibender Membran und gleichbleibender Temperatur für eine gewisse Menge des der Endosmose ausgesetzten Stoffes stets die gleiche Menge Wasser durch die Membran hindurchtrat. Es ergab sich nämlich, indem er die Endosmose von Salzlösungen in durch oftmaliges Erneuern stets, so lange der Versuch dauerte, reingehaltenes Wasser stattfinden liess, dass wenn alles Salz durch die Membran hindurch gewandert war, immer eine der ursprünglichen Salzmenge proportionale Wassermenge statt dessen in das Rohr eingetreten war. So fand sich, dass bei der Endosmose von Kochsalz für jedes Gramm ausgetretenen Salzes bei seinen Versuchen nahezu 4 Gr. Wasser in die Röhre eingetreten waren. Diese für ein Gramm Salz bei der Endosmose durch die Membran hindurchtretende Wassermenge nannte Jolly die endosmotischen Aequivalente der betreffenden Substanzen. So sind unter andern die endosmotischen Aequivalente von

Kochsalz	4,22
Kalisulphat	12,70
Kalihydrat	231,40
Alkohol	4,13.

Diese Werthe ändern sich mit der Membran; so erhält Eckhard bei Anwendung von andern Membranen, Herzbeutel eines Rindes, für Kochsalz den Werth 3,2.

Nach spätern Versuchen von Schmidt, Ludwig und Eckhard scheint indess das endosmotische Aequivalent nicht in dem Sinne constant zu sein, dass stets bei allen Concentrationen für 1 Gr. Salz die gleiche Wasser-

menge durch eine Membran hindurchgeht. Das heisst führt man den Versuch nicht so wie Jolly, so dass man den Versuch erst beendet, wenn alles Salz durch die Membran gegangen ist, sondern so, dass man trotz des Fortwanderns des Salzes und Eindringens des Wassers die Lösung auf der einen Seite der Membran in constanter Concentration erhält, so scheint das endosmotische Aequivalent von der Concentration der Lösung abzuhängen. So fand Eckhard, als er concentrirte Salzlösung der Endosmose aussetzte und durch Hinzufügen von festem Kochsalz die Lösung des Kochsalzes immer gesättigt erhielt, bei Anwendung des Herzbeutels des Rindes für Kochsalz den Werth 3,2, als er eine Lösung, welche 22 Theile Kochsalz auf 100 Wasser enthielt, anwandte, den Werth 2,88, und bei Anwendung einer 12,5 Theile enthaltenden Kochsalzlösung 2,34. Darnach schiene also das endosmotische Aequivalent bei kleinerer Concentration kleiner zu werden.

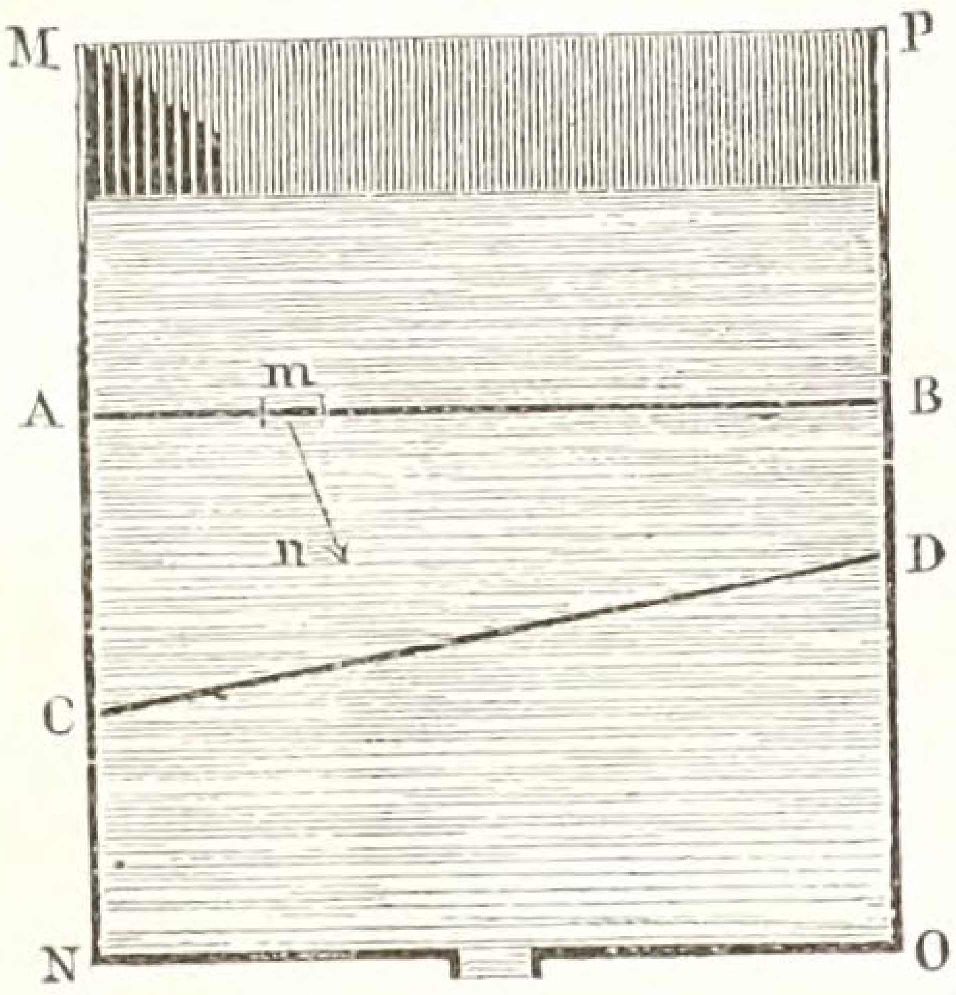
Da bei der Endosmose, wie wir vorhin sahen, die Beschaffenheit der Membran von wesentlichem Einfluss ist, so dass bei verschiedenen Membranen das Verhältniss der Menge der sich austauschenden Substanzen ein ganz verschiedenes sein kann, so ist die Endosmose nicht einfach als eine Diffusion durch die Poren der Membran zu betrachten. Wir müssen vielmehr annehmen, dass die Membran von den beiden Flüssigkeiten, mit denen sie in Berührung ist, gewisse Quantitäten in sich aufsaugt, so dass dieselbe ein von ihrer Natur abhängiges Gemische beider Flüssigkeiten enthält. Dieses Gemische diffundirt dann durch die molekularen Anziehungen in die beiden die Membran begrenzenden Flüssigkeiten, indem jede aus der Membran diejenigen Theile fortnimmt, auf welche sie die stärkere Anziehung ausübt. Wenn deshalb eine Membran bei gleichzeitiger Berührung von Wasser und Alkohol ein grösseres Quantum Wasser in sich aufsaugt als Alkohol, wird durch eine solche der Strom des Wassers der stärkere sein. Saugt sie dagegen Alkohol in stärkerm Maasse auf, so wird der Alkoholstrom der stärkere sein.

§. 52.

Ausfluss der Flüssigkeiten. Toricelli'scher Satz. Wenn man in den Boden oder in die Seitenwand eines Gefässes in einer gewissen Tiefe unterhalb des Niveaus einer Flüssigkeit eine Oeffnung anbringt, so fliesst in Folge des zur Wand normalen Druckes der Flüssigkeit die an der Oeffnung befindliche Flüssigkeit in der Richtung des Druckes mit einer gewissen Geschwindigkeit aus der Oeffnung hervor. Diese Geschwindigkeit ist um so grösser, je tiefer unterhalb des Niveaus der Flüssigkeit die Oeffnung angebracht ist. Um diese Geschwindigkeit und das sonstige Verhalten der bewegten Flüssigkeit abzuleiten, denken wir uns, die Flüssigkeit fliesse aus einem Gefässe ab, in welchem durch Nachfliessen aus einem Reservoir das Niveau der Flüssigkeit auf constanter Höhe gehalten werde. Da die unten aus der Oeffnung ausfliessende Flüssigkeit sofort durch das Nachfliessen der höher stehenden wieder ersetzt wird, so muss die ganze in dem Gefässe befindliche Flüssigkeit in Folge des Ausfliessens in Bewegung gesetzt werden, und zwar muss sich unmittelbar nach dem Beginne des Ausfliessens in der Flüssigkeit des Gefässes ein stationärer Bewegungszustand herstellen. Das heisst, es muss durch jeden beliebig gelegten Quer-

schnitt des Gefässes in gleichen Zeiten die gleiche Flüssigkeitsmenge hindurchgehen. Denn ist AB Fig. 59 ein Querschnitt durch die Flüssigkeit des Gefässes $MNOP$ und CD irgend ein anderer Querschnitt, so bleibt die Flüssigkeitsmenge innerhalb dieser Querschnitte immer dieselbe; es muss daher in gleichen Zeiten durch den Querschnitt AB in den zwischen den Querschnitten befindlichen Raum ebenso viel Flüssigkeit eintreten, als durch CD diesen Raum verlässt. Nennen wir nun die mittlere, senkrecht gegen AB gerichtete Geschwindigkeit der Flüssigkeit u, die Grösse des Querschnitts Q, und haben u' und Q' dieselbe Bedeutung für den Querschnitt CD, so ist der Ausdruck dieses stationären Zustandes die Gleichung

Fig. 59.



$$Qu = Q'u' \ldots . \text{(I)}$$

Wir haben hier die mittlere, gegen die Querschnitte senkrechte Geschwindigkeitscomponente einführen müssen, denn in Wirklichkeit ist weder die Bewegung aller Flüssigkeitstheilchen senkrecht gegen die beliebig gelegten Querschnitte gerichtet, noch ist die Geschwindigkeit aller die gleiche. Wir bezeichnen dann als mittlere gegen den Querschnitt senkrechte Geschwindigkeitscomponente jene, welche alle Flüssigkeitstheilchen hätten haben müssen, damit in der Zeiteinheit genau dieselbe Flüssigkeitsmenge den betreffenden Querschnitt passirt, welche ihn wirklich bei einer uns unbekannten Vertheilung der Geschwindigkeiten passirt hat.

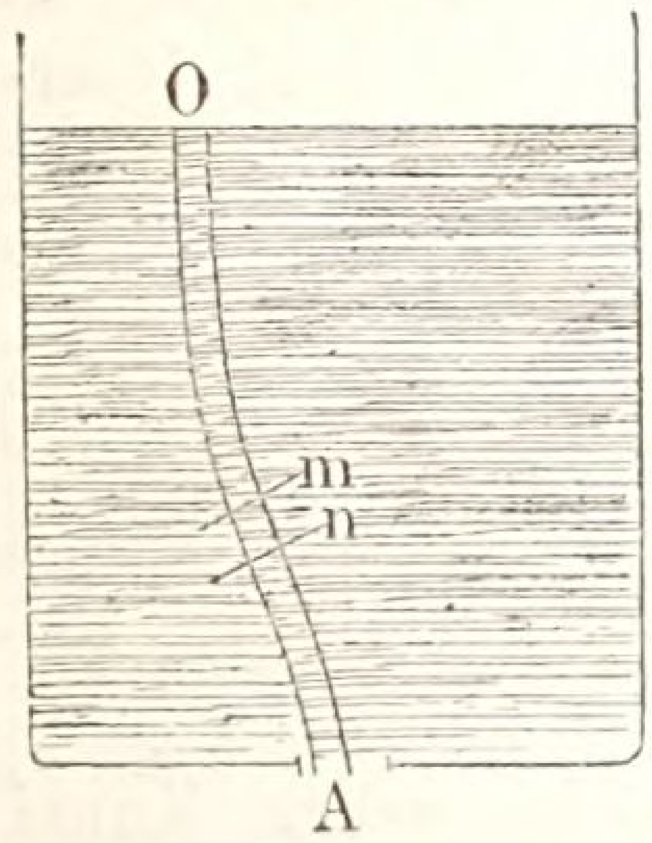
Obige Gleichung sagt dann aus, dass die mittleren Geschwindigkeiten, mit denen die Flüssigkeit die verschiedenen Querschnitte in normaler Richtung passirt, der Grösse der Querschnitte umgekehrt proportional sind.

Der stationäre Bewegungszustand der Flüssigkeit in dem Gefässe ist ferner dadurch charakterisirt, dass während seiner Dauer die Flüssigkeit durch ein beliebiges Element irgend eines Querschnittes immer in derselben Richtung und immer mit derselben Geschwindigkeit hindurchgeht, dass also die Flüssigkeitstheilchen in dem Gefässe sich immer in denselben Bahnen bewegen. Das ergibt sich einfach aus der Ueberlegung, dass die bewegenden Kräfte und die ganzen Umstände, unter denen die Bewegung stattfindet, immer dieselben sind. Wird also die Flüssigkeit einmal durch eine bestimmte Stelle eines Querschnitts nach einer bestimmten Richtung mit einer bestimmten Geschwindigkeit hingetrieben, so muss, da die Umstände immer dieselben bleiben, das immer der Fall sein. Dieser Umstand gestattet uns, die Aenderung der Geschwindigkeiten im Gefässe und dann mit Gleichung I die Geschwindigkeit an der Ausflussöffnung zu bestimmen. Wir haben dazu nur den Satz der Mechanik anzuwenden, dass die einer Masse ertheilte Bewegungsgrösse gleich ist dem Producte aus den wirksamen Kräften und der Zeit, während welcher die Kräfte auf die Masse gewirkt haben.

Sei zu dem Ende OA Fig. 60 der Weg, den ein Flüssigkeitselement von der Oberfläche zur Ausflussöffnung nimmt, so werden auch alle folgenden von O herabfliessenden Flüssigkeitstheile denselben Weg nehmen,

wir können also OA als einen stetig mit Flüssigkeit gefüllten Kanal betrachten, in welchem an jeder Stelle die Flüssigkeit sich parallel zur Kanalaxe, also normal zu den zur Kanalaxe senkrechten Querschnitten bewegt.

Fig. 60.



Es sei nun bei m in der Tiefe h unter der Oberfläche ein solcher Querschnitt des Kanals von der Grösse q, und es sei v die Geschwindigkeit der Flüssigkeit in diesem Querschnitte. In der unendlich kleinen Zeit dt wird dann durch diesen Querschnitt das Flüssigkeitsvolumen $qvdt$ hindurchfliessen. Das im Beginne der Zeit dt den Querschnitt m durchsetzende Flüssigkeitstheilchen erreicht am Ende desselben den Querschnitt n, dessen Abstand von m der von dem Flüssigkeitstheilchen zurückgelegte Weg vdt ist. Auf diesem Wege erhält nun jedes ihn passirende Flüssigkeitstheilchen die Geschwindigkeitsänderung dv, und daraus folgt, dass die in der Zeit dt durch den Querschnitt m hindurchgehende Flüssigkeitsmasse in dieser Zeit, während sie sich von m nach n bewegt, durch die wirksamen Kräfte den Geschwindigkeitszuwachs dv erhält. Diese Folgerung setzt uns in den Stand, den oben erwähnten Satz der Mechanik anzuwenden.

Das in der Zeit dt durch den Querschnitt hindurchfliessende Flüssigkeitsvolumen ist $qvdt$. Die Masse dieser Flüssigkeit ist, wenn wir das specifische Gewicht derselben mit s bezeichnen,

$$\frac{s\,q\,v\,d\,t}{g};$$

der Geschwindigkeitszuwachs dieser Masse ist dv, somit die ihr in der Zeit dt ertheilte Bewegungsgrösse

$$\frac{s\,q\,v\,d\,t}{g} \cdot d\,v.$$

Diese in der Zeit dt der Masse ertheilte Bewegungsgrösse muss nun gleich dem Producte aus den wirksamen Kräften in die Zeit dt sein.

Diese wirksamen Kräfte sind erstens das Gewicht der Masse selbst, welche mit ihrer der Bewegungsrichtung parallelen Componente die Masse nach der Bewegungsrichtung beschleunigt. Bildet die Richtung der Bewegung mit der Verticalen den Winkel α, so ist diese Componente

$$s\,q\,v\,d\,t \,.\, \cos \alpha.$$

Da nun $v\,d\,t$ der Abstand der beiden Schnitte parallel der Bewegungsrichtung ist, so ist $v\,d\,t \cos \alpha$ der verticale Abstand des Schnittes n von m, oder die Zunahme der Tiefe h, um welche die Flüssigkeit auf diesem Wege tiefer hinabsinkt. Bezeichnen wir diese Zunahme mit dh, so können wir die von dem Gewichte der Flüssigkeit herrührende bewegende Kraft setzen

$$s\,q\,v\,d\,t \cos \alpha = s\,q\,d\,h.$$

In der Flüssigkeit wirkt nun in der Schicht m ein gewisser Druck, der für die Flächeneinheit gleich p sei; in der tiefer liegenden Schicht n ist dieser Druck ein anderer und zwar grösserer, sei er $p + dp$. Da nun die Flüssigkeit bei dem Hinabsinken von einer Stelle kleinern sich zu einer Stelle grössern Druckes bewegt, so wirkt diese Druckdifferenz der Bewegung entgegen, es wirkt daher auf diesem Wege der Druck qdp auf die

Bewegung verzögernd ein. Die die Flüssigkeit bewegende Kraft ist die Differenz der beschleunigenden und der verzögernden, somit

$$s\,q\,dh - q\,dp.$$

Da dies die überhaupt auf die bewegte Masse einwirkende Kraft ist, so muss das Product derselben und der Zeit dt gleich der in der Zeit dt erhaltenen Bewegungsgrösse sein

$$\frac{s\,q\,v\,dt}{g}\,dv = (sqdh - qdp)\,dt,$$

oder es muss, indem wir jetzt auf beiden Seiten durch qdt dividiren,

$$\frac{s}{g}\,vdv = sdh - dp.$$

Diese Gleichung gibt uns an, wie sich die Geschwindigkeit in unserm Kanal ändert, wenn die Flüssigkeit um dh herabsinkt und sich in der Niveaudifferenz dh der Druck p um dp ändert. Wir erhalten daraus die Geschwindigkeit v in der Tiefe h, wenn wir für alle Tiefen von $h = 0$ bis $h = h$ diesen Ausdruck bilden und alle diese Ausdrücke summiren. Setzen wir die dem Werthe $h = 0$ entsprechende Geschwindigkeit gleich v_0, den entsprechenden Druck gleich p_0, so haben wir also die Summe zu bilden

$$\int_{v_0}^{v} \frac{s}{g}\,v\,dv = \int_{h=0}^{h} s\,dh - \int_{p_0}^{p} dp.$$

Diese Summe ist nach den Bemerkungen des §. 1

$$\frac{1}{2}\,\frac{s}{g}\left(v^2 - v_0^{\,2}\right) = s\,h - \left(p - p_0\right) \ldots . \text{(II)},$$

ein Ausdruck, welcher uns, wenn v_0 und p_0 gegeben sind, die Geschwindigkeit v in unserm Kanal in der Tiefe h liefert.

Diese Gleichung gibt uns aber überhaupt die Geschwindigkeit v in der Tiefe h unter dem Niveau, denn da wir über den Kanal OA gar keine besondere Voraussetzung gemacht, gilt derselbe Ausdruck für jeden Flüssigkeitsfaden, den wir durch das Gefäss gelegt denken, somit für die ganze Flüssigkeit.

Ist nun H die Höhe der Flüssigkeit über der Ausflussöffnung und ist p_1 der in der Ausflussöffnung der ausströmenden Flüssigkeit entgegen wirkende Druck, so wird die Geschwindigkeit v_1 in der Ausflussöffnung

$$v_1^{\,2}\left(1 - \frac{v_0^{\,2}}{v_1^{\,2}}\right) = 2\,gH - 2\,\frac{g}{s}\left(p_1 - p_0\right).$$

Die sich hieraus ergebende Geschwindigkeit v_1 werden wir als die Ausflussgeschwindigkeit anzusehen haben, denn setzen wir voraus, dass der Querschnitt der Oeffnung gegen den des Gefässes nur klein ist, so wird, da bei geschlossener Oeffnung der Druck normal gegen die Wandfläche ist, die Geschwindigkeit v_1 senkrecht gegen die Oeffnung gerichtet sein. In wie weit wir an dieser Annahme eine Correction anbringen müssen, werden wir im nächsten §. erkennen. Die Geschwindigkeit v_0 in unserer Gleichung ist die mittlere gegen die Oberfläche senkrechte Geschwindigkeit in der Oberfläche für $h = 0$. Dieselbe ist zwar bei dem Beginne des

Ausflusses gleich Null zu setzen, später aber nicht; wir dürfen aber, wenn die Oberfläche horizontal ist, immer die ganze Geschwindigkeit, mit welcher die Flüssigkeitstheilchen die Oberfläche passiren, als zur Oberfläche senkrecht betrachten, dann ergibt sich v_0 aus der Gleichung

$$Q_0 v_0 = q_1 v_1,$$

wenn Q_0 der Querschnitt des Gefässes in dem Niveau der Flüssigkeitsoberfläche und q_1 der Querschnitt der Oeffnung ist. Damit wird

$$v_1^2 \left(1 - \frac{q_1^2}{Q_0^2}\right) = 2 g H - 2 \frac{g}{s} . \left(p_1 - p_0\right).$$

Setzen wir nun voraus, dass in der Ausflussöffnung der der Bewegung entgegenwirkende Druck derjenige der Atmosphäre ist, derselbe, der auch in der Oberfläche der Flüssigkeit wirkt, so ist $p_1 = p_0$ und

$$v_1 = \sqrt{\frac{2 g H}{1 - \frac{q_1^2}{Q_0^2}}}.$$

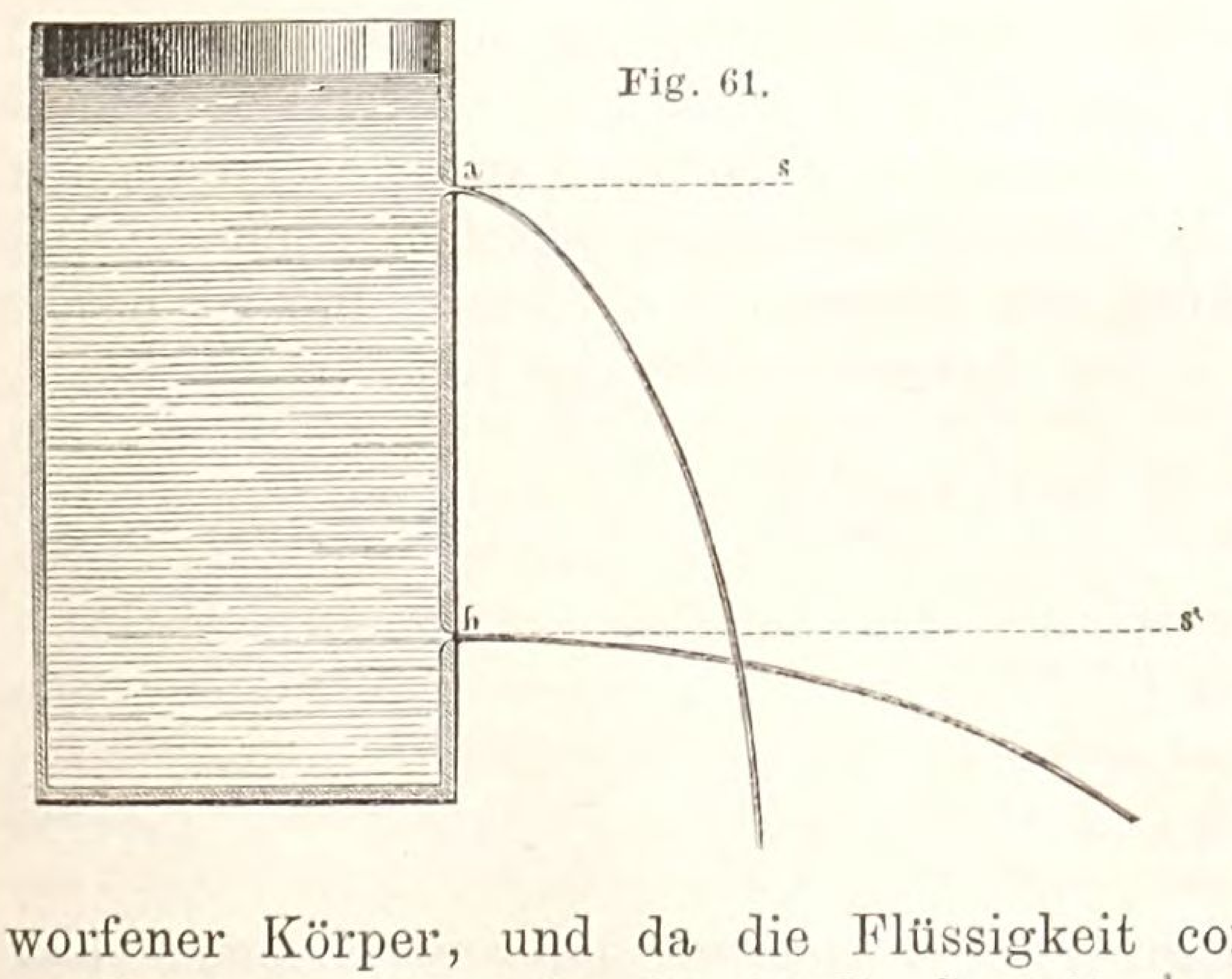
Setzen wir schliesslich voraus, dass q_1 gegen Q_0 hinreichend klein ist, so ist der Nenner nicht merklich von eins verschieden und es wird

$$v_1 = \sqrt{2 g H}.$$

Die Geschwindigkeit, mit welcher eine Flüssigkeit die Oeffnung verlässt, ist der Quadratwurzel aus der Druckhöhe der Flüssigkeit proportional, sie ist dieselbe, wie wenn die aus der Oeffnung hervortretende Flüssigkeit die Höhe vom obern Niveau bis zur Ausflussöffnung durchfallen hätte. In dieser Form ist das Gesetz des Ausflusses schon von Toricelli erkannt worden, nach welchem dasselbe den Namen des Toricelli'schen Satzes führt.

Aus dieser Gleichung für v_1 ergibt sich weiter, dass die Ausflussgeschwindigkeit nicht von der Natur der ausfliessenden Flüssigkeit abhängt, dass sie die gleiche für specifisch leichte und schwere Flüssigkeiten ist. Es liegt das darin, dass wenn $p_1 = p_0$ ist, nur der Druck der Flüssigkeit die bewegende Kraft ist, deshalb hängt die Grösse der bewegten Masse in derselben Weise vom specifischen Gewichte ab, wie die bewegende Kraft.

Fig. 61.



Die Richtigkeit der abgeleiteten Sätze kann man leicht durch den Versuch nachweisen, am bequemsten, wenn man wie Fig. 61 die Oeffnung in einer Seitenwand des Gefässes anbringt, so dass die Flüssigkeit in horizontaler Richtung ausströmt. Dieselbe bewegt sich dann, wie ein horizontal geworfener Körper, und da die Flüssigkeit continuirlich in einem Strahle ausfliesst, so muss der Strahl die Gestalt einer Parabel annehmen. Indem man dann gleichzeitig den horizontalen und verticalen Abstand eines Punktes

des Strahles von der Ausflussöffnung misst, kann man die Ausflussgeschwindigkeit berechnen. Findet man, dass ein Punkt des Strahles, den man etwa dadurch fixirt, dass man eine an einem Stativ befindliche Spitze seitlich an den Strahl heranschiebt, bis sie von demselben getroffen wird, von der Ausflussöffnung in horizontaler Richtung um x, in verticaler um y entfernt ist, so ist

$$x = v_1 . t; \quad y = {}^1\!/_2\, g\, t^2; \quad v_1{}^2 = \frac{g\, x^2}{2\, y}; \quad x^2 = 4\, H y.$$

Man findet sowohl durch Berechnung von v als durch Prüfung der sich so ergebenden Beziehung zwischen x und y die Theorie hinreichend bestätigt.

§. 53.

Hydraulischer Druck. Unsere Gleichung II des vorigen §. enthält noch eine bemerkenswerthe Beziehung für die Vertheilung der Drucke in einer strömenden Flüssigkeit, sie zeigt, dass dieselbe dort eine ganz andere ist als in einer ruhenden Flüssigkeit, dass also an irgend einer Stelle der Druck ein ganz anderer als der hydrostatische ist. Lösen wir nämlich die Gleichung II nach p auf, so erhalten wir in dem Werthe von p den Druck, der in der strömenden Flüssigkeit sich in der Tiefe h unter der Oberfläche in der Flächeneinheit findet. Derselbe wird

$$p = p_0 + s\, h - {}^1\!/_2\, \frac{s}{g}\, (v^2 - v_0{}^2).$$

Die beiden ersten Glieder auf der rechten Seite der Gleichung geben den in der Flächeneinheit der betrachteten Schicht vorhandenen hydrostatischen Druck und man sieht, dass der Druck p um eine Grösse kleiner ist, welche dem Quadrate der Strömungsgeschwindigkeit proportional ist. Man nennt den Druck den hydraulischen Druck.

Man kann den hydraulischen Druck leicht bestimmen, wenn man die Geschwindigkeit v in dem betreffenden Querschnitt kennt, und diese lässt sich leicht erhalten, wenn man Gefässe von solcher Form hat, dass man annehmen kann, die Geschwindigkeit v sei senkrecht zum Querschnitte des Gefässes. Das ist z. B. der Fall, wenn die Strömung in einem aus einem grossen Reservoir vertical absteigenden Rohr stattfindet, dessen Querschnitt zwar gegen den des Reservoirs klein, aber doch so gross ist, dass wir die Bewegung als nicht durch Reibung beeinflusst ansehen können. Hat dann der betrachtete Querschnitt des Rohres die Grösse q, und ist q_1 die Grösse der Ausflussöffnung, v_1 die Ausflussgeschwindigkeit

$$v_1 = \sqrt{2\, g\, H},$$

so ist v gegeben durch

$$v\, q = v_1\, q_1,$$

somit

$$p = p_0 + s\, h - {}^1\!/_2\, \frac{s}{g}\, v_1{}^2 \left(\frac{q_1{}^2}{q^2} - \frac{v_0{}^2}{v_1{}^2}\right).$$

Ist das Reservoir hinreichend gross, so dürfen wir ohne merklichen Fehler $v_0 = 0$ setzen; führen wir dann obigen Werth von v_1 in die Gleichung ein, so wird:

$$p = p_0 + s\left\{h - H\left(\frac{q_1}{q}\right)^2\right\}.$$

Man sieht somit, dass der hydraulische Druck wesentlich von dem Verhältniss der Querschnitte q_1 und q abhängt, dass je nachdem das zweite Glied auf der rechten Seite sehr verschiedene Werthe annehmen kann, immer ist aber, wenn q_1 nicht sehr klein gegen q ist, der hydraulische Druck kleiner als der hydrostatische.

Würde z. B. $q_1 = \frac{1}{2}\, q$, so würde für $h > \frac{1}{4}\, H$ der Druck $p > p_0$, wenn man also das Rohr unterhalb dieser Stelle anbohrte, so würde trotz des auf dieser Oeffnung wirkenden Drucks der äussern Luft Flüssigkeit aus dem Rohr seitlich ausfliessen, in dem Niveau $h = \frac{1}{4}\, H$ würde keine Flüssigkeit ausfliessen, in Tiefen $h < \frac{1}{4}\, H$ würde dagegen von aussen her Luft in die Röhre eindringen, indem der Druck an diesen Stellen kleiner als p_0, als der äussere Luftdruck ist.

Lassen wir die Flüssigkeit durch ein cylindrisches Rohr ausfliessen, dessen unterster Querschnitt die Ausflussöffnung ist, so wird

$$p = p_0 - s\,(H - h).$$

Der Druck ist an allen Stellen oberhalb der Ausflussöffnung kleiner als der auf der Flüssigkeit lastende Luftdruck. Anwendungen dieses Satzes werden wir im nächsten Kapitel kennen lernen.

§. 54.

Ausflussmenge. Kennt man die Ausflussgeschwindigkeit einer Flüssigkeit und den Querschnitt der Ausflussöffnung, so erhält man in dem Product beider unmittelbar das in der Zeiteinheit ausfliessende Flüssigkeitsvolumen, denn dieses Product liefert uns den in der Zeiteinheit aus der Oeffnung hervortretenden Flüssigkeitscylinder. Darnach sollte also das in der Zeiteinheit ausfliessende Flüssigkeitsvolumen sein

$$m = q_1 \sqrt{2\,g\,H}.$$

Misst man nun die Ausflussmenge, so findet man sie beträchtlich kleiner, man findet die wirklich ausgeflossene Menge

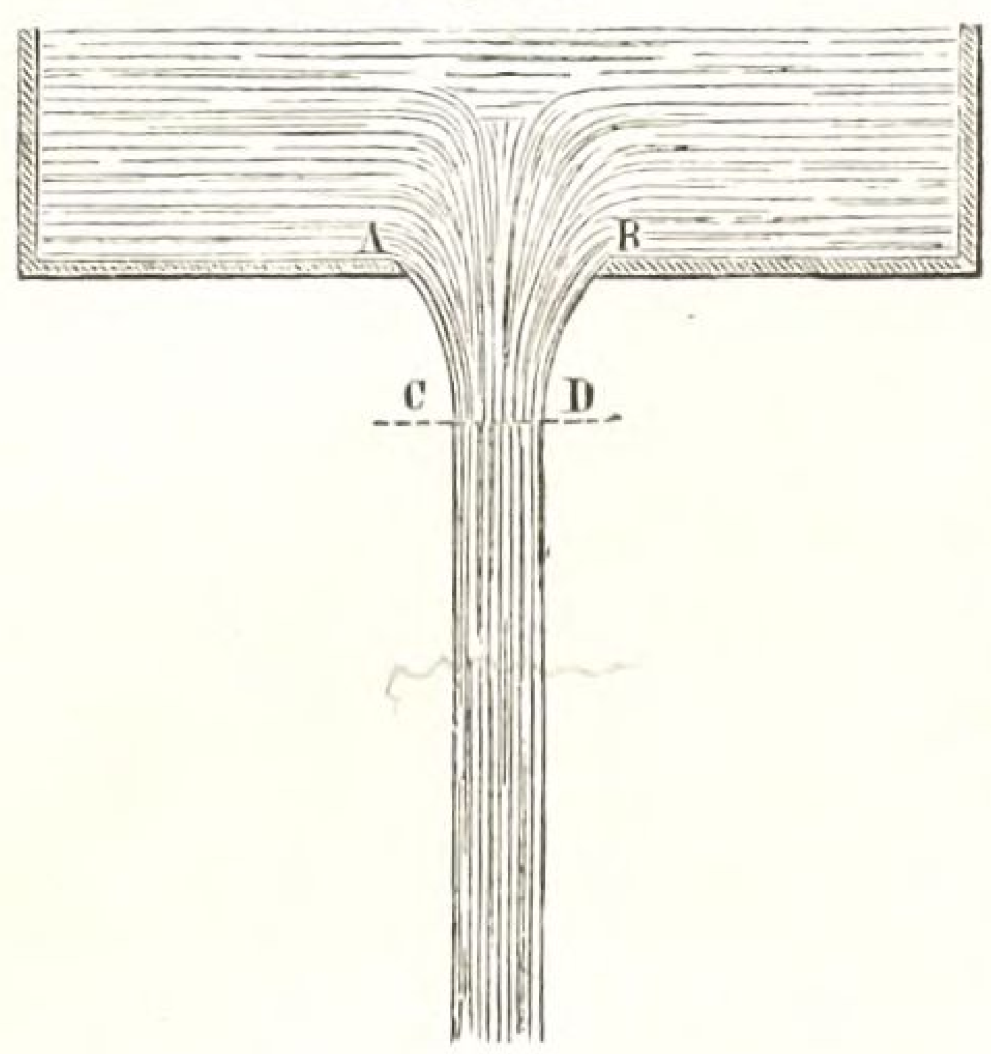
$$m_1 = 0{,}63\; m,$$

oder bei einer Druckhöhe von weniger als zwei Decimeter gleich 0,64 m, immer also nicht ganz zwei Drittel der theoretischen.

Dieses Resultat scheint mit dem vorher für die Ausflussgeschwindigkeit erhaltenen im Widerspruch zu stehen, ein Widerspruch, der jedoch durch eine genauere Betrachtung des austretenden Strahles sofort gehoben wird. Der austretende Strahl ist nämlich nicht wie bei Berechnung der Ausflussmenge vorausgesetzt wurde, ein Cylinder, sondern hat, wie Fig. 62 zeigt, unmittelbar unter der Ausflussöffnung eine konische Form, er schnürt sich sofort so zusammen, dass er in geringem Abstande von der Ausflussöffnung nur mehr einen Querschnitt hat, der nicht ganz $\frac{2}{3}$ des Querschnittes der Ausflussöffnung ist. In Folge dieser Zusammenschnürung des Strahles muss natürlich die Ausflussmenge beträchtlich kleiner werden, sie kann, wie es die Erfahrung zeigt, nur jene sein, als wenn die Stelle der stärksten Contraction die Ausflussöffnung wäre.

Im Grossen und Ganzen kann man leicht erkennen, durch welche Umstände diese Contraction zu Stande kommt, wie also, obwohl die Ausflussgeschwindigkeit mit der theoretischen übereinstimmt, die Menge in diesem Verhältnisse kleiner ist, wenn es auch noch nicht gelungen ist, die Umstände derart in Rechnung zu ziehen, dass man die Contraction zu berechnen im Stande wäre. Die Ursache der Contraction ist die, dass nicht die Geschwindigkeit aller die Oeffnung passirender Flüssigkeitstheile normal zur Oeffnung ist.

Fig. 62.



Es bewegen sich nämlich, wie es in der Figur angedeutet ist, nicht nur die senkrecht über der Oeffnung befindlichen Theilchen, sondern auch die seitlich liegenden gegen die Oeffnung hin. Man kann das sehen, wenn man Wasser, das aus einem Glasgefässe ausfliesst, durch Harzpulver etwas trübt, so dass man an der Bewegung der Körnchen diejenige des sie mitführenden Wassers erkennen kann. Die von den Seiten herkommenden Wassertheilchen haben somit eine seitliche, gegen das Innere des Strahles gerichtete Geschwindigkeit; der Strahl besteht aus einem axialen Theile, dessen Geschwindigkeit sofort normal zur Oeffnung war, und einer konischen Hülle, welche von convergirenden Flüssigkeitsfäden gebildet ist. Der Strahl muss sich demnach von der Oeffnung ab bis zu der Stelle zusammenziehen, wo die von entgegengesetzter Seite herkommenden Wasserfäden sich treffen, dort hat diese als Contractio venae bezeichnete Zusammenschnürung ihren grössten Werth erreicht. Denn dort müssen die seitlichen Geschwindigkeiten der von entgegengesetzter Seite kommenden Flüssigkeitstheilchen sich aufheben und eine zur Oeffnung normale Resultirende geben. Da somit erst von dieser Stelle ab die Flüssigkeit sich normal zur Oeffnung bewegt, ist in Bezug auf die Berechnung der Ausflussmenge dieser Querschnitt des Strahles als Ausflussöffnung zu betrachten. Da nun an dieser Stelle der Querschnitt nur 0,63 der Oeffnung ist, muss die Ausflussmenge auch nur derselbe Bruchtheil der vorher berechneten sein.

Aus diesem Verhalten der Flüssigkeiten lässt sich auch leicht ableiten, welchen Einfluss kurze Ansatzrohre an der Ausflussöffnung auf die Menge der ausfliessenden Flüssigkeit haben. Sind die Rohre nicht länger als etwa der doppelte mittlere Durchmesser, so gelten auch dann noch die abgeleiteten Ausflussgesetze. Gibt man denselben eine konische Form, so dass sie annähernd die Gestalt des Strahles haben und dass die Oeffnung sich an der Stelle der stärksten Contraction befindet, so wird dadurch, wenn wir als Ausflussöffnung die Oeffnung in der Gefässwand ansehen, die Ausflussmenge nicht geändert, sieht man aber die Mündung der Röhre als Ausflussöffnung an, so wird die Ausflussmenge bedeutend vergrössert, da sie so gross ist, wie sie sich aus dem Toricelli'schen Satze für diese Oeffnung ergibt.

Setzt man an die Oeffnung ein cylindrisches Rohr oder an das erste konische Rohr ein zweites, welches sich nach aussen erweitert und allmählich in einen Cylinder übergeht, dessen Querschnitt der Oeffnung gleich

ist, so wird die Ausflussmenge beträchtlich vergrössert, wenn die ausfliessende Flüssigkeit die Röhrenwände benetzt, sie wird etwa 0,8 — 0,9 der theoretischen Ausflussmenge. Werden die Röhrenwände nicht benetzt, so haben solche Ansatzröhren keinen Einfluss.

Durch die einfache konische Ausflussöffnung wird, wie sich schon aus der Angabe der ausfliessenden Flüssigkeitsmenge ergibt, die Bewegung der Flüssigkeit nicht geändert; in cylindrischen Röhren wird durch die Adhäsion an den Wänden der ausfliessende Strahl verbreitert und nahezu cylindrisch gemacht. In Folge dessen würde bei ungeänderter Ausflussmenge der Strahl zerreissen und im Innern der Röhre ein luftleerer Raum entstehen; dem wirkt nun die Cohäsion des Wassers und der äussere Luftdruck entgegen, der zum Theil die Flüssigkeit in die Röhre nachtreibt, zum Theil den Ausfluss etwas verzögert. Die Verzögerung ist aber geringer als der Einfluss der Verbreiterung, deshalb tritt eine Vergrösserung der Ausflussmenge ein.

Sehr viel verwickelter werden die Erscheinungen, wenn man längere Röhren an die Ausflussöffnung ansetzt; in dem Falle lassen sich in Folge der gleich zu besprechenden Reibungen weder die Ausflussgeschwindigkeiten, noch die Ausflussmengen theoretisch berechnen, man ist dort auf die Resultate der Erfahrung angewiesen.

§. 55.

Reibung der Flüssigkeiten. Die am Schlusse des vorigen §. erwähnten Reibungen bei der Bewegung von Flüssigkeiten können doppelter Art sein, äussere und innere, äussere zwischen der sich bewegenden Flüssigkeit und den angrenzenden Wandungen, innere zwischen den sich berührenden Schichten der Flüssigkeit, wenn dieselben eine verschiedene Geschwindigkeit haben.

Die Reibung an den Wänden ist eine nothwendige Folge der Adhäsion der Flüssigkeit an den Wandungen, da durch diese die Flüssigkeiten angezogen werden, es muss sich also gewissermassen in jedem Momente die Flüssigkeit von den Wandungen losreissen. In Folge dessen muss diese Reibung als eine verzögernde Kraft der Bewegung entgegenwirken. Diese verzögernde Kraft muss, wie schon Newton entwickelte, der Grösse der Berührungsfläche zwischen Flüssigkeit und Wand und ebenso der Geschwindigkeit der Bewegung der Flüssigkeit proportional sein; denn je grösser die Berührungsfläche ist, um so mehr Moleküle müssen in jedem Momente von der Wand losgerissen werden, und je schneller die Flüssigkeit sich bewegt, um so öfter muss das Losreissen stattfinden. Da die Adhäsion der Flüssigkeiten nicht von dem Drucke derselben gegen die Wand abhängt, sondern nur von der Natur der Flüssigkeit und der festen Wand, wird auch die verzögernde Kraft der Reibung nicht von dem Drucke abhängen. Bezeichnen wir deshalb die verzögernde Kraft, welche in der Berührungsfläche von der Grösse eins der Bewegung entgegenwirkt, wenn die Geschwindigkeit, mit welcher die Flüssigkeit bewegt wird, der Einheit gleich ist, mit ε, so wird die in einer Fläche f bei einer Geschwindigkeit v vorhandene verzögernde Kraft

$$K = \varepsilon . f v$$

sein. Den so definirten Coefficienten ε nennt man den äussern Reibungscoefficienten. Wird die feste Wand von der Flüssigkeit vollkommen benetzt, so haftet dieselbe so fest, dass die an der Wand anliegende Schicht durch die bewegte Flüssigkeit überhaupt nicht losgerissen wird, es ist dann ε unendlich gross. Die an der Wand vorüberströmende Flüssigkeit bewegt sich also dann an einer dort festhaftenden Schicht von Flüssigkeit vorüber, es tritt in einem solchen Falle nur innere Reibung auf.

Als innere Reibung bezeichnet man die Verzögerung, welche eine Flüssigkeitsschicht erfährt, wenn sie an einer andern Schicht der Flüssigkeit vorübergeführt wird, wenn also die zweite Schicht in Ruhe ist oder sich langsamer bewegt. Dass eine solche Reibung vorhanden sein muss, folgt nothwendig daraus, dass die Flüssigkeitsmoleküle sich gegenseitig anziehen. Dadurch, dass die Flüssigkeitsschichten an einander vorüberfliessen, werden in jedem Momente Moleküle, welche sich in den der Gleichgewichtslage entsprechenden Abständen befinden, aus derselben entfernt, und in Folge der Vergrösserung der Entfernung gegen die relative Gleichgewichtslage zurückgezogen. Dadurch tritt eine Verzögerung der rascher bewegten, eine Beschleunigung der langsamer bewegten Schicht ein.

Auch für die aus dieser Reibung sich ergebende Verzögerung ergeben dieselben Ueberlegungen, die wir vorher für die äussere Reibung machten, dass sie der Grösse der berührten Fläche, der Geschwindigkeitsdifferenz der sich berührenden Schichten und ausserdem einer von der Natur der Flüssigkeit abhängigen Constanten proportional sein muss. Wir können demnach die in der Fläche f bei einer Geschwindigkeitsdifferenz dv zweier sich berührender resp. nur um den Abstand zweier Molekülschichten von einander entfernten Flüssigkeitsschichten in Folge der Reibung auftretende verzögernde Kraft ausdrücken durch

$$K = \varepsilon_1 f dv,$$

worin also ε_1 dann den Coefficienten der innern Reibung bedeuten würde. Man definirt indess denselben aus Zweckmässigkeitsgründen etwas anders. Da zwei sich unmittelbar berührende Schichten immer nur eine nicht messbare Geschwindigkeitsdifferenz haben können, wie sich schon daraus ergibt, dass die rascher strömende die langsamere beschleunigt, so würde man den Coefficienten ε_1 durch eine unmessbar grosse Zahl ausdrücken müssen, um die im Experiment sich zeigenden Verzögerungen wiedergeben zu können. Denken wir uns nun eine sehr grosse Anzahl n solcher Flüssigkeitsschichten über einander, so dass die letzte Schicht von der untersten um die Einheit der Länge entfernt ist, nehmen wir ferner an, dass jede folgende sich um dv langsamer bewege als die vorhergehende, so ist die Geschwindigkeitsdifferenz der ersten und letzten gleich $n.dv$. Als Reibungscoefficienten der Flüssigkeiten bezeichnet man dann die in der Flächeneinheit stattfindende Verzögerung, wenn die Geschwindigkeitsdifferenz der um die Längeneinheit von einander entfernten Schichten der Einheit gleich ist. Führen wir diese Differenz ndv in die Gleichung für K ein, so müssen wir schreiben

$$K = \frac{\varepsilon_1}{n} f(ndv) = \eta f(ndv).$$

Auch hier ist dv die Geschwindigkeitsdifferenz zweier benachbarter Schich-

ten, n die Anzahl der in der Einheit der Schichtdicke vorhandenen Schichten. Bezeichnen wir nun den Abstand zweier Schichten mit dx, so wird

$$n = \frac{1}{dx} \qquad n\,dv = \frac{dv}{dx}$$

und

$$K = \eta\, f \frac{dv}{dx}.$$

Die Geschwindigkeitsdifferenz der um die Einheit der Länge von einander entfernten Schichten, vorausgesetzt, dass je zwei benachbarte Schichten immer die Geschwindigkeitsdifferenz dv haben, ist uns also durch den Quotienten aus dv und dem Abstande dx der benachbarten Schichten gegeben. Wissen wir nun, wie sich die Geschwindigkeit mit dem Abstande x der Schichten von der betrachteten Schicht ändert, kennen wir also v als Function von x, so können wir nach den Bemerkungen des §. 1 diesen Quotienten leicht bestimmen. Ist in allgemeinen Zeichen $v = \varphi(x)$, so ist

$$\frac{dv}{dx} = \frac{\varphi(x + dx) - \varphi(x)}{dx} = \psi(x).$$

Dass der so definirte Reibungscoefficient η einen endlichen Werth hat, folgt schon daraus, dass wir den unmessbar grossen Werth ε_1 durch den ebenfalls unmessbar grossen Werth n dividirt haben.

Dass durch die Reibung der Flüssigkeiten die Geschwindigkeiten derselben andere werden müssen, als sie nach den Rechnungen des §. 52 sich ergeben, wenigstens dann, wenn die äussere Reibung so gross ist, dass die Wandschicht ganz in Ruhe ist oder doch merklich verzögert wird, ist selbstverständlich. Besonders dann muss die Reibung sich bemerklich machen, wenn der Querschnitt der fliessenden Flüssigkeit klein ist, wenn sie also in Röhren sich bewegen. Im Allgemeinen ist es jedoch äusserst schwierig, ja gar nicht durchführbar, selbst wenn man die Reibungscoefficienten kennt, die Reibung mit in Rechnung zu ziehen, da man dazu wissen müsste, nach welchem Gesetze die Geschwindigkeiten der einzelnen Schichten, wenn man von der Wand aus in das Innere der Flüssigkeit eindringt, sich ändern, man müsste nach der obigen Bezeichnungsweise v als Function von x bestimmen können.

In einem Falle lassen sich indess die Rechnungen vollständig durchführen, nämlich dann, wenn die Flüssigkeiten durch ein horizontales capillares Rohr von überall gleichem Querschnitt unter constantem Druck ausfliessen. In dem Falle ist nämlich in jedem Querschnitte die Bewegung nur parallel der Röhrenaxe, eine seitliche Strömung findet nicht statt und weiter ist dann die Bewegung eine gleichförmige, es wird also die ganze bewegende Kraft zur Ueberwindung der Reibung verwandt. Dadurch aber lässt sich in diesem Falle die Bewegung berechnen, indem man die beschleunigenden und verzögernden Kräfte einander gleich setzt. In jedem zur Cylinderaxe senkrechten Querschnitte ändert sich die Geschwindigkeit mit dem Abstande des betreffenden Flüssigkeitstheilchens von der Cylinderaxe, sie wird kleiner, je mehr man sich der Röhrenwand nähert, an allen gleich weit von der Axe entfernten Stellen ist aber die Geschwindigkeit dieselbe. Die Flüssigkeit in der Röhre theilt sich also in concentrische Hohlcylinder, deren jeder eine bestimmte, auf seiner ganzen

der Länge der Röhre gleichen Länge gleiche Geschwindigkeit besitzt, welche Geschwindigkeit von Cylinder zu Cylinder sich ändert.

Für irgend einen Cylinder ergibt sich aus dieser Geschwindigkeitsvertheilung als beschleunigende Kraft an irgend einer Stelle die Differenz der hydraulischen Drucke an dieser Stelle und an einer von derselben nur unendlich wenig in der Richtung der Strömung entfernten Stelle, ferner die Reibung an dem der Röhrenaxe nähern Cylinder, welcher als der rascher fliessende den betrachteten Cylinder beschleunigt. Als verzögernde Kraft tritt die Reibung des betrachteten Cylinders an dem der Röhrenwand nähern Cylinder der Flüssigkeit auf.

Wir gehen auf die Berechnung der Bewegung nicht ein, sondern begnügen uns das Resultat derselben mitzutheilen. Ist p_a der am Anfange der capillaren Röhre vorhandene constante Druck, p_e der Druck am Ende der Röhre, L die Länge derselben, so ist im Abstande l vom Anfange der hydraulische Druck

$$p = p_a - \frac{p_a - p_e}{L} \cdot l.$$

Für die Geschwindigkeit v eines der erwähnten Hohlcylinder, dessen Radius x ist, ergibt sich

$$v = \frac{p_a - p_e}{4 \eta L} (R^2 - x^2) + \frac{p_a - p_e}{2 \varepsilon L} \cdot R.$$

Hieraus ergibt sich dann die in der Zeiteinheit ausfliessende Menge, indem wir beachten, dass der Cylinder, dessen Geschwindigkeit v ist, den Umfang $2 \pi x$ und die Dicke dx hat. Da nun in der Zeiteinheit von diesem Cylinder die Länge v aus dem Rohre hervortritt, ist das Volumen der mit diesem austretenden Flüssigkeit $2 \pi x \, dx \, v$. Das Volumen der ganzen austretenden Flüssigkeit ist die Summe aller austretenden Hohlcylinder, also die Summe aller Werthe $2 \pi x \, dx \, . \, v$, für welche x die Werthe zwischen 0 und R hat. Diese Summe ist

$$V = \frac{\pi (p_a - p_e)}{8 \eta L} \left(R^4 + 4 \frac{\eta}{\varepsilon} R^3 \right) \cdot$$

Für eine Flüssigkeit, welche die Röhrenwand benetzt, ist, wie wir erwähnten, ε unendlich gross zu setzen, für eine solche wird also

$$V = \frac{\pi (p_a - p_e)}{8 \eta L} R^4$$

oder die Menge der ausfliessenden Flüssigkeit ist der Differenz der Drucke am Anfang und Ende der Röhre, so wie der vierten Potenz des Radius der Röhre direkt, der Länge der Röhre und dem Coefficienten der innern Reibung dagegen umgekehrt proportional.

Hagen und Poiseuille haben durch ausgedehnte Versuche diese theoretischen Entwickelungen bestätigt.

Durch Auflösung jenes Ausdruckes nach η erhält man aus jener Gleichung die Coefficienten der innern Reibung der Flüssigkeiten. Aus den Versuchen von Poiseuille ergibt sich so für Wasser bei der Temperatur 0^0 auf Milligramme und Millimeter bezogen

$$\eta = 0{,}0001816.$$

Wenn also zwei Wasserschichten mit einer solchen Geschwindigkeit an einander vorüberströmen, dass bei von Schicht zu Schicht ganz gleicher Aenderung die Geschwindigkeitsdifferenz zweier 1 Mm. von einander entfernten Schichten 1 Mm. ist, so erfährt die rascher fliessende Schicht eine solche Verzögerung, wie wenn auf den Quadratmillimeter der Schicht ein der Strömung entgegenwirkender Druck von 0,0001816 Milligramm wirkte.

Der Reibungscoefficient η ändert sich sehr rasch mit der Temperatur, er wird für

$$10^0 \,.\,.\, \eta = 0{,}0001335$$
$$30^0 \,.\,.\, \eta = 0{,}0000821.$$

Für absoluten Alkohol ergibt sich aus den Versuchen von Poiseuille bei 10^0 C $\eta = 0{,}0001741$.

Für nicht die Röhrenwände benetzende Flüssigkeiten ist der Werth von ε nicht ohne weiteres unendlich zu setzen; Versuche von Warburg haben indess gezeigt, dass wenn man Quecksilber durch capillare Glasröhren ausströmen lässt, die Ausflussmenge ganz demselben Gesetze folgt wie jene einer benetzenden Flüssigkeit, dass also auch dort die äussere Reibung so gross ist, dass die an die Wand angrenzende Schicht keine Bewegung annimmt. Für die Temperatur von $17^0{,}2$ erhält man aus Warburgs Versuchen als Reibungscoefficienten des Quecksilbers

$$\eta = 0{,}00016329,$$

ein Werth, der nur wenig kleiner ist als derjenige von η für Alkohol bei 10^0 C.

Drittes Kapitel.

Von den gasförmigen Körpern.

§. 56.

Beschaffenheit der Gase. Bei Aufzählung der verschiedenen Aggregatzustände lernten wir als dritten den gasförmigen kennen; derselbe wurde dahin definirt, dass ihm angehörige Körper weder eine selbständige Gestalt, noch auch ein selbständiges Volumen haben, dass der Raum, welchen eine gegebene Menge eines Gases ausfülle, abhängig sei von den Umständen, unter denen das Gas gegeben sei.

Wir können uns leicht durch Beobachtung und Versuche davon überzeugen, dass wir überall von einem Körper dieser Aggregatform umgeben sind, von der Luft; wir athmen sie ein, fühlen ihre Strömung im Winde und ihren Widerstand bei raschen Bewegungen.

Wenn man eine scheinbar leere Glocke so in Wasser taucht, dass ihr ganzer Rand gleichzeitig die Wasserfläche berührt, so vermag nur wenig Wasser in die Glocke einzudringen, auch wenn wir sie tief eintauchen, so dass das Niveau des äussern Wassers viel höher steht als das Niveau des in die Glocke eingedrungenen Wassers. Es ist somit in der Glocke etwas vorhanden, was trotz des hydrostatischen Druckes das Eindringen des Wassers verhindert. Neigen wir dann die unter Wasser gehaltene Glocke so weit, dass das Niveau des in die Glocke gedrungenen Wassers

an einer Stelle den Rand der Glocke nicht mehr berührt, so entweichen aus der Glocke grosse Blasen, und in dem Maasse als die Luft in diesen Blasen aufsteigt, kann jetzt das Wasser dem hydrostatischen Drucke folgend in die Glocke eindringen.

Dieser Versuch beweist das Vorhandensein und die Körperlichkeit der Luft, denn er zeigt, dass in einen mit Luft gefüllten Raum kein anderer Körper eindringen kann.

Dass die Luft eine Flüssigkeit ist, deren Theilchen frei beweglich sind, ergibt sich daraus, dass wenn wir die Glocke umkehren, wir flüssige und feste Körper leicht hineinbringen können. Die eingebrachten Körper verdrängen die Luft ebenso leicht, wie eine Flüssigkeit, in die man sie eintaucht oder wie eine schwerere eine leichtere Flüssigkeit verdrängt, mit welcher sie sich nicht mischt. Wir müssen die Luft und dasselbe gilt für alle Gase, als eine Flüssigkeit betrachten, und ihren Theilen mindestens dieselbe Beweglichkeit zuschreiben als den Theilen der flüssigen Körper.

Dass die Luft kein selbständiges Volumen hat, zeigt folgender Versuch. Bringt man eine zum Theil mit Luft gefüllte Blase, welche dann luftdicht zugebunden ist, in eine Glocke, aus der wir mit der später zu beschreibenden Luftpumpe die Luft fortschaffen können, so zeigt die in der Blase enthaltene Luft das Bestreben sich auszudehnen, indem die Blase sich nach und nach immer stärker aufbläht, je mehr wir die Luft aus der Glocke fortschaffen. Enthielt die Blase nicht zu wenig Luft, so können wir es dahin bringen, dass die Blase durch die sich ausdehnende Luft gesprengt wird.

Die Luft hat demnach kein selbständiges Volumen, sie dehnt sich aus, bis sich ihrer Ausdehnung ein äusserer Widerstand entgegensetzt. Da sie nun eine Flüssigkeit ist, so nennt man sie dieser Eigenschaft wegen eine ausdehnsame Flüssigkeit und bezeichnet im Gegensatze dazu die bisher betrachteten Flüssigkeiten als tropfbare.

Wenn nun auch die Luft kein selbständiges Volumen hat, so füllt doch ein gegebenes Quantum unter gegebenen Umständen einen bestimmten Raum aus. So enthält ein abgegrenzter Raum in der uns umgebenden Luft auch ein bestimmtes Quantum Luft. Ein solches Quantum Luft können wir wägen und dadurch den Nachweis liefern, dass die Luft, wie alle Körper, schwer ist. Wir nehmen ein mit einem Hahne verschliessbares Gefäss, etwa einen grossen Ballon, und wiegen ihn ab. Darauf entleeren wir ihn von Luft mit Hülfe der Luftpumpe, und hängen ihn wieder an die Wage. Wir finden dann, dass der Ballon leichter geworden ist, und zwar für jeden Liter Inhalt um etwa 1 Gramm. Füllen wir ihn dann bei weitern Versuchen unter denselben Umständen mit andern Gasen, mit Kohlensäure oder Wasserstoff, so finden wir jedesmal ein anderes Gewicht, ein Beweis, dass gleiche Volumina der verschiedenen Gase, unter den gleichen Umständen genommen, verschiedene Gewichte haben. Die verschiedenen Gase haben somit unter gleichen Umständen verglichen, verschiedene specifische Gewichte.

§. 57.

Hydrostatischer Druck in Gasen. Die Luft umgibt unsere Erde in einer Schicht, welche nach astronomischen Bestimmungen eine Höhe von

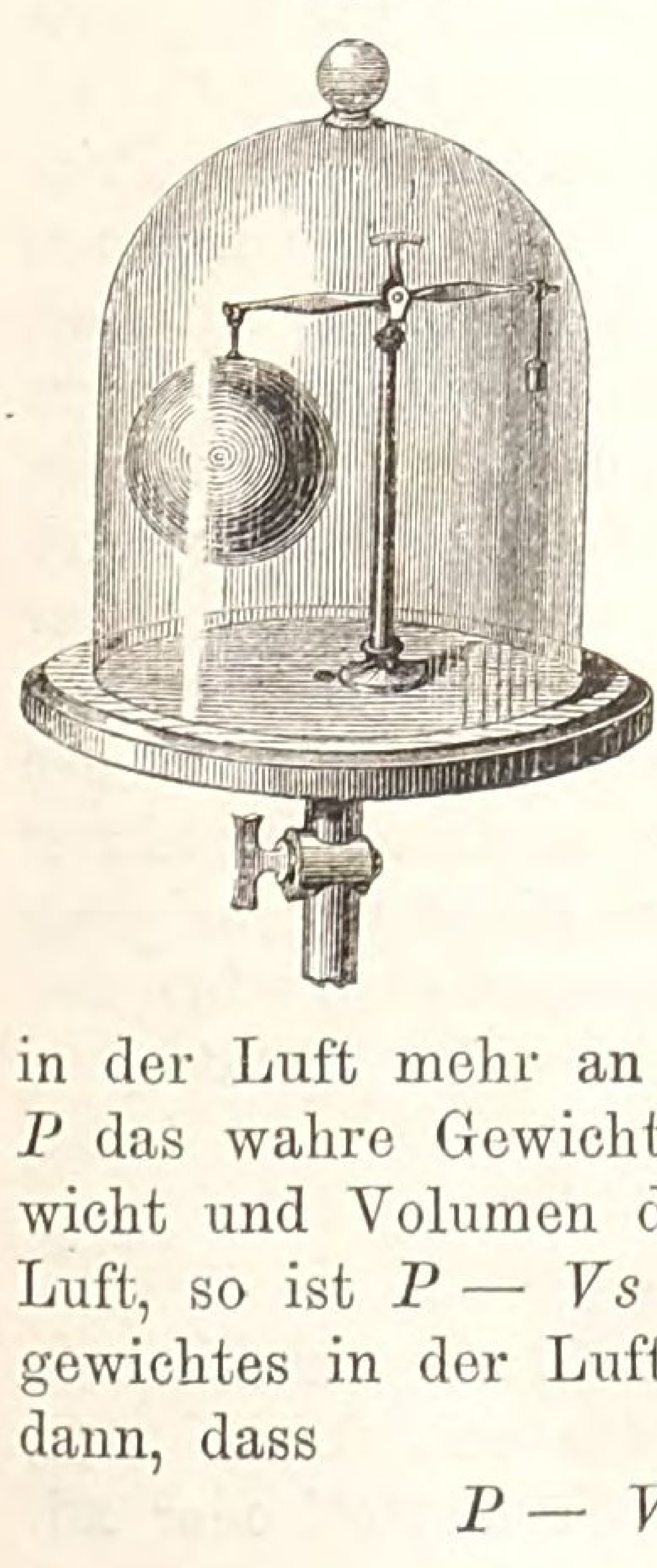
etwa 70 Kilometern hat; dieselbe besteht im Wesentlichen aus einem Gemenge zweier Gase, aus Sauerstoff und Stickstoff, und enthält ausserdem geringe Mengen Wasserdampf und Kohlensäure. Da die Luft als ein schwerer Körper von der Erde angezogen wird, nimmt sie als ein Theil der Erde auch an der Rotation derselben Theil, sie bildet sonach eine in Bezug auf die Erde ruhende Masse, welche sich abgesehen von Störungen, die durch Temperaturdifferenzen bedingt werden, im Gleichgewicht befindet.

Die Gleichgewichtsbedingungen dieses Luftmeeres, auf dessen Boden wir uns befinden, müssen, da die Luft eine Flüssigkeit ist, dieselben sein wie die in einer Flüssigkeit. Es muss also zunächst der Druck, welchen ein Lufttheilchen erfährt, nach allen Richtungen des Raumes ganz derselbe sein, es muss ferner der Druck, den irgend ein Flächenstück im Innern der Luftmasse erhält, gleich dem Gewichte der Luftsäule sein, welche einen diesem Flächenstücke gleichen Querschnitt hat und welche bis zur Grenze der Atmosphäre reicht. Dieser Druck muss somit in einer zur Erdoberfläche parallelen Fläche, jene vorhin erwähnten Störungen abgerechnet, an allen Stellen und nach allen Richtungen derselbe sein, er muss innerhalb eines Zimmers, dessen Luft mit der äussern Luft in Verbindung steht, genau derselbe sein als im Freien.

Dass in der That dieser Druck in der Luft gerade so vorhanden ist, wie in der Flüssigkeit, lässt sich ohne weiteres dadurch zeigen, dass das archimedische Princip gerade so für die in der Luft befindlichen Körper gilt, wie für Körper, welche in eine Flüssigkeit eingetaucht sind, dass also die in der Luft befindlichen Körper soviel an Gewicht verlieren, als die Luft wiegt, welche der Körper aus der Stelle drängt.

Um zu zeigen, dass ein Gewichtsverlust in der Luft stattfindet, kann man sehr bequem den kleinen Apparat Fig. 63 anwenden. Derselbe besteht aus einer kleinen Wage, deren Balken an dem einen Ende eine ziemlich grosse aus leichtem Glase geblasene und hermetisch verschlossene Kugel trägt. In der Nähe des andern Endes des Wagebalkens ist ein kleines Gewicht angebracht, das auf dem Wagebalken verschiebbar ist, und welches man demnach so einstellen kann, dass es der Kugel genau das Gleichgewicht hält. Bringt man dann den Apparat unter die Glocke der Luftpumpe, und nimmt unter derselben die Luft fort, so sinkt die Glaskugel nieder und um so mehr, je mehr Luft man fortnimmt, ein Beweis, dass die Glaskugel schwerer ist als das Gewicht, welches ihr in der Luft das Gleichgewicht hielt, somit dass die Glaskugel in Folge ihres grössern Volumens in der Luft mehr an Gewicht verlor als das kleine Messinggewicht. Ist P das wahre Gewicht der Glaskugel, V ihr Volumen, ist p und v Gewicht und Volumen des Messinggewichtes, s das specifische Gewicht der Luft, so ist $P - Vs$ das Gewicht der Glaskugel, $p - vs$ das des Messinggewichtes in der Luft. Das in der Luft hergestellte Gleichgewicht zeigt dann, dass

Fig. 63.



$$P - Vs = p - vs; \quad P = p + (V - v)\, s.$$

Wird nun in der Glocke der Luftpumpe die Luft nach und nach fort genommen, so wird s kleiner, somit muss, da $P > p$, die Glaskugel sinken.

Eine wichtige Folgerung aus diesem Satze ist, dass die Wage uns nicht das wahre Gewicht der Körper liefert. Denn für das auf der Wage hergestellte Gleichgewicht gilt ganz dieselbe Gleichung, welche wir soeben für unsern kleinen Apparat aufgestellt haben. Ist P das wahre Gewicht eines abzuwägenden Körpers, V sein Volumen, und bedeutet p und v dasselbe für die auf die andere Wagschale gelegten Gewichtsstücke, so ist ebenfalls das wahre Gewicht des abzuwägenden Körpers

$$P = p + (V - v)\, s.$$

Die auf den Gewichtsstücken angegebenen Zahlen geben das wahre Gewicht p der Gewichtsstücke an; es muss also zu demselben das Product $(V - v)\, s$ addirt werden, um das wahre Gewicht des abzuwägenden Körpers zu erhalten. Wie man sieht, ist das wahre Gewicht grösser als das scheinbare, wenn $V > v$, der abzuwägende Körper ein grösseres Volumen hat als die Gewichte, das wahre Gewicht dagegen kleiner, wenn der abzuwägende Körper das kleinere Volumen hat. Da die Gewichtsstücke meist von Messing sind, dessen specifisches Gewicht etwa 8 ist, so folgt, dass bei allen Körpern, deren specifisches Gewicht kleiner als 8 ist, das wahre Gewicht grösser, bei allen, deren specifisches Gewicht grösser als 8 ist, das wahre Gewicht kleiner ist als das scheinbare.

Wir werden diese Correction in der Wärmelehre genauer bestimmen, da die Dichtigkeit der Luft sehr von der Temperatur abhängt; hier wollen wir nur hervorheben, dass bei genauen Wägungen diese Correction nicht vernachlässigt werden darf. Beim Abwägen von Wasser z. B. beträgt der Unterschied des wahren und scheinbaren Gewichtes auf das Gramm mehr als ein Milligramm, da das specifische Gewicht s der Luft bei 0^0 C und 760 Mm. Barometerstand nach den Versuchen von Regnault 0,001293 ist.

Eine weitere Folgerung aus der Gültigkeit des archimedischen Princips für die Luft ist die, dass in der Luft Körper geradeso wie in einer Flüssigkeit schwimmen können, wenn das Gewicht der verdrängten Luft grösser ist als das Gewicht der Körper. Ist s' das specifische Gewicht eines Körpers vom Volumen v und ist s das specifische Gewicht der Luft, so ist $v\,(s' - s)$ das Gewicht des Körpers in der Luft. Ist $s' > s$, so sinkt der Körper in der Luft zu Boden, ist $s' = s$, so befindet sich der Körper im Gleichgewicht, und ist $s' < s$, so steigt er in der Luft empor.

Hieraus ergibt sich zunächst, dass die Beschleunigung der in der Luft fallenden Körper kleiner sein muss, als wir sie im ersten Abschnitt ohne Berücksichtigung der Luft bestimmten, und dass die Beschleunigung für Körper verschiedenen specifischen Gewichtes etwas verschieden sein muss, sie muss um so kleiner sein, je kleiner s' ist, dieselbe wird anstatt g

$$g \cdot \frac{v s' - v s}{v s'} = g \left(1 - \frac{s}{s'}\right).$$

Die Bedingung $s' < s$ kann man erfüllen, wenn man grosse aus leichten Stoffen hergestellte Ballons mit erwärmter Luft oder mit Gasen füllt, welche specifisch leichter sind als Luft, wie mit Wasserstoff oder mit

Leuchtgas. Die Steigkraft eines solchen Ballons ist gleich dem Auftriebe desselben vermindert um das Gewicht der an ihm vorhandenen Theile, also wenn wir das Gewicht der letzteren mit p bezeichnen, gleich $v\,(s - s') - p$. Drücken wir das Volumen v in Kubikmetern aus, so ist s das Gewicht von 1 Cubikmeter Luft, für welches wir nach dem vorhin angegebenen Werthe an der Erdoberfläche 1,29 setzen können; 1 Cubikmeter Wasserstoffgas wiegt unter denselben Verhältnissen 0,089 Kilogramm, so dass also die Steigkraft eines mit Wasserstoff gefüllten Ballons von v Cubikmetern gleich $1{,}2\ v - p$ sein würde.

Die in neuerer Zeit vielfach benutzten Luftballons verwerthen diese Verhältnisse, um selbst grössere Gewichte in der Luft empor zu heben.

§. 58.

Das Barometer. Die Erfahrungen des vorigen §. beweisen uns das Vorhandensein des hydrostatischen Druckes in der Luft, unter welchem die Luft an der Erdoberfläche sich im Gleichgewichte befindet. Die Grösse dieses Druckes können wir deshalb auf Grund der hydrostatischen Gesetze messen. Denken wir uns eine unten und oben offene, bis zur obern Grenze der Atmosphäre reichende Röhre, welche unten in eine Flüssigkeit, etwa Quecksilber taucht, und aus dieser Röhre dann alle Luft vollständig entfernt. Da dann innerhalb der Röhre keine Luft auf die Oberfläche der Flüssigkeit wirkt, während aussen dieser Druck vorhanden ist, muss in der Röhre die Flüssigkeit so hoch aufsteigen, dass der Druck der gehobenen Flüssigkeit auf die Flächeneinheit ebenso gross ist als der Druck der Atmosphäre auf die Flächeneinheit des ausserhalb des Rohres vorhandenen Flüssigkeitsniveau. Ganz dasselbe muss eintreten, wenn wir eine unten offene und oben geschlossene aber vollständig von Luft entleerte Röhre mit dem untern offenen Ende in die Flüssigkeit eintauchen, da wenn die Röhre, welche wir uns vorher bis zur Grenze der Atmosphäre reichend dachten, an irgend einer Stelle abgeschnitten und dort geschlossen wird, so dass keine Luft in dieselbe eindringen kann, die Gleichgewichtsbedingungen dadurch nicht geändert werden. In dieser Form lässt sich der Versuch zur Messung des Druckes der Luft leicht ausführen, und ist zuerst ausgeführt worden von Toricelli im Jahre 1644, der zu demselben von seinem Freunde Viviani aufgefordert war. Man nimmt eine etwa ein Meter lange, an dem einen Ende geschlossene Glasröhre von etwa 1 Cent. Weite, füllt dieselbe sorgfältig mit reinem Quecksilber, indem man dafür sorgt, dass zwischen Quecksilber und Wand keine Luftblasen hängen bleiben, schliesst das offene Ende mit dem Finger, kehrt das Rohr um und taucht das mit dem Finger verschlossene Rohr unter Quecksilber. Zieht man dann den Finger fort, so sinkt das Quecksilber in dem Rohre so weit herab, dass die Niveaudifferenz des Quecksilbers im Rohre und ausserhalb etwa 760 Mm. beträgt. Daraus folgt, dass der Druck der Atmosphäre an der Erdoberfläche gleich ist dem Drucke einer Quecksilbersäule von annähernd 760 Mm. Höhe. Aus später hervortretenden Gründen ist dieser Druck an verschiedenen Orten und zu verschiedenen Zeiten etwas verschieden; der Werth von 760 Mm. ergibt sich als mittlerer Werth im Niveau des Meeres. Man setzt deshalb diesen Druck von 760 Mm. als den Normaldruck der Atmosphäre, so dass, wenn keine weiteren Bestim-

mungen hinzugefügt werden, unter dem Drucke einer Atmosphäre immer dieser Druck verstanden wird.

Die Grösse des Druckes in Kilogrammen für das Quadratcentimeter ergibt sich dann aus dem bekannten specifischen Gewichte des Quecksilbers, 13,59593 folgendermassen. Da die Höhe der dem Drucke der Atmosphäre das Gleichgewicht haltenden Quecksilbersäule gleich 76 Centim. ist, so ist der Druck für das Quadratcentimeter gleich dem Gewichte von 76 Cubikcentimeter Quecksilber. Da das Cubikcent. Quecksilber 13,59593 Gramm wiegt, ist somit dieser Druck

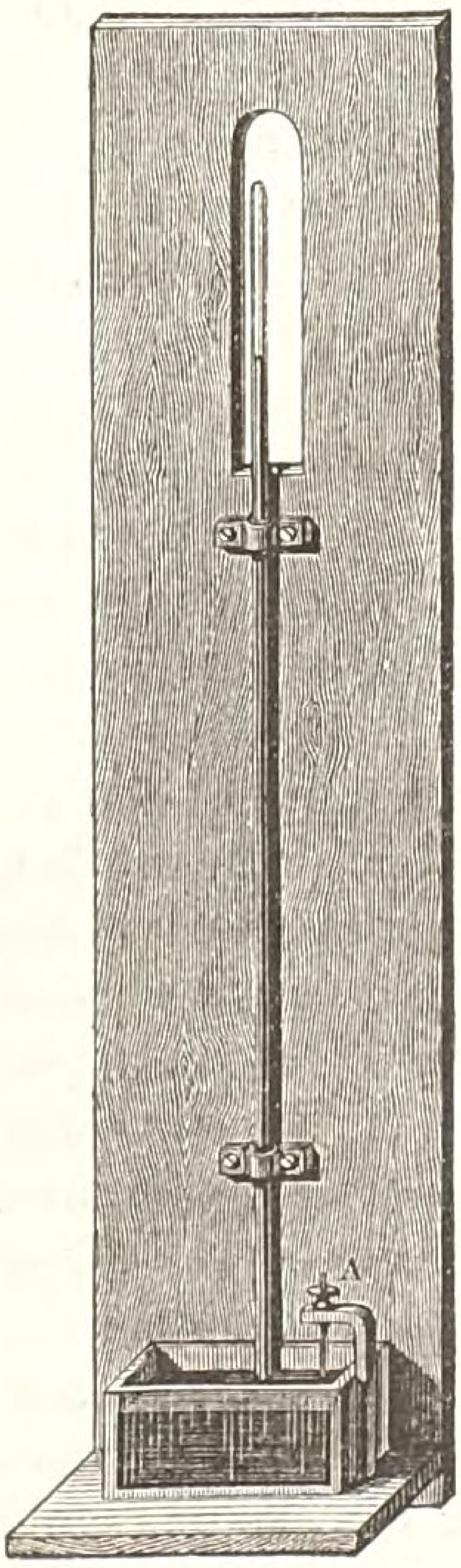
$$76 \,.\, 13{,}59593 = 1{,}0333 \text{ Kilogramm;}$$

somit für einen Querschnitt von q Quadratcentimeter

$$1{,}0333 \,.\, q \text{ Kilogr.}$$

Soll der soeben beschriebene Apparat, das Barometer, in der That ein genaues Maass des Luftdruckes geben, so ist auf das sorgfältigste darauf zu achten, dass oberhalb des Quecksilbers sich keine Luft befindet. Man hat deshalb die Barometerröhren auf das sorgfältigste zu reinigen und mit reinem getrocknetem Quecksilber zu füllen. Das in die Röhre eingefüllte Quecksilber wird dann, um alle Luft fortzuschaffen, bis zum Sieden erhitzt, und dann erst nach erfolgter Abkühlung umgekehrt und mit dem offenen Ende unter Quecksilber getaucht.

Fig. 64.



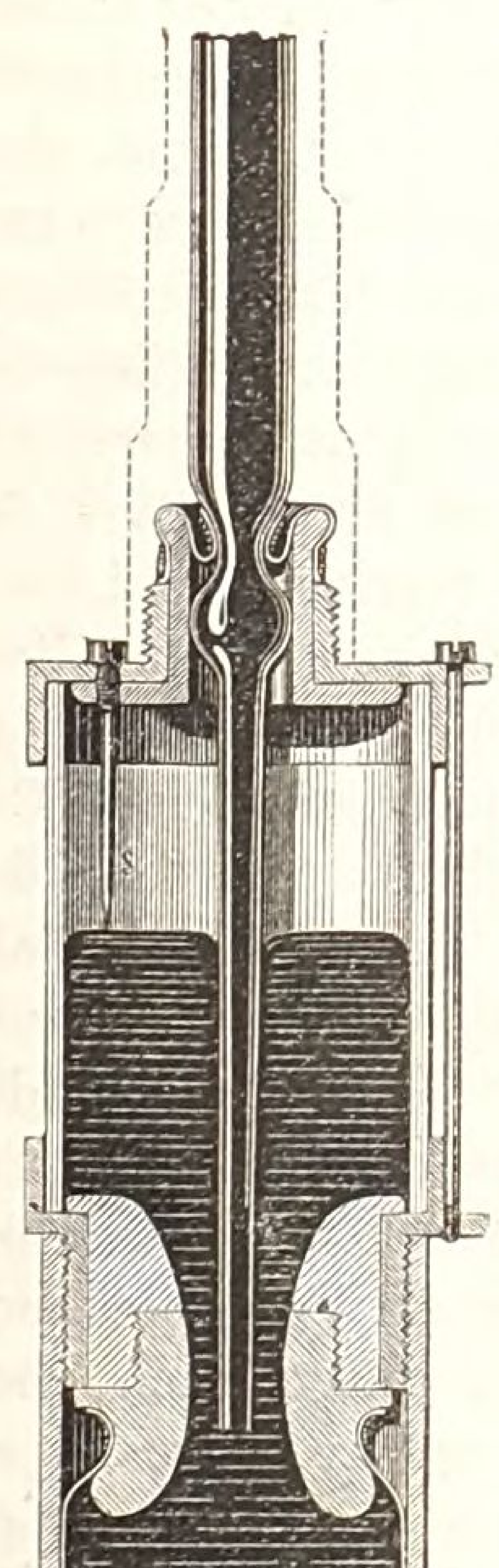
Man hat dem Barometer manche Formen gegeben; die einfachste ist die vorhin beschriebene und Fig. 64 dargestellte, das einfache Gefässbarometer. Man wendet als Gefäss einen parallelepipedischen Glaskasten an, den man auf ein in der Zimmerwand, am besten vor einem Fenster, angebrachtes festes Wandtischchen fest aufstellt. Das Rohr wird mit einigen Klammern an einem, gleichwie das Tischchen an der Zimmerwand befestigten Brette gehalten, welches oben, wo sich der leere Raum des Barometers befindet, einen Ausschnitt hat.

Ist das Gefäss gross genug, so kann man zur Messung der Barometerhöhe an oder auf dem Rohre eine Theilung anbringen, deren Nullpunkt im Niveau des äussern Quecksilbers liegt, da dann die vorkommenden Schwankungen des Barometerstandes das Niveau des Quecksilbers nicht merklich ändern. Genauer ist es aber immer, die Höhe mit einem Kathetometer, einem vertical gestellten Massstabe, an dem ein horizontales Fernrohr auf und nieder geschoben werden kann, zu messen. Zur Bestimmung des untern Niveaus wird dann ein Stift A von bekannter Länge so tief hinabgeschraubt, dass seine Spitze gerade das Quecksilber berührt, und dann der Abstand des obern Endes des Stiftes von dem obern Niveau des Quecksilbers gemessen. Zu der so gemessenen Länge wird dann, um die Höhe des Barometers zu erhalten, einfach die Länge des Stiftes addirt.

Dieses einfache Gefässbarometer hat indess den Nachtheil, dass es nicht transportabel ist. Da man nun sehr häufig genöthigt ist die Barometerstände an verschiedenen Orten zu bestimmen, hat man dem Barometer verschiedene Formen gegeben, um es von einem Orte zum andern bringen zu können.

Fortin hat dadurch, dass er dem Gefässe eine besondere Form gegeben und das Barometerrohr in eigenthümlicher Weise in dasselbe eingeführt hat, ein transportables Gefässbarometer construirt. Die Fortin'sche Einrichtung zeigt Fig. 65. Das Gefäss besteht aus einem Glascylinder, welcher mit einem kupfernen Deckel versehen ist, der in seiner Mitte eine Oeffnung hat, um das Barometerrohr hindurchzulassen. Der Glascylinder steht in einem Cylinder aus Buchsbaumholz, der mittels Stangen an den Deckel festgeschraubt ist. Der Boden dieses Cylinders ist durch einen elastischen Sack gebildet, einen Beutel, dessen innere Seite aus nicht vulkanisirtem Kautschuk, dessen äussere aus Leder besteht, und der über den vorspringenden Rand des Holzcylinders fest aufgebunden ist. Dieser Buchsbaumcylinder ist in einen Metallcylinder fest eingeschraubt, durch dessen Boden eine Schraubenspindel hindurchgeht, so dass die verdickte Stelle des Bodens für die Spindel die Mutter bildet. Der obere abgerundete Kopf der Schraube drückt gegen ein metallisches Stück, welches in der Mitte des Beutels befestigt ist, und in dessen nach unten gerichtete Höhlung der Kopf der Schraube hineinpasst.

Fig. 65.



Das Gefäss ist bis zu einer gewissen Höhe mit Quecksilber gefüllt. Wenn man an der Schraube dreht, wird der elastische Boden und mit demselben das Niveau des Quecksilbers in dem Gefässe gehoben. Man kann dadurch das Niveau des Quecksilbers in dem Gefässe immer auf dieselbe Höhe bringen. Um diese zu bezeichnen, reicht von dem Deckel des Gefässes in dasselbe ein Elfenbeinstift *s* hinab, und man schraubt dann das Niveau des Quecksilbers stets so, dass es gerade die Spitze des Elfenbeinstiftes berührt. Diese Spitze ist der Nullpunkt der am Barometerrohr befindlichen Theilung.

Durch die mittlere Oeffnung des Deckels ist das Rohr quecksilberdicht, aber nicht luftdicht in das Gefäss eingeführt. Um die Einführungsstelle sicher quecksilberdicht zu machen, ist ein Stück weichen Leders rings um das Rohr gekittet und andererseits an den über den Deckel hervorragenden Rändern der mittleren Oeffnung angebunden. Das Rohr ist vollständig von einer Messinghülse umgeben, welche auf dem Deckel festgeschraubt ist, und durch welche das Glasrohr an mehreren Stellen durch weiche Zwischenlager gestützt ist. Die Messinghülse hat nur dort, wo sich der leere Raum des Barometers befindet, zwei gegenüber-

liegende Ausschnitte von etwa zwei Decimeter Länge, um das Niveau des Quecksilbers beobachten zu können. Die Theilung ist von der Spitze des Stiftes als Nullpunkt aus, auf der Messinghülse aufgetragen und mit einem verschiebbaren Nonius versehen, um den Stand des obern Quecksilberniveaus bis auf Bruchtheile des Millimeters genau bestimmen zu können. Bei der Beobachtung wird das Barometer an einem oben an der Messinghülse befestigten Ringe aufgehängt.

Die Gefässbarometer haben einen Uebelstand, der, wenn man nicht sehr weite Röhren anwendet, der Genauigkeit der Messung der Barometerhöhe einigen Eintrag thut, nämlich die capillare Depression des Quecksilbers. Dieselbe kann in Röhren, die weniger als ein Centimeter Durchmesser haben, bis über 1 Mm. steigen, erst in Röhren von 2 Centimeter Weite wird sie unmerklich. Dieselbe ist ferner auch in einer und derselben Röhre nicht constant, da der Randwinkel des Quecksilbers durch noch unmerkbare Verunreinigung desselben merklich geändert wird.

Da es nun schwierig oder am Fortin'schen Barometer unmöglich ist, Röhren von solchem Durchmesser anzuwenden, hat man eine andere Art von Barometern, Heberbarometer construirt, bei welchen der Einfluss der Capillarität auf den Stand des Barometers wesentlich verringert ist.

Das Heberbarometer besteht aus einer heberförmig gebogenen Glasröhre, deren einer etwa ein Meter langer Schenkel geschlossen ist, während der andere nur wenige Decimeter lange Schenkel offen ist. Der lange Schenkel wird dann sorgfältig mit Quecksilber gefüllt, und dann das Barometer so aufgestellt, dass die Biegung des Rohres unten ist. Es sinkt dann das Quecksilber in dem langen Schenkel so weit, bis die Niveaudifferenz der Quecksilbersäulen im langen und kurzen Schenkel gleich der Barometerhöhe geworden ist, da im Gleichgewichtszustande der Druck auf die freie Oberfläche des Quecksilbers im kurzen offenen Schenkel von oben nach unten und von unten nach oben derselbe sein muss. Von oben nach unten wirkt auf diese Fläche der Druck der Luft, von unten nach oben der Druck der im verschlossenen Schenkel über das untere Niveau gehobenen Quecksilbersäule; es muss also der Druck dieser Quecksilbersäule gleich dem Drucke der Luft, somit die Niveaudifferenz der beiden Quecksilbersäulen gleich der Höhe des Barometers sein. Wenn der Durchmesser der beiden Schenkel der Röhre, dort wo sich die Niveaus des Quecksilbers befinden, genau gleich ist, und wenn die Kuppen genau gleich geformt sind, ist die Capillarität auf den Stand dieses Barometers ganz ohne Einfluss. Die Gleichheit der Kuppenform ist indess sehr schwierig zu erreichen, da die Oberfläche des Quecksilbers, die an der Luft steht, sich nach und nach etwas oxydirt und in Folge dessen sowie in Folge von in die Röhre eindringenden Staub oder Luftfeuchtigkeit, welche sich an die Glaswand anlegen, die Kuppenform im offenen Schenkel in der Regel flacher ist als im geschlossenen Schenkel. Indess ist bei gleicher Röhrenweite der Einfluss der Capillarität doch kleiner als bei dem Gefässbarometer und in der Regel zu vernachlässigen.

Da bei einer Aenderung des Barometerstandes bei diesen Barometern beide Niveaus, deren Differenz den Barometerstand angibt, sich ändern, müssen stets beide abgelesen werden. Man bringt zu dem Zwecke in der Regel von einem zwischen den beiden Niveaus liegenden Punkte als Null-

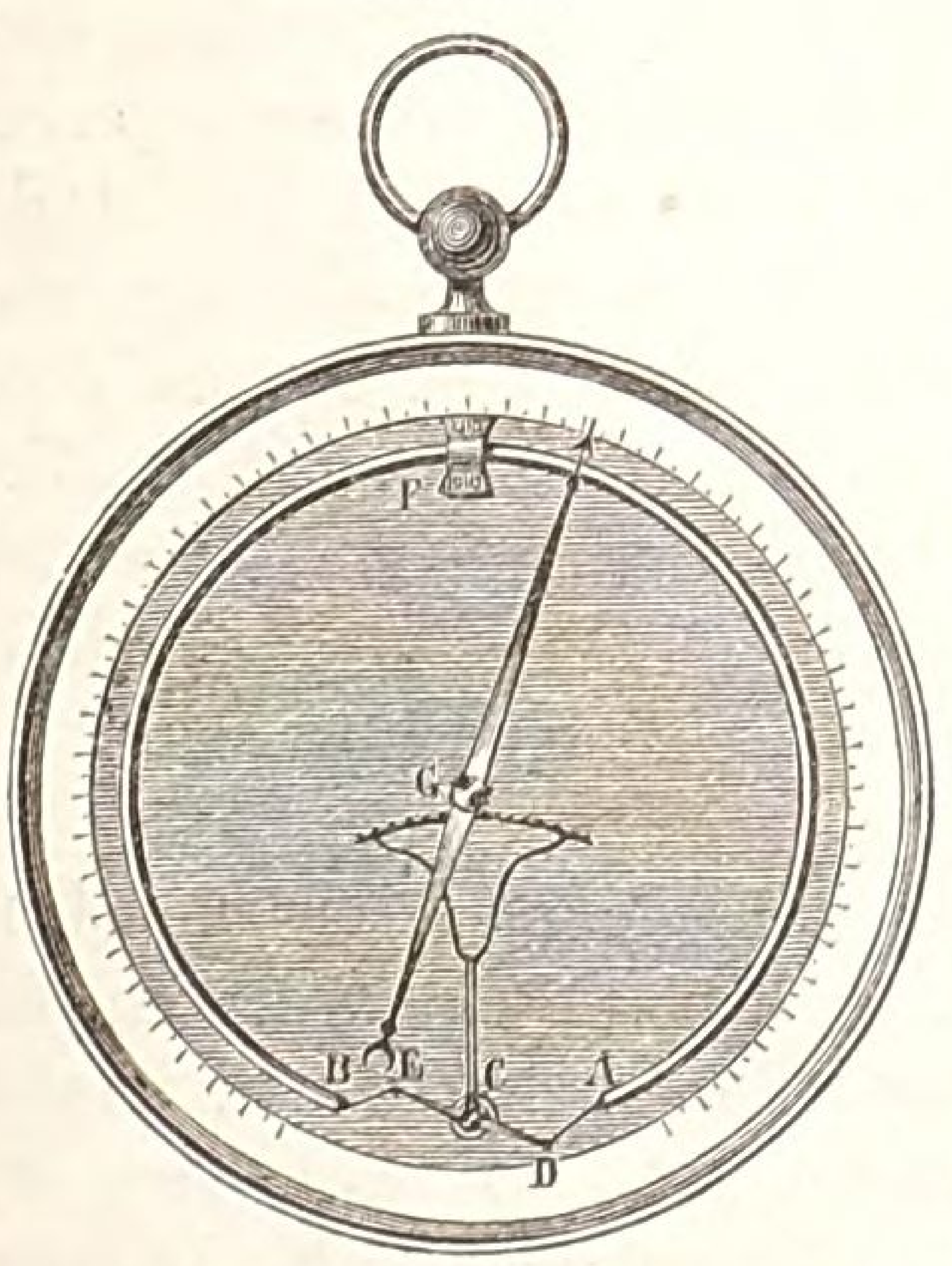
punkt aus, auf beiden Schenkeln eine Theilung an, auf dem kürzern offenen Schenkel mit von oben nach unten, auf dem geschlossenen von unten nach oben wachsenden Zahlen. Liest man dann an der Theilung die Quecksilberstände ab, so gibt die Summe der Ablesungen den Barometerstand.

Die an dem Gefässbarometer oder Heberbarometer direkt bestimmten Barometerstände bedürfen einer Correction wegen der Temperatur. Das Quecksilber dehnt sich nämlich wie alle Körper beim Erwärmen aus und wird dadurch specifisch leichter. Dem gleichen Drucke der Luft hält daher von kälterem Quecksilber eine kürzere Säule das Gleichgewicht als von wärmerm Quecksilber. Die bei verschiedenen Temperaturen bestimmten Barometerstände sind daher nicht direkt vergleichbar, man muss sie auf gleiche Temperaturen und damit gleiches specifisches Gewicht des Quecksilbers reduciren. Als solche Normaltemperatur, auf welche man alle bei verschiedenen Temperaturen beobachtete Barometerstände reducirt, nimmt man die Temperatur des schmelzenden Eises, die an unserm Thermometer mit 0 Grad bezeichnet wird. Ist der Barometerstand B bei einer Temperatur von t^0 der hunderttheiligen Thermometerskala beobachtet, so ist, wie wir in der Wärmelehre nachweisen werden, der Barometerstand b bei 0^0

$$b = \frac{B}{1 + 0,0001815\, t}.$$

Ausser diesen Quecksilberbarometern, deren Transport immerhin einigermassen schwierig ist, hat man in neuerer Zeit Barometer construirt, welche auf einem ganz andern Princip beruhen, sogenannte Anäroidbarometer. Dieselben beruhen auf der Formänderung, welche hermetisch verschlossene Gefässe von dünnem Metallblech durch eine Aenderung des äussern Luftdruckes erfahren. Die ersten Barometer dieser Art wurden von Bourdon construirt, ihre Einrichtung zeigt Fig. 66. Auf dem Boden einer Metallkapsel ist eine nahezu kreisförmig gebogene, hermetisch verschlossene Röhre von dünnem Metallblech AFB in ihrer Mitte bei F befestigt. Aendert sich nun bei ganz constantem innern Druck der äussere auf die Röhre wirkende Druck, so ändert sich die Biegung der Röhre, da die Form derselben von der Elasticität des Materials, sowie dem innern und äussern Drucke abhängt. Wird der äussere Druck grösser, so wirkt diese Vergrösserung wie eine Vermehrung der biegenden Kraft, die Röhre krümmt sich stärker, wird der äussere Druck kleiner, so vermindert sich die biegende Kraft, die Röhre streckt sich etwas, ihre Biegung wird kleiner. Da die Röhre bei F befestigt ist, so gibt sich diese Aenderung der Biegung als eine hin und hergehende Bewegung der Enden A und B zu erkennen, wird der Luftdruck stärker, so nähern sich dieselben, nimmt er ab, so entfernen sie sich weiter von einander. Diese Bewegung versetzt den um eine feste Axe bei C drehbaren Winkelhebel $ADCEB$ in Drehung und

Fig. 66.



dieser überträgt seine Drehung mittelst des gezähnten Radstückes bei *G* auf einen Zeiger, der auf einer am Umfange der Metallkapsel angebrachten Theilung einspielt. Steigt der Luftdruck, so dreht sich der Zeiger in dem einen, sinkt er, so in dem andern Sinne; er wird so eingestellt, dass er bei mittlerm Luftdruck auf die Mitte der Skala über *F* zeigt.

Von andern sind dem Barometer andere Formen gegeben, vielfach wendet man jetzt cylinderförmige hermetisch geschlossene Metallkapseln an, deren Deckel aus einem dünnen gewellten Metallbleche besteht. Wächst der äussere Luftdruck, so wird der Deckel etwas gegen das Innere der Kapsel getrieben, sinkt der Luftdruck, so hebt sich der Deckel etwas. Diese hin und hergehende Bewegung wird dann ebenfalls auf einen Zeiger übertragen.

Bei allen diesen Barometern muss man die Theilung durch Vergleichung mit einem Quecksilberbarometer herstellen, und muss diese einmal hergestellte Theilung sehr oft durch Vergleichung mit dem Quecksilberbarometer controliren. Denn es treten hier die bei Besprechung der Elasticität hervorgehobenen allmählichen Aenderungen bei dauernder Belastung sehr störend auf. An manchen Anäroidbarometern ändert sich der Stand des Zeigers schon in der Zeit weniger Wochen sehr merklich, das heisst er nimmt bei gleichem Barometerstande einen andern Stand an. Zu genauern Messungen sind sie deshalb nur bei grösster Vorsicht zu verwenden.

§. 59.

Das Mariotte'sche Gesetz. Die Gase sind gegenüber den Flüssigkeiten dadurch charakterisirt, dass sie kein selbständiges Volumen haben, eine gegebene Gasmenge, in einen leeren Raum gebracht, verbreitet sich gleichmässig durch den ganzen Raum. Füllt man nun Gas in einen Raum, den wir vergrössern und verkleinern können, etwa indem eine seiner Wände, bei übrigens luftdichtem Verschluss, verschiebbar ist, so zeigt sich, dass wenn wir auf diese Wand einen gegen das Innere des Gefässes gerichteten Druck ausüben, das Volumen des Gases vermindert wird. Ist der Druck ein bestimmter, so erreicht auch die Volumverminderung eine bestimmte Grenze, indem das Gas nach Erreichung eines bestimmten Volumens auf die Wand einen dem äussern gleichen Gegendruck ausübt. Verstärkt man den äussern Druck weiter, so tritt wieder eine Volumverminderung ein, die aber auch wieder nur so weit geht, bis der durch die Volumverminderung verstärkte innere Gegendruck dem äussern Drucke gleich geworden ist.

Dieser Versuch beweist, dass das Volumen einer abgeschlossenen Gasmenge wesentlich von dem Drucke bestimmt wird, unter welchem das Gas steht, indem bei einem bestimmten Volumen der gegebenen Gasmenge der innere Gegendruck dem äussern Drucke gleich ist. Es fragt sich deshalb, in welcher Weise das Volumen einer Gasmenge oder seine Dichtigkeit von dem äussern Drucke abhängig ist.

Diese Frage ist schon frühzeitig und zwar fast gleichzeitig von dem englischen Physiker Boyle und dem französischen Physiker Mariotte beantwortet worden. Beide sprachen die Beziehung zwischen Druck und Volumen in dem nach dem letztern als Mariotte'sches bezeichneten Gesetze

aus, dass, wenn man eine abgeschlossene Gasmenge Drucken P und P_1 aussetzt, dass sie dann Volume annimmt v und v_1, welche sich umgekehrt verhalten wie die Drucke, dass also

$$v : v_1 = P_1 : P.$$

Diese Gleichung können wir auch schreiben

$$Pv = P_1 v_1$$

oder das Product aus dem Volumen einer Gasmenge und dem Drucke, unter welchem sie steht, ist constant.

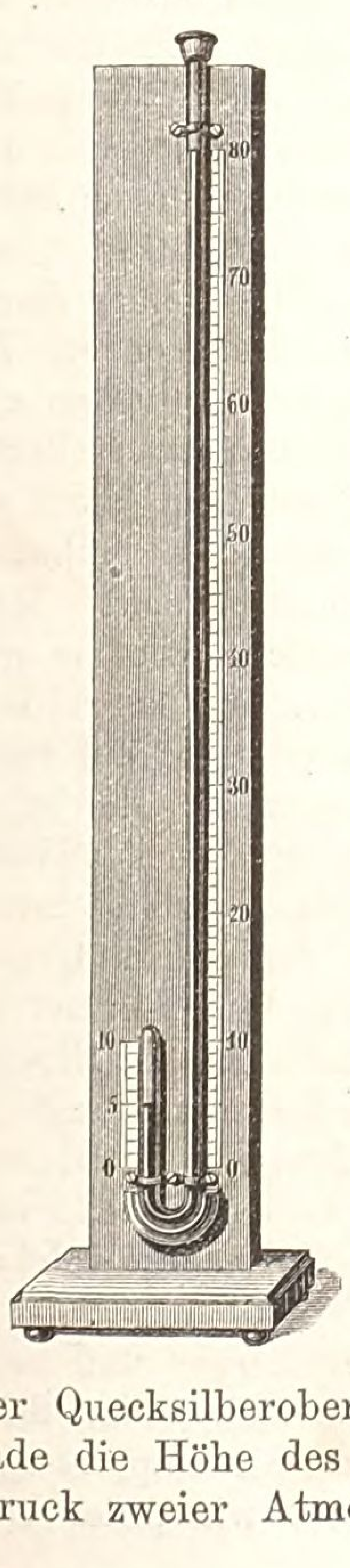
Da nun die Dichtigkeit eines Körpers, das heisst das Gewicht der Volumeinheit, bei gegebenem Gewichte des ganzen Körpers dem Volumen desselben umgekehrt proportional ist, oder da

$$v : v_1 = d_1 : d,$$

so folgt aus der ausgesprochenen Form des Gesetzes, dass die Dichtigkeit einer Gasmenge dem Drucke, unter dem sie steht, direkt proportional ist, oder dass

$$d : d_1 = P : P_1.$$

Fig. 67.



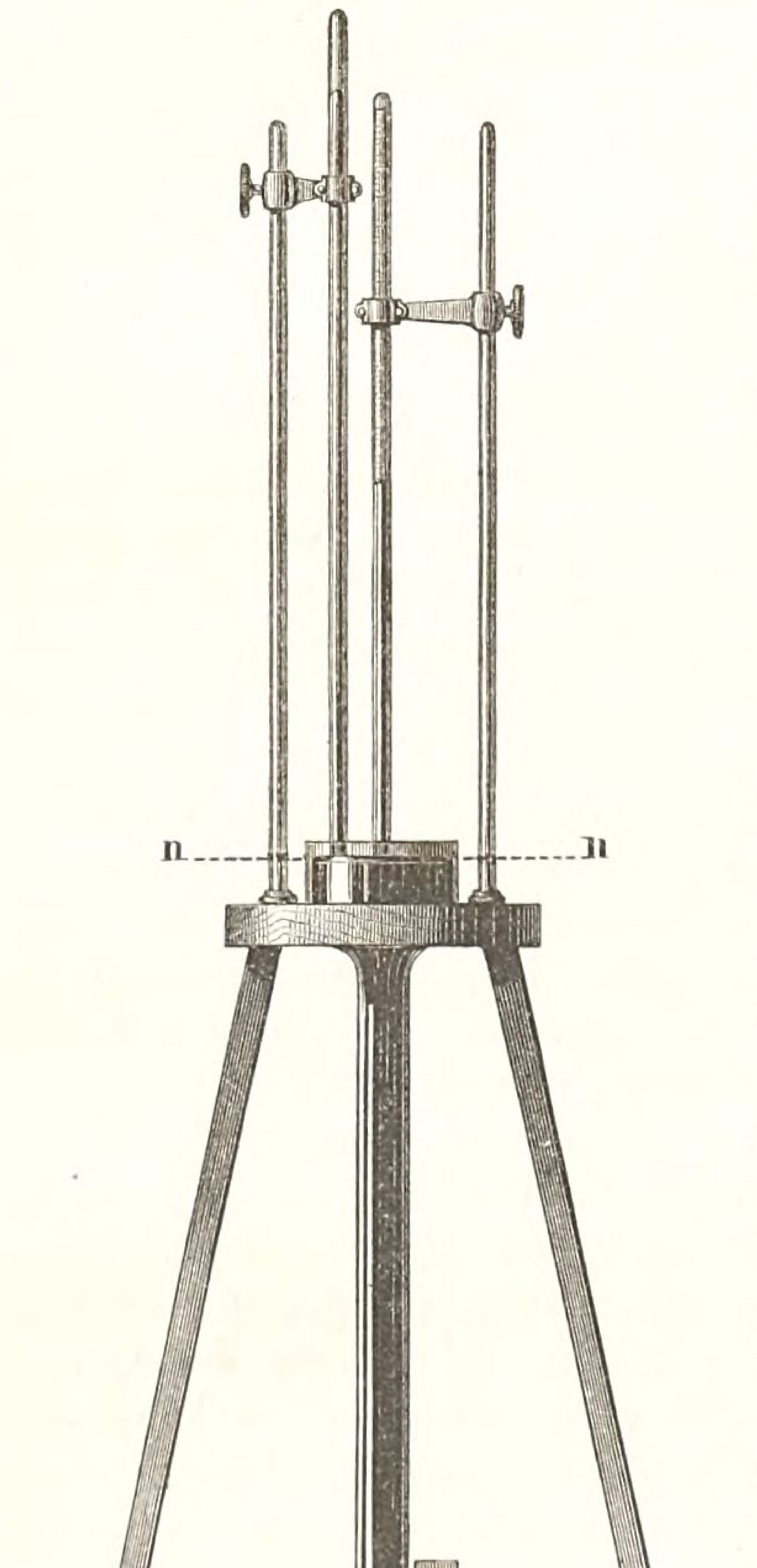
Die Versuche, mittelst welcher Mariotte dieses Gesetz nachwies, waren folgende. Er nahm eine lange Glasröhre, welche, wie Fig. 67 zeigt, nahe ihrem einen Ende umgebogen war, so dass, wie bei einem Heberbarometer, ein kürzerer aufsteigender Schenkel entsteht. Der kürzere Schenkel ist oben geschlossen, der längere bleibt offen. Das Rohr ist dann vor einem festen Brette befestigt, welches neben dem kürzern und längern Schenkel eine Theilung hat. Man bringt nun zunächst eine kleine Menge Quecksilber in das Rohr, so dass es die Biegung ausfüllt, und in beiden Schenkeln bis zu dem in gleichem Niveau befindlichen Nullpunkte der Theilung reicht. Dadurch ist die in dem kürzeren Schenkel vorhandene Luft vollständig abgeschlossen. Die Luft füllt dann den Raum des kürzeren Schenkels unter dem Drucke der äussern Atmosphäre, welcher auf der Oberfläche des Quecksilbers im offenen Schenkel wirkt, und welcher sich nach den früher erkannten hydrostatischen Gesetzen durch das Quecksilber in die geschlossene Röhre überträgt.

Man giesst dann in das offene Rohr Quecksilber nach; das Niveau desselben steigt auf beiden Seiten, aber in dem geschlossenen Schenkel weniger als im offenen. Ist das Niveau des Quecksilbers in dem geschlossenen Schenkel so weit gestiegen, dass das Volumen der abgeschlossenen Luft gerade die Hälfte des anfänglichen ist, so findet man, dass die Differenz der Quecksilberoberfläche in dem offenen und geschlossenen Schenkel gerade die Höhe des Barometers beträgt. Dann hat aber auch das Gas den Druck zweier Atmosphären auszuhalten, indem ausser dem Drucke der

äussern Luft noch der Druck einer Quecksilbersäule auf das Gas wirkt, welcher ebenso gross ist, als der Druck der Atmosphäre. Wenn man nun weiter Quecksilber hinzufügt, bis der Niveauunterschied 2, 3, 4 . . . Barometerhöhen wird, so übt man dadurch den Druck von 3, 4, 5 . . . Atmosphären aus, und man findet, dass das Volumen der abgesperrten Luft $^1/_3$, $^1/_4$, $^1/_5$ des ursprünglichen Volumens wird.

Um die Gültigkeit des Mariotte'schen Gesetzes für Drucke, die kleiner sind als derjenige der Atmosphäre, nachzuweisen, kann man die Fig. 68 dargestellte Anordnung benutzen. Der wesentlichste Theil derselben ist eine weite etwa 80 Centim. lange Röhre von Glas oder besser noch von Eisen, welche unten mit einem Hahn versehen ist, und welche oben in einem weiten Gefäss mit Glasrand endet. Dieselbe wird in einem Dreifuss vertical aufgestellt und bis *nn* mit Quecksilber angefüllt. Der untere Hahn hat den Zweck, die Röhre leicht entleeren zu können. Um in jedem Momente die Grösse des Druckes der Atmosphäre bestimmen zu können, ist an einer der über das Gefäss hervorragenden Stangen ein Gefässbarometer befestigt, als dessen Gefäss das weite Gefäss dient, in welchem die weite Röhre endet. Zu den Versuchen benutzt man dann ein zweites mit einer Theilung versehenes Barometerrohr, in welchem die zwischen je zwei Theilstrichen enthaltenen Räume ausgemessen sind. Man füllt dieses Rohr zunächst wie ein gewöhnliches Barometer und kehrt dasselbe in das Gefäss um. Darauf lässt man durch ein passendes Zuleitungsrohr eine kleine Quantität trockene Luft in das Rohr treten, dieselbe steigt durch das Quecksilber in den leeren Raum. Nun drückt man das Rohr so tief in das Quecksilber hinab, bis das Niveau des Quecksilbers im Rohre und ausserhalb gleich ist, so dass also die in dem Rohre oberhalb des Quecksilbers befindliche Luft unter dem Drucke der Atmosphäre steht, und bestimmt an der Theilung das Volumen, welches diese Luft jetzt einnimmt.

Fig. 68.



Darauf zieht man das Rohr aus dem Quecksilber heraus und vermehrt dadurch das Volumen der abgesperrten Luft; man sieht dann, dass sofort auch das Niveau des Quecksilbers in der Röhre mit emporsteigt, ein Beweis, dass, so wie das Volumen der Luft grösser wird, der von

der abgeschlossenen Luft auf die Quecksilberoberfläche ausgeübte Druck kleiner wird. Der Druck, unter welchem das Gas steht, ist gleich der Differenz der Barometerhöhe und der Höhe, bis zu welcher das Quecksilber in dem Rohre emporgestiegen ist. Denn ausserhalb wirkt auf das Quecksilber des Gefässes der Druck der Atmosphäre gleich dem Drucke einer Quecksilbersäule von der Höhe des Barometers, im Innern hält diesem Drucke zum Theil die emporgestiegene Quecksilbersäule das Gleichgewicht, die Differenz der Barometerhöhe und dieser Quecksilbersäule ist also der Druck, der auf die Oberfläche des Quecksilbers in der Röhre von unten nach oben wirkt, ist also der Druck, unter welchem die abgeschlossene Luft steht, und dem der innere Gegendruck der abgeschlossenen Luft gleich ist. Hat man nun durch Herausziehen des Rohres das Volumen der Luft auf das Doppelte gebracht, so ist die Höhe der gehobenen Quecksilbersäule gleich der halben Höhe des Barometers, ist das Volumen das Dreifache, so ist die Höhe der gehobenen Quecksilbersäule gleich $^2/_3$ des Barometers, kurz man findet, dass das Product von Druck und Volumen immer dasselbe ist.

Diese Versuche beweisen, dass innerhalb der Drucke, welche sich bei denselben anwenden lassen, das Mariotte'sche Gesetz jedenfalls mit grosser Annäherung gültig ist. Einer grossen Genauigkeit sind sie in dieser Form nicht fähig, da man die Temperatur der Luft nicht constant halten kann. Ausserdem lassen sich bei dieser Form des Versuches die Drucke nicht sehr variiren.

Es sind deshalb später viele Versuche angestellt, um zu bestimmen, ob in der That das Mariotte'sche Gesetz strenge für alle Gase und für alle Drucke gilt, bis Regnault in einer abschliessenden Untersuchung zeigte, dass das Mariotte'sche Gesetz nur annähernd gültig ist, allerdings so annähernd, dass es für die meisten Gase und für die in der Regel angewandten Drucke als gültig angesehen werden kann.

Das Regnault'sche Verfahren bei seinen Versuchen war im Princip dem vorhin beschriebenen gleich; die Stelle des kurzen aufsteigenden Schenkels an der Mariotte'schen Röhre vertrat eine vertical aufgestellte, oben mit einem Hahn verschliessbare, unten mit ihrem offenen Ende in eine Eisenfassung gekittete Glasröhre von 8 — 10 Mm. lichtem Durchmesser und 3 Meter Länge. Durch einen in der Eisenfassung befindlichen Kanal communicirte diese Röhre mit einer zweiten vertical aufgestellten Glasröhre von 36 Meter Höhe, welche die Quecksilbersäule enthielt, welche das in der oben geschlossenen Röhre vorhandene Gas zusammendrücken sollte. Auf der oben geschlossenen Röhre waren zwei Marken gezogen, die eine nahe an dem untern Ende, welche das Volumen der ganzen Röhre bezeichnete, indem zu Anfang jedes Versuches dafür gesorgt wurde, dass das Quecksilber, welches das zu comprimirende Gas absperrte, genau bis zu dieser Marke reichte. Die zweite Marke war in der Mitte der Röhre gezogen, so dass sie genau die Hälfte des Volumens der ganzen Röhre bezeichnete. Um die Temperatur der Röhre constant zu halten, war sie mit einem Glascylinder umgeben, durch den stets ein Strom von kaltem Wasser hindurchging.

Man füllt nun durch Oeffnen des Hahnes und dadurch, dass man das Innere der Röhre mit einem Reservoir in Verbindung setzt, welches das

zu untersuchende Gas enthält, die Röhre bis zur untern Marke mit Gas unter dem Drucke der Atmosphäre. Dann verlängert man, nachdem der Hahn geschlossen ist, die Quecksilbersäule in der langen Röhre so weit, dass das Gas genau auf das halbe Volumen zusammengedrückt wird, das Niveau des Quecksilbers in der Compressionsröhre also genau bis zur zweiten Marke reicht. Ist das Mariotte'sche Gesetz strenge richtig, muss jetzt die Niveaudifferenz der beiden Quecksilbersäulen gleich der Höhe des Barometers sein, der Druck muss genau zwei Atmosphären sein.

Bei einem zweiten Versuche füllt man dann die Compressionsröhre aus dem Reservoir, in welchem das Gas vorher hinreichend comprimirt war, mit Gas unter dem Drucke von zwei Atmosphären bis zur untern Marke und comprimirt dasselbe wieder genau bis auf die Hälfte; bei strenger Gültigkeit muss dann der Druck gleich vier Atmosphären sein.

Füllt man dann das Druckrohr bis zur untern Marke mit Gas unter dem Drucke von vier Atmosphären, so muss zur Compression auf die Hälfte der Druck auf acht Atmosphären wachsen u. s. f.

Kurz man untersucht auf diese Weise, ob der Druck, welcher ein bestimmtes, unter dem Drucke h stehendes Volumen auf die Hälfte bringt, immer gleich $2\,h$ ist. Da man hier nur zwei immer ziemlich grosse Volume zu bestimmen hat, sind die Versuche einer grossen Genauigkeit fähig.

In der folgenden Tabelle sind die Resultate der Versuche von Regnault für vier Gase zusammengestellt. Für jedes Gas sind zwei Columnen angegeben, die erste gibt die Drucke P_0 in Millimeter Quecksilber, unter welche die Compressionsröhre bis zur untern Marke gefüllt war, die zweite das Verhältniss $\frac{V_0}{V_1}\frac{P_0}{P_1}$, wo V_1 das Volumen nach der Compression gleich $\frac{1}{2}\,V_0$ war, somit

$$\frac{V_0}{V_1}\frac{P_0}{P_1} = 2\,\frac{P_0}{P_1}.$$

Nach dem Mariotte'schen Gesetz müsste dieser Quotient gleich 1 sein.

Luft		Stickstoff		Kohlensäure		Wasserstoff	
P_0	$\frac{V_0}{V_1}\frac{P_0}{P^1}$	P_0	$\frac{V_0}{V_1}\frac{P_0}{P_1}$	P_0	$\frac{V_0}{V_1}\frac{P_0}{P_1}$	P_0	$\frac{V_0}{V_1}\frac{P_0}{P_1}$
738,72	1,001414	753,62	1,000788	764,03	1,007725	—	—
2112,53	1,002765	2159,60	1,001381	2164,81	1,018973	2211,18	0,998584
4140,82	1,003090	4953,92	1,002860	4879,77	1,045625	5845,18	0,996121
4219,22	1,003495	7297,06	1,003924	6820,22	1,066137	7074,96	0,994697
6770,15	1,004286	9775,38	1,004881	8393,68	1,084278	9175,25	0,993126
9336,41	1,006366	10981,42	1,006456	9620,06	1,099830	10361,78	0,992327

Die Tabelle zeigt, dass bei allen diesen Gasen der Quotient $\frac{V_0}{V_1}\frac{P_0}{P_1}$ von der Einheit abweicht, dass diese Abweichung für die verschiedenen Gase verschieden, aber für alle nur gering ist und um so geringer, je kleiner der anfängliche Druck ist. Die Gase weichen demnach von dem Mariotte'schen Gesetze ab, aber um so weniger, je kleiner der Druck ist, unter welchem sie stehen.

In Bezug auf die Art der Abweichung theilen sich aber die Gase in zwei Gruppen, die erstere, vertreten durch Luft, Stickstoff und Kohlensäure, wird bei steigendem Drucke stärker comprimirt, als es das Mariotte'-

sche Gesetz verlangt, denn der Druck P_1, welcher das Gas auf das halbe Volumen bringt, ist kleiner als $2\,P_0$, oder ein Druck $2\,P_0$ bringt es auf weniger als das halbe Volumen. Die andere Gruppe, vertreten durch Wasserstoff, wird weniger comprimirt, als es das Mariotte'sche Gesetz verlangt, der Druck P_1 ist grösser als $2\,P_0$.

Das Mariotte'sche Gesetz ist deshalb ein Gesetz, dem sich die verschiedenen Gase mehr oder weniger annähern; die Art und Grösse der Abweichungen hängt ab von der Natur des Gases, der Grösse des anfänglichen Druckes und, wie wir sehen werden, von der Temperatur des Gases. In welcher Weise die Abweichung, also die Differenz

$$\frac{V_0\,P_0}{V_1\,P_1} - 1 = \beta,$$

durch welche wir ein Maass dieser Abweichung erhalten, von diesen Umständen abhängt, das lässt sich nicht angeben. Selbst die Abhängigkeit des Werthes β vom Drucke lässt sich nur durch Interpolationsformeln darstellen, die man aus den Versuchen berechnen kann.

Nach diesen und andern Versuchen von Regnault entsprechen bei den meisten Gasen die Abweichungen vom Mariotte'schen Gesetze dem Gange, den obige Zahlen zeigen, bis zu einem Drucke von etwa 30 Atmosphären, nur bei den Gasen, welche, wie wir später sehen werden, innerhalb dieser oder bei nahe liegenden Drucken die flüssige Form annehmen, werden die Abweichungen bei wachsenden Drucken bedeutend stärker, so dass in der Nähe des Druckes, bei dem die Gase flüssig werden, das Mariotte'sche Gesetz auch nicht annähernd mehr gilt, die Gase werden viel stärker zusammengedrückt, als das Gesetz es verlangt.

Geht man aber zu noch viel höhern Drucken über, so folgen auch diejenigen Gase dem Mariotte'schen Gesetze nach den Versuchen von Natterer und Cailletet nicht mehr, die sich durch Druck nicht in die flüssige Form bringen lassen, und zwar zeigt sich, dass dann alle Gase von dem Mariotte'schen Gesetze in demselben Sinne abweichen, wie der Wasserstoff. Für die Luft wächst nach diesen Versuchen die Abweichung in dem von Regnault beobachteten Sinne bis zu einem Drucke von etwa 60 Atmosphären, dann nimmt die Abweichung ab und bei etwa 110 Atmosphären beginnt die Volumverminderung kleiner zu werden, als sie nach dem Mariotte'schen Gesetze sein sollte. Von da ab wird dann die Volumverminderung eine immer kleinere. Folgende Tabelle stellt einige der von Natterer und Cailletet erhaltenen Zahlen zusammen.

Druck in Atmosphären	$\frac{V_0\,P_0}{V_1\,P_1}$ Wasserstoff		Luft	
	Cailletet	Natterer	Cailletet	Natterer
60 . . .	0,9810	—	1,0137	—
80 . . .	—	—	1,0118	—
100 . . .	0,9552	0,9800	1,0098	1,0000
200 . . .	0,9158	0,9050	0,9990	0,9502
400 . . .	0,8374	0,8312	0,8672	0,8628
796 . . .	—	0,6868	—	0,6105
1570 . . .	—	0,5059	—	0,3923
2790 . . .	—	0,3613	—	0,2606.

Wie man sieht, ist in den hohen Drucken die Compressibilität bei Wasserstoff nur etwa ein Drittel, bei Luft gar nur ein Viertel derjenigen, welche sie nach dem Mariotte'schen Gesetze sein sollte.

Wir werden auf dieses Verhalten der Gase, sowie auf die Abhängigkeit der Abweichung der Gase vom Mariotte'schen Gesetz von der Temperatur in der Wärmelehre zurückkommen.

§. 60.

Druckvertheilung in der Atmosphäre. Auf Grund des Mariotte'schen Gesetzes können wir die Vertheilung des Drucks in der Atmosphäre leicht berechnen; dieselbe muss bei verticaler Erhebung in die Atmosphäre nach einem andern Gesetze abnehmen, wie bei den tropfbaren Flüssigkeiten, da die Dichtigkeit der Schichten eine immer kleinere wird, je höher man sich in der Atmosphäre emporhebt.

Um das Gesetz abzuleiten, nehmen wir an, die Luft habe überall dieselbe Temperatur und sei im Gleichgewicht. Wir denken uns nun die Atmosphäre in eine sehr grosse Anzahl so dünner Schichten, von der Dicke dh getheilt, dass wir in jeder einzelnen Schicht die Dichtigkeit der Luft als constant ansehen können, sie ändert sich dann bei dem Uebergange von einer Schicht zur andern. In einer Schicht von der Höhe h sei der Barometerstand b_0 und in der Höhe H, so dass $H - h = m\,dh$ ist, sei der Barometerstand gleich b, letzterer ist zu bestimmen.

Steigen wir von der untersten der betrachteten Schichten einmal um dh auf, so sinkt das Barometer um eine solche Höhe db, dass das Gewicht der Quecksilbersäule von der Höhe db gleich ist dem Gewicht der Luftsäule von der Höhe dh. Ist demnach s die Dichtigkeit der Luft in der betrachteten Schicht, σ die Dichtigkeit des Quecksilbers, so ist

$$s\,dh = \sigma\,db; \quad db = \frac{s}{\sigma}\,dh.$$

Setzen wir nun die Dichtigkeit der Luft unter dem Druck B der Atmosphäre gleich s_0, so ist nach dem Mariotte'schen Gesetze

$$s : s_0 = b_0 : B$$

$$s = \frac{s_0\,b_0}{B},$$

und damit

$$db = \frac{s_0\,b_0}{\sigma\,B}\,dh.$$

Damit wird dann der Barometerstand in der nächsthöhern Schicht

$$b_1 = b_0 - db = b_0 - \frac{s_0\,b_0}{\sigma\,B}\,dh = b_0\left(1 - \frac{s_0}{\sigma\,B}\,dh\right).$$

Steigen wir eine weitere Schicht empor, so ist in dieser die Dichtigkeit der Luft

$$s = \frac{s_0\,b_1}{B},$$

somit sinkt bei diesem Emporsteigen das Barometer um

$$d\,b_1 = \frac{s_0\,b_1}{\sigma\,B}\,d\,h,$$

und es wird

$$b_2 = b_1 - d b_1 = b_1\left(1 - \frac{s_0}{\sigma B}\,d h\right) = b_0\left(1 - \frac{s_0}{\sigma B}\,d h\right)^2.$$

Ganz in derselben Weise wird

$$b_3 = b_2\left(1 - \frac{s_0}{\sigma B}\,d h\right) = b_0\left(1 - \frac{s_0}{\sigma B}\,d h\right)^3,$$

oder wir erhalten den Barometerstand der jedesmal folgenden Schicht, wenn wir den Barometerstand in der vorhergehenden Schicht mit dem constanten Factor $\left(1 - \frac{s_0}{\sigma B}\,d h\right)$ multipliciren. Daraus folgt für den Barometerstand b, in der mten Schicht

$$b = b_0\left(1 - \frac{s_0}{\sigma B}\,d h\right)^m.$$

In diesem Ausdruck können wir setzen

$$m = \frac{H - h}{d\,h},$$

und bekommen dann

$$b = b_0\left(1 - \frac{s_0}{\sigma B}\,d h\right)^{\frac{H-h}{d\,h}},$$

oder wenn wir die Logarithmen nehmen

$$\log b - \log b_0 = \frac{H - h}{d\,h}\,\log\left(1 - \frac{s_0}{\sigma B}\,d h\right).$$

In dem Ausdrucke auf der rechten Seite ist $d\,h$ unendlich klein, da wir die Schichten von so geringer Dicke vorausgesetzt haben, dass die Dichtigkeit der Luft in derselben überall gleich ist. Deshalb ist sowohl der Zähler, als der Logarithmus einer von 1 unendlich wenig verschiedenen Grösse, als auch der Nenner unendlich klein. Um den Werth dieses Ausdruckes zu erhalten, entwickeln wir den Logarithmus in eine Reihe. Diese Reihe ist, wie in der Differentialrechnung bewiesen wird,

$$\log\left(1 - \frac{s_0}{\sigma B}\,d h\right) = -\frac{1}{M}\left\{\frac{s_0}{\sigma B}\,d h + \tfrac{1}{2}\left(\frac{s_0}{\sigma B}\,d h\right)^2 + \tfrac{1}{3}\left(\frac{s_0}{\sigma B}\,d h\right)^3 + \cdots\right\},$$

somit wird

$$\frac{1}{dh}\log\left(1 - \frac{s_0}{\sigma B}\,d h\right) = -\frac{1}{M}\left\{\frac{s_0}{\sigma B} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{s_0}{\sigma B}\right)^2 d h + \tfrac{1}{3}\left(\frac{s_0}{\sigma B}\right)^3 d h^2 + \cdots\right\},$$

worin $\frac{1}{M}$ den Modulus des angewandten Logarithmensystems bedeutet, somit wenn wir dekadische Logarithmen nehmen, gleich 0,43429 ist. Da dh unendlich klein ist, so verschwinden in dieser Reihe alle Glieder ausser dem ersten und es wird

$$\frac{1}{dh}\log\left(1 - \frac{s_0}{\sigma B}\,d h\right) = -\frac{1}{M}\cdot\frac{s_0}{\sigma B}$$

und

$$\log b - \log b_0 = -\frac{1}{M} \cdot \frac{s_0}{\sigma B}(H - h).$$

Auf der rechten Seite der Gleichung ist alles constant ausser $H - h$, die Höhendifferenz der beiden betrachteten Schichten; setzen wir diese gleich D, so folgt

$$\log b_0 - \log b = \frac{1}{M}\frac{s_0}{\sigma B} \cdot D,$$

und man erkennt, dass jedesmal, wenn wir um die Höhe D emporsteigen, die Differenz der Logarithmen der Barometerstände an der untern und obern Grenze dieser Schicht denselben Werth hat. Da nun die Differenz der Logarithmen gleich ist dem Logarithmus des Quotienten dieser beiden Barometerstände, so folgt, der Quotient aus den Barometerständen in um gleiche Höhendifferenzen von einander entfernten Schichten ist immer der gleiche, oder die Drucke in Höhen, welche in einer arithmetischen Reihe wachsen, gehören einer geometrischen Reihe an. Um den Quotienten dieser Reihe zu erhalten, haben wir nur den Werth auf der rechten Seite der Gleichung zu bestimmen. Setzen wir voraus, die Temperatur der Luft sei 0^0, so ist, wie wir schon erwähnten und wie wir in der Wärmelehre nachweisen werden,

$$s_0 = 0{,}001292673; \quad \sigma = 13{,}59593.$$

Messen wir die Höhe in Metern, so müssen wir den Barometerstand B, der dem Drucke der Atmosphäre entspricht, gleich 0,76 setzen und dann wird

$$\frac{1}{M}\frac{s_0}{\sigma B} = \frac{0{,}43429 \,.\, 0{,}001292673}{13{,}59593 \,.\, 0{,}76} = 0{,}00005433.$$

Für jedes Meter, welches wir in der Atmosphäre emporsteigen, nimmt also, wenn die Temperatur gleich 0^0 ist, der Logarithmus des Barometerstandes um 0,00005433 ab.

Ist die Temperatur nicht gleich 0^0, so wird die Abnahme in Folge dessen geändert; die Dichtigkeit der Luft wird dann kleiner, und zwar haben wir dann, wenn t die Temperatur der Luft ist, anstatt s_0 zu setzen $\frac{s_0}{1 + 0{,}00367\,t}$, somit

$$\log b_0 - \log b = \frac{0{,}00005433}{1 + 0{,}00367\,t} \cdot D.$$

Kennt man die Höhendifferenz D zweier Orte, so kann man hiernach den Barometerstand des einen Ortes aus dem an dem andern beobachteten ableiten; ebenso kann man aber auch die Höhendifferenz D aus den beobachteten Barometerständen erhalten, indem man die Gleichung nach D auflöst

$$D = \frac{1 + 0{,}00367\,t}{0{,}00005433}(\log b_0 - \log b,$$

oder

$$D = 18405\,(1 + 0{,}00367\,t)\,(\log b_0 - \log b).$$

In Bezug auf die Berechnung der Höhendifferenz D aus dieser Gleichung sind noch einige Umstände zu beachten.

Zunächst ist in dem Zahlencoefficienten der Gleichung eine Correction anzubringen, weil mit zunehmender Höhe die Schwerkraft kleiner wird.

Eine Behandlung des Problems der Abnahme des Luftdruckes unter Berücksichtigung des bekannten Gesetzes, nach welchem die Schwere mit steigender Höhe abnimmt, ergibt, dass in Folge dessen die Abnahme des Luftdruckes mit steigender Höhe eine etwas langsamere ist; in Folge dessen ist die Höhendifferenz D etwas grösser, als sie sich nach dieser Gleichung berechnet. Nach den vorliegenden Erfahrungen trägt man diesem Umstande hinreichend Rechnung, wenn man den Zahlencoefficienten in 18482 verwandelt.

Da ferner die Schwerkraft, wie wir wissen, mit der geographischen Breite sich ändert, so ändert sich mit derselben auch die Dichtigkeit der Luft unter dem Drucke von 0,76 m Quecksilber. Der oben angegebene Werth gilt für die geographische Breite $\varphi = 45^0$. Nennen wir die Schwerkraft unter 45^0 eins, so wird sie nach §. 26 unter der Breite φ gleich $(1 - 0{,}002598 \cos 2\varphi)$; da nun die Dichte der Luft über einem Orte einfach der Schwere an dem Orte proportional ist, haben wir obigen Werth von s_0 mit diesem Factor zu multipliciren, oder die Gleichung für D mit diesem Factor zu dividiren, oder hinreichend genau mit $(1 + 0{,}002598 \cos 2\varphi)$ zu multipliciren. Obige Gleichung setzt voraus, dass die Luft trocken ist und überall die Temperatur t hat, beides ist nicht der Fall; feuchte Luft ist leichter als trockene, und da der Feuchtigkeitsgehalt mit der Temperatur wächst, nimmt die Dichtigkeit der Luft in höhern Temperaturen rascher ab, als sie es in Folge ihrer Ausdehnung thun würde. Dieser raschern Abnahme trägt man hinreichend Rechnung, wenn man anstatt des Coefficienten 0,00367 den Werth 0,004 einsetzt. Um die Verschiedenheit der Temperatur in Rechnung zu ziehen, setzt man für t die mittlere Temperatur zwischen derjenigen des tiefern und des höhern Ortes ein, also $\frac{1}{2}(t_0 + t_1)$.

Schliesslich ist darauf zu achten, dass die Barometerstände b_0 und b auf 0^0 reducirt sein müssen; sind also B_0 und B die beobachteten Barometerstände und ist T_0 und T_1 die Temperatur des Quecksilbers, so wird nach alledem die Gleichung für D

$$D = 18482 (1 + 0{,}002598 \cos 2\varphi) \left(1 + 0{,}004 \frac{t_0 + t_1}{2}\right) \left(\log \frac{B_0}{1 + 0{,}00018\, T_0} - \log \frac{B_1}{1 + 0{,}00018\, T_1}\right)$$

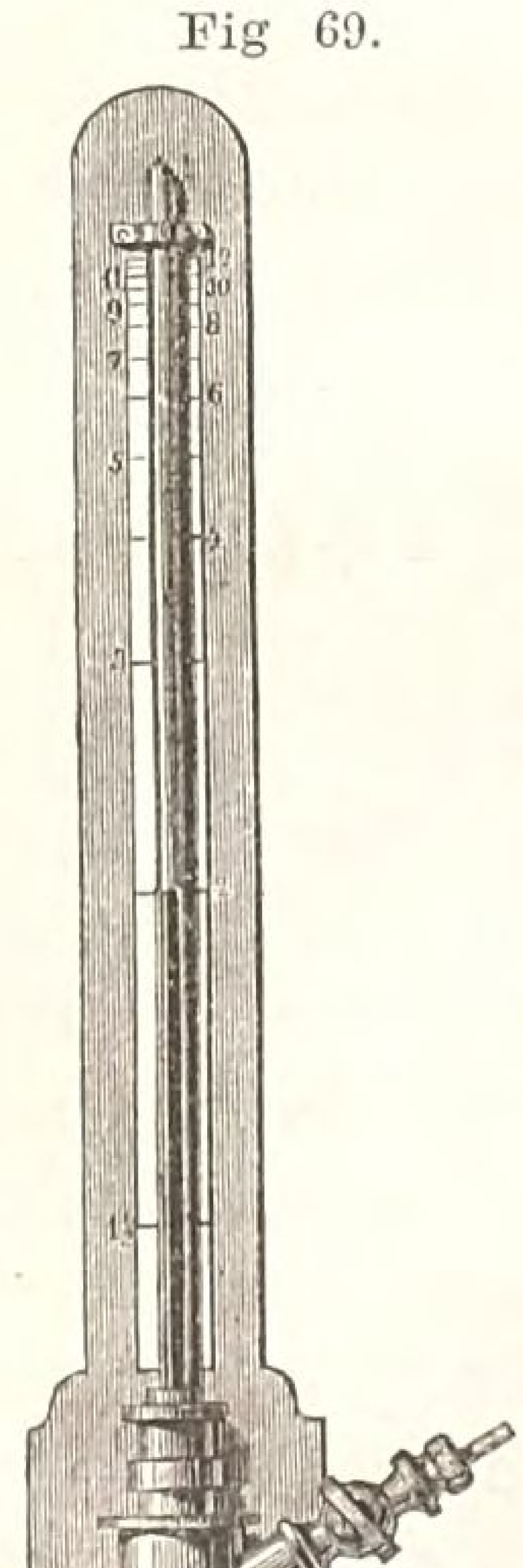
Hier liegt nun immer noch die Voraussetzung zum Grunde, dass die Luft vollkommen im Gleichgewicht sei, eine Voraussetzung, welche in der That nicht erfüllt ist. Im Gegentheil in Folge der an den verschiedenen Stellen der Erdoberfläche verschiedenen Erwärmung der Luft in Verbindung mit der Verschiedenheit des Feuchtigkeitsgehaltes treten Verminderungen des Luftdrucks an einer, Vermehrung des Luftdrucks an anderer Stelle ein. Wir erkennen dieselben einmal an den Schwankungen des Barometerstandes, die wir im Laufe der Zeit an einem und demselben Orte beobachten, und welche bis zu 50 Mm. gehen können, und andererseits an den Luftströmungen, welche Folge dieser in der Atmosphäre auftretenden Druckdifferenzen sind. Das Studium dieser in der Atmosphäre eintretenden Gleichgewichtsstörungen und der Luftströmungen, welche das gestörte Gleichgewicht wieder herstellen, ist die Hauptaufgabe der Witterungslehre, indem diese Luftströmungen das Wetter hauptsächlich bedingen.

Um diese Veränderungen des Luftdruckes bei Höhenmessungen mit dem Barometer unschädlich zu machen, ist das beste Mittel, die mittlern Barometerstände an beiden Orten zur Berechnung der Höhendifferenzen zu benutzen, indem die Mittel, welche aus hinreichend lange fortgesetzten Beobachtungen genommen sind, uns den Luftdruck geben, der dem Gleichgewichtszustande entspricht. Wenn das, wie es bei der Messung von Berghöhen meistens der Fall ist, nicht möglich ist, muss man zu den Beobachtungen eine Zeit wählen, in welcher die Atmosphäre möglichst ruhig ist, damit sie an den Beobachtungsorten dem Gleichgewichtszustande nahe kommen. Man muss dann ferner die Beobachtung des Barometers gleichzeitig an beiden Stationen anstellen lassen; ist die horizontale Entfernung der beiden Stationen nicht zu gross, so kann man ziemlich sicher sein, dass man correspondirende Barometerhöhen, das heisst solche erhält, welche in dem Verhältnisse stehen, das dem Gleichgewicht der Luft entspricht.

§. 61.

Manometer. Die Druckmesser, welche wir bisher kennen gelernt haben, beruhen auf dem hydrostatischen Grundgesetz, dass in communicirenden Röhren Gleichgewicht ist, wenn der Druck auf die Trennungsfläche der beiden Flüssigkeiten von beiden Seiten gleich gross ist. Bei diesen wird also der Druck, unter welchem das Gas steht, resp. der diesem gleiche innere Gegendruck, die Spannung des Gases, durch eine Flüssigkeitssäule gemessen, welche in der einen der beiden communicirenden Röhren über das Niveau der andern gehoben ist. Diese Druckmesser sind unter allen Umständen die genauesten und besten. Sind die zu messenden Drucke indess gross, so müssen solche Manometer eine grosse Länge haben, schon bei einem Drucke von acht Atmosphären muss der eine Schenkel über sechs Meter lang sein. Man hat deshalb auf das Mariotte'sche Gesetz eine andere Art von Manometern gegründet, welche den Druck eines Gases, oder auch der Dämpfe in einem Dampfkessel, durch die Compression eines abgeschlossenen Luftvolumens bestimmt. Da die Luft nur sehr wenig vom Mariotte'schen Gesetze abweicht, so erhalten wir unter Annahme der Richtigkeit dieses Gesetzes sehr nahe richtige Resultate.

Fig. 69.



Die gewöhnliche Form dieser Manometer zeigt Fig. 69; eine oben geschlossene, mit trockner Luft gefüllte Glasröhre taucht in ein weiteres Gefäss, welches zum Theil mit Quecksilber gefüllt ist. Das Gefäss steht in einem festen Cylinder von Eisen, durch dessen Deckel das Glasrohr luftdicht hindurch geführt ist. Die Röhre ist in den Deckel fest eingekittet und der Deckel luftdicht in das Gefäss eingeschraubt. Durch eine mit einem Hahne verschliessbare Röhre kann das Gefäss mit dem Raume in Verbindung gesetzt werden, welcher das Gas oder den Dampf enthält, dessen Druck gemessen werden soll.

Bei dem äussern Drucke der Atmosphäre steht das Quecksilber in der Röhre und dem Gefässe gleich hoch; tritt nun durch den Hahn das zusammengedrückte Gas in das Gefäss und drückt auf die

äussere Quecksilberfläche, so dringt das Quecksilber in die Glasröhre und drückt die abgeschlossene Luft dem auf sie wirkenden Drucke entsprechend zusammen.

Am besten graduirt man den Apparat empirisch, indem man ihn gleichzeitig mit einem Quecksilbermanometer verschiedenen Drucken aussetzt. Denn man kann nicht einfach schliessen, dass wenn das Luftvolumen auf 0,5; 0,25 . . gebracht ist, der Druck in dem Reservoir zwei oder vier Atmosphären sei. Es lässt sich vielmehr leicht zeigen, dass die Höhe x, bis zu welcher das Quecksilber bei einem gegebenen Drucke aufsteigt, abhängig ist von der Länge l der Manometerröhre, dem Radius r derselben und dem Radius R des Gefässes.

Das Volumen, welches die Luft unter dem Drucke einer Atmosphäre 760 Mm. Quecksilber, welche wir gleich b setzen wollen, ausfüllt, ist das Volumen der Röhre, also $r^2 \pi l$. Steigt der Druck auf n Atmosphären, so steigt das Quecksilber in der Röhre um eine gewisse Höhe x auf, sinkt in dem Gefäss um eine entsprechende Höhe y. Das Volumen der abgesperrten Luft ist dann $r^2 \pi (l - x)$. Der Druck p', unter welchem diese abgesperrte Luft steht, ist dann gleich dem auf das Quecksilber des Gefässes wirkenden Drucke $n \,.\, b$ weniger der Differenz des Quecksilberniveaus in Röhre und Gefäss, oder

$$p' = n b - (x + y).$$

Da y die Senkung des Quecksilberniveaus im Gefässe in Folge des in der Röhre aufsteigenden Quecksilbers ist, so ist

$$r^2 \pi x = R^2 \pi y; \quad y = \frac{r^2}{R^2} x,$$

somit

$$p' = n b - x \left(1 + \frac{r^2}{R^2}\right).$$

Nach dem Mariotte'schen Gesetze ist nun

$$p' : b = r^2 \pi l : r^2 \pi (l - x) = l : l - x,$$

oder indem wir den hieraus sich ergebenden Werth von $\frac{p'}{b}$ in die Gleichung für p' einsetzen,

$$\frac{l}{l - x} = n - \frac{x}{b}\left(1 + \frac{r^2}{R^2}\right) = n - k x.$$

Lösen wir die Gleichung nach x auf, so erhalten wir die Höhe, bis zu welcher das Quecksilber bei einem Drucke von n Atmosphären aufsteigt; es wird dann

$$x = \frac{1}{2k}\left\{n + k l - \sqrt{(n + k l)^2 - 4 k l (n - 1)}\right\},$$

ein Ausdruck, der für $n = 1$ gleich Null wird.

Würde nun z. B. $r = 0{,}2\, R$ und l gleich 0,5 M, so würde für

$$n = 2;\ 3;\ 4. \quad x = 0{,}417;\ 0{,}61;\ 0{,}71,$$

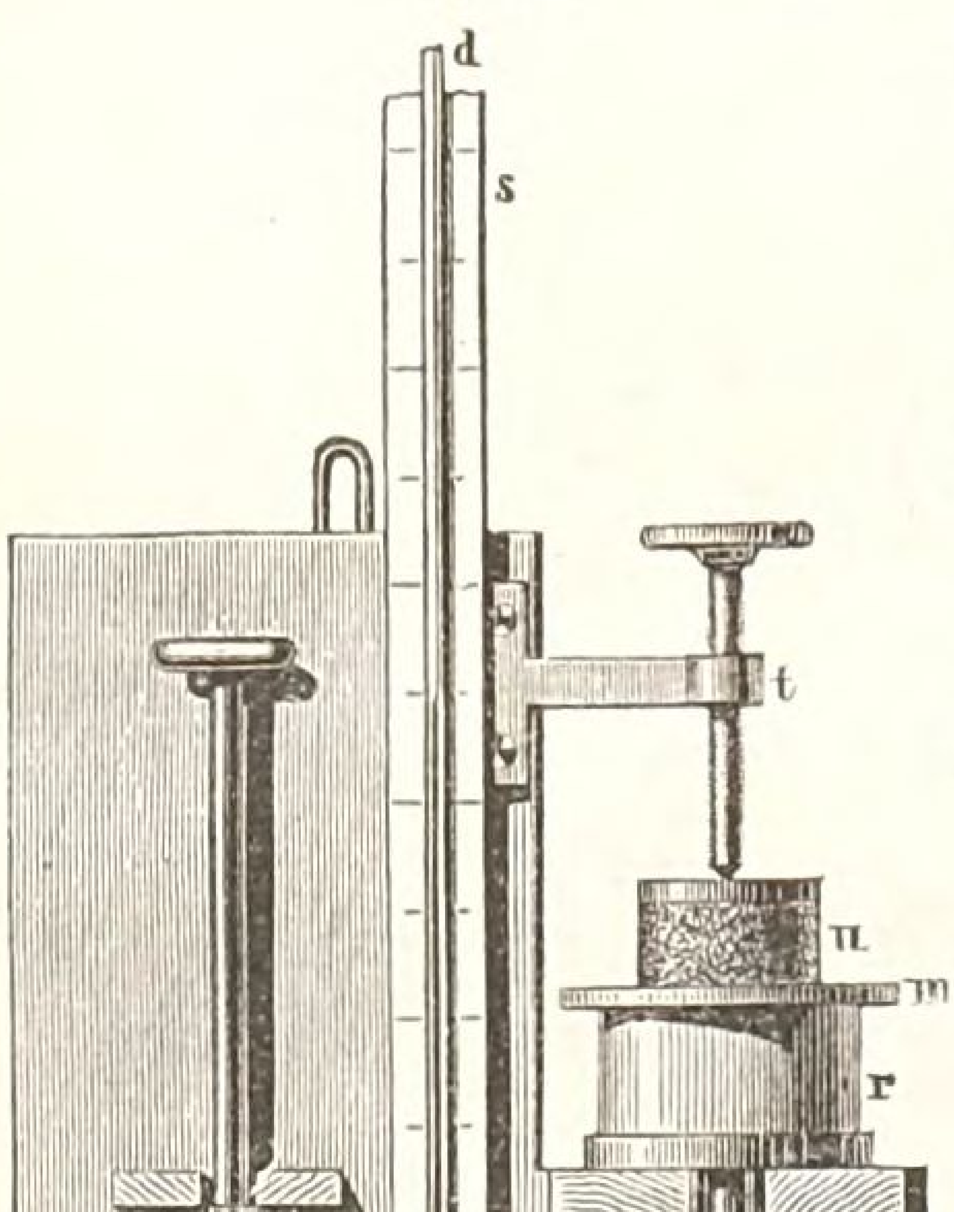
wäre die Länge des Rohres 1 Meter, so würde für die gleichen Drucke $x = 0{,}345;\ 0{,}554$ u. s. f.

Anstatt die Compression der Luft durch die Höhe einer Quecksilbersäule zu messen, hat man auch Manometer nach dem Princip der Anäroidbarometer construirt; bei diesen steht dann der Raum, dessen Gasdruck bestimmt werden soll, mit dem Innern der Röhren oder Büchsen in Verbindung, welche bei den Barometern hermetisch geschlossen sind. Da gegenüber den Drucken, die mit diesen Manometern gemessen werden sollen, die Schwankungen des Luftdrucks ausser Betracht kommen, hängt die Form der Röhren oder Kapseln nur vom innern Druck ab. Solche Manometer müssen stets nach einem Quecksilbermanometer graduirt werden.

§. 62.

Volumenometer. Eine andere Anwendung des Mariotte'schen Gesetzes ist die Messung der Volumina von Körpern und so die Bestimmung ihrer Dichtigkeit, ohne einer Wägung in Wasser zu bedürfen. Das dabei benutzte Princip ist folgendes: Man comprimirt ein abgeschlossenes Luftvolumen in einem bestimmten Verhältniss und beobachtet die eintretende Druckzunahme; darauf bringt man in den Raum, dessen Luft comprimirt wird, den Körper, dessen Volumen bestimmt werden soll. Man comprimirt gerade wie vorher; da aber jetzt durch die eingelegten Körper Luft verdrängt ist, wächst der Druck weniger, eine Vergleichung der Drucke lässt dann das Volumen des Körpers bestimmen. Apparate dieser Art sind von Say, Leslie, Regnault und Kopp angegeben worden. Der einfachste Apparat dieser Art, der zugleich eine grosse Genauigkeit zu erreichen gestattet, ist der von Kopp angegebene, den Fig. 70 darstellt. In einem zum Theil mit Quecksilber gefüllten Cylinder K bewegt sich ein quecksilberdicht schliessender Kolben mit schwacher Reibung. Der Cylinder ist unten mit einer Korkplatte verschlossen und ein gekrümmtes Rohr p lässt ihn mit einem unten und oben geschlossenen Rohr $i\,i$ communiciren. Der Deckel des letztern Cylinders ist von zwei Röhren durchbohrt, cd und q. Die Röhre cd ist gerade, an ihren beiden Enden offen und gegen eine willkührliche Theilung gelegt, deren Nullpunkt etwas über dem Deckel des Cylinders liegt. Die Röhre q gekrümmt, wie die Figur zeigt, tritt durch den Boden luftdicht in ein cylindrisches Gefäss r ein. Von dem Deckel des Cylinders $i\,i$ reichen mehrere Platinstifte von verschiedener Länge, welche zugespitzt sind, a, b in den Cylinder hinab.

Fig. 70.



Das Gefäss r kann ein anderes Gefäss aufnehmen, in welches der zu untersuchende Körper gebracht wird. Eine Scheibe von mattgeschliffenem Glase, m, wird durch die Schraube t und einen zwischen gelegten elastischen Körper u auf den obern abgeschliffenen Rand des Cylinders gelegt, um so einen luftdichten Verschluss herzustellen. Man zieht nun zunächst den Kolben

in K so weit herauf, dass die Luft frei durch CD in ii eindringen kann. Sei das Volumen der Luft, welches bei dem Barometerstande B in ii, q, r abgesperrt ist, wenn das Quecksilber die Röhre CD gerade unten verschliesst, gleich V. Drückt man nun den Kolben in K herab, so steigt das Quecksilber in ii und man hebt das Niveau desselben so weit, dass es gerade die Spitze des Stiftes a berührt. In Folge der hierdurch eingetretenen Compression des Luftvolumens V auf V' ist der Druck der abgeschlossenen Luft gewachsen und in dem Steigrohre cd das Quecksilber um eine gewisse Höhe h gestiegen; da das Volumen V' ein ganz bestimmter Bruchtheil des Volumens V ist, so ist h immer ein bestimmter, für einen gegebenen Apparat constanter Bruchtheil des augenblicklichen Barometerstandes B, der ein für allemal bestimmt wird. Zwischen den Volumen V und V' besteht nun nach dem Mariotte'schen Gesetz die Beziehung

$$V : V' = B + h : B; \quad V : V - V' = B + h : h$$

$$V - V' = \frac{h}{B + h} \cdot V.$$

Zur Bestimmung von V legt man dann in das in r befindliche Gefäss einen Körper, dessen Volumen v bestimmt ist, und verfährt gerade wie vorhin. Das ursprünglich abgesperrte Luftvolumen ist dann $V - v$, wenn das Quecksilber bis zur Spitze a reicht, wenn dasselbe in der Steigröhre cd bis zu einer Höhe h' gestiegen ist, ist das Volumen $V' - v$, und es ist

$$V - v : V' - v = B + h' : B; \quad V - v : V - V' = B + h' : h',$$

somit, wenn wir für $V - V'$ den vorhin bestimmten Werth einsetzen,

$$V = \frac{h' (B + h)}{B (h' - h)} \cdot v.$$

Gerade so, wie sich aus dem bekannten Volumen v eines in den Apparat gelegten Körpers das Volumen V ergibt, erhält man, wenn V bekannt ist, das unbekannte Volumen x eines hineingelegten Körpers durch einen ganz gleichen Versuch. Ist h'' die Höhe, bis zu welcher das Quecksilber in der Röhre cd aufsteigt, wenn das Niveau zur Spitze a reicht, im Falle der Körper mit dem Volumen x in den Apparat gelegt ist, so wird

$$x = V \frac{B (h'' - h)}{h'' (B + h)}.$$

Hat man das Verhältniss von h zu B ein- für allemal bestimmt, also $h = aB$, so bedarf es nur mehr der Beobachtung des Barometerstandes B und der Messung der Differenz $h'' - h$, denn man kann die Gleichung auf die Form bringen

$$x = \frac{B (h'' - h)}{(h'' - h + aB) B (1 + a)} V = \frac{h'' - h}{(h'' - h + aB) (1 + a)} V.$$

Der Apparat ist mit mehreren Platinspitzen versehen, um durch Heranbringen des Quecksilberniveaus an die verschiedenen Spitzen mehrere Werthe für x zu bekommen, die sich dann gegenseitig controliren, und aus denen man das Mittel nimmt, wenn die einzelnen Versuche kleine Abweichungen zeigen.

Will man mit den Apparaten das specifische Gewicht von Körpern bestimmen, so wägt man dieselben und bestimmt dann das Volumen der Körper mit dem Volumenometer. Der Quotient aus Gewicht und Volumen gibt dann das specifische Gewicht. Dass man in der That eine ziemliche Genauigkeit mit diesem Verfahren erreichen kann, zeigen folgende von Kopp ausgeführte Bestimmungen. Es ist das specifische Gewicht

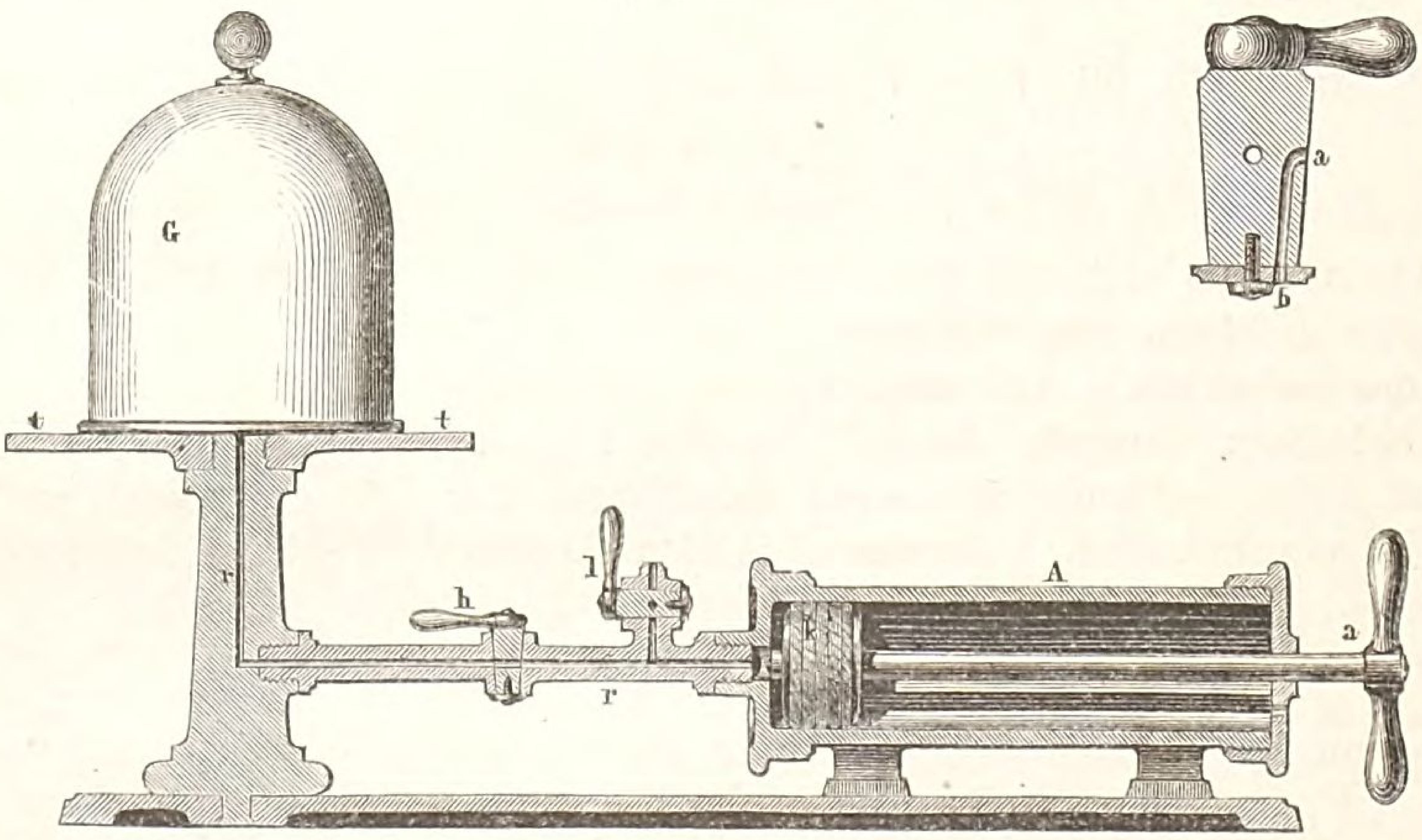
von Blei	nach Kopp	11,404,	nach gewöhnlicher Methode		11,373
„ Zinn	„ „	7,363	„	„ „	7,358
„ Salmiak	„ „	1,50	„	Wollaston	1,45.

Vorzüglich geeignet ist die Methode zur Bestimmung des specifischen Gewichtes von Pulvern, wie Mehl etc., sowie der Substanz poröser Körper, wie Holzfaser etc., deren Poren zu enge sind, als dass sie ganz von Flüssigkeit durchdrungen werden.

§. 63.

Die Luftpumpe. Auf dem Mariotte'schen Gesetze resp. der Eigenschaft der Gase, jeden ihnen dargebotenen Raum gleichmässig zu erfüllen, beruht auch die Luftpumpe, durch welche wir im Stande sind die Luft in abgeschlossenen Räumen sehr stark zu verdünnen. Das Princip dieses Apparates ist ein äusserst einfaches, wie man an der einfachsten Form leicht erkennt. In einem gut gearbeiteten Cylinder Fig. 71 kann ein luftdicht schliessender Kolben hin und her bewegt werden. Der Boden des

Fig. 71. Fig. 72.



Cylinders ist durchbohrt, und eine Röhrenleitung *rr* verbindet das Innere des Cylinders mit dem Raume über dem Teller *tt*, über welchem wir durch Aufsetzen einer luftdicht an den Teller anschliessenden Glocke *G* einen abgeschlossenen, mit Luft gefüllten Raum herstellen können, dessen Grösse gleich *A* sei, wenn der Kolben an dem Boden des Cylinders anliegt. In der Röhrenleitung sind zwei Hähne *h* und *l* angebracht, einfach quer durchbohrt, von denen *h* gestattet den Raum unter der Glocke abzusperren und *l* gestattet den innern Raum der Pumpe mit der äussern Atmosphäre in Verbindung zu setzen. Besser noch ist es, die beiden Hähne

durch einen einzigen doppelt durchbohrten, Fig. 72 zu ersetzen, der in die Röhrenleitung *rr* unmittelbar an der Bodenfläche des Cylinders eingesetzt wird. Der Hahn hat eine Durchbohrung quer durch, eine zweite in einer zu derjenigen der ersten Durchbohrung senkrechten Ebene, welche einen rechtwinklig gekrümmten Kanal *ab* bildet. In der einen Stellung setzt der Hahn den durch die Glocke auf dem Teller abgesperrten Raum mit der Pumpe in Verbindung, dreht man ihn um 90^0, setzt er das Innere des Pumpencylinders mit der äussern Luft in Verbindung.

Sei der Hahn zunächst so gestellt, dass der Raum unter der Glocke mit dem Cylinder verbunden ist, und der Kolben an dem Boden des Cylinders; der abgeschlossene Luftraum hat dann das Volumen A. Nun werde der Kolben des Cylinders zurückgezogen und dadurch das Volumen B des Cylinders mit dem Volumen A in Verbindung gesetzt. Da in den Raum B von aussen keine Luft eindringen kann, so tritt aus dem Raum A so viel Luft in B, dass beide Räume gleichmässig mit Luft gefüllt werden, oder die früher den Raum A ausfüllende Luft verbreitet sich jetzt über den Raum $A + B$. Die Dichtigkeit der in A zurückgebliebenen Luft wird daher

$$\frac{A}{A+B} = d_1.$$

Stellt man jetzt den Hahn so, dass das Innere des Cylinders mit der äussern Luft in Verbindung steht, der Raum A abgesperrt ist, und drückt man dann den Kolben K bis an die Bodenfläche, so treibt man die in die Pumpe übergegangene Luft hinaus. Wenn man dann den Hahn wieder in die erste Stellung bringt und den Kolben wieder zurückzieht, so vertheilt sich die in dem Raume A vorher zurückgebliebene Luft wieder über die Räume $A + B$, und setzen wir voraus, dass wir durch das Andrücken des Kolbens an die Bodenfläche alle Luft aus der Pumpe hinausgeschafft haben, so wird die Dichtigkeit der Luft im Raume A wieder in dem Verhältniss $\frac{A}{A+B}$ vermindert, sie wird also jetzt

$$d_2 = d_1 \frac{A}{A+B} = \left(\frac{A}{A+B}\right)^2.$$

In ganz demselben Verhältnisse wird die Dichtigkeit der Luft bei der jedesmaligen Wiederholung dieser Operation vermindert, so dass die Dichtigkeit nach nmaliger Wiederholung derselben ist

$$d_n = \left(\frac{A}{A+B}\right)^n,$$

ein Werth, der um so kleiner wird, je grösser n wird, der aber gleich Null nur wird, wenn n unendlich gross ist. Man kann somit mit einer Luftpumpe niemals einen vollständig leeren Raum herstellen, sondern die Luft nur bis zu einem gewissen, von der Dauer des Pumpens abhängigen Grade verdünnen.

Die hiernach theoretisch erreichbare Verdünnung ist indess praktisch aus mehreren Gründen nicht zu erreichen. Zunächst ist es nämlich nicht möglich, was bei dieser Rechnung vorausgesetzt wurde, wirklich alle Luft, die in den Pumpencylinder hinübergetreten ist, aus der Pumpe zu entfernen, da man den Kolben nicht so fest an den Boden des Cylinders an-

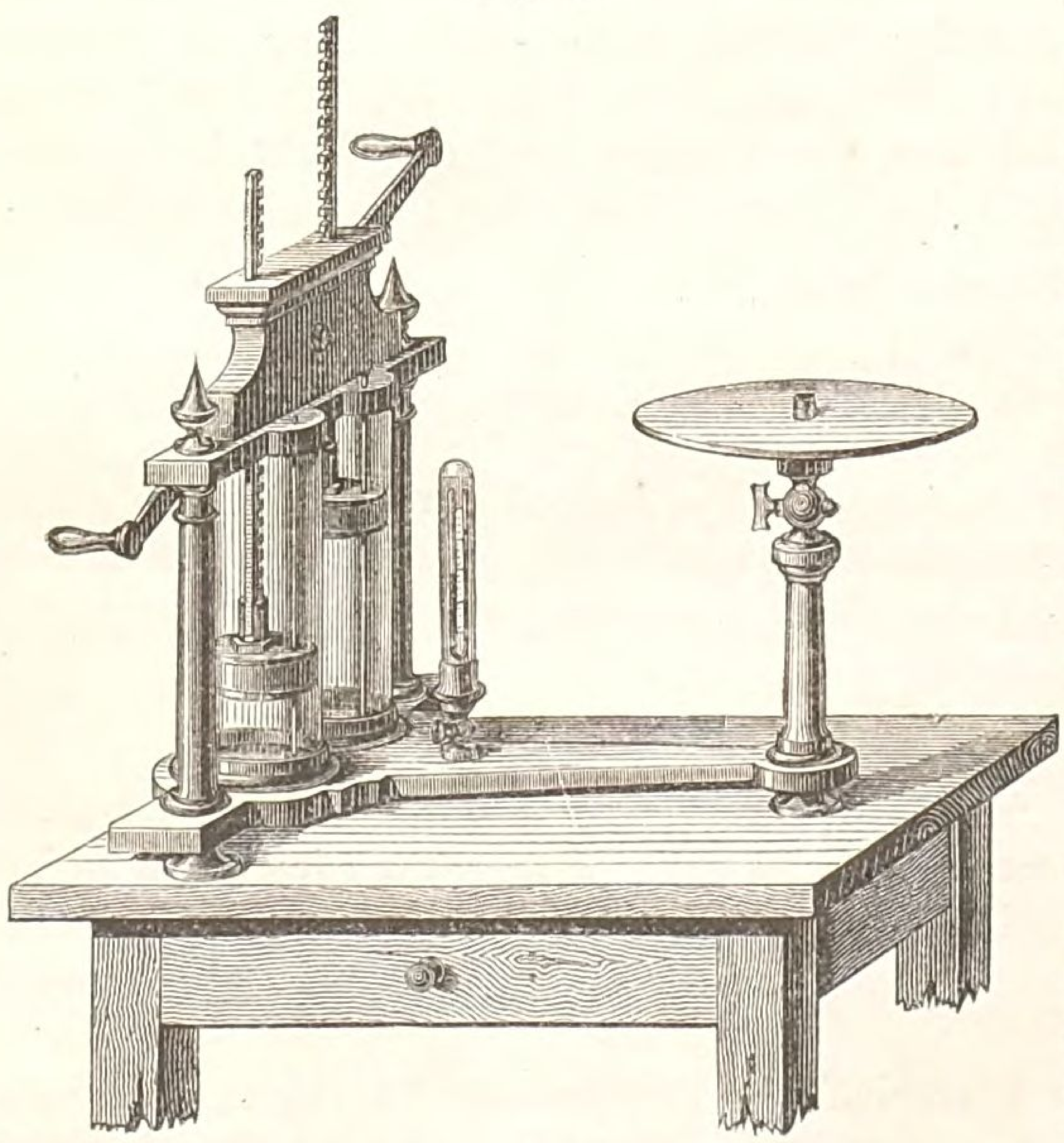
drücken kann, dass zwischen Kolben und Boden gar kein Raum mehr bleibt. Dieser zurückbleibende sogenannte schädliche Raum ist nun, da derselbe mit der äussern Atmosphäre in Verbindung stand, mit Luft von der Dichtigkeit der atmosphärischen Luft angefüllt. In Folge dessen ist die erreichbare Grenze der Verdünnung erreicht, wenn die Dichtigkeit dieser in dem schädlichen Raume vorhandenen Luft nach ihrer Ausdehnung auf das Volumen B ebenso gross ist, wie die Dichtigkeit der in dem Raum A noch vorhandenen Luft. Sobald diese Grenze erreicht ist, bewirkt eine weitere Hin- und Herbewegung des Kolbens nur mehr eine abwechselnde Ausdehnung und Compression der in dem schädlichen Raume vorhandenen Luft.

Ferner aber lassen sich die mannigfachen, an der Luftpumpe erforderlichen Verbindungen niemals absolut luftdicht herstellen, so dass ein Einsickern von Luft in die Pumpe stattfindet, welches um so stärker ist, je weiter die Verdünnung in der Pumpe schon vorgeschritten ist.

Je kleiner der schädliche Raum ist und je besser alle Verbindungen der Pumpe sind, um so weiter kann man die Verdünnung treiben. Die besten Maschinen gestatten dieselbe etwa bis auf 1 Mm. Quecksilberdruck zu bringen.

Mit der eben beschriebenen einstiefligen Luftpumpe ist es indess äusserst schwierig diese Grenze zu erreichen, da die Bewegung des Kolbens, sobald die Verdünnung der Luft einigermassen gross geworden ist, wegen des auf der einen Seite lastenden Luftdruckes einen beträchtlichen Kraftaufwand fordert. Ausserdem ist die einstieflige Luftpumpe noch in sofern unbequem, als zu jedem Pumpen eine doppelte Bewegung des Kolbens, ein Hin- und Herbewegen nothwendig ist. Beiden Uebelständen hat man durch Construction der zweistiefligen Pumpe abzuhelfen gesucht, deren Einrichtung Fig. 73 zeigt; zwei Pumpencylinder sind unmittelbar neben einander gestellt und durch einen Kanal, der sich zwischen den Stiefeln verzweigt, wie das Fig. 74 und 75 erkennen lassen, mit dem Teller in Verbindung gesetzt, welcher die Glocke oder Apparate trägt, welche luftleer gepumpt werden sollen. Die Kolben der Pumpe sind an Zahnstangen befestigt, deren Zähne in die eines gezahnten Rades eingreifen. Das Zahnrad sitzt auf einer metallischen, in der Mitte zwischen den Stiefeln getragenen Axe, an der zugleich der zweiarmige Hebel befestigt ist, durch

Fig. 73.



dessen Bewegung das Zahnrad gedreht und die Kolben auf- und abbewegt werden. Die Einrichtung des Hahnes und damit der Verbindung der beiden Pumpenstiefel mit dem Teller zeigt Fig. 74 und 75. Von dem Boden der beiden Stiefel *L* und *R* führt eine Durchbohrung zu einem mitten zwischen

Fig. 74.

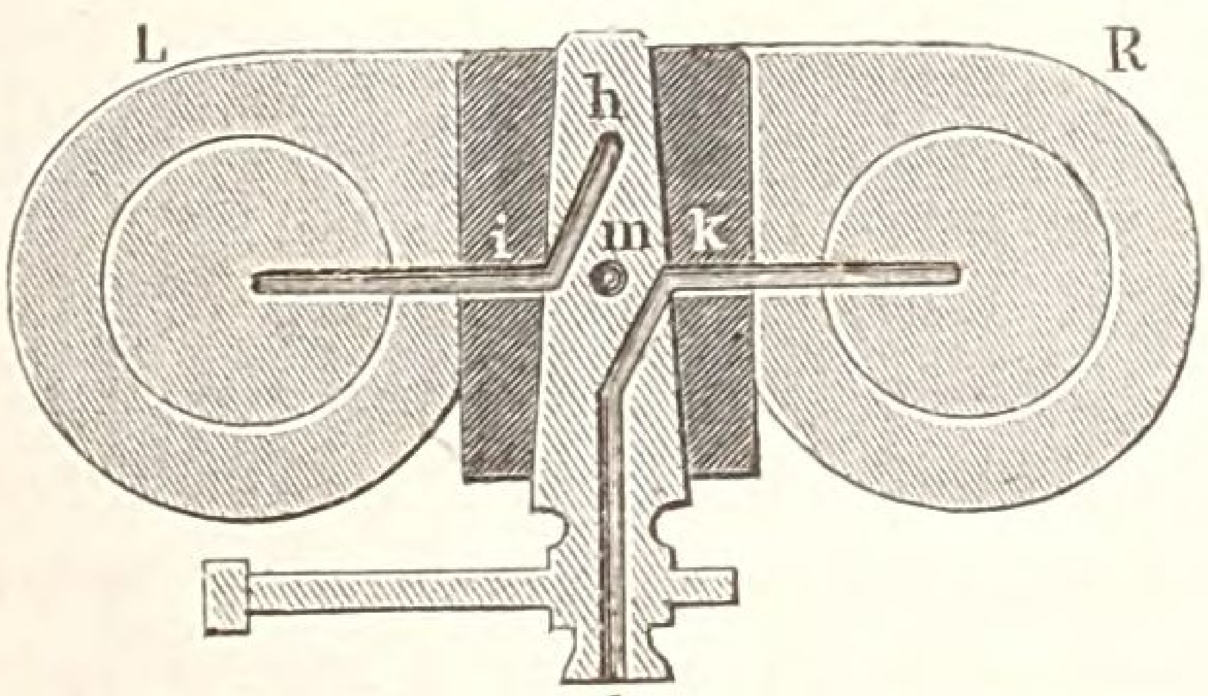
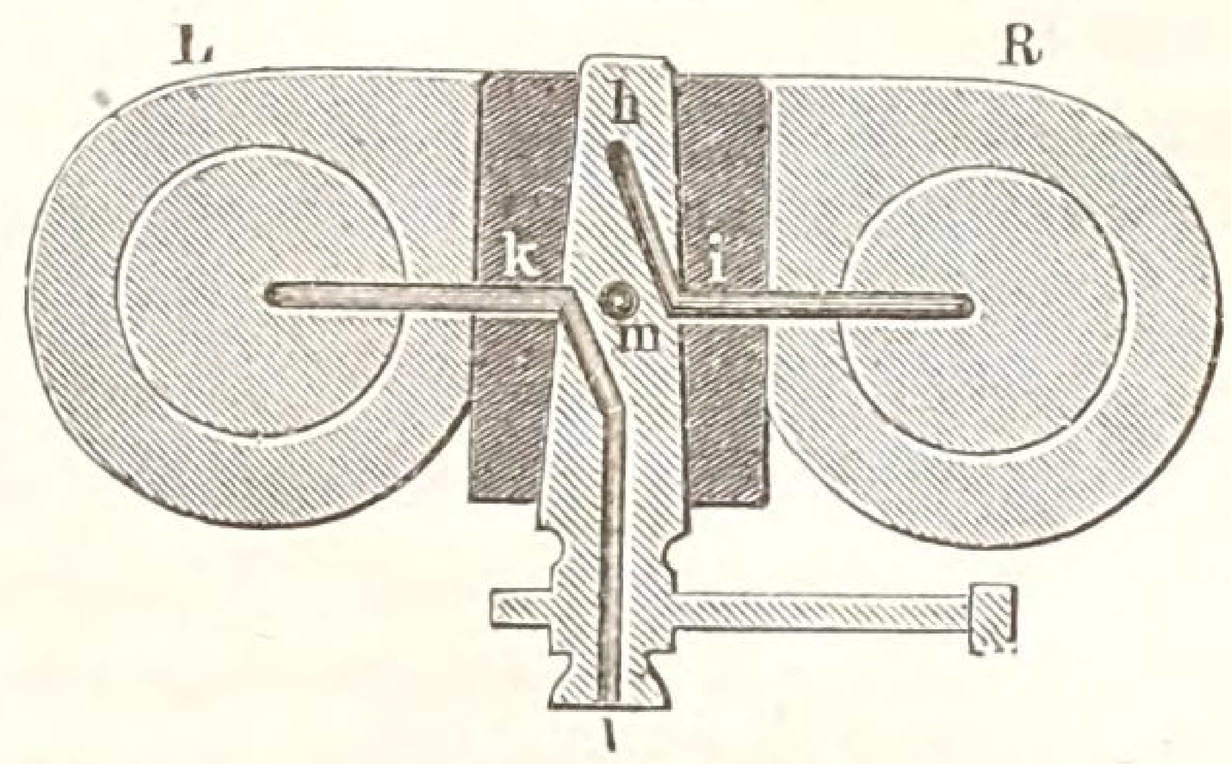


Fig. 75.



den beiden Stiefeln in die Bodenplatte gebohrten Kanal, welcher den nach seinem Erfinder benannten Grassmann'schen Hahn aufnimmt. An der Stelle, wo das von dem Teller der Pumpe herkommende Rohr in den Kanal mündet, ist der Hahn quer durchbohrt, bei *h*; von der Mitte dieser Querdurchbohrung geht durch den Hahn schräg hindurch ein Kanal *hi*, der in der Lage Fig. 74 dort aus dem Hahn hervortritt, wo die von dem Stiefel *L* hervorkommende Durchbohrung mündet. Eine zweite schräge Durchbohrung des Hahnes, *kl*, welche in dem Griffe des Hahnes in die äussere Luft mündet, verbindet dann den vom Stiefel *R* herkommenden Kanal mit der äussern Luft.

Zieht man nun den Kolben im Stiefel *L* in die Höhe, wobei gleichzeitig der Kolben in *R* hinabgedrückt wird, so wird die Luft aus dem über dem Teller abgeschlossenen Raum in den Cylinder *L* gepumpt, während aus *R* die Luft nach aussen entfernt wird. Dreht man jetzt den Hahn um 180^0 in die Lage Fig. 75, so ist durch den Kanal *hi* der Cylinder rechts mit dem Teller der Luftpumpe, der Cylinder *L* durch *kl* mit der äussern Luft in Verbindung gebracht.

Da hier stets gleichzeitig der eine Kolben gehoben, der andere gesenkt wird, ist sowohl die Erschwerung der Bewegung durch den Luftdruck gehoben, als auch andererseits keine Doppelbewegung für ein einmaliges Pumpen nöthig, denn jede Bewegung pumpt in dem einen Cylinder und schafft aus dem andern die Luft fort.

Um den schädlichen Raum zu vermindern, hat der Grassmann'sche Hahn noch eine dritte Durchbohrung, welche in Fig. 74 und 75 senkrecht zu der Ebene der andern Durchbohrungen mitten durch den Hahn geführt ist und welche, wenn man den Hahn aus der Stellung Fig. 74 oder 75 um 90^0 dreht, die beiden Cylinder *L* und *R* in Verbindung setzt, während keiner der Cylinder weder mit der äussern Luft, noch mit dem auszupumpenden Raume in Verbindung setzt. Diese Durchbohrung gestattet somit den einen Cylinder durch den andern auszupumpen. Hat man z. B. in der Stellung Fig. 74 gepumpt, so dreht man den Hahn nur um 90^0, hebt man dann den Kolben rechts und senkt damit links, so hat die Luft, welche man in den Cylinder *L* vorher hinein gepumpt hatte, nicht in die freie Luft zu entweichen, sondern wird in den Cylinder rechts hineingepumpt. Der schädliche Raum des Cylinders *L* ist also nicht mit Luft von der

Dichtigkeit der im Cylinder L nach dem Pumpen vorhandenen Luft gefüllt. Es ist deshalb eine weit grössere Annäherung an die theoretisch erreichbare Verdünnung möglich.

Der Grad der erreichten Verdünnung wird an dem abgekürzten Heberbarometer abgelesen, welches auf den Kanal, der den Teller mit der Pumpe verbindet, aufgesetzt ist. Der geschlossene Schenkel desselben, der ebenso lang ist wie der offene, hat gewöhnlich eine Länge von etwa 30 Centim. Das Barometer ist dann bis eben über die Biegung gefüllt, so dass man die Drucke, die in der Pumpe vorhanden sind, ablesen kann, wenn sie etwa 28 Centim., also etwas mehr als $\frac{1}{3}$ Atmosphäre betragen. Will man von dem Beginne der Verdünnung ab die Drucke in der Pumpe verfolgen, muss man mit derselben ein Quecksilbermanometer in Verbindung setzen.

Der unter dem Teller Fig. 73 angebrachte Hahn dient zum Wiedereinlassen der Luft; derselbe ist gerade so durchbohrt wie der Hahn Fig. 72, so dass er in der einen Stellung den Teller mit der Pumpe in Verbindung setzt, in der einen um 90^0 gedrehten den über dem Teller abgeschlossenen Raum mit der äussern Luft und in der andern, gegen die letztere um 180^0 gedrehten den Raum der Pumpe mit der äussern Luft.

Anstatt zweistiefliger Luftpumpen hat man in letzter Zeit doppeltwirkende einstieflige construirt, bei denen der Stiefel beim Aufsteigen unten, beim Niedergehen oben mit dem auszupumpenden Raume in Verbindung steht. Die Verbindung des Tellers mit der Pumpe ist dann in der Nähe des Stiefels verzweigt und der eine Zweig ist durch den Boden, der andere durch den Deckel des Stiefels mit dem Innenraume desselben in Verbindung gesetzt. Dort, wo die Zweige in den Stiefel eintreten, sind Hähne von der Form Fig. 72 eingesetzt. Die Kolbenstange geht dann in einer Stopfbüchse; die Bewegung des Kolbens wird mit Hülfe eines Mechanismus, der dem an der nachher zu betrachtenden Natterer'schen Compressionsmaschine ähnlich ist, durch die continuirliche Rotation eines Schwungrades bewirkt. Die Pumpen haben dann ebenfalls eine Einrichtung, welche durch die Drehung des Schwungrades die richtige Stellung der Hähne bewirkt.

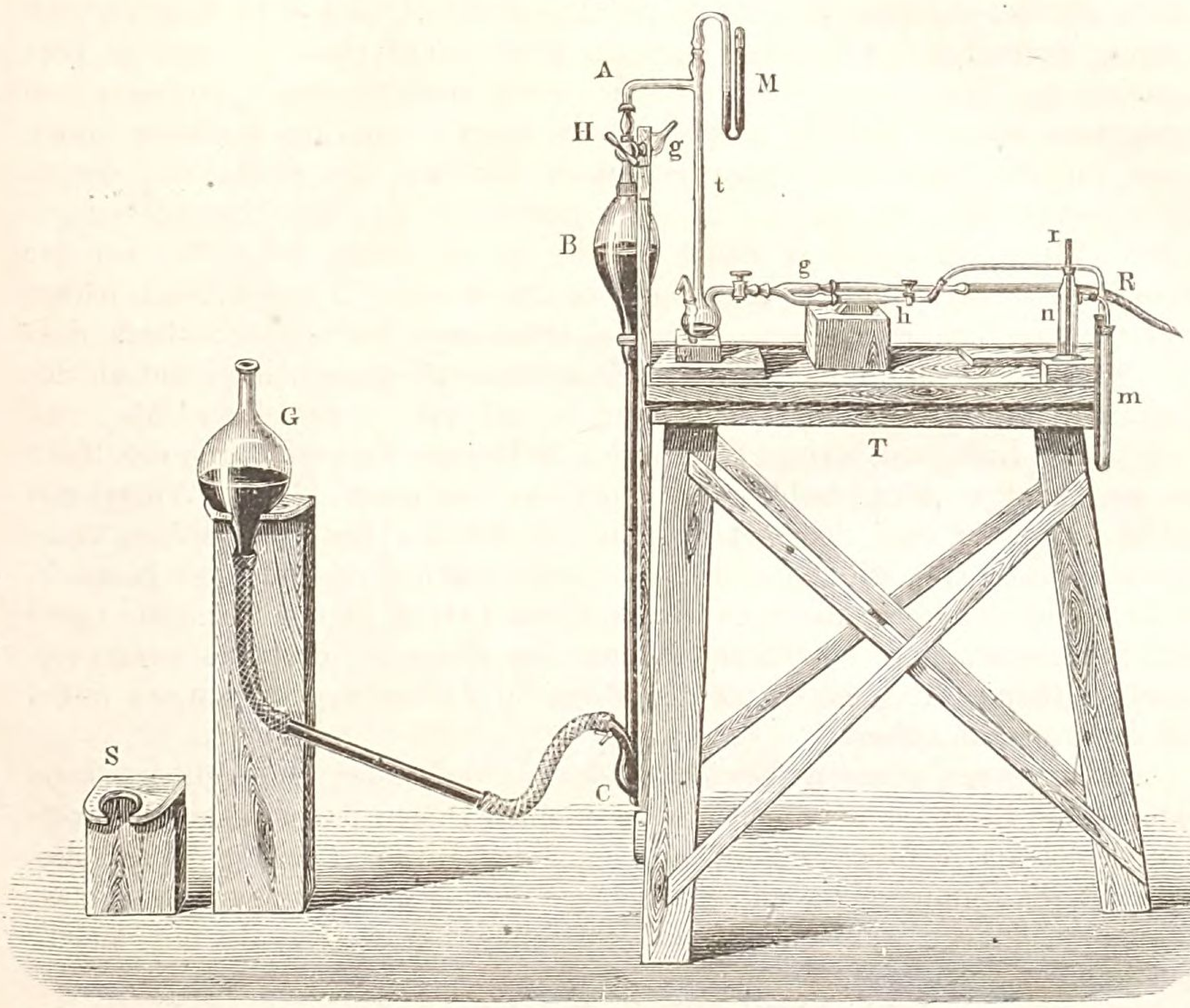
Ausser den im Bisherigen beschriebenen Hahnluftpumpen werden besonders von den französischen Mechanikern Ventilluftpumpen verfertigt. Bei diesen sind die Hähne durch Ventile ersetzt, ein Ventil im Boden des Stiefels, welches sich hebt, wenn der Kolben emporgezogen wird, sich schliesst, wenn der Kolben niedergeht, ein Ventil im Kolben, welches sich schliesst, wenn der Kolben in die Höhe geht, sich öffnet, wenn er herabgeht. Eine nähere Beschreibung derselben wird überflüssig sein.

§. 64.

Quecksilberluftpumpen. Eine weiter gehende Verdünnung als mit den im vorigen §. beschriebenen Pumpen lässt sich mit den von Geissler construirten Quecksilberluftpumpen erreichen, bei welchen der schädliche Raum dadurch auf ein Minimum reducirt wird, dass man anstatt des Kolbens Quecksilber verwendet. Durch Heben und Senken von Quecksilber stellt man den leeren Raum eines Barometers her und bringt dann die ausgepumpten Räume mit demselben in Verbindung. Die Einrichtung der Pumpe zeigt Fig 76. An einem festen, an den Tisch T angeschraubten

Brette ist die bei B mit einer etwa 15 Liter haltenden birnförmigen Erweiterung versehene oben und unten offene Glasröhre AC befestigt. Unten

Fig. 76.



bei C ist die Röhre umgebogen und auf die Umbiegung ein dicker Kautschukschlauch gezogen, der die Röhre AC mit dem Gefässe G in Verbindung setzt. In die Röhre AC ist bei H ein Glashahn eingeschliffen, der ebenso wie der Hahn Fig. 72 durchbohrt ist. Die eine nach aussen gehende Durchbohrung mündet in das kleine an den Hahn angeschmolzene Glasgefäss g, die andere geht quer durch den Hahn. Die Röhre AC ist oben konisch ausgeschliffen, und in dieses Ende ist das Ende des ┬ förmigen Rohres t luftdicht eingeschliffen. Dieses ┬ förmige Rohr trägt einerseits das Manometer M, welches luftdicht in das obere Ende des ┬ förmigen Rohres eingeschliffen ist; andererseits mündet das Rohr t in ein kleines zur Hälfte mit wasserfreier Phosphorsäure gefülltes Gefäss, von dem aus das gabelförmige Glasrohr g einerseits zu den Apparaten führt, welche luftleer gepumpt werden sollen, andererseits durch das U-förmig gebogene Rohr m und die doppelhalsige Flasche n in die freie Luft führt. Letztere Verbindung dient dazu, nach dem Auspumpen wieder Luft einzulassen, und zu dem Ende ist in dieselbe ein einfach durchbohrter Hahn h eingesetzt. Die Flasche n und die Röhre m sollen die in die Pumpe eintretende Luft austrocknen. Die Flasche n ist zu dem Zwecke einige Centimeter hoch mit concentrirter Schwefelsäure gefüllt, so dass das in den einen Hals der Flasche luftdicht eingesetzte oben und unten offene Rohr r, durch

welches allein die Luft in den Apparat eindringen kann, unter der Schwefelsäure mündet. Alle in den Apparat eintretende Luft muss also durch die Schwefelsäure gehen, dann durch das mit Chlorcalcium oder in Schwefelsäure getauchten Bimsteinstücken gefüllte Rohr *m*, und wird dadurch vollständig getrocknet. Verbindet man das Rohr *r*, anstatt es in die freie Luft münden zu lassen, mit einem andere Gase enthaltenden Gasometer, so kann man ebenso gut die ausgepumpten Räume mit diesen Gasen füllen.

Um die Pumpe zu brauchen, wird zunächst das Gefäss *G*, dessen Inhalt etwas grösser ist als derjenige des Rohrs *AC*, mit Quecksilber gefüllt. Wird der Hahn *H* dann so gestellt, dass das Rohr *BC* mit der äussern Luft communicirt, so steigt das Quecksilber in demselben zunächst bis zum Niveau des Gefässes *G*. Man hebt dann das Gefäss so hoch, dass das Niveau des in ihm enthaltenen Quecksilbers etwas höher steht als der Hahn *H*, das Quecksilber steigt dann in *BC* bis zu derselben Höhe, vertreibt alle Luft, und dringt schliesslich in kleinen Tropfen durch den Hahn in die Kugel *g*. Man dreht dann den Hahn um einen kleinen Winkel und senkt *G* bis zu dem Schemel *S*. Da das Niveau des Quecksilbers dann um mehr als 760 Millimeter tiefer ist als das untere Ende der Birne *B*, sinkt es in das Rohr zwischen *B* und *C*, und stellt in der Birne die Leere des Barometers her. Stellt man dann den Hahn so, dass die auszupumpenden Räume mit dem Raum der Birne in Verbindung stehen, so fliesst die Luft dorthin über.

Wegen des grossen Gewichtes des zu hebenden Quecksilbers kann eine solche Luftpumpe immer nur in kleinen Dimensionen ausgeführt werden, mehr als 3 Liter Inhalt kann man der Birne *B* kaum geben, deshalb ist die Pumpe nur geeignet, kleinere Räume auszupumpen, diese aber, da der schädliche Raum hier ganz fortfällt, viel weiter als mit andern Luftpumpen.

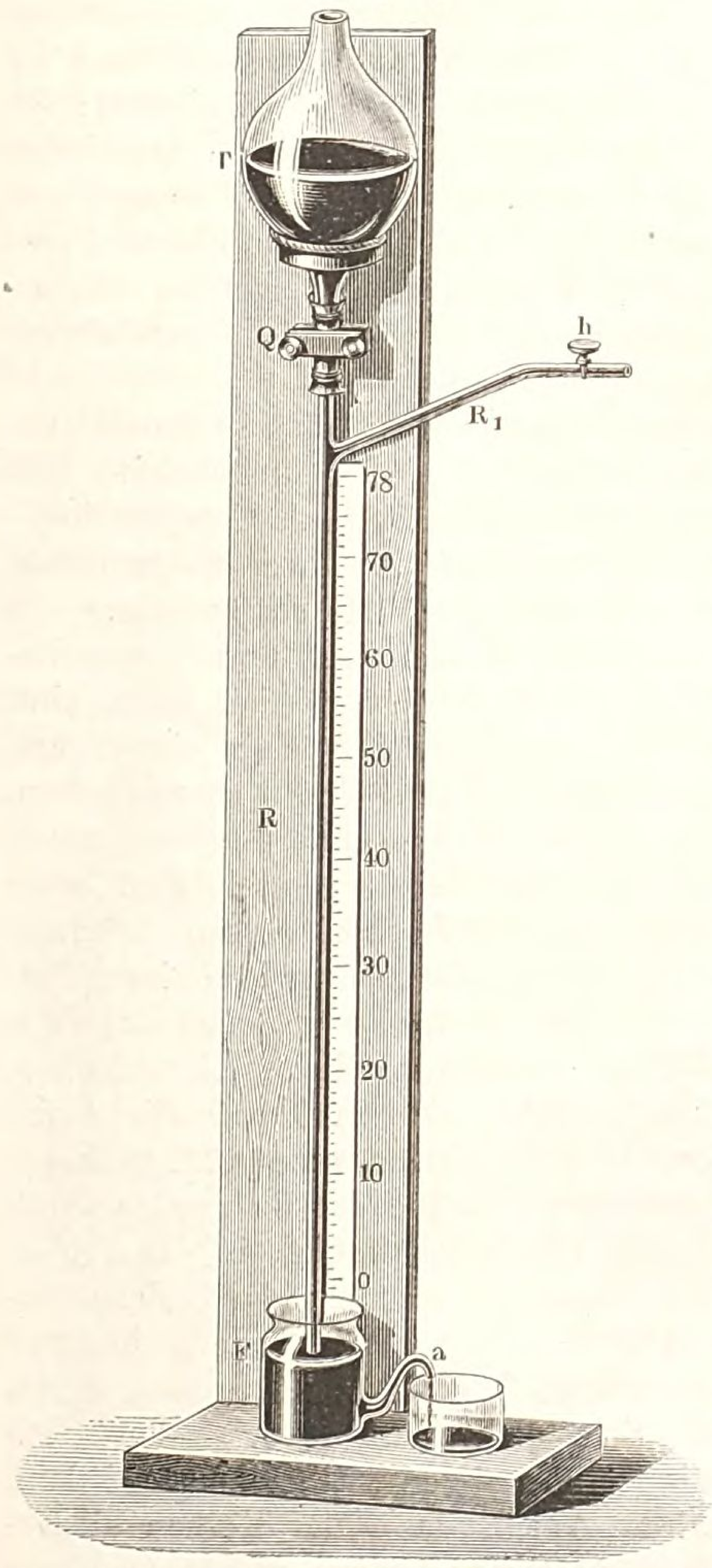
Um das immerhin lästige Heben und Senken des Quecksilbers mit der Hand zu vermeiden, hat Jolly das Gefäss *G* auf einen kleinen Tisch gestellt, der mit Zahnrad und Kurbel gehoben und gesenkt wird.

Eine auf einem ganz andern Princip beruhende Quecksilberluftpumpe ist die von Sprengel construirte, dieselbe beruht auf den §. 53 vorgetragenen Sätzen über den hydraulischen Druck.

An ein trichter- oder flaschenförmiges Gefäss Fig. 77 ist unten mit einem Kautschukschlauch eine etwa 800 Mm. lange dickwandige Glasröhre von überall gleichem etwa 2 Mm. grossem lichtem Durchmesser angehängt, deren unten offenes Ende in ein kleines mit seitlichem Ausflussrohr *a* versehenes Gefäss *F* mündet. An das Rohr *R* ist etwa 30 Mm. unterhalb des Kautschukschlauches eine seitliche Röhre R_1 angeschmolzen, in welche man bei *h* passend einen Glashahn einsetzt. Diese Röhre führt zu den Apparaten, welche mit der Pumpe luftleer gemacht werden sollen. Ueber den Kautschukschlauch ist ein Quetschhahn gelegt, durch welchen man den Schlauch schliessen kann. Um die Pumpe wirken zu lassen, füllt man den Trichter mit Quecksilber, öffnet durch einen Druck auf den Quetschhahn den Kautschukschlauch und lässt das Quecksilber in einem stetigen Strahle ausfliessen. Die durch die Röhre R_1 mit dem Apparate verbundenen Räume werden dann allmählich leer gepumpt, indem die Luft durch das bei R_1 vorbeifallende Quecksilber mitgerissen wird und dann unten

aus dem Rohre R austritt. Hat der Apparat die angegebenen Dimensionen, so kann man durch fortgesetztes Ausfliessenlassen ziemlich vollständige Barometerleere erhalten. Es ergibt sich das aus den Sätzen des §. 53. Nennen wir h die Tiefe des Ansatzrohres unter dem Niveau des Quecksilbers in dem Gefässe T, bezeichnen wir mit H den Abstand der untern Ausflussöffnung von demselben Niveau, mit p_0 den Druck der Atmosphäre, der auf das obere Niveau des Quecksilbers in der Flasche T und ebenso in der Ausflussöffnung wirkt, so ist nach der letzten Gleichung des §. 53 der Druck p an der Stelle, an der das Rohr R_1 angesetzt ist,

Fig. 77.



$$p = p_0 - s\,(H - h),$$

wenn das specifische Gewicht des Quecksilbers gleich s ist. Ist nun $H - h$ die Länge der Quecksilbersäule unterhalb der Ansatzstelle von R_1 gleich der Höhe des Barometers, so ist $p = 0$, es wird also aus den mit R_1 verbundenen Räumen die Luft in die Röhre R gerade so hineingesogen, wie in den leeren Raum des Barometers und deshalb jeder mit R in Verbindung stehende Raum durch fortgesetztes Pumpen ebenso entleert, wie mit den andern Quecksilberluftpumpen. Den Grad der erreichten Verdünnung erkennt man unmittelbar an der Höhe, bis zu welcher das Quecksilber in der Röhre R stehen bleibt, wenn man durch Schliessen des Quetschhahnes den Ausfluss des Quecksilbers unterbricht.

Auf ganz demselben Princip wie die Sprengel'sche Pumpe, beruht die Bunsen'sche Wasserluftpumpe, in welcher nur das Quecksilber durch Wasser ersetzt ist; bei dieser muss das Fallrohr der geringeren Dichtigkeit des Wassers entsprechend länger sein. Gibt man dem Fallrohr eine Länge von etwa 8 Meter, so kann man mit der Bunsen'schen Pumpe in den zu entleerenden Räumen den Druck bis auf 0,25 Atmosphären vermindern.

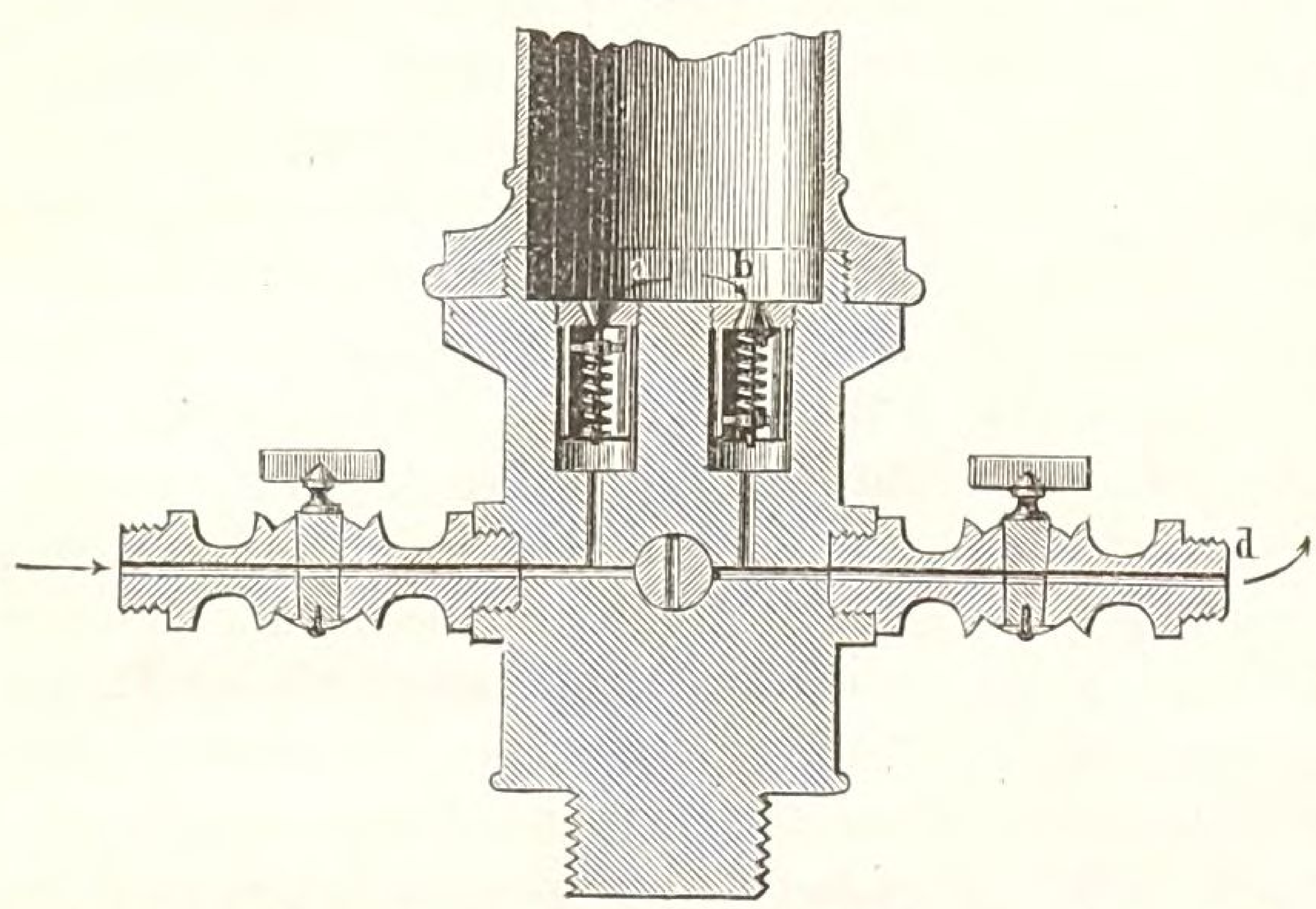
§. 65.

Die Compressionspumpe. Die Compressionspumpen haben eine derjenigen der Luftpumpen entgegengesetzte Aufgabe, sie dienen dazu, die Luft

oder irgend ein Gas in einem abgeschlossenen Raume zu verdichten. Die einfache oder auch die zweistieflige Hahnluftpumpe können, vorausgesetzt, dass sie hinreichend stark gebaut sind, unmittelbar als Compressionspumpen gebraucht werden. Man hat nur das Spiel der Hähne einfach umzukehren. Wenn der Kolben zurückgezogen oder gehoben wird, wird der Hahn so gestellt, dass die Luft von aussen in den Stiefel der Pumpe eintritt; ist der Stiefel mit Luft gefüllt, so wird der Hahn umgestellt, so dass beim Niedergehen des Kolbens die Luft in die auf dem Teller der Pumpe angebrachten Räume hinein gepresst wird. Es ist klar, dass in diesem Falle die Glocke oder die Räume, in denen die Luft verdichtet werden soll, an den Teller der Pumpe befestigt werden müssen, da sonst die verdichtete Luft in Folge ihres stärkern Druckes die Glocke aufhebt.

Die Ventilluftpumpen können nicht unmittelbar als Compressionspumpen verwandt werden, da der Gang der Ventile der umgekehrte sein muss. Eine sehr bequeme Ventilpumpe, die gleichzeitig als Compressionspumpe und Luftpumpe gebraucht werden kann, zeigt in ihren wesentlichen Theilen Fig. 78. In den sehr dicken Boden eines Messingcylinders, in welchem ein massiver luftdicht schliessender Kolben auf und nieder bewegt werden kann, sind zwei Löcher eingebohrt. Das eine *a* ist nach oben, das andere *b* nach unten konisch geschliffen. In die Löcher passen luftdicht schliessende konische Ventile, von denen das in *a* befindliche sich nach oben, das in *b* befindliche sich nach unten öffnen kann. Die Ventile werden durch schwache, in dem Hohlraume des Bodens befestigte Federn in ihrer Lage gehalten.

Fig. 78.



In diese Hohlräume führen Röhrenleitungen, welche mit Hähnen geschlossen werden können. Sind die Hähne offen, so hebt sich das Ventil *a*, wenn der Kolben in die Höhe gezogen wird, während *b* dann durch den Luftdruck geschlossen wird. Wenn dann der Kolben niedergedrückt wird, schliesst sich *a* und *b* öffnet sich, durch dessen Oeffnung dann die bei dem Heben des Kolbens in die Pumpe eingetretene Luft entweicht. Verbindet man demnach die zu *a* führende Röhrenleitung mit einem Raume, der entleert werden soll, so wirkt die Pumpe als Luftpumpe. Verbindet man die zu *b* führende Röhrenleitung mit den Räumen, in denen die Luft comprimirt werden soll, so dient der Apparat als Compressionspumpe.

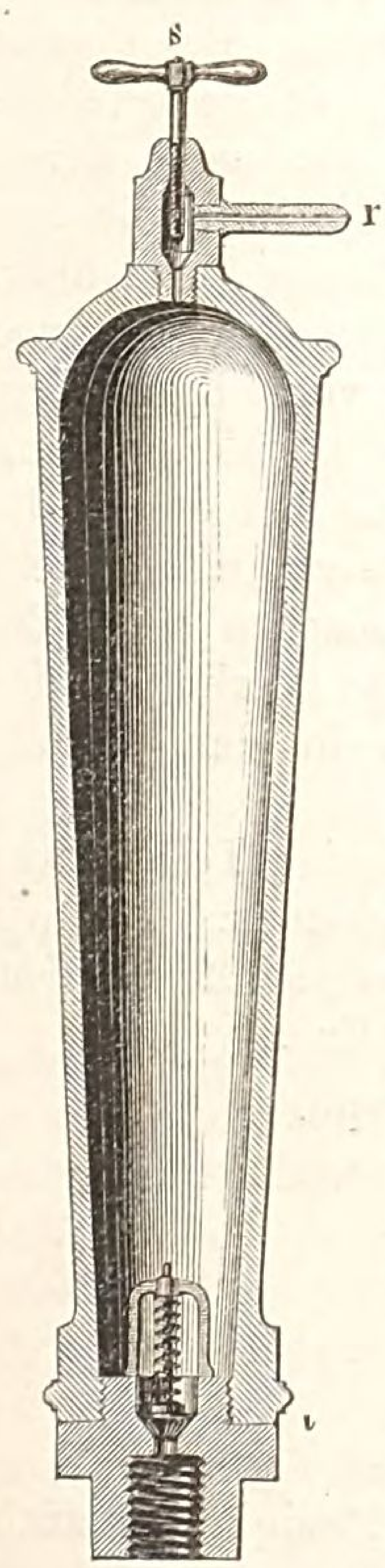
Die Pumpe kann ebenso dienen, um in abgeschlossenen Räumen beliebige andere Gase zu comprimiren, indem man die zu *a* führende Röhrenleitung zu dem Reservoir führt, welches das Gas enthält, das comprimirt werden soll.

Die am häufigsten angewandten Compressionspumpen sind einfache

Röhren von starkem Messing oder Eisen, in denen ein massiver Kolben auf und nieder geht. An dieselben werden die mit dem entsprechenden Verschluss, in der Regel einem nach innen sich öffnenden Ventil, versehenen Behälter angeschraubt. Zum Schöpfen der Luft oder zum Aufnehmen des Gases dient dann eine Oeffnung in der Pumpenwand, welche nahe dem andern Ende des Cylinders ist, so dass der Kolben in seiner äussersten Stellung sich über dieser Oeffnung befindet, und die Luft frei zwischen Kolben und Gefäss in die Pumpe eintreten kann. Soll statt der Luft ein anderes Gas comprimirt werden, so ist an die seitliche Oeffnung ein Rohr gesetzt, welches durch die entsprechende Leitung mit dem Reservoir, welches das zu comprimirende Gas enthält, in Verbindung gesetzt wird.

Diese Einrichtung hat auch der grosse Compressionsapparat von Natterer, bei welchem nur der Kolben der Pumpe, wegen der grossen Drucke, die mit demselben erreicht werden sollen, nicht direkt mit der Hand, sondern durch Kurbel und Schwungrad bewegt wird. Auf diese Pumpe, welche auf einem schweren Gestell befestigt ist, wird dann das Reservoir aufgesetzt, welches die comprimirten Gase aufnehmen soll. Als solches dient eine starke Flasche von Schmiedeeisen Fig. 79. Dieselbe wird vorher auf ihre Festigkeit geprüft, indem man mittels Wasser einen Druck von 150 bis 200 Atmosphären auf die Innenfläche derselben wirken lässt. Das sich nach dem Innern der Flasche öffnende Ventil *l* lässt das Gas eintreten. Um das verdichtete Gas, oder wenn es zu einer Flüssigkeit condensirt ist, das flüssige Gas austreten zu lassen, ist an dem obern Ende der Flasche eine kleine Oeffnung angebracht, welche in dem Röhrchen *r* mündet. Dieselbe wird verschlossen durch den mit einem Schraubengewinde versehenen Stift *s*, welcher konisch in den engen Hals der Flasche eingeschliffen ist. Will man das flüssige Gas austreten lassen, so schraubt man die Flasche von der Compressionspumpe ab, kehrt sie um, so dass die Oeffnung *r* unten ist, und öffnet dieselbe durch Drehen des Stiftes *s*. Der Druck des über dem flüssigen stehenden stark verdichteten Gases treibt dann die Flüssigkeit heraus.

Fig. 79.



Vielfach dient auch folgendes Verfahren dazu, um Gase ganz ohne mechanische Mittel zu comprimiren. Man schliesst in eine gebogene Röhre von sehr starkem Glase die beiden Substanzen, durch deren Einwirkung das Gas entwickelt werden soll, also etwa eine Säure und ein kohlensaures Salz, indem zunächst die Säure an das eine, das Salz an das andre Ende der Röhre gebracht wird. Durch Neigen der Röhren werden dann die Substanzen nach und nach zusammengebracht. Durch die Entwicklung des Gases in dem abgeschlossenen Raume und die Ansammlung desselben wird der Druck in der Röhre ein sehr starker, und es bedarf grosser Vorsicht, dass der Apparat nicht springt. Mit einem nach diesem Princip con-

struirten Apparate ist es Thilorier zuerst gelungen, grosse Mengen Kohlensäure flüssig zu machen.

§. 66.

Flüssigmachen der Gase. Bei Besprechung des Mariotte'schen Gesetzes haben wir gesehen, dass die sogenannten permanenten Gase wie Sauerstoff, Wasserstoff, Stickstoff, Luft bei sehr stark wachsenden Drucken eine immer geringere Compressibilität zeigen. Als zweite Gruppe haben wir damals den permanenten Gasen diejenigen gegenübergestellt, welche durch Druck flüssig gemacht werden können, die sogenannten coercibeln Gase.

Wenn man diese mit der Compressionspumpe immer stärkern Drucken aussetzt, so ergibt sich, dass mit steigenden Drucken die Zusammendrückbarkeit stetig wächst, bis zu einem gewissen, bei einer und derselben Temperatur für die verschiedenen Gase verschiedenen, bei verschiedener Temperatur auch für dasselbe Gas verschiedenen Drucke. Ist dieser Druck erreicht, so kann man das Gas beliebig bis zu einer bestimmten Grenze zusammendrücken, ohne dass der Druck des Gases überhaupt noch zunimmt, ohne dass man also den äussern Druck vermehren muss. Bei diesem Drucke ändert nämlich das Gas seinen Aggregatzustand, es geht in die flüssige Form über; jede Volumverminderung, welche wir nach Erreichung jenes Grenzdruckes dem Gase zu Theil werden lassen, führt die dem verminderten Volumen entsprechende Gasmenge in die flüssige Form über.

Diese Zustandsänderung geht plötzlich vor, sie bereitet sich aber, wie erwähnt, durch ein stetes Wachsen der Compressibilität vor. Daraus ergibt sich schon, dass man die permanenten Gase durch die Vermehrung des Druckes nicht in die flüssige Form bringen kann, da bei diesen die Compressibilität mit dem Drucke abnimmt. Man kann daraus indess nicht schliessen, dass diese Gase überhaupt nicht flüssig zu machen sind, da, wie schon oben erwähnt wurde, die Temperatur auf das Verhalten der Gase einen grossen Einfluss hat. Wir werden deshalb in der Wärmelehre auf diese Frage zurückkommen.

Die Drucke, bei denen die verschiedenen Gase bei der Temperatur des schmelzenden Eises flüssig werden, sind sehr verschieden. Da wir auch diese Frage in der Wärmelehre noch specieller behandeln werden, sei hier nur für einige Gase dieser Druck angegeben. Er ist für

Schwefelige Säure	1,5	Atmosph.
Ammoniak	4,4	"
Schwefelwasserstoff	9,9	"
Chlorwasserstoff	25,3	"
Stickstoffoxydul	31,1	"
Kohlensäure	37,2	"
Oelbildendes Gas	42,5	"

Wir werden später sehen, dass wir die meisten dieser Flüssigkeiten auch in die feste Form überführen können.

§. 67.

Molekularwirkungen zwischen Gasen und festen Körpern. Wenn man in einen mit Gas gefüllten Raum einen festen Körper bringt, so zieht

derselbe die ihn zunächst umgebenden Gasmoleküle an, und die Folge davon ist eine Verdichtung des Gases an der Oberfläche des Körpers. Je grösser die Oberfläche des festen Körpers ist, um so mehr Punkte desselben ziehen dann das Gas an, um so mehr Gas wird dann an demselben verdichtet. Deshalb tritt die Verdichtung besonders stark hervor, wenn man in ein Gas poröse frisch ausgeglühte Kohle bringt. Füllt man z. B. eine oben geschlossene mit ihrem offenen Ende in Quecksilber tauchende Röhre mit Ammoniak und bringt dann in dieselbe ein mehrere Cubikcentimeter grosses Stück frisch ausgeglühter poröser Holzkohle, so steigt das Quecksilber sofort in die Höhe, das Volumen des Gases wird sofort vermindert, und ist das Volumen des Gases anfänglich nur etwa das 60fache der Kohle, so wird das Gas vollständig von der Kohle absorbirt.

Nach den Versuchen von Saussure werden die Gase im Allgemeinen um so stärker absorbirt, je mehr sie vom Mariotte'schen Gesetze abweichen, je kleiner also auch der Druck ist, unter welchem sie flüssig werden, ohne dass jedoch ein genauer Parallelismus zwischen diesen beiden Eigenschaften vorhanden wäre. So wird z. B. Ammoniak und Chlorwasserstoff von Kohle fast gleich stark und stärker absorbirt als schweflige Säure.

Daraus, dass im Allgemeinen die leichter condensirbaren Gase stärker absorbirt werden, folgt, dass wir es hier wesentlich mit einer Molekularanziehung des festen auf das gasförmige zu thun haben. Dass indess auch chemische Einflüsse thätig sind, ergibt sich daraus, dass einzelne weniger leicht in den flüssigen Zustand überzuführende Gase stärker absorbirt werden als andere leichter condensirbare.

Die Fähigkeit Gase zu absorbiren hängt wesentlich von der oberflächlichen Beschaffenheit der Körper ab; so absorbirt eine Kohle, die längere Zeit an der Luft gelegen hat, weit weniger als frisch ausgeglühte und dann unter Quecksilber abgelöschte.

Aus einer Aenderung der Gasatmosphäre an der Oberfläche der Körper erklären sich die sogenannten Moserschen Bilder oder Hauchbilder. Man erhält dieselben, wenn man mit einem trocknen Stäbchen über eine glatte Fläche hinfährt, und dann die Platte behaucht. Durch eine Verschiedenheit in dem Niederschlage der angehauchten Feuchtigkeit treten dann die Züge auf der Platte deutlich hervor. Ebensolche Bilder erhält man, wenn man auf eine beliebige Platte einen geschnittenen Stein, einen gravirten Metallstempel u. dgl. aufsetzt, und nach einiger Zeit nach Fortnahme des Stempels die Platte behaucht. Der Stempel wird im Hauchbilde selbst dann abgebildet, wenn man ihn die Platte nicht ganz berühren lässt, sondern ihn durch zwei an den Seiten untergelegte dünne Glimmerblättchen in einem kleinen Abstande von der Platte hält.

Dass diese Abbildungen von einer Aenderung der Gasatmosphäre an der Oberfläche der Platte herrühren, hat Waidele durch viele Versuche gezeigt. Wenn man eine Platte mit frisch ausgeglühtem unter Abschluss der Luft abgekühltem Kohlenpulver bedeckt und dann sorgfältig mit reiner Watte abputzt, so wird die an der Oberfläche haftende Gasschicht fortgenommen. Behaucht man nun eine Platte, welche zur Hälfte so behandelt ist, so sieht man, dass die gasfreie Hälfte sich mit einer ganz durchsichtigen Feuchtigkeitsschicht bedeckt, die andere Hälfte dagegen das trübe

Aussehen gewöhnlicher behauchter Flächen zeigt. Führt man nun ein Stäbchen über eine mit der Gasschicht bedeckte Fläche hin, so wird dort die Gasschicht zum grössten Theil weggenommen und der Hauch schlägt sich dort ebenso als eine durchsichtige Schicht nieder. Eine solche Veränderung der Gasschicht tritt ebenso ein, wenn man einen Stempel auf eine Platte setzt oder nahe darüber bringt. Denn wenn man einen vorher erhitzten, dann mit einer durch Alkohol befeuchteten Bürste gut abgeriebenen Stempel, der dadurch von seiner Gasatmosphäre befreit ist, auf eine von ihrer Atmosphäre befreite Platte setzt, erhält man kein Bild, wenn man dagegen den frisch geputzten Stempel auf eine nicht gereinigte Platte stellt, erhält man ein Bild. Unter dem Stempel legt sich der Hauch gleichmässiger an als daneben. Ebenso erhält man ein Bild, wenn man einen nicht gereinigten Stempel auf eine gereinigte Platte stellt; der Hauch gibt dann dort, wo der Stempel nicht gestanden hat, eine durchsichtigere Feuchtigkeitsschicht.

Wir werden später noch mehrere Erscheinungen kennen lernen, welche auf dieser Condensation der Gase an der Oberfläche der festen Körper beruhen.

§. 68.

Absorption der Gase in Flüssigkeiten. In gleicher Weise wie die festen Körper Gase anziehen und absorbiren, thun es auch die Flüssigkeiten.

Füllt man, wie zu dem Versuche, der die Absorption der Gase durch feste Körper zeigt, eine Röhre über Quecksilber mit Ammoniak und bringt dann nur eine geringe Menge Wasser über das Quecksilber, so nimmt dieses alles Gas in sich auf, das Quecksilber steigt in der Röhre bis oben hin.

Ein und dieselbe Flüssigkeit absorbirt bei gleichem Drucke und gleicher Temperatur von verschiedenen Gasen sehr verschiedene Mengen; verschiedene Flüssigkeiten ebenso von demselben Gase, so dass unter sonst gleichen Umständen die Menge des absorbirten Gases von der Natur des Gases und derjenigen der absorbirenden Flüssigkeit abhängt.

Die Menge des von einer Flüssigkeit absorbirten Gases hängt ab von dem Drucke, unter welchem sich das Gas über der absorbirenden Flüssigkeit befindet, und zwar nach den Versuchen von Henry in der Art, dass das Volumen des absorbirten Gases immer dasselbe ist, welches auch der Druck ist, unter welchem sich das Gas über der Flüssigkeit befindet. So absorbirt ein gegebenes Wasservolumen bei gewöhnlicher Temperatur (15^0 C.) ein nahezu gleiches Volumen Kohlensäure, ob nun die Kohlensäure über dem Wasser unter dem Drucke von einer oder mehreren Atmosphären steht. Da nun nach dem Mariotte'schen Gesetze die Dichtigkeit des Gases dem Drucke proportional ist, so folgt, dass die Gewichtsmenge des absorbirten Gases dem Drucke proportional ist, unter welchem das absorbirte Gas steht.

Kennt man darnach die Gasmenge, welche unter einem bestimmten Drucke absorbirt wird, so kann man daraus leicht für alle andern Drucke die absorbirten Gasmengen berechnen.

Bunsen nennt deshalb das auf 0^0 und den Druck von 760 Mm. reducirte Volumen eines Gases, welches die Volumeinheit einer Flüssig-

keit unter dem Drucke von 760 Mm. absorbirt, den Absorptionscoefficienten des Gases für die Flüssigkeit.

Messen wir nun die Gasmenge, welche die Flüssigkeit unter einem andern Drucke P absorbirt, durch das Volumen, welches die absorbirte Gasmenge unter dem Drucke von 760 Mm. ausfüllt, so ist dieselbe

$$g = \alpha \frac{P}{760},$$

worin α den Absorptionscoefficienten bezeichnet. Die von dem Volumen v der Flüssigkeit absorbirte Gasmenge ist dann

$$g_1 = \alpha v \frac{P}{760}.$$

Kennt man bei einem dem vorhin erwähnten ähnlichen Versuche das Volumen V des in der Röhre enthaltenen Gases und den Druck P, unter welchem es steht, es ist die Differenz zwischen dem Barometerstande und dem Niveauunterschiede des Quecksilbers in und ausser der Röhre; lässt man dann ein Flüssigkeitsvolumen v in die Röhre eintreten und misst das Volum V' und den Druck P' des in der Röhre unabsorbirt gebliebenen Gases, so erhält man den Absorptionscoefficienten α in folgender Weise.

Das auf den Druck von 760 Mm. reducirte Volumen des absorbirten Gases ist

$$V \frac{P}{760} - V' \frac{P'}{760}.$$

Da der schliessliche Druck P' ist, so ist die Flüssigkeit unter diesem Drucke gesättigt. Nach dem Henry'schen Gesetze verhalten sich nun die absorbirten Gasmengen wie die Drucke; unter dem Drucke 760 Mm. würde demnach die absorbirte Gasmenge sein

$$\left(V \frac{P}{760} - V' \frac{P'}{760}\right) \frac{760}{P'} = V \frac{P}{P'} - V';$$

da dies die absorbirte Gasmenge für das Flüssigkeitsvolumen v ist, so ergibt sich für die Volumeinheit, also für α

$$\alpha = \frac{1}{v} \left(V \frac{P}{P'} - V'\right).$$

In dieser Weise hat Bunsen die Absorptionscoefficienten für eine Anzahl Gase für Wasser und Alkohol bestimmt, wobei sich ergab, dass auf den Werth derselben die Temperatur von ganz wesentlichem Einfluss ist, mit steigender Temperatur nehmen die Absorptionscoefficienten sehr rasch ab. Im Uebrigen ergab sich, dass die Werthe wesentlich von der chemischen Beschaffenheit der Gase abhängig sind, dass auch nicht annähernd eine Beziehung zwischen der Condensirbarkeit und der Grösse der Absorptionscoefficienten besteht. Im Folgenden sind einige Absorptionscoefficienten nach den Bestimmungen Bunsens für Wasser und Alkohol angegeben; dieselben beziehen sich auf eine Temperatur von 15^0

	α in Wasser	α in Alkohol
Stickstoff	0,01478	0,12142
Sauerstoff	0,01930	0,06725
Wasserstoff	0,02989	0,28397

	α in Wasser	α in Alkohol
Kohlensäure	1,0020	3,1993
Schweflige Säure	43,564	144,55
Ammoniak	727,2	—

Auf Grund des Henry'schen Gesetzes kann man mit den bekannten Absorptionscoefficienten auch die Absorption eines Gasgemisches berechnen. Ein Volumen atmosphärischer Luft z. B. besteht aus 0,79 Theilen Stickstoff und 0,21 Theil Sauerstoff. Steht also die Luft unter dem Drucke p, so übt der Stickstoff den Druck $0,79\,p$ und der Sauerstoff den Druck $0,21\,p$ aus. Ist nun der Absorptionscoefficient des Stickstoffs α_1, des Sauerstoffs α_2, so sind die von der Volumeinheit Wasser aus der Luft absorbirten Mengen Stickstoff, g_1, und Sauerstoff, g_2,

$$g_1 = \frac{\alpha_1 \,.\, 0,79\,p}{760}; \qquad g_2 = \frac{\alpha_2 \,.\, 0,21\,p}{760}.$$

Setzen wir nun $p = 760$, so wird

$$g_1 + g_2 = 0,79\,\alpha_1 + 0,21\,\alpha_2 = 0,01795,$$

gleich dem Absorptionscoefficienten für atmosphärische Luft, ein Werth, der genau mit dem von Bunsen experimentell gefundenen übereinstimmt.

In ähnlicher Weise, wie man aus der bekannten Zusammensetzung eines Gases den Absorptionscoefficienten des Gemisches berechnen kann, kann man auch aus der Bestimmung des Absorptionscoefficienten eines Gemisches zweier Gase die Zusammensetzung des Gemisches ableiten. In solcher Weise hat Bunsen die Absorptiometrie für die Gasanalyse verwerthet.

§. 69.

Ausströmen der Gase. Wenn in die Wand eines unter dem Drucke p mit einem Gase gefüllten Gefässes eine Oeffnung gemacht wird, so strömt das Gas aus der Oeffnung hervor, sobald ausserhalb des Gefässes der Druck des Gases kleiner ist als innerhalb; die Ausströmungsgeschwindigkeit ist um so grösser, je grösser die Druckdifferenz im Innern und ausserhalb des Gefässes ist.

Da die unter einem gewissen Druck stehenden Gase sich ganz analog den tropfbaren Flüssigkeiten verhalten, gelangen wir zu den Gesetzen des Ausflusses der Gase, indem wir ganz dieselben Principien anwenden, mit denen wir in §. 52 zu den Gesetzen des Ausflusses der Flüssigkeiten gelangten. Wir denken uns zunächst das Gas im Innern des Gefässes unter einem constanten Druck, und ebenso werde der Druck ausserhalb auf einer constanten Höhe gehalten. Es muss dann auch in der Bewegung der Gase ein stationärer Zustand eintreten, der auch hier wieder zunächst dadurch charakterisirt ist, dass durch jeden Querschnitt, den das Gas passirt, in gleichen Zeiten gleiche Mengen Gas hindurchgehen müssen. Sind nun bei zwei Querschnitten Q und Q_1 die mittlern senkrecht gegen die Querschnitte gerichteten Geschwindigkeiten der Strömung u und u_1, so sind die durch die beiden Querschnitte hindurchgehenden Volumina Qu und $Q_1\,u_1$. Um daraus die Menge des durch jeden der Querschnitte fliessenden Gases zu erhalten, müssen wir jedes Volumen mit der Dichtig-

keit des Gases in dem betrachteten Querschnitt multipliciren. Diese Dichtigkeiten s und s_1 sind dem in jedem Querschnitt vorhandenen Drucke p und p_1 proportional. Die Gleichheit der Mengen liefert uns die Gleichung

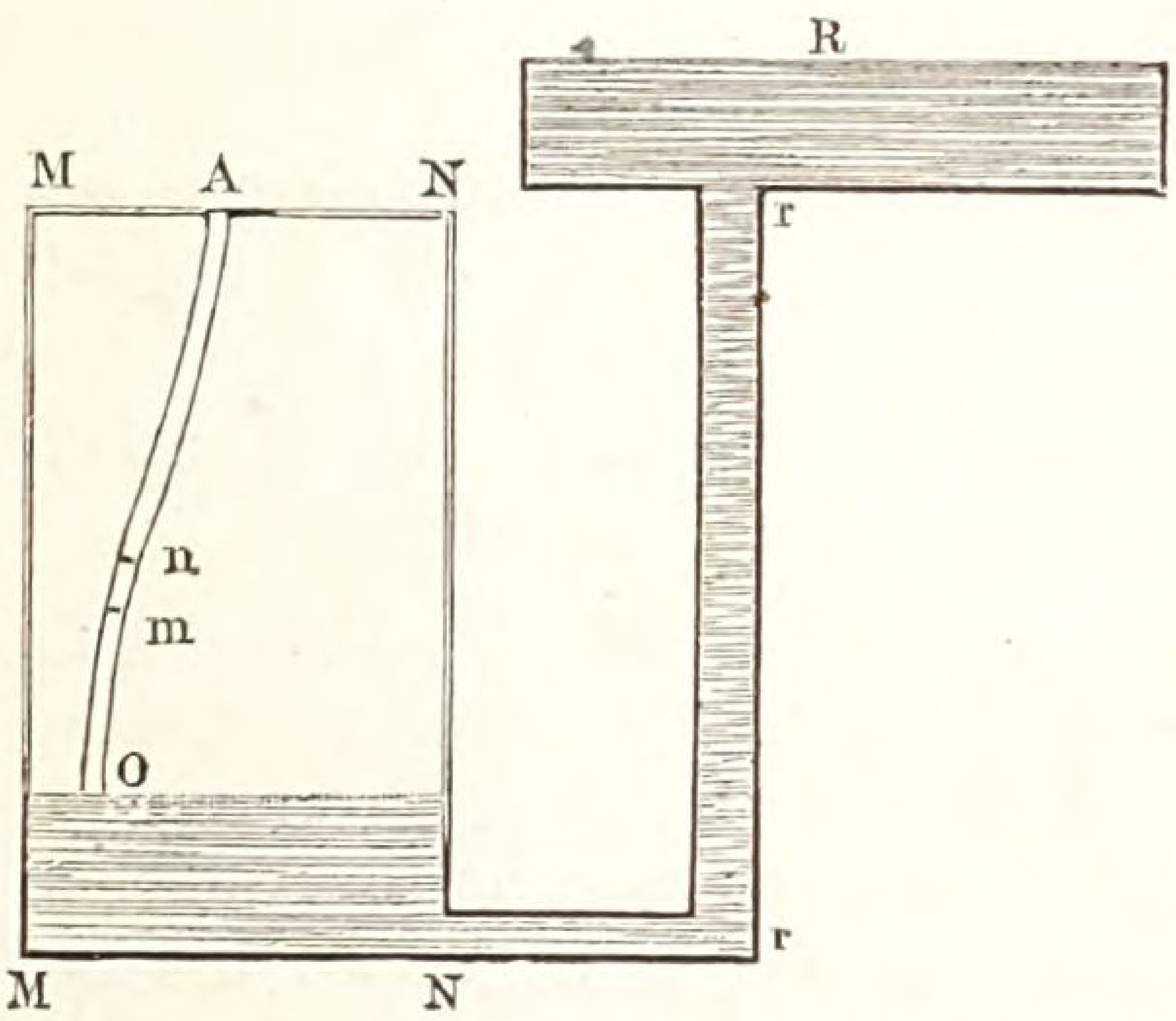
$$Qus = Q_1 u_1 s_1$$

oder mit der Beziehung $s : s_1 = p : p_1$

$$Qup = Q_1 u_1 p_1.$$

Eine weitere Beziehung erhalten wir auch hier wieder durch die Bemerkung, dass nach Eintritt des stationären Zustandes die Gase sich in constanten Bahnen bewegen müssen. Sei Fig. 80 $MMNN$ das Gefäss, aus welchem das Gas aus einer engen Oeffnung ausfliesst, in welchem der constante Druck etwa dadurch gehalten wird, dass das Gefäss mit einem höher gelegenen Wasserreservoir R, in dem das Wasser auf constantem Niveau erhalten wird, in Verbindung steht. Sei nun OA ein Kanal von überall gleichem sehr kleinem Querschnitt q, der die constante Bahn des von O her zur Oeffnung A strömenden Gases ist, und seien m und n zwei einander unendlich nahe Querschnitte desselben. Tritt das Gas durch den Querschnitt m mit der Geschwindigkeit v, so ist die in der unendlich kleinen Zeit dt durch denselben hindurchfliessende Gasmenge gleich $q\,v\,dt\,s$. In derselben Zeit erreicht das Gas den Querschnitt n, den es mit der Geschwindigkeit $v + dv$ passirt, so dass also die in der Zeit dt durch den Querschnitt m passirende Gasmenge in derselben Zeit den Geschwindigkeitszuwachs dv erfährt. Die Bewegungsgrösse dieser Gasmenge nimmt also zu um

Fig. 80.



$$\frac{s}{g}\,q\,v\,dt\,dv.$$

Diese Zunahme der Bewegungsgrösse ist wieder gleich dem Producte der auf das Gas wirkenden bewegenden Kraft in die Zeit dt. Hier haben wir als bewegende Kraft nur die Aenderung des Druckes zu betrachten, da die Beschleunigung durch die Schwere wegen der geringen Dichtigkeit der Gase vernachlässigt werden darf. Aendert sich nun von m bis n der Druck um dp, so ist $q\,dp$ die Grösse der wirksamen Kraft, so dass wir die Gleichung erhalten:

$$\frac{s}{g}\,q\,v\,dt\,dv = -\,q\,dp\,dt,$$

in der wir auf der rechten Seite das negative Vorzeichen setzen, weil eine Zunahme der Geschwindigkeit stattfindet, wenn der Druck kleiner wird und umgekehrt. Dividiren wir auf beiden Seiten und setzen die dem Drucke π einer Atmosphäre entsprechende Dichtigkeit gleich σ, so dass

$$s = \frac{\sigma}{\pi}\,p$$

ist, so wird

$$v\,dv = -\frac{g\pi}{\sigma}\,\frac{dp}{p}.$$

Die Geschwindigkeit v in der Schicht m erhalten wir daraus, wenn v_0 die Geschwindigkeit bei O dem Drucke p_0 entspricht, wenn wir wieder die Summe bilden

$$\int_{v_0}^{v} v\,d\,v = -\int_{p_0}^{p} \frac{g\pi}{\sigma}\,\frac{dp}{p}$$

welche, wie in der Integralrechnung gezeigt wird, gleich ist

$$v^2 - v_0^2 = 2\,\frac{g\pi}{\sigma}\log\frac{p_0}{p},$$

worin natürliche Logarithmen zu nehmen sind.

Da wir über die Lage des Kanals OA gar keine Voraussetzung gemacht haben, liefert uns diese Gleichung die Geschwindigkeit v überall dort, wo der Druck gleich p ist.

Bezeichnen wir nun die Geschwindigkeit des Gases in der Ausströmungsöffnung mit v_1, den Druck in derselben mit p_1, so wird

$$v_1^2\left(1 - \frac{v_0^2}{v_1^2}\right) = 2\,\frac{g\pi}{\sigma}\log\frac{p_0}{p_1}.$$

Um das Verhältniss der Geschwindigkeiten v_0 und v_1 zu erhalten, machen wir wieder die Annahme, dass in der Fläche, in der O liegt, wo die Bewegung des Gases beginnt, und in der als sehr klein vorausgesetzten Ausströmungsöffnung die Geschwindigkeiten senkrecht gegen die betreffenden Querschnitte gerichtet seien. Dann ist nach der zuerst abgeleiteten Beziehung

$$p_1\,q_1\,v_1 = p_0\,Q\,v_0,$$

wenn q_1 der Querschnitt der Oeffnung und Q der des Gefässes ist. Damit wird

$$\frac{v_0}{v_1} = \frac{p_1\,q_1}{p_0\,Q}$$

und

$$v_1^2 = \frac{\frac{2\,g\pi}{\sigma}\log\frac{p_0}{p_1}}{1 - \left(\frac{p_1\,q_1}{p_0\,Q}\right)^2}.$$

Ist der Querschnitt der Ausströmungsöffnung q_1 gegen den des Gefässes nur klein, so können wir, da auch $p_1 < p_0$ sein muss, wenn ein Ausströmen stattfinden soll, das zweite Glied des Nenners vernachlässigen und erhalten

$$v_1 = \sqrt{\frac{2\,g\pi}{\sigma}\cdot\log\frac{p_0}{p_1}}.$$

Den Werth des unter dem Wurzelzeichen stehenden Coefficienten können wir leicht ausdrücken, indem wir für g und π ihre Werthe einsetzen. Bezeichnen wir dann das specifische Gewicht eines Gases auf Luft als Einheit bezogen mit d, so wird bei der Temperatur 0^0

$$\sqrt{\frac{2\,g\,\pi}{\sigma}} = \sqrt{\frac{2\,.\,9{,}81\,.\,13{,}596\,.\,0{,}76}{0{,}001293\,.\,d}} = \frac{396^m}{\sqrt{d}}$$

und damit

$$v_1 = \frac{396^m}{\sqrt{d}} \sqrt{\log \frac{p_0}{p_1}}.$$

Sind die Drucke p_0 und p_1 nur wenig von einander verschieden, so kann man, indem man den Logarithmus auf die Form bringt

$$\log \frac{p_0}{p_1} = -\log \frac{p_1}{p_0} = -\log \left(1 - \frac{p_0 - p_1}{p_0}\right).$$

den Logarithmus in eine Reihe entwickeln wie §. 60 und diese Reihe nach dem ersten Gliede abbrechen; dann wird

$$\log \frac{p_0}{p_1} = -\log \left(1 - \frac{p_0 - p_1}{p_0}\right) = \frac{p_0 - p_1}{p_0}$$

und

$$v_1 = \frac{396^m}{\sqrt{d}} \sqrt{\frac{p_0 - p_1}{p_0}}.$$

Eine Prüfung dieser Gleichung durch Messung der Geschwindigkeit des ausströmenden Gases ist nicht ausführbar, da es kaum möglich ist, die Geschwindigkeit des ausströmenden Gases genau zu messen. Man kann dieselbe indess in anderer Weise prüfen, und zwar zunächst durch Messung der in der Zeiteinheit aus dem Gefässe ausströmenden Gasmenge. Man kann das bei einer Einrichtung, welche ähnlich der in Fig. 80 dargestellten ist, indem man das Volumen des in der Zeiteinheit in das Ausflussgefäss nachfliessenden Wassermenge misst. Das aus dem Querschnitte q_1 in der Zeit ausfliessende Gasvolumen ist

$$w_1 = q_1\, v_1.$$

Da dieses Volumen aus der Oeffnung unter dem Drucke p_1 ausfliesst, so entspricht ihm in dem Gefässe unter dem, wenn wir das Gefäss als cylindrisch voraussetzen, überall gleichen Drucke p_0 das Volumen

$$w_2 = w_1 \frac{p_1}{p_0}.$$

Das wirklich ausgeflossene Volumen wird aber auch hier gerade wie bei den Flüssigkeiten mit einem der Contraction des Strahles entsprechenden Erfahrungscoefficienten μ multiplicirt werden müssen, so dass dasselbe wird

$$w = \mu\, w_2 = \mu\, q_1 \frac{p_1}{p_0} \cdot \frac{396}{\sqrt{d}} \sqrt{\frac{p_0 - p_1}{p_0}}.$$

Da die Geschwindigkeit in Metern gegeben ist, erhält man, wenn q_1 in Quadratmetern gegeben ist, das ausgeflossene Volumen in Cubikmetern.

Lässt man die Gase bei kleinem Ueberdruck in die freie Luft ausströmen, so kann man den Druck in der Ausflussöffnung gleich dem der äusseren Atmosphäre setzen.

Die Versuche von D'Aubuisson und Weisbach ergeben bis zu Drucken $p_0 - p_1$, welche etwa 0,2 Meter Wasserhöhe, also etwa 0,02 Atmosphäre betragen, dass die ausgeströmten Gasmengen sich mit fast genau demselben

Werthe von μ berechnen lassen, wie die ausfliessenden Flüssigkeiten, also etwa mit $\mu = 0{,}66$. Steigt die Druckhöhe, so nimmt μ etwas ab, und bei einer Druckhöhe des Wassers von etwa 1 Meter wird $\mu = 0{,}52$ nach Versuchen von G. Schmidt. Da für den Druck von 1 Meter Wasserhöhe die angenäherte Formel noch richtig ist, muss man schliessen, dass dann der Druck in der Oeffnung wohl noch nicht gleich dem der äussern Atmosphäre ist.

Dass die Ausströmungsgeschwindigkeit der Gase der Quadratwurzel aus der Dichtigkeit umgekehrt proportional ist, kann man leicht zeigen, indem man unter genau den gleichen Druckverhältnissen verschiedene Gase aus enger Oeffnung ausströmen lässt, und das Volumen des ausgetretenen Gases misst. Wie Bunsen gezeigt hat, kann man auf diesem Wege die Dichtigkeiten der Gase, bezogen auf Luft als Einheit, mit ziemlicher Genauigkeit erhalten.

Eine weitere Prüfung unserer Rechnung können wir durch Messung der hydraulischen Drucke erhalten. Der Druck p_1 in der Ausflussöffnung ergibt sich aus der Gleichung

$$v_1^2 - v_0^2 = \frac{2\,g\,\pi}{\sigma}(\log p_0 - \log p_1),$$

in irgend einem Querschnitt des ausströmenden Gases ist derselbe durch die Gleichung gegeben

$$v^2 - v_0^2 = \frac{2\,g\,\pi}{\sigma}(\log p_0 - \log p).$$

Subtrahiren wir beide Gleichungen, so ist

$$v_1^2 - v^2 = \frac{2\,g\,\pi}{\sigma}(\log p - \log p_1) = \frac{2\,g\,\pi}{\sigma}\log\frac{p}{p_1}.$$

Setzen wir nun solche Formen des Ausflussgefässes voraus, dass wir die Geschwindigkeiten v und v_1 als senkrecht gegen die betreffenden Querschnitte gerichtet ansehen können, so ist

$$p\,q\,v = p_1\,q_1\,v_1$$

und es wird

$$v_1^2\left(1 - \left(\frac{p_1\,q_1}{p\,q}\right)^2\right) = \frac{2\,g\,\pi}{\sigma}\log\frac{p}{p_1} = 2\,\frac{g\,\pi}{\sigma}\,\frac{p-p_1}{p_1}$$

wenn wir uns auf kleine Druckdifferenzen beschränken. In dem Falle können wir auch, wenn wir $\left(\frac{p_1}{p}\right)^2$ in die Reihe entwickeln

$$\left(\frac{p_1}{p}\right)^2 = \left(\frac{p}{p_1}\right)^{-2} = \left(1 + \frac{p-p_1}{p_1}\right)^{-2} = 1 - 2\,\frac{p-p_1}{p_1} + 3\left(\frac{p-p_1}{p_1}\right)^2 \cdots$$

in der Reihe schon das dritte Glied vernachlässigen, und erhalten

$$v_1^2\left\{1 - \left(\frac{q_1}{q}\right)^2 + 2\,\frac{p-p_1}{p_1}\left(\frac{q_1}{q}\right)^2\right\} = 2\,\frac{g\,\pi}{\sigma}\,\frac{p-p_1}{p_1}$$

und daraus

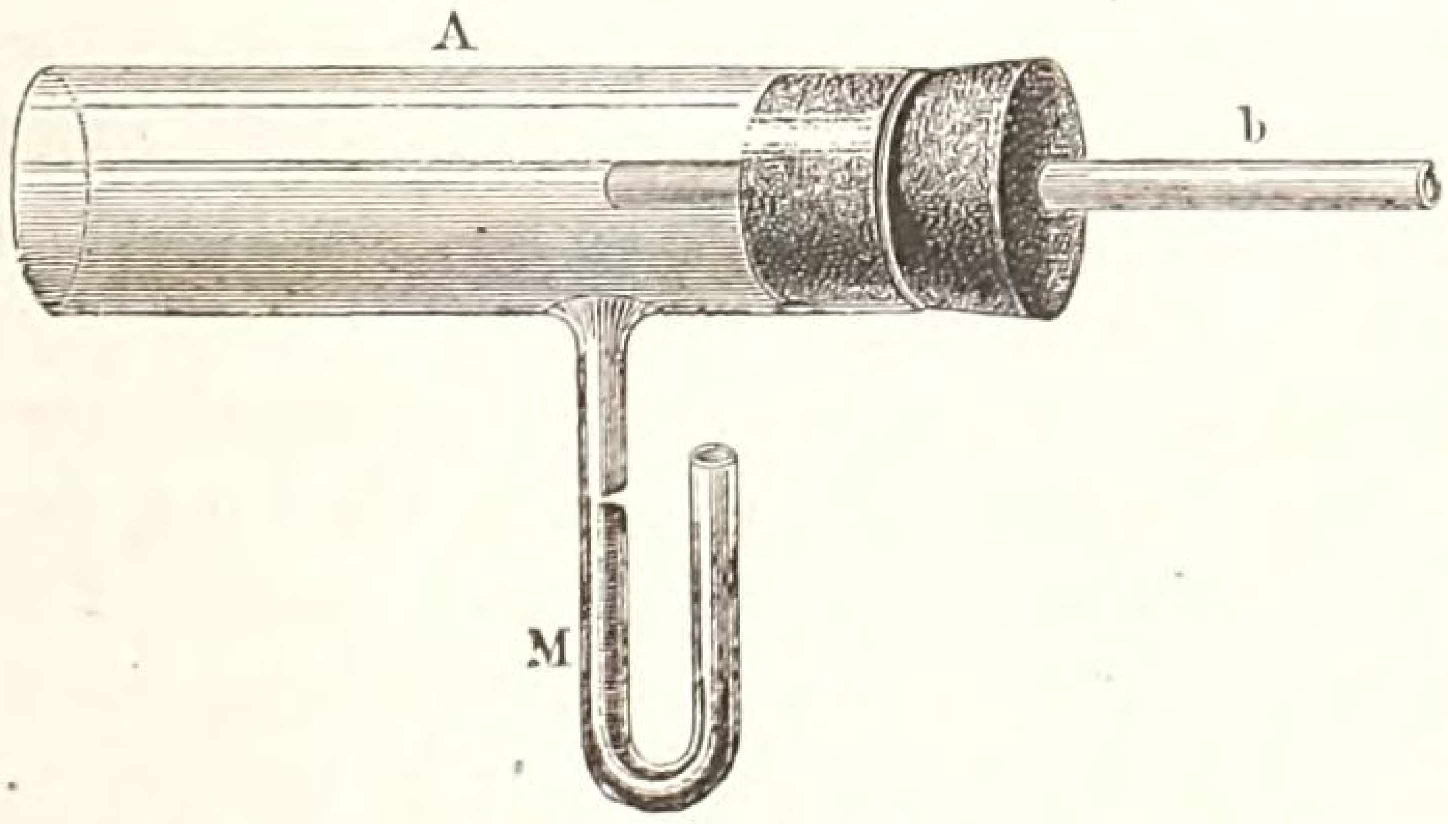
$$\frac{p-p_1}{p_1} = \frac{q^2 - q_1^2}{\frac{2\,g\,\pi}{\sigma\,v_1^2}\,q^2 - 2\,q_1^2}.$$

Ersetzen wir hierin noch v_1^2 durch seinen vorher bestimmten Werth, so wird schliesslich

$$\frac{p - p_1}{p_1} = \frac{q^2 - q_1^2}{\frac{p_1}{p_0 - p_1} q^2 - 2 q_1^2}.$$

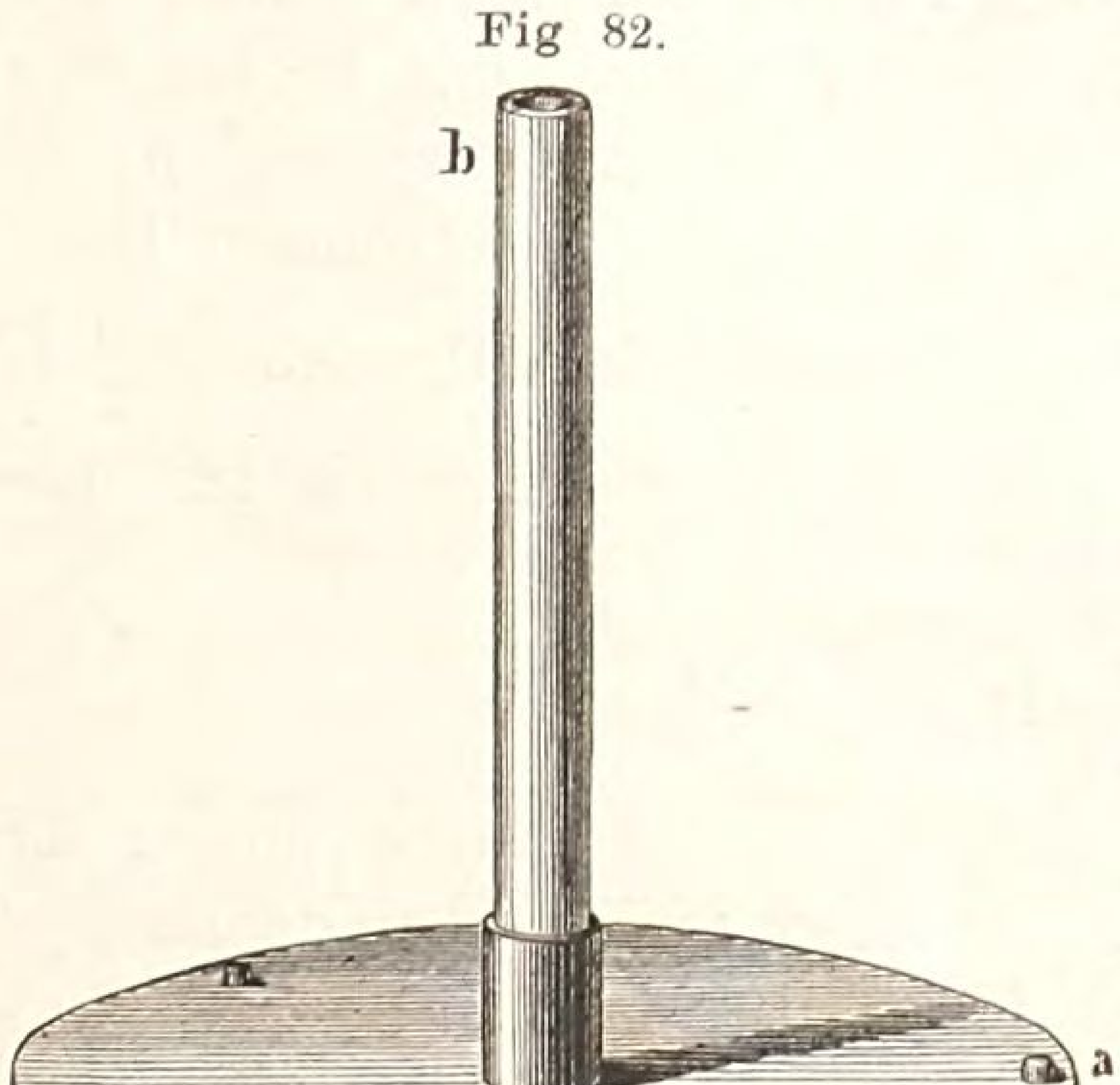
Das Vorzeichen des Ausdrucks auf der rechten Seite hängt, so lange die Voraussetzung, unter welcher diese Gleichung abgeleitet ist, besteht, dass $p_0 - p_1$ gegen p_1 sehr klein ist, nur von dem Vorzeichen des Zählers ab, wenigstens dann, wenn nicht q in demselben Verhältniss kleiner ist als q_1. Nehmen wir solche Querschnitte q und q_1 und solche Drucke p_0 und p_1, dass der Nenner auf der rechten Seite immer positiv ist, so ergibt sich, dass in allen Querschnitten, in denen $q > q_1$, auch p grösser ist als p_1, dass dagegen dort, wo $q < q_1$, der Druck kleiner ist als p_1. Lässt man deshalb Gas in die äussere Luft ausströmen, so dass p_1 gleich dem Drucke der äussern Atmosphäre ist, so muss überall dort, wo das ausströmende Gas einen Querschnitt passirt, der kleiner ist als die Ausströmungsöffnung, der Druck kleiner sein als derjenige der äussern Atmosphäre.

Fig. 81.



Die Richtigkeit dieser Folgerung kann man mit dem kleinen Apparate Fig. 81 nachweisen. Man steckt in ein weiteres Glasrohr A, an welches ein kleines Manometerrohr M angeschmolzen ist, mit einem Stopfen ein engeres Rohr b und schiebt dasselbe so weit hinein, dass das Ende sich in dem Querschnitt befindet, in welchem das Manometer angeschmolzen ist. Füllt man dann das Manometer mit Wasser und bläst durch das Röhrchen b, so steigt das Wasser in dem Schenkel des Manometers, welcher mit dem Innern der Röhre A in Verbindung steht. Die Niveaudifferenz in den beiden Röhren gibt dann die Druckdifferenz an der Mündung des kleinen Rohrs und in der Ausflussöffnung.

Fig 82.



Eine andere Form des Versuches, welche auf den ersten Blick sehr paradox zu sein scheint, zeigt Fig. 82. Eine Glasröhre mündet in der Mitte einer Scheibe, und in einiger Entfernung von letzterer ist eine zweite nicht durchlöcherte Scheibe mit Drähtchen so festgehalten, dass sie sich der Mündung der Röhre nähern kann. Bläst man nun kräftig in die Röhre bei b hinein, so sieht man, wie sich die Scheibe c der Schwere entgegen zur Scheibe a hinbewegt, einen Moment die Röhre verschliesst, dann wieder abgestossen wird, sich wieder gegen a hinbewegt, kurz sich auf und abbewegt, so lange man in die Röhre bei b hineinbläst.

Die Ausflussöffnung ist hier die ringförmige Spalte zwischen den Rändern der beiden Scheiben, nach welcher sich die Luft auf den Radien hinbewegt. Die zur Randöffnung concentrischen Schnitte des zwischen den beiden Scheiben enthaltenen Raumes bilden hier die einzelnen Querschnitte, welche die Luft passiren muss. Da diese alle kleiner sind als die Ausflussöffnung, ist der Druck in ihnen kleiner, somit auch kleiner als der Druck der Atmosphäre. Hat sich aber diesem grössern Drucke folgend die Scheibe *c* an *a* angelegt, also die Oeffnung geschlossen, so tritt der statische Druck der verdichteten Luft in Wirksamkeit und treibt die Platte wieder hinab.

§. 70.

Reibung der Gase. Wenn man die Gase nicht durch Oeffnungen in einer Wand, sondern durch längere Röhren ausströmen lässt, so werden die Ausflussgesetze andere, ein Beweis, dass auch bei den Gasen eine Reibung zwischen den mit verschiedener Schnelligkeit bewegten Schichten vorhanden ist. Bei längern nicht zu engen Röhrenleitungen ergibt sich aus den Versuchen von Girard, dass die Mengen des ausfliessenden Gases sich direkt verhalten wie die Drucke, unter welchen das ausfliessende Gas steht und umgekehrt wie die Quadrate der Röhrenlängen, durch welche das Gas ausfliesst. Ferner ergab sich, dass die Ausflussgeschwindigkeit nicht mehr abhängig ist von der Dichtigkeit der Gase, dass bei gleichen Drucken die Geschwindigkeit für alle Gase die gleiche ist.

Wendet man capillare Röhren an, so hängt die Ausflussgeschwindigkeit des Gases oder die Ausflussmenge wesentlich von der Reibung des Gases und von der des Gases an den Wänden, also von der innern und äussern Reibung ab. Eine theoretische Betrachtung der Bewegung unter Beachtung der Reibung führt unter der Voraussetzung, dass bei einem und demselben Gase der Reibungscoefficient von der Dichtigkeit des Gases, also dem Drucke unabhängig ist, zu genau denselben Ausflussgesetzen für die Gase, welche wir früher für die Flüssigkeiten erhielten. Misst man das Volumen V des unter constanten Druckverhältnissen, das heisst während des ganzen Versuches constantem Drucke p_a am Anfange und p_e am Ende der capillaren Röhre, durch die capillare Röhre geströmten Gases unter dem arithmetischen Mittel der Drucke, also unter dem Drucke $\frac{p_a + p_e}{2}$, so liefert nach den Entwicklungen von O. E. Meyer die Theorie für dasselbe den Werth

$$V = \frac{\pi\,(p_a - p_e)}{8\,\eta\,L}\left(R^4 + 4\,\frac{\eta}{\varepsilon}\,R^3\right),$$

worin R der Radius, L die Länge der Röhre, η der innere und ε der äussere Reibungscoefficient des Gases ist. Es ergibt sich also genau derselbe Ausdruck wie für den Ausfluss der Flüssigkeiten.

Misst man das Volumen des Gases in dem Ausflussgefäss, also unter dem Drucke p_a, so wird das Volumen

$$V_a = V\,\frac{p_a + p_e}{2\,p_a} = \frac{\pi\,(p_a{}^2 - p_e{}^2)}{16\,\eta\,L\,p_a}\left(R^4 + 4\,\frac{\eta}{\varepsilon}\,R^3\right).$$

Dass die Gase in der That diesen Gesetzen folgen, ergibt sich aus den zahlreichen Versuchen von Graham über den Ausfluss, oder wie Graham

denselben bezeichnet, die Transpiration der Gase durch capillare Röhren. Gleichzeitig ergibt sich aus den Versuchen von Graham und Meyer, dass auch für die Gase die äussere Reibung als unendlich angenommen werden muss, indem sich zeigt, dass das zweite Glied in der Klammer auf der rechten Seite obiger Gleichung gleich Null ist.

Die Beobachtungen des Ausflusses durch capillare Röhren gestatten demnach die innern Reibungscoefficienten der Gase zu bestimmen. In dieser Weise hat Meyer in Verbindung mit Springmühl folgende Werthe erhalten:

Sauerstoff . . .	0,00000216
Luft	0,00000194
Stickstoff . . .	0,00000187
Kohlensäure . .	0,00000163
Wasserstoff . . .	0,00000095.

Dieselben gelten für 18^0 und bedeuten wie bei den Flüssigkeiten den Druck in Milligrammen, welcher auf den Quadratmillimeter wirkend bei der Bewegung der Gase überwunden werden muss, wenn die Geschwindigkeitsdifferenz zweier ein Millimeter von einander entfernter Schichten in der Secunde ein Millimeter ist.

Wir werden auf die Reibung der Gase in der Wärmelehre zurückkommen.

§. 71.

Diffusion der Gase. Die in den letzten beiden §§. abgeleiteten Gleichungen für das Ausströmen eines Gases, sei es aus einer Oeffnung, sei es aus einer capillaren Röhre, zeigen, dass ein Austritt des Gases nur so lange stattfindet, als der Druck ausserhalb kleiner ist wie innerhalb. Ist der Druck innen und aussen ganz derselbe, so tritt keine Bewegung des Gases ein. Es ist das mit der Erfahrung indess nur so lange im Einklang, als im Innern des Gefässes und ausserhalb sich dasselbe Gas befindet. Befinden sich auf beiden Seiten der Ausflussöffnung verschiedene Gase unter gleichem Druck, so findet ein Gasstrom statt und zwar sowohl von innen nach aussen als auch von aussen nach innen. Diese Mischung der Gase rührt nicht etwa daher, dass verschiedene Gase keinen Druck auf einander ausüben, denn dass das der Fall ist, kann man leicht durch Versuche nachweisen. So füllte Bunsen eine unten geschlossene Glasröhre durch Einsenken eines Zuleitungsrohrs bis auf den Boden der Röhre vom Boden auf zur Hälfte mit unterchloriger Säure, welche schwerer ist als Luft, und deren Grenze gegen Luft man erkennen kann, weil das Gas grünlich gefärbt ist. Hat man die Röhre offen an der Luft gefüllt, so findet man nach dem Schliessen an etwa seitlich an der Röhre angebrachten Manometern, dass der Druck im Innern genau der Druck einer Atmosphäre ist, obwohl das Rohr von jedem Gase nur zur Hälfte gefüllt ist. Bringt man dann das obere Ende rasch mit einer Luftpumpe in Verbindung und pumpt einen Theil der Luft aus, so rückt die an der Farbe erkennbare Grenze der beiden Gase aufwärts, der Druck ist aber im Innern der Röhre überall der gleiche, trotzdem man nur Luft fortgenommen hat.

Man kann demnach diese Mischung zweier verschiedener Gase bei gleichem Drucke nicht als ein eigentliches Ausströmen der Gase bezeich-

nen, sondern muss sie als einen Vorgang anderer Art, der auf Bewegung der einzelnen Gasmoleküle zurückzuführen ist, betrachten. Wegen der Aehnlichkeit, welche diese allmähliche Mischung zweier Gase mit der allmählichen Mischung zweier sich berührender Flüssigkeiten hat, bezeichnet man dieselbe als eine Diffusion der Gase.

Diese Diffusion dauert, wenn man zwei mit verschiedenen Gasen gefüllte Räume in Verbindung setzt, stets so lange, bis die Gase sich über die verbundenen Räume ganz gleichmässig verbreitet haben, bis also das Gemische ein ganz gleichartiges geworden ist. Das grossartigste Beispiel einer solchen Diffusion zeigt uns unsere Atmosphäre. Trotzdem sich das specifische Gewicht des Sauerstoffs zu dem des Stickstoffs verhält wie 110 zu 97, so zeigt die Luft doch an allen Stellen, wo sie auch geschöpft werden mag, die gleiche Zusammensetzung von 79 Volumtheilen Stickstoff und 21 Theilen Sauerstoff. Die Gase verhalten sich somit in der Beziehung ganz wie zwei mischbare Flüssigkeiten.

Wie zwei Flüssigkeiten auch durch eine poröse Membran zu einander diffundiren, so auch die Gase, und wie die Flüssigkeiten in gleichen Zeiten bei der Endosmose in verschiedenen Mengen nach entgegengesetzter Richtung durch die Membran gehen, so auch die Gase. Nach den Versuchen von Graham verhalten sich die Mengen zweier Gase, welche durch ein sie trennendes poröses Diaphragma nach entgegengesetzten Richtungen in gleichen Zeiten hindurchgehen, annähernd umgekehrt wie die Quadratwurzeln aus den Dichtigkeiten. Graham liess verschiedene Gase, die er in Röhren, welche mit einem trocknen Gypspfropf verschlossen waren, über Quecksilber absperrte, in die atmosphärische Luft diffundiren, indem er durch allmähliches Senken der Röhre dafür sorgte, dass der Druck auch im Innern stets gleich dem einer Atmosphäre war. Dabei ergab sich z. B., dass für je ein Volumen Luft, welche durch den Pfropf in die Röhre eingetreten ist, 3,1 Volume Wasserstoff austraten. Setzen wir die Dichtigkeit der Luft 1, so ist die des Wasserstoffs 14,43. Die Quadratwurzeln dieser Zahlen sind 1 und 3,8.

Graham glaubte deshalb diese Diffusion als eine einfache Strömungserscheinung auffassen zu können, indem die Gase durch das Diaphragma von der einen Seite zur andern strömten, wie durch eine enge Oeffnung in den leeren Raum. Bunsen wies indess die Unrichtigkeit dieser Auffassung nach, indem er zeigte, dass das Strömen der Gase durch poröse Diaphragmen dem Durchtritt der Gase durch capillare Röhren entspreche, dass die Strömungsgeschwindigkeit den Reibungscoefficienten der Gase umgekehrt proportional ist. Bunsen bestätigte indess den von Graham aufgestellten Satz, dass die sich austauschenden Gasmengen sich sehr nahe umgekehrt verhalten wie die Quadratwurzeln aus den Dichtigkeiten der Gase.

Wir werden auf die Diffusion der Gase ebenso wie auf die Reibung noch zurückkommen, wenn wir in der Wärmelehre die sogenannte dynamische Gastheorie kennen gelernt haben.

§. 72.

Stoss und Widerstand der Luft. Wenn die bewegte Luft gegen einen festen Körper stösst, verliert sie wie jeder bewegte Körper, der auf einen ruhenden trifft, einen Theil ihrer Geschwindigkeit, und ist der Körper

beweglich, so wird die von der Luft verlorene Bewegung in den Körper übertragen und derselbe in Bewegung versetzt. So ist es der Stoss der Luft, welcher die Flügel einer Windmühle in Bewegung versetzt, oder welcher die Segelschiffe treibt. Die Kraft, mit welcher die bewegte Luft auf einen Körper drückt, den sie trifft, ergibt sich direkt aus den mechanischen Gesetzen; die Arbeit, die sie leisten kann, ist gleich der lebendigen Kraft, welche sie besitzt, also gleich dem halben Producte aus der Masse der bewegten Luft in das Quadrat ihrer Geschwindigkeit. Je rascher die Luft sich bewegt, um so stärker sind deshalb die Wirkungen, welche ihr Stoss hervorbringt; die verheerenden Wirkungen der Orkane sind bekannt.

Ebenso wie die bewegte Luft einen Theil ihrer Geschwindigkeit verliert, wenn sie auf ruhende Körper trifft, ebenso muss auch die Geschwindigkeit eines bewegten Körpers abnehmen, wenn er in der Luft bewegt wird, da er auf ruhende Luftmassen stossen und diese aus der Stelle drängen muss. Dass die Grösse dieses Widerstandes, den die Luft einer Bewegung entgegensetzt, von der Geschwindigkeit der Bewegung abhängig sein muss, ergibt sich unmittelbar, denn je rascher die Bewegung ist, um so mehr Luft muss der Körper aus der Stelle drängen. Newton setzte den Widerstand dem Quadrate der Geschwindigkeit des bewegten Körpers proportional. Man kann dieses Gesetz in folgender Weise ableiten.

Ist die Geschwindigkeit des Körpers zur Zeit t und während der unendlich kleinen Zeit dt gleich v, und verdrängt er während dieser Zeit die Luftmasse m, so geschieht das dadurch, dass er derselben die Geschwindigkeit v ertheilt. Um der Luftmasse m in der Zeit dt diese Geschwindigkeit zu ertheilen, ist eine während dieser Zeit constante Kraft aufzuwenden, welche gleich $\frac{mv}{dt}$ ist. Die Masse m ist nun dem in der Zeit dt zurückgelegten Wege ds proportional und hängt ausserdem ab von der Form des Körpers, wir können sie demnach gleich μds setzen, wenn μ eine für einen gegebenen Körper bestimmte Constante bezeichnet. Demnach ist die zur Bewegung der Luft erforderliche Kraft gleich $\mu \frac{ds}{dt} v$. Der Quotient $\frac{ds}{dt}$ aus dem in der unendlich kleinen Zeit dt zurückgelegten Wege ds und dieser Zeit ist aber die Geschwindigkeit v in dem betrachteten Zeitelement, demnach ist

$$\mu \frac{ds}{dt} v = \mu v^2.$$

In Folge des Luftwiderstandes ist es also gerade so, wie wenn auf den Körper in jedem Momente eine seiner Bewegungsrichtung entgegengesetzte Kraft wirkte, welche dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional ist; der Körper muss also eine dem Quadrate der Geschwindigkeit proportionale Verzögerung erfahren.

Bei dieser Ableitung sind aber zwei Umstände ausser Acht gelassen; zunächst die Reibung der Luft. An dem Körper haftet eine condensirte Luftschicht, welche an der Luft, durch die der Körper hindurchgeht, sich reibt. Da die Reibung der Geschwindigkeitsdifferenz der reibenden Luftschichten proportional ist, muss der von der Reibung herrührende Luftwiderstand der Geschwindigkeit des bewegten Körpers selbst

proportional sein. Dass dieser Reibungswiderstand vorhanden ist, kann man daran erkennen, dass die Geschwindigkeit eines in der Luft bewegten Körpers auch dann abnimmt, wenn er bei seiner Bewegung gar keine Luft verdrängt, wie z. B. wenn man eine Kreisscheibe horizontal in ihrem Mittelpunkt aufhängt und dann um eine durch den Mittelpunkt gehende verticale Axe in Schwingungen versetzt. Die Abnahme dieser Schwingungen, welche in Folge der Luftreibung stattfindet, haben Maxwell, Meyer, Kundt und Warburg benutzt, um den Reibungscoefficienten der Gase zu bestimmen.

Ferner ist ausser Acht gelassen, dass stets vor dem Körper eine Verdichtung und, wenigstens bei sehr raschen Bewegungen hinter dem Körper eine Verdünnung der Luft stattfindet, so dass auch daraus ein Gegendruck gegen die Bewegung herkommt. Schon deshalb ist es wahrscheinlich, dass ein so einfaches Gesetz für die Abhängigkeit des Luftwiderstandes von der Geschwindigkeit der Bewegung wie das Newton'sche nicht existirt.

Das zeigt auch die Erfahrung; bei langsamen Bewegungen, wie bei derjenigen eines Pendels, kann man den Widerstand einfach der Geschwindigkeit proportional setzen. Bei sehr raschen Bewegungen, wie denen der Geschosse, nimmt, weil dort der zweite der erwähnten Umstände stärker hervortritt, der Widerstand in rascherm Verhältnisse zu als das Quadrat der Geschwindigkeit. Nur bei gewissen mittlern Geschwindigkeiten wird das Newton'sche Gesetz anwendbar sein.

Ausser von der Geschwindigkeit des bewegten Körpers hängt der Widerstand der Luft wesentlich ab von der Gestalt desselben und besonders von dem zur Bewegungsrichtung senkrechten Querschnitte des Körpers, denn mit diesem Querschnitt ändert sich wesentlich die Menge der zu verdrängenden Luft. Ausserdem erkennt man unmittelbar, dass bei gleichem Querschnitte der Widerstand auch von der Gestalt abhängt, dass also z. B. ein vorn keilförmig zugeschärfter Körper einen kleinern Widerstand findet, als ein vorn flacher.

Bei gleicher Gestalt und gleicher Geschwindigkeit muss schliesslich die Verzögerung um so grösser sein, je kleiner die Masse des bewegten Körpers ist, weil mit der kleinern Masse die lebendige Kraft des Körpers die kleinere, der in jedem Augenblicke zu überwindende Widerstand, somit der Verlust an lebendiger Kraft aber derselbe ist. Bei kleinerer Masse entspricht aber einem gleichen Verluste an lebendiger Kraft ein grösserer Verlust an Geschwindigkeit.

Dritter Abschnitt.

Von der Wellenbewegung.

Erstes Kapitel.

Theoretische Principien der Wellenbewegung.

§. 73.

Schwingende Bewegung eines Punktes. Wenn ein materieller Punkt *A*, Fig. 83, durch irgend welche Kräfte in einer bestimmten Lage so festgehalten wird, dass er, sobald man ihn aus dieser Lage entfernt, gegen

dieselbe zurückgezogen wird, so wird derselbe, wenn man ihn aus seiner Gleichgewichtslage nach B hin entfernt, und dann der Wirkung der ihn nach der Ruhelage treibenden Kräfte überlässt, zunächst wieder in seine frühere Lage zurückkehren. Da aber die ihn zurückziehenden Kräfte so lange auf ihn einwirken, bis derselbe in der Ruhelage angekommen ist, so ist seine Bewegung eine beschleunigte und der Punkt kommt in A mit einer gewissen gegen C gerichteten Geschwindigkeit an. In Folge dessen kann der Punkt nicht in seiner Gleichgewichtslage A verharren, sondern muss sich über dieselbe hinaus gegen C hin bewegen. Von dem Augenblicke aber, in welchem der Punkt die Ruhelage verlassen hat, wirken dieselben Kräfte, welche ihn vorher gegen die Ruhelage trieben, wieder auf ihn ein und zwar jetzt seine Bewegung verzögernd. Da es dieselben Kräfte sind, welche ihn jetzt verzögern, welche ihm vorher auf dem Wege BA die Geschwindigkeit ertheilten, mit welcher er die Gleichgewichtslage passirte, so muss der Punkt den der Strecke AB gleichen Weg AC zurücklegen, bis er zur Ruhe kommt.

Fig. 83.



Von dem Punkte C kehrt er dann auf demselben Wege CA in die Ruhelage zurück und erhält durch die ihn jetzt gegen A hintreibenden Kräfte dieselbe Geschwindigkeit im Punkte A wieder, mit welcher er vorher A passirte. Er bewegt sich deshalb über A weiter und zwar bis zum Ausgangspunkt der Bewegung B, da auf dem Wege AB die ihn vorher beschleunigenden Kräfte ihn wiederum verzögern.

Von B aus beginnt dann die Bewegung gerade wie das erstemal, so dass wenn keine Hindernisse der Bewegung vorhanden sind, der Punkt unaufhörlich in derselben Weise sich zwischen B und C hin und her bewegt.

Eine solche hin- und hergehende Bewegung eines Punktes um eine bestimmte Gleichgewichtslage bezeichnet man als schwingende Bewegung, sie tritt stets ein, wenn ein materieller Punkt eine bestimmte Gleichgewichtslage besitzt und man denselben aus dieser entfernt, ohne ihn in eine neue Gleichgewichtslage überzuführen. Einen speciellen Fall dieser Bewegung haben wir schon beim Pendel kennen gelernt, welches Schwingungen um die Verticale vollführt, wenn es aus der verticalen Lage entfernt wird, ebenso haben wir solche Schwingungen in Folge der Torsion eines Drahtes eintreten sehen.

Den Abstand der äussersten Punkte der Bahn des Beweglichen von der Ruhelage, also die Länge AB oder AC nennen wir die Schwingungsweite oder Amplitude der Schwingung, und die Zeit, welche der Punkt zum Zurücklegen einer ganzen Schwingung gebraucht, also den Weg von B nach C und zurück zu durchlaufen, seine Schwingungsdauer. Den Bewegungszustand des Punktes zu irgend einer Zeit oder an irgend einer Stelle a seiner Bahn nennen wir die Oscillationsphase oder auch kurz Phase; dieselbe ist bestimmt durch den Abstand Aa des Punktes von der Gleichgewichtslage, die Geschwindigkeit und Bewegungsrichtung des Punktes. Während einer ganzen Schwingung ist der Punkt in allen möglichen Phasen, das heisst, er nimmt alle bei der schwingenden Bewegung überhaupt möglichen Bewegungszustände an. Daraus folgt, dass der Punkt jedesmal, wenn er von irgend einem Punkte seiner Bahn aus eine ganze Schwingung vollführt hat, wiederum in der gleichen Phase ist, oder gleiche Phasen

treten jedesmal wieder nach einer ganzen Schwingung ein. Die um eine halbe Schwingung von einander entfernten Phasen sind entgegengesetzte. Der Punkt befindet sich dann in gleichen, aber der Richtung nach entgegengesetzten Bewegungszuständen. Die Abstände von der Gleichgewichtslage sind die gleichen, aber an entgegengesetzten Seiten der Gleichgewichtslage, die Geschwindigkeiten sind gleich, aber entgegengesetzt gerichtet.

Wir nahmen vorhin an, dass die schwingende Bewegung dadurch eingeleitet sei, dass man den Punkt nach B gebracht und ihn dann der Wirkung der ihn nach A treibenden Kräfte überlassen habe. Man sieht aber, dass man die Bewegung ebenso gut durch einen kurzen nach B gerichteten Stoss einleiten kann. Der Punkt erhält durch den Stoss eine gewisse nach B gerichtete Geschwindigkeit, er bewegt sich in Folge dessen so weit, bis die ihn nach A ziehenden Kräfte diese Geschwindigkeit aufgehoben haben, und kehrt dann nach A zurück und so fort, ganz in der vorher betrachteten Weise.

§. 74.

Gesetze der schwingenden Bewegung eines Punktes. Die schwingende Bewegung eines Punktes ist bestimmt, wenn wir für jeden Zeitmoment den Ort des Punktes, sowie die Grösse und Richtung seiner Geschwindigkeit bestimmen können. Wir werden deshalb eine Gleichung aufzusuchen haben, welche uns den Abstand des Beweglichen von der Ruhelage und die Geschwindigkeit der Bewegung in ihrer Abhängigkeit von der Zeit darstellt.

Diese Abhängigkeit wird lediglich davon bedingt, nach welchem Gesetze die Kräfte, welche den Punkt gegen die Gleichgewichtslage treiben, sich mit dem Abstande des Punktes von dieser ändern. Da wir es nun in unsern weitern Untersuchungen fast nur mit Schwingungen zu thun haben, welche durch Elasticität der Körper bedingt werden, und deren Amplituden so klein sind, dass die Elasticitätsgrenzen nicht überschritten werden, so wollen wir auch nur die schwingenden Bewegungen betrachten, bei denen die wirkenden Kräfte in jedem Momente dem augenblicklichen Abstande des Punktes von der Gleichgewichtslage proportional sind. Bezeichnen wir dann die Kraft, welche den Punkt gegen die Gleichgewichtslage treibt, wenn er sich im Abstande y von derselben befindet, mit ψ und mit p eine Constante, so ist

$$\psi = - p y.$$

Wir müssen der rechten Seite der Gleichung das negative Vorzeichen geben, da die Richtung der wirksamen Kraft immer die entgegengesetzte von derjenigen ist, nach welcher der Punkt aus der Gleichgewichtslage entfernt ist, befindet sich der Punkt rechts von A Fig. 83, so wirkt die Kraft nach links und umgekehrt. Die Constante p in dieser Gleichung ist die Kraft, mit welcher der Punkt gegen die Gleichgewichtslage hin gezogen wird, wenn der Abstand $y = 1$ wird.

Nennen wir nun die Masse des beweglichen Punktes m, so wird die Beschleunigung φ, welche derselbe im Abstande y gegen die Gleichgewichtslage hin erfährt,

$$\varphi = - \frac{p}{m} \cdot y = - k^2 y.$$

Diese Beschleunigung φ ist nun gleich dem Quotienten aus der Aenderung der Geschwindigkeit dv, welche die Bewegung in der unendlich kleinen Zeit dt erfährt, in welcher der Punkt gerade den Abstand y passirt, und der Zeit dt, oder

$$\varphi = \frac{dv}{dt},$$

und damit

$$\frac{dv}{dt} = -k^2 y \ldots . \text{ (I).}$$

In dieser Form der Gleichung erkennt man unmittelbar, dass sie identisch dieselbe ist, welche wir §. 17 für die Schwingungen des Pendels erhielten; eine Uebereinstimmung, die nothwendig ist, da wir bei Betrachtung der Pendelbewegung so kleine Amplituden voraussetzten, dass wir die bewegende Kraft in jedem Momente dem Abstande des Pendels von seiner Gleichgewichtslage proportional setzen durften. Es ist also dasselbe Gesetz für die Abhängigkeit der bewegenden Kraft von der Lage des Beweglichen, welches wir hier wie an jener Stelle zu Grunde legen.

In derselben Weise wie in §. 17 erhalten wir aus der Gleichung I für die Geschwindigkeit v, welche das Bewegliche im Abstande y von der Gleichgewichtslage besitzt, wenn wir den Abstand des Punktes von der Gleichgewichtslage dort, wo die Geschwindigkeit Null ist, also die Amplitude der Bewegung mit a bezeichnen,

$$v^2 = k^2 (a^2 - y^2) \quad \text{(II).}$$

Um die Abhängigkeit des Abstandes y des Punktes von seiner Gleichgewichtslage zu erhalten, wollen wir annehmen, der Punkt beginne seine Bewegung in dem Moment, in welchem er die Gleichgewichtslage verlässt, es werde also durch einen kurzen Stoss die Bewegung eingeleitet. Setzen wir dann

$$v = \frac{dy}{dt} = k\sqrt{a^2 - y^2}$$

$$k\,dt = \frac{dy}{\sqrt{a^2 - y^2}},$$

so wird

$$k\int dt = kt = \int_0^y \frac{dy}{a\sqrt{1 - \left(\frac{y}{a}\right)^2}}.$$

Da wir nämlich die Bewegung von dem Momente an rechnen, in dem das Bewegliche die Gleichgewichtslage verlässt, somit wenn $t = 0$ ist, auch $y = 0$ ist, müssen wir die Summe auf der rechten Seite von $y = 0$ bis $y = y$ nehmen. Diese Summe ist nach §. 17

$$kt = \text{arc}\left(\sin = \frac{y}{a}\right) - \text{arc}\left(\sin = \frac{0}{a}\right) = \text{arc}\left(\sin = \frac{y}{a}\right).$$

Lösen wir dieselbe nach y auf, so wird

$$y = a . \sin kt \quad \text{(III).}$$

Nach dieser Gleichung wächst y mit t, so lange $kt < \frac{\pi}{2}$; ist $kt = \frac{\pi}{2}$, so

wird $y = a$; wächst kt weiter, so nimmt y ab und wird 0, wenn $kt = \pi$ geworden ist. Wächst kt weiter, so wird y negativ, das Bewegliche geht an die andere Seite der Gleichgewichtslage und entfernt sich auf dieser Seite von derselben, bis $kt = 3\,\frac{\pi}{2}$ geworden ist, wo dann y den Werth $-\,a$ erhält. Bei weiterer Zunahme nimmt dann der negative Werth von y wieder ab, und ist kt gleich $2\,\pi$ geworden, so ist y wieder gleich Null, der Punkt hat seine Gleichgewichtslage wieder erreicht. Das Bewegliche hat also, wenn die Zeit t einen solchen Werth T angenommen hat, dass $k\,.\,T = 2\,\pi$, eine ganze Schwingung zurückgelegt. Da wir nun als Schwingungsdauer jene Zeit bezeichnet haben, in welcher das Bewegliche eine ganze Schwingung zurückgelegt hat, so ist T die Schwingungsdauer der Bewegung, zwischen welcher und der Quadratwurzel aus der Beschleunigung k im Abstande eins somit die Beziehung besteht

$$k = \frac{2\,\pi}{T};\quad T = \frac{2\,\pi}{k} = 2\,\pi\sqrt{\frac{1}{\left(\frac{p}{m}\right)}} = 2\,\pi\sqrt{\frac{m}{p}}.$$

Ersetzen wir schliesslich k in der Gleichung für y durch diesen Werth, so wird

$$y = a \sin 2\,\pi\,\frac{t}{T}.$$

Dass diese Gleichung die schwingende Bewegung gerade so ergibt, wie wir sie im vorigen §. abgeleitet haben, erkennt man unmittelbar. Denn gerade so wie die Abstände y sich ändern, wenn t von 0 bis T wächst, gerade so ändern sie sich jedesmal, wenn t von $n\,T$ bis $(n + 1)\ T$ wächst, wenn also die Zeit t um eine ganze Schwingungsdauer zunimmt. Ferner erkennt man, dass in zwei Zeitpunkten, welche um eine halbe Schwingungsdauer von einander entfernt sind, die Abstände y auf entgegengesetzter Seite der Gleichgewichtslage einander gleich sind, denn die Werthe zweier Sinus, deren Argumente um π verschieden sind, sind der Grösse nach gleich, dem Zeichen nach entgegengesetzt.

Die Geschwindigkeit v zur Zeit t ist

$$v = k\sqrt{a^2 - y^2} = a\,\frac{2\,\pi}{T}\sqrt{1 - \sin^2 2\,\pi\,\frac{t}{T}} = a\,\frac{2\,\pi}{T}\cdot\cos 2\,\pi\,\frac{t}{T}.$$

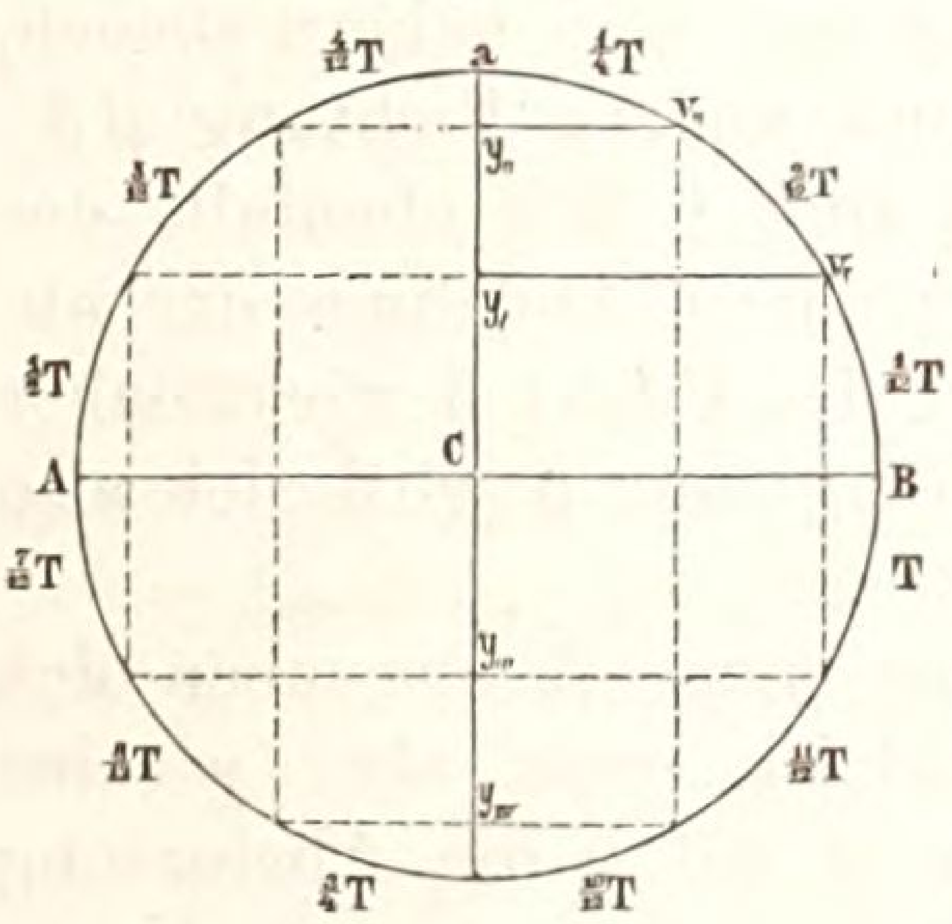
Die Gleichung zeigt, dass wenn $t = 0$, die Geschwindigkeit ihren grössten Werth hat; dieselbe wird mit wachsendem t kleiner und gleich 0, wenn $t = {}^1\!/_4\ T$, also zur Zeit, in welcher $y = a$, das Bewegliche seinen grössten Abstand von der Gleichgewichtslage erreicht hat. Wächst t, so wird v negativ, das Bewegliche kehrt gegen die Gleichgewichtslage zurück und zwar, da das negative v wächst, bis $t = {}^1\!/_2\ T$, $y = 0$ geworden ist, mit wachsender Geschwindigkeit, bis das Bewegliche in die Gleichgewichtslage zurückgekehrt ist. Bei weiterm Wachsen von t bleibt v negativ, bis $t = {}^3\!/_4\ T$, $y = -\,a$ geworden, das Bewegliche also den grössten Abstand auf der andern Seite der Gleichgewichtslage erreicht hat. Dann ist $v = 0$ und bei weiterm Wachsen von t wird es wieder positiv, das Bewegliche kommt von der negativen Seite her mit wachsender Geschwindigkeit in die Gleichgewichtslage zurück und hat, wenn es die Gleichgewichtslage

erreicht hat, dieselbe Geschwindigkeit wie bei dem Beginne der Bewegung. Auch das zeigt somit, dass, wie wir es im vorigen §. ableiteten, das Bewegliche, wenn keine Hindernisse vorhanden sind, unaufhörlich zwischen denselben Grenzen und mit derselben Geschwindigkeit hin und her geht.

Die entwickelte Gleichung setzt uns somit in den Stand, für jeden Moment, wenn wir die bewegenden Kräfte kennen, die Lage und Geschwindigkeit des Beweglichen vollkommen zu bestimmen, sie gibt uns somit unmittelbar das Gesetz der schwingenden Bewegung eines Punktes, wenn auf denselben Kräfte wirken, welche dem Abstande des Punktes aus der Gleichgewichtslage proportional sind.

Die Bewegung eines nach diesem Gesetze schwingenden Punktes können wir uns leicht graphisch darstellen. Sei C Fig. 84 die Gleichgewichtslage des Punktes, der auf der Linie ca sich hin und her bewege. Beschreiben wir dann mit dem Radius Ca um C einen Kreis und denken uns, dass ein Punkt mit der Geschwindigkeit $a\frac{2\pi}{T}$ diesen Kreis durchlaufe, so sind die Projectionen der von dem Punkte in diesem Kreise durchlaufenen Bögen auf den Durchmesser Ca die Strecken, die der Punkt in der schwingenden Bewegung zurückgelegt hat. Geht der Punkt von B aus nach oben, so gibt uns die Projection des Bogens $^1/_{12}\ T$ gleich Cy_1 den nach $^1/_{12}$ Schwingungsdauer zurückgelegten Weg u. s. f. Man sieht also, dass die in gleichen Zeiten bei der schwingenden Bewegung zurückgelegten Wege sehr verschieden sind. Die den gleichen Bögen angehörigen Cosinus sind dann den Geschwindigkeiten proportional, welche den Abständen Cy_1 . . des Punktes von der Gleichgewichtslage entsprechen.

Fig. 84.



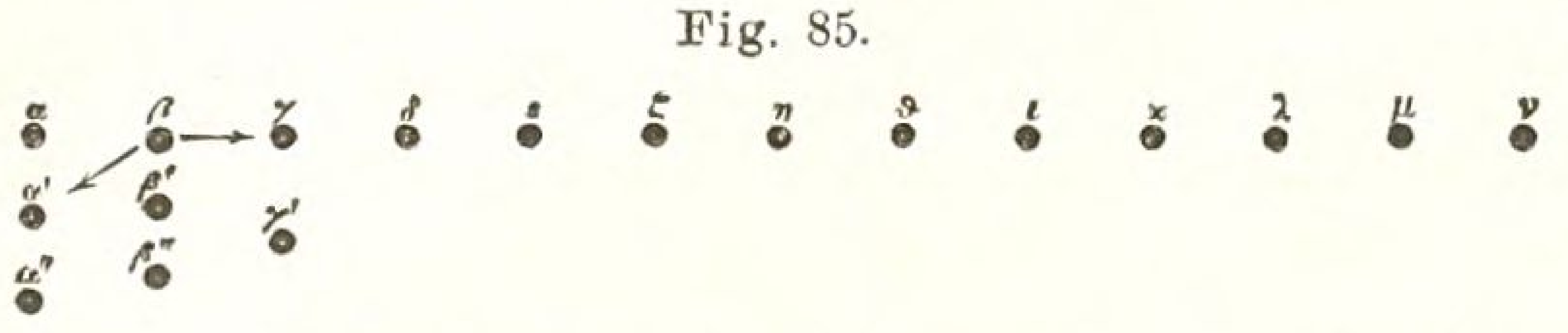
§. 75.

Schwingung von Punktreihen. Entstehung der Wellen. Wenn wir in einer Reihe von Punkten, welche durch Kräfte, die zwischen den einzelnen Punkten thätig sind, in einer bestimmten Lage, der Gleichgewichtslage, festgehalten werden, einen Punkt in eine schwingende Bewegung versetzen, so wird dadurch nicht nur das Gleichgewicht dieses einen Punktes gestört, sondern das der ganzen Reihe. Da die Gleichgewichtslage durch die Wirkung der übrigen Punkte bedingt wird, so muss dadurch, dass der eine Punkt seine Lage ändert, zunächst die der angrenzenden Punkte gestört werden, und von diesen sich die Gleichgewichtsstörung auf immer weitere übertragen.

Wir nehmen an, dass die einzelnen Punkte sich anziehen, und dass die Anziehungskraft sich ändert mit der Entfernung der Punkte von einander. Ueberdies setzen wir voraus, dass der vollständigen Annäherung der Punkte abstossende Kräfte entgegenwirken, die ebenfalls mit der Entfernung der Punkte aber nach einem andern Gesetze als die anziehenden Kräfte sich ändern. Nehmen wir an, dass mit einer Annäherung der Punkte die abstossenden Kräfte viel rascher wachsen, als die anziehenden, so ist durch ein System solcher Kräfte die Gleichgewichtslage der Punkte

vollständig bestimmt. In dieser sind die an jedem einzelnen Punkte nach entgegengesetzter Richtung wirkenden Kräfte gleich. Wird nun der Punkt α Fig. 85 aus seiner Gleichgewichtslage gebracht und z. B. nach α' versetzt, so wird dadurch der Abstand zwischen α und β grösser. Durch die Aenderung des Abstandes $\alpha\beta$ in $\alpha'\beta$ werden nun die auf β von α wirkenden Kräfte geändert, sowohl die anziehenden als die abstossenden werden kleiner. Da aber die Abstossungen sehr viel rascher abnehmen, als die Anziehungen, so ist der Erfolg dieser Aenderungen, dass β jetzt stärker nach α' gezogen wird. Da nun in der Gleichgewichtslage die Wirkung der an β angreifenden Kräfte sich aufhebt, so muss jetzt, da die Anziehung nach α' zugenommen hat, der Punkt β sich α zu nähern suchen, aber nicht in der Richtung $\beta\alpha'$, sondern in einer andern Richtung $\beta\beta'$. Denn mit der Bewegung von β nach unten hin ändert sich ebenfalls der Abstand $\beta\gamma$, und auch hier muss wegen der raschern Abnahme der abstossenden Kräfte die Anziehung überwiegen. Auf den Punkt β wirkt daher eine nach α' und eine nach γ gerichtete Anziehung ein, β wird sich also in der Richtung der Resultirenden nach β' bewegen.

Fig. 85.

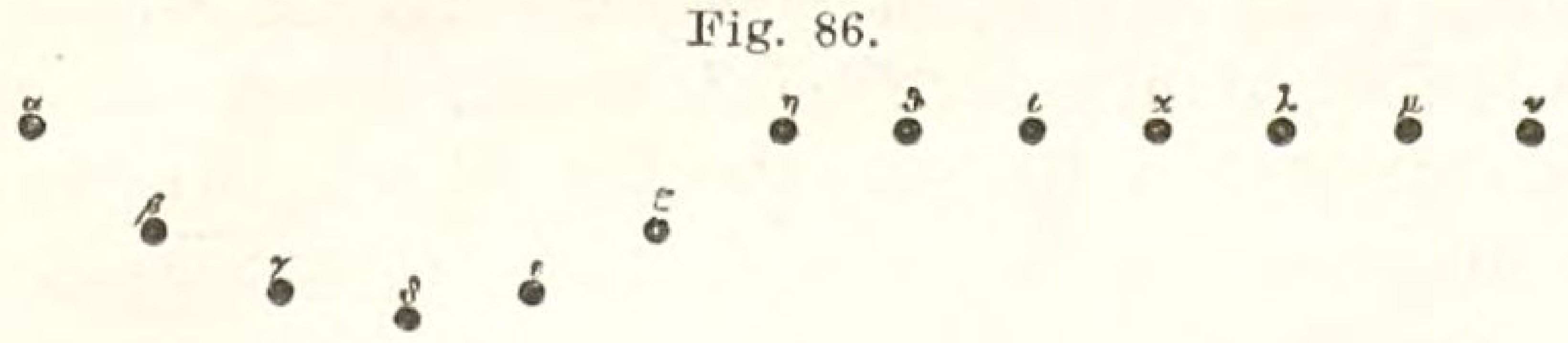


Bewegt sich nun der Punkt α nach α'', so muss β aus eben den Gründen folgen und sich nach β'' bewegen, zugleich muss aber γ seine Ruhelage verlassen, da jetzt die Anziehung von β auf γ die Abstossung überwiegt, und von γ sich nach γ' bewegen.

Wenn demnach α das erste Viertel seiner Oscillation zurückgelegt hat, ist die Bewegung auf der Punktreihe bis zum Punkte δ fortgeschritten, α, β, γ haben ihre Ruhelage verlassen; die Gestalt der Punktreihe ist die Fig. 85 dargestellte.

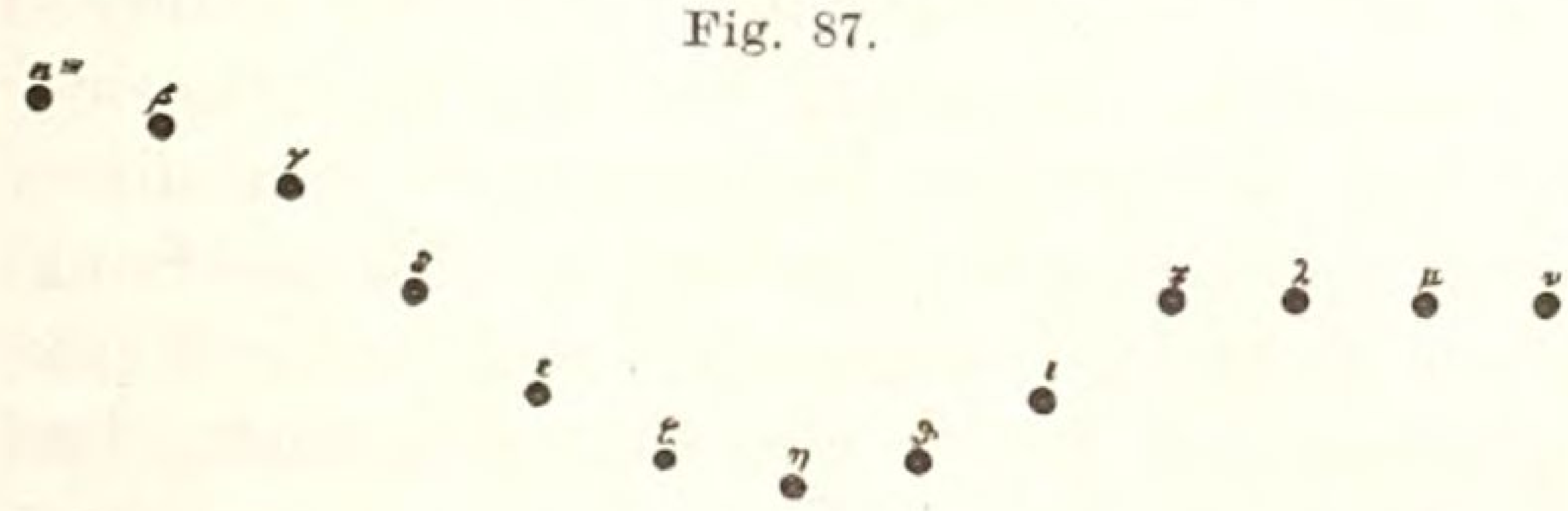
Wenn nun α in seiner Bewegung umkehrt und in der folgenden Zeit gegen die Ruhelage sich bewegt, wird sich β zunächst wegen der Geschwindigkeit, welche es in β'' besitzt, noch eine Strecke weiter bewegen, und dann ebenfalls durch die von α und γ ausgeübten Anziehungen zur Ruhelage zurückkehren. Das Gleiche wird dann etwas später mit γ der Fall sein. Hat α dann die Ruhelage erreicht, so wird β, γ die in Fig. 86 angedeutete Lage haben. Die Bewegung von γ hat aber während dieser Zeit die Bewegung von δ zur Folge gehabt, und diese wieder die Bewegung von ε und ζ, gerade wie sich vorhin β und γ in Folge der Bewegung von α bewegten. Der Punkt δ hat in dieser Zeit seinen grössten Abstand erreicht, da γ denselben schon überschritten, und in dem in Fig. 86 dargestellten Momente sowohl γ als ε den Punkt δ gegen seine Gleichgewichtslage hinziehen. Wenn also α in seiner Ruhelage angekommen ist, hat ein in einem gewissen Abstande von α liegender Punkt seinen grössten Abstand erreicht und ist im Begriffe, den Rückweg gegen die Ruhelage anzutreten, und die Bewegung überhaupt hat sich bis zum doppelten Abstande von α bis η fortgepflanzt. Fig. 86 stellt die gegenseitige Lage der Punkte in diesem Augenblicke dar.

Fig. 86.



In der darauf folgenden Zeit bewegt sich der Punkt α über die Ruhelage hinaus nach α''' (Fig. 87); die Punkte β und γ folgen; der Punkt δ, der im Augenblicke als α die Ruhelage passirte, seine rückgängige Bewegung antrat, hat denselben Raum durchlaufen, wie in der vorigen Zeit und ist in seine Ruhelage zurückgekehrt. Die folgenden Punkte ε, ζ, η befinden sich in derselben Lage und derselben Phase der Bewegung wie β, γ, δ in dem vorhin betrachteten Zeitpunkte, wo α in die Ruhelage zurückgekehrt war, δ seine äusserste Lage erreicht hatte.

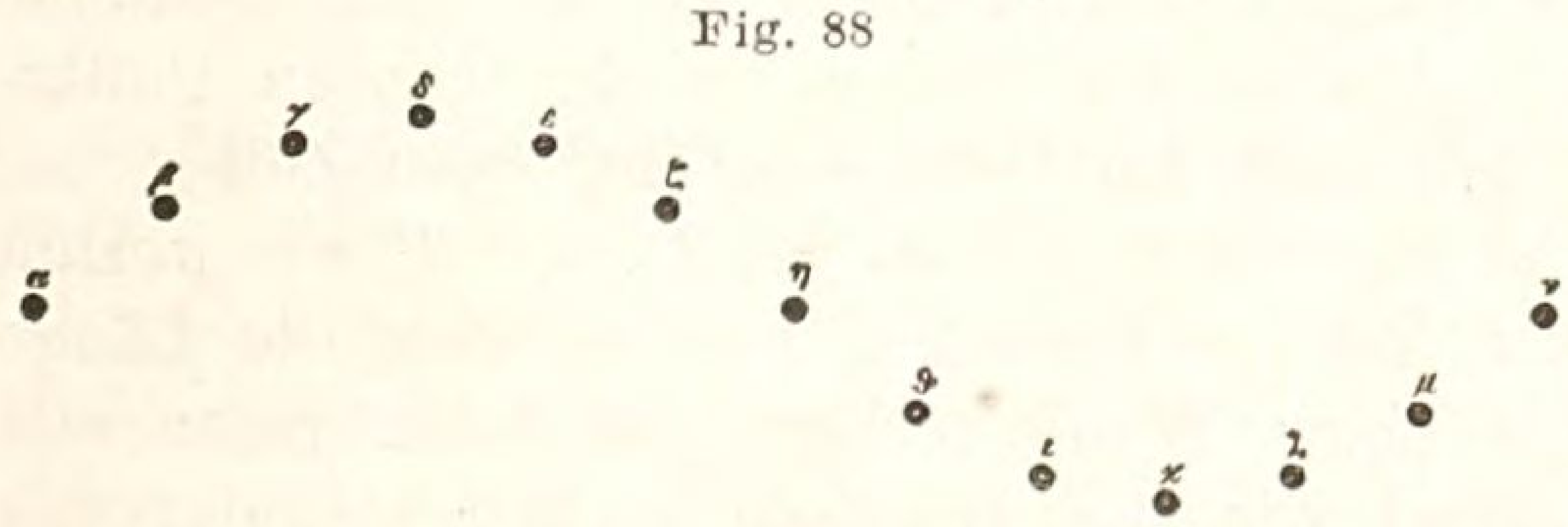
Fig. 87.



Wie sich aber am Ende des ersten Viertels der Oscillation von α die Bewegung bis δ fortgepflanzt hatte, so hat sie sich jetzt ϑ und ι mitgetheilt, und der Punkt $\varkappa$ ist im Begriffe, seine Bewegung nach unten hin zu beginnen.

Wenn nun schliesslich α den letzten Theil seiner Oscillation zurückgelegt hat und wieder in seiner Gleichgewichtslage angekommen ist, so ist die Lage der Punkte α bis ν folgende geworden (Fig. 88). Die Punkte β, γ haben ihre äusserste Lage überschritten und sind auf dem Rückwege zur Ruhelage; δ ist während der Zeit, welche α brauchte, um von seiner äussersten zur Ruhelage sich zu bewegen, von der Ruhelage bis zu seinem grössten Abstande fortgeschritten; ε und ζ haben die Ruhelage überschritten; η ist wie α von der äussersten Lage in dieselbe zurückgekehrt; ϑ und ι haben ähnliche Wege zurückgelegt, wie β und γ; der Punkt $\varkappa$, der am Ende der vorigen Zeit seine Bewegung anfing, hat den grössten Abstand erreicht, und λ und μ haben eine Bewegung erhalten, wie β und γ in der zuerst betrachteten, ε und ζ in der folgenden und ϑ und ι in der der letzten unmittelbar vorhergehenden Zeit. Die Bewegung hat sich also bis zum Punkte ν fortgepflanzt, der gerade im Begriff steht, seine Bewegung zu beginnen.

Fig. 88



Dadurch also, dass einem Punkte α einer Punktreihe, welche durch anziehende und abstossende Kräfte der einzelnen Punkte im Gleichgewicht gehalten wird, eine oscillirende Bewegung ertheilt wird, erhalten auch die folgenden Punkte eine oscillirende Bewegung, welche sich von Punkt zu Punkt in der Reihe fortpflanzt. Dauert die Bewegung des Punktes α fort, so dauert ebenso die Bewegung der folgenden Punkte fort. Von ν an pflanzt sich die Bewegung gerade so weiter fort; während der ersten Oscillation von ν, welche mit der zweiten von α gleichzeitig ist, um eine der Länge $\alpha\nu$ gleiche Strecke und so weiter. Ebenso wie nach der einen Richtung pflanzt sich die Bewegung auch nach der entgegengesetzten in ganz gleicher Weise fort, so dass nach und nach sämmtliche Punkte unserer Punktreihe eine oscillirende Bewegung erhalten.

Wenn die Punkte bei ihrer oscillirenden Bewegung die Punktreihe

verlassen, wie wir es der Deutlichkeit wegen in unseren Figuren angenommen haben, so erhält die Punktreihe im Laufe der Bewegung eine wellenförmige Gestalt, deshalb nennt man die Bewegung eine Wellenbewegung.

Die Strecke, über welche sich die oscillirende Bewegung während einer ganzen Oscillation des Punktes α verbreitet, hat die Gestalt einer Welle, deshalb nennt man sie eine Welle oder Wellenlänge. Auf dieser Strecke sind alle Oscillationsphasen, welche der einzelne oscillirende Punkt nach und nach annimmt, neben einander vorhanden, weil jeder Punkt auf dieser Strecke seine Oscillation um ein wenig später beginnt, und dann gerade so zurücklegt als der Punkt α.

Die einzelne Welle besteht aus zwei congruenten Theilen, einem vordern und einem hintern, dem Wellenberge und dem Wellenthale, in denen die homologen Punkte, das heisst diejenigen, welche gleich weit vom Anfange jeder Wellenhälfte entfernt sind, mit gleichen aber entgegengesetzt gerichteten Geschwindigkeiten begabt sind. Die gleich weit von dem Anfange jeder Wellenhälfte liegenden Punkte befinden sich daher in entgegengesetzten Phasen. Um diesen Gegensatz auszudrücken, ist auch der Name Wellenberg und Wellenthal gewählt worden, jeder der Hälften kann man den Namen Wellenberg oder Wellenthal beilegen.

Bei der fortschreitenden Bewegung theilt sich die Reihe in eine Folge solcher Wellenlängen, und wenn die Verhältnisse in der ganzen Reihe dieselben sind, so ist auch die Länge der Wellen in der ganzen Punktreihe die gleiche. Hat sich demnach die Bewegung in einer Zeit t um die Länge x fortgepflanzt, und ist die Zeit $t = n \,.\, T$, wo T wie vorhin die Oscillationsdauer eines der Punkte bedeutet, so hat sich die Länge x in n Theile von der Länge einer Welle zerlegt, in deren jeder alle Punkte sich gerade so bewegen, wie die zwischen α und v gelegenen Punkte. Da nun unter dieser Voraussetzung auch die Oscillationsdauer immer dieselbe ist, so muss, da während der Zeit T die schwingende Bewegung sich um die Länge einer Welle fortpflanzt, die Geschwindigkeit, mit welcher sich die Bewegung auf immer weitere Punkte überträgt, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenbewegung constant sein.

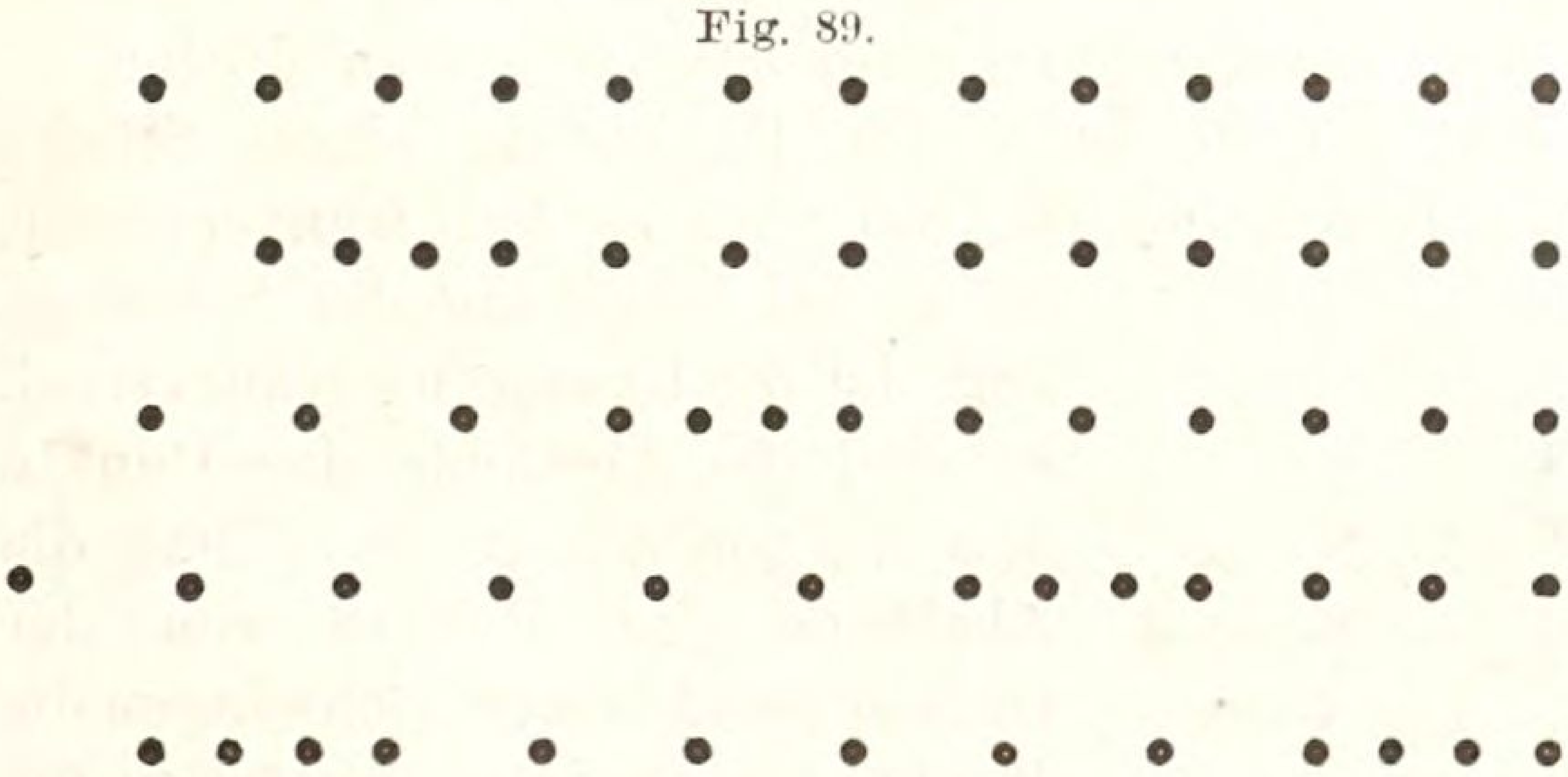
Wir haben bisher über die Richtung, in welcher die einzelnen Punkte sich bewegen, gar keine Voraussetzung gemacht, um die Betrachtung ganz allgemein zu halten. Die Richtung wird bedingt durch diejenige, welche der Punkt α anfänglich besitzt, und durch die Kräfte, welche auf die Punkte der Reihe einwirken.

Bewegt sich der Punkt α anfänglich in der Richtung der Punktreihe, so sieht man sofort, dass dann alle Punkte ebenfalls in derselben Richtung hin und hergehen müssen, da dann nur Kräfte auftreten, welche in dieser Richtung wirken. Die Richtung der Bewegung der Punkte fällt dann mit derjenigen, in welcher sich die Bewegung fortpflanzt, zusammen. Bei diesen, den sogenannten longitudinalen Schwingungen oder longitudinalen Wellen, tritt eine Gestaltsveränderung der Punktreihe nicht ein, sondern nur eine Verdichtung und abwechselnde Verdünnung, indem die Punkte sich abwechselnd einander nähern und von einander entfernen (Fig. 89).

Ist die Bewegung der Punkte senkrecht gegen die Punktreihe, so

nennt man die Schwingungen transversale; die Richtung, in welcher die Punkte sich bewegen, ist dann senkrecht gegen die Richtung, in welcher die Bewegung sich fortpflanzt. Eine solche transversale schwingende Bewegung tritt nicht immer dann ein, wenn die ursprüngliche Bewegung des zuerst bewegten Punktes eine transversale ist, sondern nur dann, wenn die Resultirende sämmtlicher auf die einzelnen Punkte der Reihe, wenn sie die Gleichgewichtslage verlassen haben, wirkenden Kräfte gegen die Punktreihe senkrecht ist. Wir werden später Fälle der Art zu betrachten haben.

Fig. 89.



Möglich ist es ferner, dass die longitudinale und transversale Bewegung sich combinirt und dass die einzelnen Punkte dadurch geneigte oder krummlinige Bahnen beschreiben. Wir werden letztere bei einer Art Wasserwellen finden.

§. 76.

Mathematische Darstellung der Wellenbewegung einer Punktreihe. Um die Bewegung der einzelnen Punkte einer Reihe vollständig darzustellen, müssen wir für jeden Zeitpunkt den Ort jedes Punktes der Reihe, sowie seine Geschwindigkeit der Grösse und Richtung nach bestimmen können. Wir müssen demnach auch hier, wie bei der oscillirenden Bewegung eines Punktes, eine Gleichung aufsuchen, welche uns die zu bestimmenden Grössen als abhängig von der Zeit und von ihrer Lage in der Punktreihe wiedergibt, denn nach den Betrachtungen des vorigen §. hängt der Bewegungszustand eines Punktes der Reihe sowohl von der Zeit als auch von der Lage des Punktes in der Reihe ab. Für einen gegebenen Zeitmoment ist die Bewegung der Punkte der Reihe je nach ihrer Lage verschieden, und für eine gegebene Lage ist sie eine andere zu verschiedenen Zeiten.

Um zu der Gleichung zu gelangen, betrachten wir einen beliebigen Punkt der Reihe, dessen Abstand von dem Anfangspunkt der Bewegung, das heisst von dem Punkte, den wir in eine schwingende Bewegung versetzten, gleich x sei, und suchen dessen Bewegung zur Zeit t zu bestimmen. Wir gelangen dazu, indem wir die Kräfte aufsuchen, welche die Bewegung des Punktes bewirken.

Wie die Betrachtungen des vorigen §. zeigen, werden die Punkte der Reihe nach und nach von der Bewegung ergriffen, und die Folge davon ist, dass die neben einander liegenden Punkte nie gleich weit, sondern der eine mehr, der andere weniger von der Gleichgewichtslage entfernt sind. Die Punkte sind deshalb auch relativ gegen einander verschoben, das heisst ihre Stellung gegen einander ist eine andere als die der Gleichgewichtslage entsprechende. Da wir nun voraussetzen, dass die Punkte

sich durch die zwischen ihnen thätigen Kräfte im Gleichgewicht halten, so müssen bei einer solchen Verschiebung der Punkte gegen einander Kräfte thätig sein, welche die Punkte in ihre relative Gleichgewichtslage zurückzubringen suchen. Wir setzen nun voraus, dass die Verschiebungen so klein sind, dass wir, wie bei den elastischen Kräften, immer die Grösse dieser Kräfte der Grösse der Verschiebung proportional setzen dürfen.

Es stelle nun $\alpha\,\delta\,\eta$ Fig. 90 die Lage der Punkte in einem Stücke der Punktreihe, welches in Bewegung ist, dar, sei es bei transversaler, sei es bei longitudinaler Schwingung. Ist die Bewegung transversal, so sind die Abstände der Punkte $\beta, \gamma \ldots$ von $\alpha\,\eta$ in der That die Abstände der Punkte von der Gleichgewichtslage. Schwingen die Punkte longitudinal, so stellen die Abstände der Punkte von $\alpha\eta$ die Verschiebungen der Punkte aus der Gleichgewichtslage, Fig. 91, dar, indem die Verschiebungen in dem Orte der Gleichgewichtslage, z. B. $\alpha\beta' - \alpha\beta$, $\alpha\gamma' - \alpha\gamma$. . senkrecht zu $\alpha\eta$ aufgetragen sind.

Fig. 90.

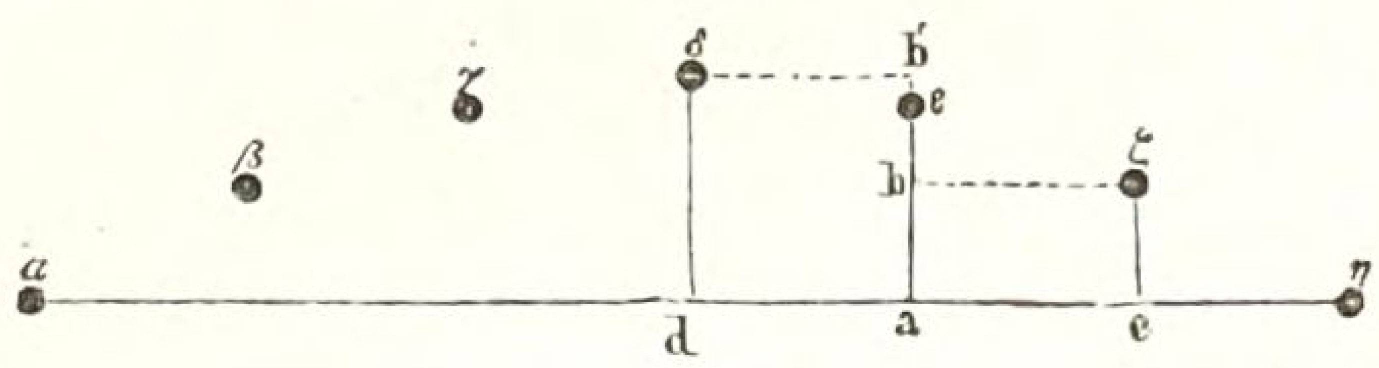


Fig 91.



Betrachten wir nun irgend drei neben einander liegende Punkte, z. B. $\delta, \varepsilon, \zeta$, so ist die Verschiebung des Punktes ε gegen δ der Differenz der senkrechten Abstände $d\,\delta - a\,\varepsilon$ und ebenso die Verschiebung von ε gegen ζ der Differenz $a\,\varepsilon - c\,\zeta$ proportional. Schwingen die Punkte longitudinal, so sind die Differenzen $\varepsilon\,b'$ und $\varepsilon\,b$ die Verschiebungen der Punkte gegen einander selbst, wie sich aus der eben angeführten Construction ergibt. Schwingen die Punkte transversal, so wird, wenn wir voraussetzen, dass die Amplituden der Schwingung sehr klein sind, eine merkliche Veränderung in den Abständen der Punkte nicht eintreten, es ist $\delta\,\varepsilon$ von $a\,d$ nur um eine selbst gegen $a\,d$ verschwindende Grösse verschieden. Es bildet dann aber die Verbindungslinie beider Punkte mit der Verbindungslinie in der Gleichgewichtslage einen Winkel, in derselben Art, wie wir es bei der Torsion fanden. Die Tangente dieses Verschiebungswinkels, wie wir ihn damals nannten, oder auch da die Winkel so klein sind, dass wir für die Tangente den Bogen einsetzen dürfen, der Verschiebungswinkel selbst, ist gleich den Quotienten aus der Verschiebung der Moleküle und dem Abstande der Moleküle in der Gleichgewichtslage. Der Verschiebungswinkel zwischen δ und ε ist $\varepsilon\,\delta\,b' = \frac{\varepsilon\,b'}{\delta\,b'}$, der zwischen ε und ζ ist $\frac{\varepsilon\,b}{b\,\zeta}$.

Setzen wir nun für unsere Punktreihe die früher erkannten Gesetze der Elasticität als gültig voraus, so folgt, dass zwischen zwei gegen einander verschobenen Molekülen Kräfte thätig sind, welche sie in die relative Gleichgewichtslage zurückzubringen suchen, und welche der Grösse der Verschiebung proportional sind. Das Maass dieser Kräfte ist der Elasticitätscoefficient, die Kraft, mit der die Moleküle gegen ihre Gleichgewichtslage hingetrieben werden, wenn die Verschiebung dem ursprünglichen der Gleichgewichtslage entsprechenden Abstande gleich geworden ist. Bezeichnen wir den Elasticitätscoefficienten mit e, den der Gleich-

gewichtslage entsprechenden Abstand der Moleküle mit dx, so ist die einer Verschiebung ξ der Moleküle entsprechende Kraft

$$f = \frac{\xi}{dx} e.$$

Wir sahen weiter bei Besprechung der Torsionserscheinungen, dass bei einer Verschiebung der Molekülschichten gegen einander ohne Vergrösserung des Abstandes der Schichten, eine die Schichten gegen ihre relative Gleichgewichtslage zurücktreibende Kraft auftritt, welche der Grösse des Verschiebungswinkels proportional ist. Diese Kraft war für die Einheit des Verschiebungswinkels ein gewisser Bruchtheil des Elasticitätscoefficienten. Ist demnach a eine Constante, die kleiner als eins ist, so können wir die einem Verschiebungswinkel α entsprechende Kraft setzen

$$f_1 = a e \alpha.$$

Diese Sätze dürfen wir direkt auf unsere Punktreihe anwenden; wir setzen dann voraus, dass zwischen den Punkten des Systems, von dem die betrachteten Punkte eine Reihe bilden, ebensolche Kräfte wirken, wie wir sie früher als elastische Kräfte erkannt haben.

Da nun in unserer Punktreihe die Verschiebung des Punktes ε gegen δ gemessen nach dem ursprünglichen Abstande der Punkte in der Gleichgewichtslage, resp. bei transversaler Bewegung der Verschiebungswinkel gleich $\frac{\varepsilon b'}{\delta b'}$ ist, so ist die Kraft, mit welcher der Punkt in seine Gleichgewichtslage in Bezug auf δ gezogen wird, also nach b' hin

$$a \frac{\varepsilon b'}{\delta b'} \cdot e,$$

wenn wir mit e die Elasticität der Punktreihe bezeichnen, und a die oben angeführte Constante ist, welche für longitudinale Schwingungen gleich eins ist.

Die Verschiebung des Punktes ε gegen ζ bewirkt, dass ε gegen b hingetrieben wird, gegen die Stelle, in welcher er gegen ζ in seiner Gleichgewichtslage ist; die Grösse der Kraft, welche in diesem Sinne wirkt, ist

$$a \frac{\varepsilon b}{b \zeta} \cdot e = a \frac{\varepsilon b}{\delta b'} \cdot e.$$

Diese beiden Kräfte wirken auf den Punkt ε nach gerade entgegengesetzter Richtung, die ihn wirklich bewegende Kraft ist somit die Differenz beider, somit

$$a \frac{\varepsilon b' - \varepsilon b}{\delta b'} \cdot e.$$

Da wir es hier mit molekularen Kräften zu thun haben, welche von Molekülschicht zu Molekülschicht wirken, so wird die Bewegung des Punktes ε durch weiter entfernte Punkte nicht beeinflusst; die soeben abgeleitete bewegende Kraft ist somit die ganze den Punkt ε bewegende Kraft.

Um nun die durch diese Kraft dem Punkte ε ertheilte Beschleunigung zu erhalten, haben wir nur dieselbe durch die Masse m des bewegten Punktes ε zu dividiren, wir erhalten dann

$$a \cdot \frac{\varepsilon b' - \varepsilon b}{\delta b'} \cdot \frac{e}{m}.$$

Anstatt der Masse m des einzelnen Punktes oder der einzelnen Molekülschicht, zu welcher der Punkt gehört, können wir bequemer die Masse der Längeneinheit der Punktreihe einführen, die wir als die Dichtigkeit der Punktreihe bezeichnen wollen. Die Anzahl der Punkte in der Längeneinheit der Reihe ist

$$n = \frac{1}{\delta b'}.$$

Die Dichtigkeit der Punktreihe ist somit

$$n \,.\, m = \frac{m}{\delta b'} = d.$$

Führen wir diesen Werth in obigen Ausdruck ein, so wird die Beschleunigung

$$a \cdot \frac{\varepsilon b' - \varepsilon b}{\delta b'} \cdot \frac{e}{\left(\frac{m}{\delta b'}\right) \delta b'} = a \, \frac{\varepsilon b' - \varepsilon b}{(\delta b')^2} \cdot \frac{e}{d}.$$

Diese Beschleunigung ist diejenige, welche der betrachtete Punkt der Reihe in dem betrachteten Zeitmoment, also zur Zeit t, nachdem die Bewegung in dem Ausgangspunkte derselben begonnen hat, erhält. Nach der schon oft angewandten Beziehung können wir dieselbe gleich $\frac{dv}{dt}$ setzen, gleich dem Quotienten aus der in der unendlich kleinen der Zeit t folgenden Zeit dt stattfindenden Aenderung der Geschwindigkeit dv und der Zeit dt, es ist somit

$$\frac{dv}{dt} = a \, \frac{\varepsilon b' - \varepsilon b}{(\delta b')^2} \cdot \frac{e}{d}.$$

Die Differenz $\varepsilon b' - \varepsilon b$ hängt nun, wie man schon unmittelbar an der Fig. 90 erkennt, ab von der Lage des Punktes ε in der Reihe. Um das auszudrücken, wollen wir den Abstand des betrachteten Punktes von dem Ausgangspunkte der Bewegung mit x bezeichnen und den Abstand $a\,d = \delta b'$ der einzelnen Punkte mit dx, sei ferner der Abstand εa des betrachteten Punktes ε von seiner Gleichgewichtslage gleich y. Da nun die in einem bestimmten Momente, also zur Zeit t, vorhandene Verschiebung der einzelnen Punkte aus der Gleichgewichtslage abhängig ist von der Lage des Punktes in der Reihe, also von dem Werthe von x, so können wir ganz allgemein y als eine Function von x bezeichnen, also

$$y = f(x).$$

Der Abstand des vorhergehenden Punktes δ von der Gleichgewichtslage y' ist dann, da dieser Punkt dem Anfangspunkt um dx näher liegt,

$$y' = f(x - dx) = y - dy'.$$

Da man nämlich die Aenderung von y, wenn x um dx wächst, mit dem positiven Vorzeichen versieht, so müssen wir die Aenderung von y, wenn wir in die Function einen um dx kleinern Werth einführen, mit dem negativen Vorzeichen versehen.

Der Abstand des auf ε folgenden Punktes ζ vom Anfangspunkte der Bewegung ist $x + dx$, für den Abstand des Punktes von seiner Gleichgewichtslage $c\zeta = y''$ erhalten wir demnach

$$y'' = f(x + dx) = y + dy''.$$

Da nun $\varepsilon b' = y' - y$, $\varepsilon b = y - y''$, so folgt

$$\varepsilon b' - \varepsilon b = (y - dy - y) - (y - (y + dy'')) = dy'' - dy'.$$

Die Differenz $\varepsilon b' - \varepsilon b$, welcher die Beschleunigung des betrachteten Punktes proportional ist, ist somit gleich dem Unterschiede zwischen den Veränderungen, welche die $f(x)$, die uns die Abstände y zu einer bestimmten Zeit darstellt, erfährt, wenn der Werth x einmal um dx, das anderemal um $2\,dx$ grösser wird. Denn es ist dy' die Aenderung, welche y erfährt, wenn wir von δ aus um dx weiter zu ε gehen und dy'' diejenige, wenn wir von ε aus nochmals um dx, also von δ aus um $2\,dx$ zu ζ gehen. Bezeichnen wir diesen Unterschied in den Veränderungen mit d^2y, so wird

$$\frac{dv}{dt} = a\frac{e}{d}\frac{d^2y}{dx^2} = c^2\frac{d^2y}{dx^2},$$

wenn wir den Factor $a\dfrac{e}{d} = c^2$ setzen.

Die Grösse dv im Zähler auf der linken Seite der Gleichung ist die Aenderung der Geschwindigkeit des bewegten Punktes in der auf die Zeit t folgenden unendlich kleinen Zeit dt. Ist v die Geschwindigkeit am Ende der Zeit t, diejenige am Ende der Zeit $t + dt$ gleich v', so ist

$$dv = v' - v.$$

Zur Zeit t hat nun unser betrachtete Punkt, der durch die Entfernung x vom Ausgangspunkte der Bewegung gegeben ist, den Weg y zurückgelegt. Wächst die Zeit um dt, so legt er in dieser den Weg dy zurück. Demnach ist seine Geschwindigkeit

$$v = \frac{dy}{dt}.$$

Wächst jetzt die Zeit nochmals um dieselbe Grösse dt, so legt er in dieser Zeit einen andern Weg dy' zurück, die Geschwindigkeit am Ende der Zeit $t + dt$ ist demnach

$$v' = \frac{dy'}{dt},$$

somit ist

$$dv = \frac{dy' - dy}{dt} = \frac{d^2y}{dt},$$

wenn wir auch hier die Differenz der Wege, welche der betrachtete Punkt in den auf einander folgenden Zeiten dt zurücklegt, mit d^2y bezeichnen. Damit wird dann schliesslich unsere Gleichung für die Beschleunigung unseres betrachteten Punktes

$$\frac{d^2y}{dt^2} = c^2\frac{d^2y}{dx^2}.$$

Diese letzte Gleichung bestimmt nun die Beschaffenheit der von uns gesuchten Gleichung, welche uns für jeden Moment und für jede Lage des Punktes in der Reihe den Abstand desselben von der Gleichgewichtslage anzugeben in den Stand setzt. Sie sagt nämlich direkt aus, dass die Unterschiede der von einem und demselben Punkte in auf einander folgenden Zeiten dt durchlaufenen Räume dividirt durch das Quadrat der

Zeit proportional sei den Unterschieden zwischen den Differenzen der in demselben Zeitmomente vorhandenen Abstände der Punkte, welche von dem betrachteten Punkte um dx und um $2\,dx$ entfernt sind, von der Gleichgewichtslage dividirt durch das Quadrat von dx. Das heisst aber nichts anders, als dass die Werthe von y, welche ein bestimmter Punkt nach und nach annimmt, in demselben Momente auf einer gewissen Strecke der Punktreihe neben einander vorhanden sein müssen. Die Gleichung, welche uns die Lage der Punkte gibt, muss also so beschaffen sein, dass sie uns für einen gegebenen Punkt, also für ein constantes x dieselben Werthe von y nach und nach bei wachsender Zeit liefert, wie sie uns für eine gegebene Zeit für die neben einander liegenden Punkte, also für ein wachsendes x, ergibt.

Für den Ausgangspunkt der Bewegung, für welchen $x = 0$ ist, haben wir eine einfache schwingende Bewegung vorausgesetzt, welche nach §. 74 gegeben ist durch

$$y = \alpha \,.\, \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

wenn α die Amplitude und T die Schwingungsdauer der Bewegung ist. Bezeichnen wir nun diejenige Strecke der Punktreihe mit λ, auf welcher die Werthe von y, welche der Ausgangspunkt der Bewegung während einer Schwingungsdauer annimmt, neben einander gleichzeitig vorhanden sind, so erfüllt die Gleichung

$$y = \alpha \,.\, \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

die vorhin erkannte Bedingung. Denn zu irgend einer Zeit $t = n\,T$ hat der Ausgangspunkt der Bewegung n Schwingungen vollführt, also n mal alle Werthe zwischen $y = +\,\alpha$ und $y = -\,\alpha$ angenommen. In demselben Momente liefert aber auch in der Punktreihe bis $x = n\,\lambda$ unsere Gleichung n mal alle Werthe von y zwischen $+\,\alpha$ und $-\,\alpha$ neben einander. Denn setzen wir $t = n\,T$, so wird

$$y = -\,\alpha \,.\, \sin 2\pi \frac{x}{\lambda},$$

somit

$$\begin{array}{lll} y = 0 & \text{für} & x = 0 \\ y = -\,\alpha & \text{„} & x = {}^1\!/_4\,\lambda \\ y = 0 & \text{„} & x = {}^1\!/_2\,\lambda \\ y = +\,\alpha & \text{„} & x = {}^3\!/_4\,\lambda \\ y = 0 & \text{„} & x = \lambda \end{array}$$

u. s. f. Es ist somit λ jene Strecke, welche wir im vorigen §. als die Wellenlänge der sich fortpflanzenden Bewegung bezeichneten, über welche hin sich die Bewegung jedesmal fortpflanzt, wenn der Ausgangspunkt eine Schwingung vollführt. Die Gleichung zeigt entsprechend den Entwicklungen des vorigen §., dass die Wellenlänge in zwei congruente Hälften, Wellenberg und Wellenthal, zerfällt, denn zwischen $x = {}^1\!/_2\,\lambda$ und $x = \lambda$ sind alle Werthe y positiv, die Punkte befinden sich an der einen Seite der Gleichgewichtslage, zwischen $x = 0$ und $x = {}^1\!/_2\,\lambda$ sind alle Werthe y negativ. Dasselbe wiederholt sich in der ganzen Reihe, überall sind die

Werthe zwischen $x = (2m + 1)\frac{\lambda}{2}$ und $(2m + 2)\frac{\lambda}{2}$ positiv, zwischen $2m\frac{\lambda}{2}$ und $(2m + 1)\frac{\lambda}{2}$ negativ.

Alle um irgend ein Vielfaches von $\frac{\lambda}{2}$ vom Anfangspunkte der Bewegung entfernten Punkte befinden sich in der Gleichgewichtslage, sie befinden sich aber in entgegengesetzter Phase der Bewegung, denn ihre Geschwindigkeiten sind einander entgegengesetzt. Wir erhalten die Geschwindigkeit, indem wir den Quotienten $\frac{dy}{dt}$ bilden. Lassen wir in der Gleichung

$$y = \alpha \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

t um dt wachsen, so wird

$$y + dy = \alpha \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\cos 2\pi\frac{dt}{T} + \alpha\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\sin 2\pi\frac{dt}{T};$$

darin können wir, da dt unendlich klein ist, $\cos 2\pi\frac{dt}{T} = 1$ und $\sin 2\pi\frac{dt}{T} = 2\pi\frac{dt}{T}$ setzen und erhalten dann

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2\pi}{T}\cdot\alpha\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right).$$

Setzen wir nun $t = nT$ und $x = m\lambda$, so wird

$$v = \frac{dy}{dt} = \frac{2\pi}{T}\cdot\alpha\cos 2\pi(n - m) = \frac{2\pi}{T}\cdot\alpha,$$

setzen wir dagegen $x = (2m + 1)\frac{\lambda}{2}$, so wird

$$v = \frac{dy}{dt} = \frac{2\pi}{T}\alpha\cos(2n - (2m + 1)\pi = -\frac{2\pi}{T}\cdot\alpha.$$

Ebenso wie für diese Punkte können wir für alle übrigen der Reihe und ebenso für jeden Moment aus dieser Gleichung Grösse und Richtung der Geschwindigkeit ableiten. Unsere Gleichung stellt uns also die Bewegung der Punktreihe ganz vollständig dar, wenn wir noch die Länge der Strecke λ bestimmen, über welche sich während einer Schwingungsdauer die Bewegung fortpflanzt. Zur Bestimmung derselben gehen wir auf die Gleichung zurück

$$\frac{d^2y}{dt^2} = c^2\frac{d^2y}{dx^2},$$

indem wir aus der Gleichung für y die beiden Quotienten $\frac{d^2y}{dt^2}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ ableiten; der zweite mit c^2 multiplicirt, muss dann gleich dem ersten sein.

Zur Bestimmung des ersten haben wir in der eben abgeleiteten Gleichung für $v = \frac{dy}{dt}$ nur t um dt wachsen zu lassen, um dv zu bestimmen. Verfährt man dazu gerade wie vorhin zur Ableitung von v, so wird

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{4\pi^2}{T^2}\alpha\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) = -\frac{4\pi^2}{T^2}\cdot y\,.$$

Zur Bestimmung des zweiten Quotienten haben wir in der Gleichung für y die Grösse x um dx wachsen zu lassen; wir erhalten dann

$$y + dy = \alpha \,.\, \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \cos 2\pi \frac{dx}{\lambda} - \alpha \,.\, \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \sin 2\pi \frac{dx}{\lambda}$$

$$dy = -\alpha \frac{2\pi dx}{\lambda} \cdot \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right).$$

Lassen wir in dieser Gleichung wieder x um dx wachsen, so erhalten wir dy', also die Aenderung, wenn wir uns von dem betrachteten Punkte noch einmal um dx entfernen, so dass

$$dy' - dy = d^2 y.$$

Es wird dann

$$dy' = -\alpha \frac{2\pi dx}{\lambda} \left\{\cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \frac{2\pi dx}{\lambda} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right\},$$

somit

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\alpha \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) = -\frac{4\pi^2}{\lambda^2} \cdot y.$$

Nach unserer Gleichung muss nun

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{4\pi^2}{T^2} y = c^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = -c^2 \frac{4\pi^2}{\lambda^2} y$$

sein, somit muss

$$\frac{1}{T^2} = \frac{c^2}{\lambda^2} \text{ oder } \lambda = cT.$$

Die Wellenlänge λ ist somit gleich dem Producte aus der Schwingungsdauer T und der Grösse c, oder wenn wir für dieselbe wieder ihren Werth einsetzen,

$$\lambda = \sqrt{a \frac{e}{d}} \cdot T.$$

Da nun λ die Strecke ist, über welche sich die Bewegung während einer Schwingungsdauer fortpflanzt, so folgt, dass c die Strecke ist, durch welche sich die schwingende Bewegung in der Zeiteinheit fortpflanzt, oder dass es die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der schwingenden Bewegung ist. Dieselbe ist somit

$$c = \sqrt{a \frac{e}{d}}.$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der schwingenden Bewegung hängt somit nicht von der Schwingungsdauer derselben, sondern nur von der Beschaffenheit der Punktreihe, deren Elasticität und Dichtigkeit, sowie von der Richtung der Schwingungen, ob longitudinal oder transversal, ab; denn für longitudinale Schwingungen ist $a = 1$, für transversale $a < 1$. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist somit auch in einer Punktreihe überall dieselbe, so lange die Elasticität und Dichtigkeit derselben nicht geändert ist.

Durch diese Bestimmung von λ ist nun die schwingende Bewegung der Punktreihe vollständig bestimmt, wenn uns die Beschaffenheit der Punktreihe und die dem Ausgangspunkte ertheilte Bewegung, Amplitude und Schwingungsdauer gegeben ist, denn in der Gleichung

$$y = \alpha \,.\, \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

ist uns dann alles bekannt, so dass wir für jeden Punkt, dessen Lage uns durch x gegeben ist, für jede Zeit t den Werth von y angeben können.

§. 77.

Zusammensetzung mehrerer Bewegungen; Interferenz. Werden zugleich an verschiedenen Punkten einer Reihe schwingende Bewegungen erzeugt, so pflanzen sich dieselben von jeder Erregungsstelle aus in der Punktreihe fort; es fragt sich nun, wie wird die Bewegung derjenigen Punkte beschaffen sein, welche von mehreren Bewegungen afficirt werden. Jeder dieser Punkte, an welchem z. B. zwei Bewegungen zugleich ankommen, erfährt dann zwei Impulse, es muss somit auch seine Bewegung durch beide Impulse bestimmt werden.

Das Resultat dieses Zusammenwirkens ergibt sich aus dem Grundsatze der Mechanik, dass wenn zwei Kräfte einen Punkt ergreifen, dass dann jede so wirkt, wie wenn sie allein vorhanden wäre. Wirken beide Kräfte in derselben Richtung, so summiren sie sich einfach, die Beschleunigung des Punktes ist in jedem Momente gleich der Summe der Beschleunigungen, ebenso sind die Geschwindigkeiten und die durchlaufenen Räume gleich der Summe der einzelnen Geschwindigkeiten und der mit denselben durchlaufenen Räume. Wirken die Kräfte in verschiedenen Richtungen, so erhalten wir die resultirenden Beschleunigungen, Geschwindigkeiten und durchlaufenen Räume nach dem Satze vom Kräfteparallelogramm.

Gerade so müssen wir bei den schwingenden Bewegungen verfahren, um die resultirende Bewegung zu erhalten. Setzen wir zunächst voraus, die Bewegungen seien alle gleichgerichtet, so wird die Beschleunigung, welche ein Punkt zur Zeit t erhält, gleich der Summe aller einzelnen Beschleunigungen, es ist deshalb auch die Geschwindigkeit des Punktes gleich der algebraischen Summe aller Geschwindigkeiten, welche ihm in Folge jeder einzelnen ankommenden Bewegung ertheilt wird. Entgegengesetzt gerichtete Bewegungen sind bei dieser Summe mit entgegengesetzten Vorzeichen zu nehmen.

Daraus folgt schliesslich, dass wenn ein Punkt zur Zeit t in Folge der einzelnen ankommenden Bewegungen die Abstände y_1, y_2, y_3 . . von der Gleichgewichtslage haben würde, sein Abstand Y gleich der Summe aller Einzelabstände sein muss, oder es ist

$$Y = y_1 + y_2 + y_3 + \cdots$$

Damit sind wir nun sofort im Stande für den Fall gleichgerichteter Bewegungen die resultirende Bewegung anzugeben. Wir betrachten zunächst Bewegungen gleicher Schwingungsdauer, und nehmen an, dass in einer Punktreihe zwei Bewegungen zu gleicher Zeit beginnen, deren Anfangspunkt um d von einander entfernt sei, und die sich nach gleichen Richtungen in der Reihe fortpflanzen.

Es sei der Abstand irgend eines Punktes vom Abstand der ersten Bewegung x; für diesen ist dann die Entfernung von der Gleichgewichtslage zur Zeit t

$$y = \alpha \,.\, \sin 2\,\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right).$$

Der Abstand des betrachteten Punktes von dem Ausgangspunkte der zweiten Bewegung ist dann, wenn wir annehmen, derselbe wäre um d weiter von dem betrachteten Punkte entfernt, $x + d$. Ist α' die Amplitude der zweiten Bewegung, so wird die Entfernung des betrachteten Punktes von der Gleichgewichtslage, wenn nur diese Bewegung zu ihm käme,

$$y_1 = \alpha' \sin 2\,\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x+d}{\lambda}\right).$$

Der resultirende Abstand Y ist die Summe beider, oder

$$Y = y + y_1 = \alpha \,.\, \sin 2\,\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \alpha' \sin 2\,\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x+d}{\lambda}\right)$$

oder auch

$$Y = \left(\alpha + \alpha' \cos 2\,\pi \frac{d}{\lambda}\right) \sin 2\,\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) - \alpha' \sin 2\,\pi \frac{d}{\lambda} \cos 2\,\pi \left(\frac{t}{\lambda} - \frac{x}{\lambda}\right).$$

Bestimmen wir nun zwei Grössen A und D so, dass

$$A \,.\, \cos 2\,\pi \frac{D}{\lambda} = \alpha + \alpha' \cos 2\,\pi \frac{d}{\lambda}$$

$$A \,.\, \sin 2\,\pi \frac{D}{\lambda} = \alpha' \sin 2\,\pi \frac{d}{\lambda},$$

so wird der Ausdruck für Y gleich

$$Y = A \,.\, \sin 2\,\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x+D}{\lambda}\right)$$

und man erkennt, dass die resultirende Bewegung eine schwingende Bewegung von gleicher Schwingungsdauer und gleicher Wellenlänge λ ist, welche die einzelnen Bewegungen besassen. Die Amplitude der schwingenden Bewegung ist gleich A; die Phase derselben ist gegen die erste der beiden um D, gegen die zweite um $d - D$ verschoben, das heisst, dieselbe findet so statt, als wenn ihr Ausgangspunkt von dem betrachteten Punkte um die Strecke D weiter entfernt wäre, als der Ausgangspunkt der ersten Bewegung.

Die Amplitude A ergibt sich aus den beiden Gleichungen, welche A und D bestimmen, indem wir beide Gleichungen quadriren und addiren

$$A^2 = \alpha^2 + \alpha'^2 + 2\,\alpha\alpha' \cos 2\,\pi \frac{d}{\lambda}$$

und für D erhalten wir

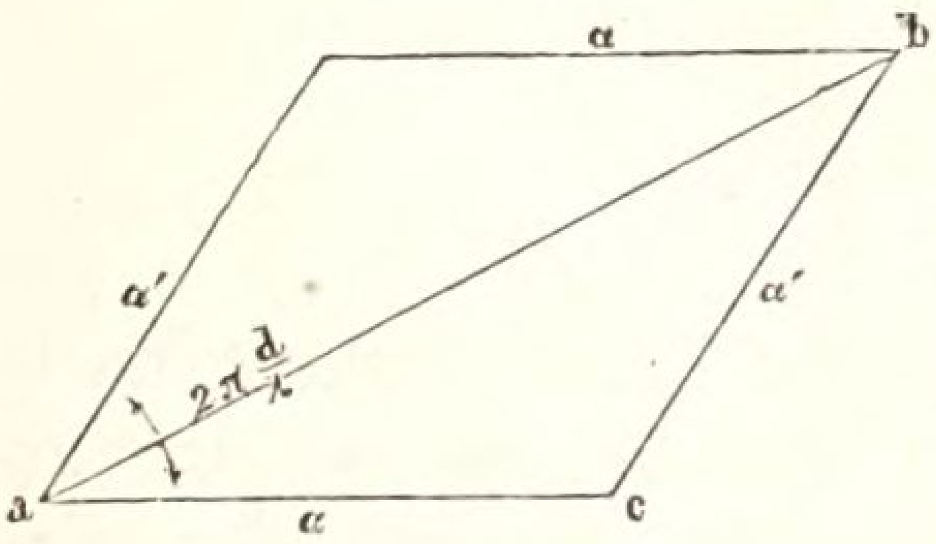
$$\operatorname{tang} 2\,\pi \frac{D}{\lambda} = \frac{\alpha' \sin 2\,\pi \frac{d}{\lambda}}{\alpha + \alpha' \cos 2\,\pi \frac{d}{\lambda}}$$

oder auch

$$\sin 2\,\pi \frac{D}{\lambda} = \frac{\alpha'}{A} \sin 2\,\pi \frac{d}{\lambda}.$$

Die Gleichung für A zeigt, dass die resultirende Amplitude die Diagonale eines Parallelogrammes ist, welches wir aus den einzelnen Amplituden α und α' mit dem Winkel $2\pi\frac{d}{\lambda}$ (Fig. 92) construiren, und zwar jene Diagonale, welche den von α und α' eingeschlossenen Winkel $2\pi\frac{d}{\lambda}$ theilt. Denn es ist

Fig. 92.



$$ab^2 = \alpha^2 + \alpha'^2 - 2\alpha\alpha' \cos c$$

und da der Winkel c Nebenwinkel von $a = 2\pi\frac{d}{\lambda}$ ist, so folgt

$$ab^2 = \alpha^2 + \alpha'^2 + 2\alpha\alpha' \cos 2\pi\frac{d}{\lambda} = A^2.$$

Ferner ist in diesem Parallelogramm der Winkel, den ab und α einschliessen, der die Phase bestimmende Winkel $2\pi\frac{D}{\lambda}$, denn es ist

$$ab : \alpha' = \sin c : \sin bac$$

$$\sin bac = \frac{\alpha'}{ab} \cdot \sin c = \frac{\alpha'}{A} \sin 2\pi\frac{d}{\lambda} = \sin 2\pi\frac{D}{\lambda}\cdot$$

Die resultirende Amplitude sowohl als die Phase der resultirenden Bewegung sind hiernach abhängig von den Amplituden und der Phasendifferenz der gegebenen Bewegungen. Ist die Phasendifferenz d eine beliebige Zahl von ganzen Wellenlängen, so ist

$$\cos 2\pi\frac{d}{\lambda} = \cos 2n\pi = 1$$

$$A^2 = \alpha^2 + \alpha'^2 + 2\alpha\alpha'; \qquad A = \alpha + \alpha'$$

$$\sin 2\pi\frac{D}{\lambda} = \sin 2n\pi = 0; \qquad D = 0.$$

Ist also die Phasendifferenz der gegebenen Bewegungen Null oder ein beliebiges Vielfaches einer Wellenlänge, so ist die resultirende Amplitude gleich der Summe der Theilamplituden, und die Phase der resultirenden Bewegung ist dieselbe wie diejenige der Theilbewegungen. Man erkennt die Nothwendigkeit dieser Folgerung auch leicht aus der Natur der schwingenden Bewegung, denn in dem Falle wirken beide Bewegungen immer in derselben Weise zusammen, da die Punkte, deren Entfernung von einander eine Wellenlänge ist, immer in der gleichen Phase der Bewegung sich befinden.

Ist $d = (2m + 1)\frac{\lambda}{2}$, so ist

$$\cos 2\pi\frac{d}{\lambda} = \cos(2n + 1)\pi = -1$$

$$\sin 2\pi\frac{d}{\lambda} = 0,$$

somit

$$A = \alpha - \alpha' \qquad D = 0$$

die resultirende Amplitude ist die Differenz der Theilamplituden, die Phase ist, wenn $\alpha > \alpha'$, jene der ersten, wenn $\alpha < \alpha'$ jene der zweiten Bewegung. Denn die Gleichung der resultirenden Bewegung wird

$$Y = (\alpha - \alpha') \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right),$$

die Werthe von Y bekommen also entgegengesetztes Vorzeichen, je nachdem $\alpha > \alpha'$ oder $\alpha < \alpha'$. Zu gleichen Zeiten t vorhandene entgegengesetzte Werthe von Y bedeuten aber entgegengesetzte Phasen oder eine Phasendifferenz von einer halben Wellenlänge.

Sind α und α' einander gleich, so wird $A = 0$, die Bewegung hebt sich also auf der ganzen Strecke, auf welcher beide Bewegungen zusammenwirken, auf. In der That erfahren dann alle Punkte zu gleichen Zeiten t stets entgegengesetzte an Grösse gleiche Impulse.

Ist $d = (2n + 1)\frac{\lambda}{4}$, so ist

$$\cos 2\pi \frac{d}{\lambda} = \cos (2n + 1) \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\sin 2\pi \frac{d}{\lambda} = \sin (2n + 1) \frac{\pi}{2} = 1$$

$$A^2 = \alpha^2 + \alpha'^2; \qquad \text{tang}\, 2\pi \frac{D}{\lambda} = \frac{\alpha'}{\alpha}$$

Das Quadrat der resultirenden Amplitude ist gleich der Summe der Quadrate der einzelnen Amplituden und die Tangente des Winkels, welche die Phase der resultirenden Bewegung bestimmt, ist gleich dem Quotienten der beiden einzelnen Amplituden, wobei im Zähler jene steht, welche gegen die erste Bewegung von deren Ausgangspunkt die Abstände x gerechnet sind, um eine ungerade Anzahl von ein viertel Wellenlängen verschoben ist.

An diesen Beispielen ist die Abhängigkeit der resultirenden Amplitude und Phase von den sie bestimmenden Umständen hinreichend deutlich zu erkennen.

Es möge nur noch bemerkt werden, dass der letzte Satz über die resultirende Amplitude und Phase, wenn die einzelnen Bewegungen die Phasendifferenz von $\frac{1}{4}\lambda$ besitzen, uns unmittelbar in den Stand setzt, die resultirende Amplitude und Phase einer beliebigen Anzahl von schwingenden Bewegungen zu bestimmen, wenn wir die einzelnen Amplituden und Phasen kennen.

Haben wir nämlich eine Anzahl Bewegungen, deren erste ist

$$y_1 = \alpha_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right),$$

deren andere die Amplituden $\alpha_2, \alpha_3 \ldots$ haben und deren Anfangspunkte von dem der ersten um $d_2, d_3 \ldots$ entfernt sind, so sind deren Gleichungen

$$y_2 = \alpha_2 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x + d_2}{\lambda}\right)$$

$$y_3 = \alpha_3 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x + d_3}{\lambda}\right)$$

$$y_n = \alpha_n \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x + d_n}{\lambda}\right).$$

Die resultirende Bewegung ist dann

$$Y = y_1 + y_2 + y_3 + \ldots y_n =$$

$$\left\{\alpha_1 + \alpha_2 \cos 2\pi \frac{d_2}{\lambda} + \alpha_3 \cos 2\pi \frac{d_3}{\lambda} + \ldots \alpha_n \cos 2\pi \frac{d_n}{\lambda}\right\} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\pi}{\lambda}\right) -$$

$$\left\{\alpha_2 \sin 2\pi \frac{d_2}{\lambda} + \alpha_3 \sin 2\pi \frac{d_3}{\lambda} + \ldots \alpha_n \sin 2\pi \frac{d_n}{\lambda}\right\} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\pi}{\lambda}\right).$$

Nun ist

$$-\cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) = \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x + \frac{1}{4}\lambda}{\lambda}\right),$$

sodass die abgeleitete Gleichung für Y uns zeigt, dass wir die durch das Zusammenwirken beliebig vieler schwingender Bewegungen entstehende Resultirende als die Resultirende zweier Wellen darstellen können, welche die Phasendifferenz einer viertel Wellenlänge haben, und deren Amplituden sind

$$A = \alpha_1 + \alpha_2 \cos 2\pi \frac{d_2}{\lambda} + \alpha_3 \cos 2\pi \frac{d_3}{\lambda} + \ldots \alpha_n \cos 2\pi \frac{d_n}{\lambda}$$

$$B = \alpha_2 \sin 2\pi \frac{d_2}{\lambda} + \alpha_3 \sin 2\pi \frac{d_3}{\lambda} + \ldots \alpha_n \sin 2\pi \frac{d_n}{\lambda}.$$

Für die resultirende Amplitude und Phase erhalten wir dann

$$R = \sqrt{A^2 + B^2} \qquad \operatorname{tang} 2\pi \frac{D}{\lambda} = \frac{B}{A}.$$

Wir erhalten also stets eine schwingende Bewegung, welche mit jener der einzelnen gleiche Schwingungsdauer, somit auch gleiche Wellenlänge hat, deren Amplitude R und Phase D wir berechnen können, wenn wir die Werthe von $\alpha_1, \alpha_2 \ldots$ sowie von $d_2, d_3, \ldots$ kennen. Die resultirende Bewegung ist dann gegeben durch die Gleichung

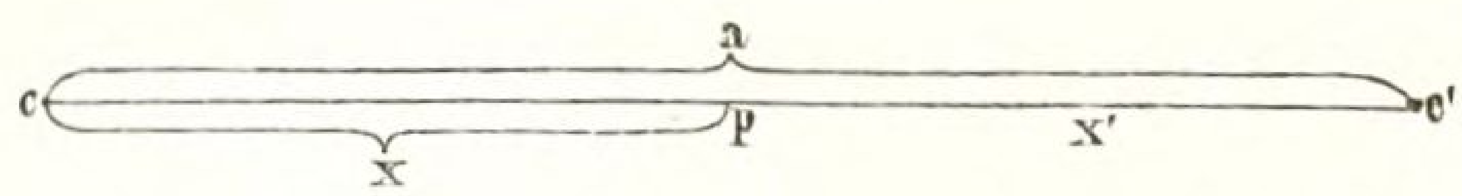
$$Y = R \,.\, \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x + D}{\lambda}\right).$$

§. 78.

Interferenz von Wellen, die sich in entgegengesetzter Richtung fortpflanzen; Bildung stehender Wellen. Wenn in einer unbegrenzten Punktreihe an einer Stelle eine schwingende Bewegung erregt wird, so pflanzt dieselbe sich nach beiden Seiten fort. Wenn deshalb an zwei Stellen der Ausgangspunkt einer solchen Bewegung vorhanden ist, so pflanzen sich zwischen diesen beiden Stellen die Bewegungen nach entgegengesetzten Richtungen fort. Die im vorigen §. entwickelten Interferenzgesetze geben uns auch für diesen Fall die resultirende Bewegung als Summe der in jedem Augenblicke vorhandenen Theilbewegung. Es ergibt sich daraus in gewissen Fällen eine Bewegung dieser Strecke der Punktreihe von besonderer Art, deren Beschaffenheit wir hier ableiten wollen, da wir sie später sehr oft zu betrachten haben. Wir nehmen deshalb hier nur den einfachsten Fall.

Es seien c und c' zwei um a von einander entfernte Punkte, in denen gleichzeitig eine schwingende Bewegung derselben Schwingungsdauer T, somit auch derselben Wellenlänge λ und der gleichen Amplitude α beginne. Zur Zeit t wird der Abstand eines von c um x entfernten Punktes p von der Gleichgewichtslage gegeben durch

Fig. 93.



$$y_1 = \alpha \,.\, \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right).$$

In Folge der von c' nach p kommenden Bewegung wird der Abstand des Punktes von der Gleichgewichtslage, y_2, gegeben sein durch

$$y_2 = \alpha \,.\, \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x'}{\lambda}\right),$$

wenn wir den Abstand $pc' = x'$ setzen. Für alle Punkte zwischen c und c' ist nun

$$x + x' = a, \qquad x' = a - x,$$

somit

$$y_2 = \alpha \,.\, \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{a - x}{\lambda}\right).$$

Der resultirende Abstand ist somit

$$y = y_1 + y_2 = \alpha \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \alpha \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{a - x}{\lambda}\right)$$

Nach der bekannten trigonometrischen Formel

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \tfrac{1}{2}(p + q) \cos \tfrac{1}{2}(p - q)$$

können wir schreiben

$$y = 2\alpha \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{a}{2\lambda}\right) \cdot \cos \pi \frac{a - 2x}{\lambda}$$

oder auch, da das Vorzeichen des Cosinus nicht mit demjenigen des Bogens sich ändert,

$$y = 2 \cos \pi \frac{2x - a}{\lambda} \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{a}{2\lambda}\right).$$

In diesem Ausdrucke für y ist x nicht mehr in der frühern Weise mit t verbunden; es hängt deshalb die Phase der Bewegung nicht mehr, wie bei der nach einer Richtung fortschreitenden Bewegung von der Lage der Punkte in der Reihe ab. Die für die verschiedenen Punkte zu verschiedenen Zeiten vorhandenen Bewegungszustände hängen von dem die Zeit enthaltenden Factor in der Gleichung für y ab, dieser ist aber für alle Werthe von x der gleiche. Die neben einander liegenden Punkte der Reihe nehmen also nicht nach und nach dieselbe Phase an, sondern ihre Phase ist in derselben Zeit dieselbe, sie passiren zu derselben Zeit die Gleichgewichtslage und befinden sich an dem Ende ihrer Bahn.

Der Coefficient

$$2\alpha \,.\, \cos \pi \frac{2x - a}{\lambda}$$

bestimmt die Amplitude der Bewegung; er zeigt, dass diese für die verschiedenen Punkte sehr verschieden sein kann. Für gewisse Werthe von x ist dieser Coefficient gleich Null, diese Punkte verlassen also ihre Gleichgewichtslage niemals. An der einen Seite der ruhenden Punkte ist der Werth dieses Factors positiv, an der andern negativ; die ruhenden Punkte bilden also die Grenze zwischen solchen Strecken der Punktreihe, in deren einer die Punkte alle an der einen, in deren anderer die Punkte an der andern Seite der Gleichgewichtslage sich befinden. Die Punkte jeder zwischen zwei ruhenden Punkten liegenden Strecke sind also immer in derselben Phase, die Punkte zweier benachbarter Strecken in entgegengesetzter Phase. Die Punkte einer Strecke vollführen somit gleichzeitig und in gleicher Phase ihre Schwingungen mit um so kleinerer Amplitude, je näher sie den ruhenden Punkten liegen. Man nennt deshalb die schwingende Bewegung eine stehende und die zwischen zwei ruhenden Punkten enthaltene Strecke eine stehende Welle.

Um den Zustand der Reihe näher zu untersuchen, nehmen wir an es sei

$$a = n\lambda.$$

Es wird dann

$$y = 2\,\alpha \cos \pi \left(\frac{2\,x}{\lambda} - n\right) \sin 2\,\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{n}{2}\right)$$

oder

$$y = 2\,\alpha \cos \pi \,\frac{2x}{\lambda} \sin 2\,\pi \,\frac{t}{T}.$$

Für die Zeiten $t = n\,T$ und ebenso für die Zeiten $t = (2\,n + 1)\,\frac{T}{2}$ wird dieser Ausdruck für alle Punkte gleich Null, es passiren also alle Punkte in diesem Momente die Gleichgewichtslage. Die Geschwindigkeit der Bewegung ist

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2\pi}{T}\, 2\,\alpha \cos \pi \,\frac{2x}{\lambda} \cos 2\,\pi\,\frac{t}{T},$$

somit für den Moment $t = n\,T$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2\pi}{T}\, 2\,\alpha \cos \pi \,\frac{2x}{\lambda};$$

dieselbe ist für alle Punkte, die zwischen $x = 0$ und $x = \frac{\lambda}{4}$ liegen, positiv, zwischen $x = \frac{\lambda}{4}$ und $x = 3\,\frac{\lambda}{4}$ negativ, zwischen $x = 3\,\frac{\lambda}{4}$ und $x = 5\,\frac{\lambda}{4}$ positiv u. s. f. Auf der ersten Strecke bewegen sich die Punkte nach der einen, auf der zweiten nach der andern Seite, für die Punkte $x = \frac{\lambda}{4}$ $3\,\frac{\lambda}{4}, 5\,\frac{\lambda}{4} \cdots$, die um eine halbe Wellenlänge von einander entfernt sind, ist die Geschwindigkeit gleich 0, sie verlassen die Gleichgewichtslage nicht. Es sind dies somit die stets ruhenden Punkte, deren Abstand von einander demnach eine halbe Wellenlänge ist.

Wächst die Zeit t, so entfernen sich alle Punkte von der Gleichgewichtslage und sie haben zur Zeit $t = (4\,n + 1)\,\frac{T}{4}$ den grössten Abstand von der Gleichgewichtslage erreicht. Für diese Zeit ist

$$y = 2\,\alpha \cos \pi \frac{2x}{\lambda},$$

somit für

$$x = 0, \quad \frac{\lambda}{4}, \quad \frac{\lambda}{2}, \quad 3\frac{\lambda}{4}, \quad 4\frac{\lambda}{4}, \quad 5\frac{\lambda}{4} \ldots$$

$$y = 2\,\alpha, \quad 0, -2\alpha, \quad 0, +2\,\alpha, \quad 0 \ldots$$

Also auch hier sehen wir wieder, dass die Länge einer stehenden Welle eine halbe Wellenlänge ist.

Wächst die Zeit, so kehren alle Punkte zur Gleichgewichtslage zurück, erreichen sie zur Zeit $(2\,n + 1)\,\frac{T}{2}$, überschreiten sie nach der andern Seite hin und erreichen dort ihre äusserste Lage zur Zeit $t = (4\,n + 3)\,\frac{T}{4}$, denn dann ist

$$\sin 2\,\pi \frac{t}{T} = \sin\,(4\,n + 3)\,\frac{\pi}{2} = -1.$$

Die Abstände y werden somit für

$$x = 0, \quad \frac{\lambda}{4}, \quad \frac{\lambda}{2}, \quad 3\frac{\lambda}{4}, \quad \lambda, \quad 5\frac{\lambda}{4} \ldots$$

$$y = -2\,\alpha, \quad 0, \; 2\,\alpha, \quad 0, -2\,\alpha, \quad 0 \ldots$$

Durch die Interferenz zweier nach entgegengesetzter Richtung sich fortpflanzender Wellen theilt sich somit die Punktreihe in stehende Wellen von der Länge einer halben Wellenlänge, dieselben sind getrennt durch ruhende Punkte, die sogenannten Knotenpunkte oder Schwingungsknoten. Die Schwingungsdauer einer solchen stehenden Welle ist gleich derjenigen der fortschreitenden Wellen, aus denen sie entstanden ist.

§. 79.

Zusammensetzung von Schwingungen verschiedener Richtung. Ebenso wie sich in einer Punktreihe zwei gleichgerichtete schwingende Bewegungen fortpflanzen und zu einer resultirenden Bewegung zusammensetzen können, ebenso können sich auch nach verschiedenen Richtungen hin stattfindende Schwingungen fortpflanzen und zusammensetzen. Nach den Bemerkungen des §. 77 erhalten wir die resultirende Bewegung, indem wir die aus den einzelnen Bewegungen sich ergebenden Beschleunigungen, Geschwindigkeiten und Verschiebungen nach dem Satze vom Kräfteparallelogramm zusammensetzen.

Wir wollen hier nur den Fall betrachten, dass die beiden Bewegungen in zu einander geneigten Richtungen stattfinden und dass beide transversal, also senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung seien. Beide Bewegungen pflanzen sich dann mit derselben Geschwindigkeit in der Reihe fort. Wir nehmen ferner zunächst an, beide Bewegungen haben dieselbe Schwingungsdauer, somit auch dieselbe Wellenlänge.

Es sei nun zur Zeit t die Verschiebung eines um x von dem Ausgangspunkte der einen Bewegung entfernten Punktes aus der Gleichgewichtslage nach der Richtung, nach welcher er verschoben sein würde, wenn nur diese Bewegung in der Punktreihe vorhanden wäre,

$$y = \alpha\,.\,\sin 2\,\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \cdots (1)$$

Der Anfangspunkt der zweiten Bewegung, welche mit der ersten irgend einen Winkel bildet, sei von dem der ersten um d entfernt, so dass der Abstand des betrachteten Punktes von demselben $x - d$ sei. Würde nur diese Bewegung allein vorhanden sein, so wäre der Abstand des Punktes von der Gleichgewichtslage

$$z = \beta \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x-d}{\lambda}\right) \cdots (2).$$

Wir könnten hieraus den resultirenden Abstand des betrachteten Punktes von der Gleichgewichtslage nach dem Satze berechnen, dass derselbe die Diagonale des aus y und z construirten Parallelogrammes sei. Bequemer gelangen wir aber zur Darstellung der resultirenden Bewegung in anderer Weise. Da es sich nämlich für uns nur darum handelt, die Lage des Beweglichen in jedem Momente angeben zu können, so genügt es, wenn wir die Verschiebung nach z für jedes y, welches uns durch die erste Gleichung angegeben ist, bestimmen können, wenn wir also das für jeden Moment vorhandene z durch den gleichzeitigen Werth von y ausdrücken können. Diese Gleichung zwischen y und z liefert uns dann die Bahn des Beweglichen in der Curve, welche durch die zwischen y und z sich ergebende Gleichung analytisch dargestellt wird. Wir gelangen dazu in folgender Weise. Gleichung 2 lässt sich schreiben

$$\frac{z}{\beta} = \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \cos 2\pi \frac{d}{\lambda} + \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \sin 2\pi \frac{d}{\lambda};$$

da nun nach Gleichung 1

$$\frac{y}{\alpha} = \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right),$$

so ist auch

$$\frac{z}{\beta} = \frac{y}{\alpha} \cos 2\pi \frac{d}{\lambda} + \cos 2 \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \sin 2\pi \frac{d}{\lambda}.$$

Ziehen wir auf beiden Seiten $\frac{y}{\alpha} \cos 2\pi \frac{d}{\lambda}$ ab und quadriren, so wird

$$\frac{z^2}{\beta^2} + \frac{y^2}{\alpha^2} \cos^2 2\pi \frac{d}{\lambda} - 2 \frac{z}{\beta} \frac{y}{\alpha} \cos 2\pi \frac{d}{\lambda} = \cos^2 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \sin^2 2\pi \frac{d}{\lambda}.$$

Die rechte Seite der Gleichung ist

$$\left(1 - \sin^2 2\pi \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \sin^2 2\pi \frac{d}{\lambda} = \sin^2 2\pi \frac{d}{\lambda} - \frac{y^2}{\alpha^2} \sin^2 2\pi \frac{d}{\lambda},$$

und damit wird, wenn wir das y^2 enthaltende Glied auf die andere Seite bringen,

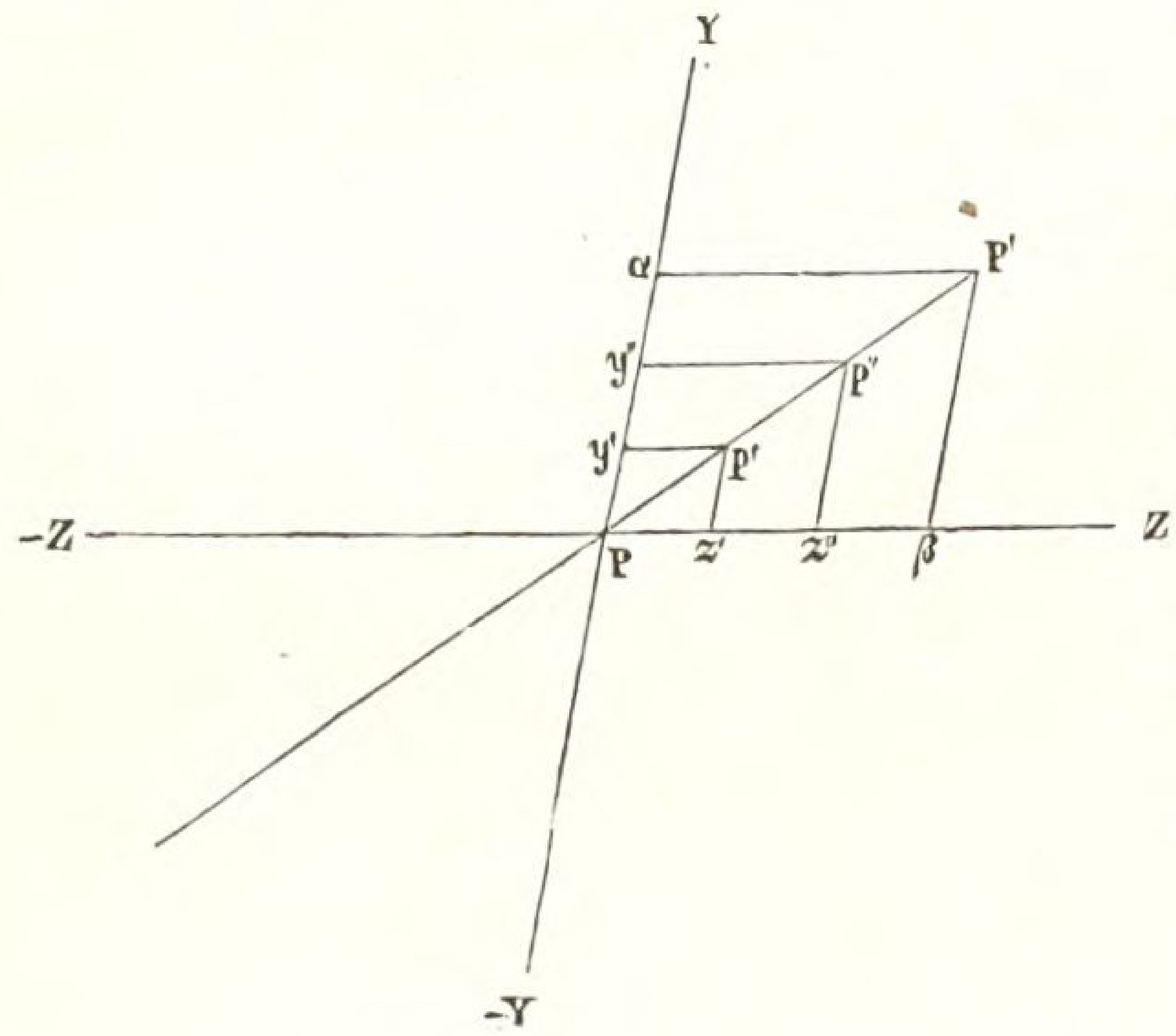
$$\frac{z^2}{\beta^2} + \frac{y^2}{\alpha^2} - 2 \frac{z}{\beta} \frac{y}{\alpha} \cos 2\pi \frac{d}{\lambda} = \sin^2 2\pi \frac{d}{\lambda} \cdots (3)$$

Diese Gleichung liefert uns den Abstand des Punktes z von der Gleichgewichtslage parallel der zweiten Bewegungsrichtung für jedes y, welches wir nach der Gleichung für y bestimmen. In der analytischen Geometrie wird nun bewiesen, dass alle Punkte, deren Abstände parallel zweien festen Richtungen von einem bestimmten Punkte durch eine Gleichung (3) gegeben sind, auf einer Elipse liegen, deren Mittelpunkt eben jener feste

Punkt ist, von dem die Abstände y und z gerechnet sind. Bei zwei gegen einander geneigten Schwingungen ist somit die Bahn der Punkte im Allgemeinen eine Ellipse, deren Mittelpunkt die Gleichgewichtslage des betrachteten Punktes ist.

Die Form der Ellipse hängt nach Gleichung (3) wesentlich ab von dem Werthe von d, also der Phasendifferenz der beiden Bewegungen, sie kann je nachdem in eine gerade Linie übergehen. Um die resultirende Bewegung zu übersehen, wollen wir einige specielle Fälle betrachten. Wir nehmen an, die beiden Bewegungen bilden einen Winkel $YPZ = \varphi$ Fig. 94.

Fig. 94.



Die Bewegung y sei parallel PY, die Bewegung z sei parallel PZ. Positive Werthe von y seien nach oben, von z nach rechts genommen, das heisst also, bewegen sich die Punkte ohne Phasendifferenz, so bewegen sie sich gleichzeitig nach rechts und oben.

Ist nun die Phasendifferenz eine beliebige Anzahl von ganzen Wellenlängen, also $d = n\lambda$, so wird

$$\cos 2\pi \frac{d}{\lambda} = \cos 2\pi n = 1;\ \sin 2\pi n = 0$$

$$\frac{z^2}{\beta^2} + \frac{y^2}{\alpha^2} - 2\frac{z}{\beta}\frac{y}{\alpha} = 0$$

$$\frac{z}{\beta} = \frac{y}{\alpha}.$$

In dem Falle stehen also die beiden Abstände z und y stets in dem constanten Verhältnisse der Amplituden. Bestimmen wir demnach die den Zeiten t', t'', $\frac{1}{4}T$ entsprechenden Abstände y', y'', α und ziehen von den Punkten y', y'', α die Linien $y'p'$, $y''p''$, $\alpha P'$ so, dass

$$y'p' : y'P = y''p'' : y''P = \alpha P' : \alpha P = \alpha : \beta,$$

so sind die Längen $y'p'$, $y''p''$, .. die zu diesen Werthen von y zugehörigen Werthe von z, und die Punkte $P, p'p'', P$ sind Punkte der Bahn des Punktes. Da nun Punkte, deren Lage durch eine solche Proportion bestimmt ist, auf einer geraden Linie liegen, so folgt, dass die Bahn des Punktes in diesem Falle eine gerade Linie ist, welche durch die Gleichgewichtslage des Punktes geht und deren Richtung zwischen die positiven und negativen Seiten der Theilbewegung fällt. Der Winkel ψ, den die Bewegungsrichtung mit der positiven Seite der y bildet, ist gegeben durch

$$\sin\psi : \sin\varphi = \alpha P' : PP'$$

$$\sin\psi = \sin\varphi \frac{\beta}{R},$$

wenn wir die resultirende Amplitude PP' mit R bezeichnen. Dieselbe ist

$$R = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + 2\,\alpha\beta\cos\varphi}.$$

Als speciellen Fall schliessen diese Ausdrücke auch die resultirende Be-

wegung ein, wenn $\varphi = 0$, die Bewegungen also gleichgerichtet sind, es wird dann

$$\psi = 0, \quad R = \alpha + \beta,$$

wie wir es schon früher fanden.

Ebenso wird die Bewegung eine geradlinige, wenn die Phasendifferenz ein ungerades Vielfaches einer halben Wellenlänge wird. Es wird dann

$$\cos 2\pi \frac{d}{\lambda} = \cos (2n + 1)\pi = -1 \quad \sin 2\pi \frac{d}{\lambda} = 0,$$

somit

$$\frac{z^2}{\beta^2} + \frac{y^2}{\alpha^2} + 2\frac{y}{\alpha}\frac{z}{\beta} = 0$$

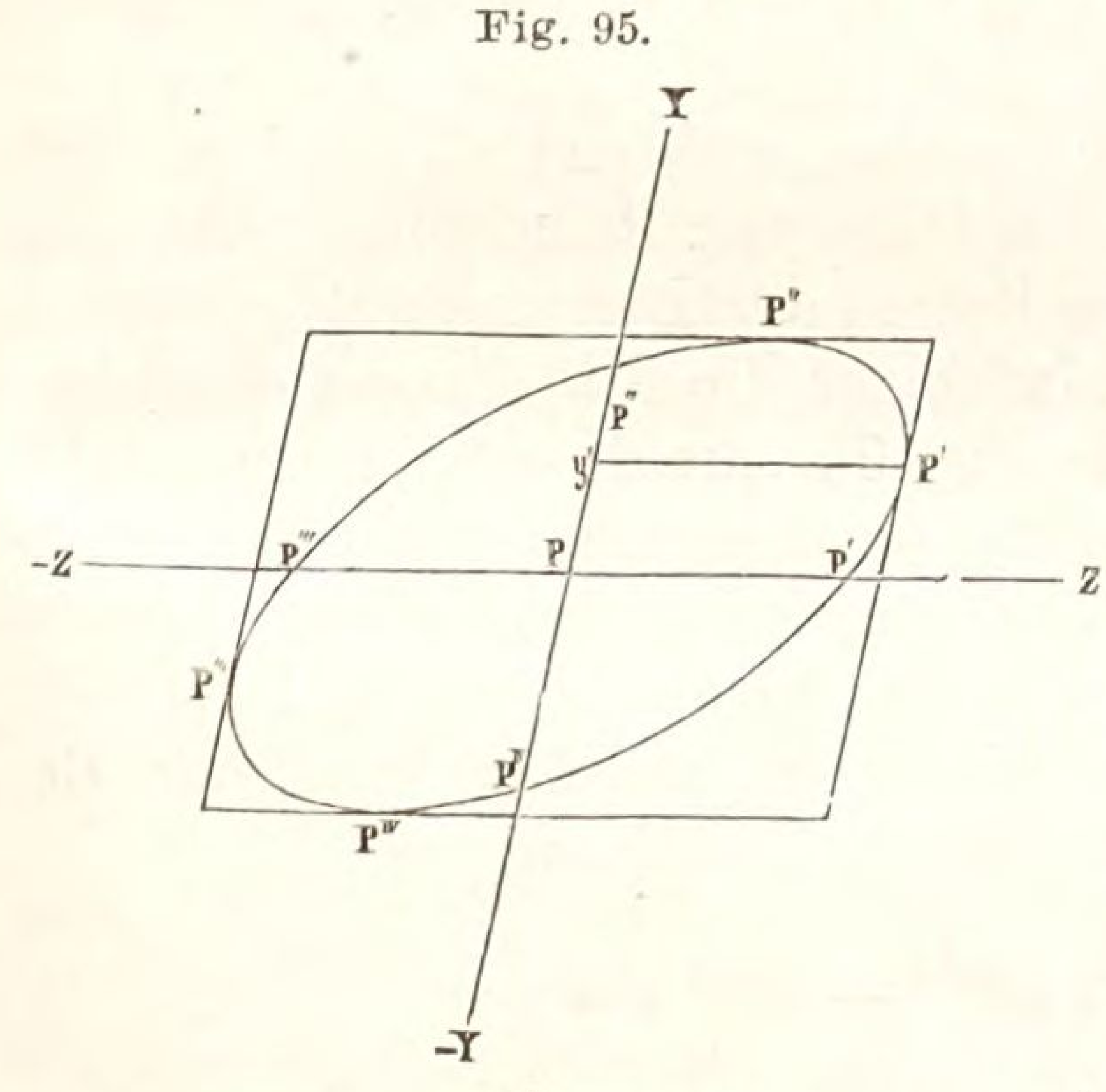
$$\frac{z}{\beta} = -\frac{y}{\alpha}.$$

Positiven Werthen von z entsprechen jetzt negative Werthe von y, die Bewegung geht also gleichzeitig nach rechts und unten, oder die resultirende Bewegung liegt in den beiden andern Quadranten $ZP - Y$ und $- ZPY$. Im Uebrigen ist die Bewegung ganz die soeben abgeleitete.

In allen andern Fällen ist die Bahn eine elliptische; wenn der Punkt in dem einen Sinne die Gleichgewichtslage passirt, ist er im Sinne der andern Bewegung von der Gleichgewichtslage entfernt; ebendeshalb geht die Bewegung nicht durch die Gleichgewichtslage, sondern um dieselbe. Fig. 95 stellt die Bahn dar, wenn $d = {}^3/_{16}\,\lambda$ ist. Ist $y = 0$, so wird

$$Z = \beta \sin 2\pi \frac{d}{\lambda} = \beta \,.\, \sin 67,^0 5 = 0,923\,\beta$$

Fig. 95.



In der Richtung der z befindet sich somit der Punkt nahe an dem Ende der Bahn in p', wenn er in der Richtung der y seine Bewegung nach oben beginnt. Er bewegt sich dann zunächst noch gleichzeitig nach rechts und nach oben, also auf dem Wege $p'\,P'$, bis er nach der Richtung der z den grössten Abstand β erreicht hat. Der diesem entsprechende Werth von y ergibt sich aus unserer allgemeinen Gleichung, wenn wir z gleich β setzen,

$$1 + \frac{y^2}{\alpha^2} - 2\frac{y}{\alpha}\cos 2\pi\frac{d}{\lambda} = \sin^2 2\pi \frac{d}{\lambda}$$

$$y = \alpha \cos 2\pi \frac{d}{\lambda} = \alpha \,.\cos 67^0,5 = 0,382\,\alpha.$$

Bei wachsendem y nimmt z ab, die Bahn des Punktes wird $P'\,P''$, er erreicht parallel y den grössten Abstand α, wenn

$$z = \beta \cos 2\pi \frac{d}{\lambda} = \beta \,.\, \cos 67^0 5 = 0,382\,\beta.$$

Dann nehmen z und y gleichzeitig ab, für $z = 0$ wird $y = 0{,}923\,\alpha$; während dann y bis Null abnimmt, bewegt sich der Punkt nach der negativen Seite der z, bis $z = -0{,}923\,\beta$, so dass $P'' p'' p'''$ die Bahn des Punktes wird. Während also nach y eine halbe Schwingung vollführt wurde, ist die obere Hälfte der Ellipse beschrieben. Ganz ebenso wird die untere $p''' P''' P^{IV} p^{IV} p'$ zurückgelegt, wenn der Punkt nach y die zweite Hälfte seiner Schwingung vollführt, wie wohl nicht im Einzelnen weiter abzuleiten erforderlich ist.

Wird die Phasendifferenz grösser, so richtet sich die Ellipse mehr auf; ist sie ein viertel Wellenlänge, so werden die Schwingungsrichtungen Y und Z conjugirte Durchmesser, wenn sie zu einander senkrecht stehen, Axen der Ellipse. Sind in dem Falle die Amplituden der beiden Schwingungen α und β einander gleich, so wird die Bahn ein Kreis. Denn setzen wir $d = \frac{\lambda}{4}$, so wird

$$\cos 2\pi \frac{d}{\lambda} = \cos \frac{\pi}{2} = 0. \quad \sin 2\pi \frac{d}{\lambda} = 1$$

$$\frac{z^2}{\beta^2} + \frac{y^2}{\alpha^2} = 1$$

oder für $\alpha = \beta$

$$z^2 + y^2 = \alpha^2.$$

Die Bahn ist ein Kreis, dessen Mittelpunkt die Gleichgewichtslage des Punktes, dessen Radius die Amplitude α ist.

Bei Phasendifferenzen, die grösser als $\frac{1}{4}\lambda$, aber kleiner als $\frac{1}{2}\lambda$ sind, wird die Bahn eine Ellipse, deren grosse Axe in den beiden andern Quadranten liegt, welche sich für $d = \frac{1}{2}\lambda$ in die in diesen Quadranten liegende gerade Linie zusammenzieht.

Wenn d grösser als $\frac{1}{2}\lambda$ wird, so treten, während d bis λ wächst, genau dieselben Ellipsen auf, nur in umgekehrter Reihenfolge, die sich zeigen, wenn d von 0 bis $\frac{1}{2}\lambda$ wächst. In Betreff der Bewegung des Punktes ist indess ein wesentlicher Unterschied, indem er die Ellipsen im entgegengesetzten Sinne durchläuft. Die Ellipse Fig. 95, die $d = \frac{3}{16}\lambda$ entspricht, wurde von dem Punkte in einer Richtung durchlaufen, welche der Richtung der Bewegung des Uhrzeigers entgegengesetzt ist. Ganz dieselbe Ellipse erhalten wir wieder, wenn die Phasendifferenz $d = \frac{13}{16}\lambda$ ist, der Punkt durchläuft dieselbe aber in der Richtung, welcher jener der Bewegung des Uhrzeigers gleich ist. In unserer Gleichung

$$\frac{y^2}{\alpha^2} + \frac{z^2}{\beta^2} - 2\frac{y}{\alpha}\frac{z}{\beta}\cos 2\pi\frac{d}{\lambda} = \sin^2 2\pi\frac{d}{\lambda}$$

oder wenn wir $y = 0$ setzen,

$$z = \beta \sin 2\pi \frac{d}{\lambda}$$

wird dann

$$z = \beta \,.\, \sin \tfrac{13}{16} \,.\, 2\pi = \beta \sin 292^0{,}5 = -0{,}923\,\beta.$$

Der Punkt befindet sich also an der Stelle p'' Fig. 95 und bewegt sich parallel z gegen die Gleichgewichtslage hin, da er in dem letzten Viertel seiner Schwingung ist. Da er sich nun gleichzeitig parallel Y, da er in dieser Richtung seine Bewegung beginnt, nach der Seite der positiven Y

bewegt, so ist die Bahn des Punktes $p''' p'' P''$ u. s. w.; er bewegt sich also im Sinne der Bewegung des Uhrzeigers.

Im Falle also die componirenden Bewegungen gleiche Periode haben, sind die Bahnen der einzelnen Punkte der Reihe Ellipsen, und zwar für alle Punkte dieselben Ellipsen, deren Lage und Gestalt von der Phasendifferenz der componirenden Bewegungen bestimmt wird. Die Verschiedenheit in den gleichzeitigen Bewegungszuständen der einzelnen Punkte der Reihe besteht dann darin, dass dieselben an verschiedenen Stellen der betreffenden Bahnellipse sich befinden und dort mit verschiedener Geschwindigkeit sich bewegen. Sind, wie wir voraussetzten, beide Bewegungen transversal, so stehen die Bahnellipsen auf der Fortpflanzungsrichtung der Bewegung senkrecht, die Reihenfolge der Bahnebenen bildet einen elliptischen Cylinder, dessen Axe die Punktreihe in der Ruhelage ist. Eine auf den Cylinder gezogene Schraubenlinie, deren Höhe gleich ist der Länge der Welle, nimmt die Punkte in den verschiedenen Phasen auf. Die Bewegung der ganzen Punktreihe entspricht einer Drehung dieser Schraubenlinie um den Cylinder, so dass sie während einer Oscillationsdauer einmal ganz herumgeführt wird.

§. 80.

Zusammensetzung von Schwingungen verschiedener Wellenlänge. In Bezug auf die Ausbreitung von Schwingungen in einer Punktreihe bleibt uns noch zu untersuchen, ob sich auch Bewegungen verschiedener Oscillationsdauer, also verschiedener Wellenlänge in einer Punktreihe ausbreiten können, und welches in dem Falle die resultirende Bewegung ist. Wir setzen zunächst voraus, dass die Schwingungen gleichgerichtete seien.

Dass sich Bewegungen verschiedener Periode in einer Reihe gleichzeitig ausbreiten und zu einer resultirenden Bewegung zusammensetzen können, ergibt sich unmittelbar aus unserer Ableitung der schwingenden Bewegung in einer Punktreihe im §. 76. Wir fanden dort, dass die Beschleunigung eines Punktes in dem Abstande x von dem Ausgangspunkte der Bewegung gegeben ist durch die Gleichung

$$\frac{dv}{dt} = c^2 \frac{d^2 y}{dx^2},$$

worin c die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Bewegung in der Reihe bedeutet.

Es können demnach alle die schwingenden Bewegungen in der Punktreihe gleichzeitig bestehen und sich ausbreiten, welche diesem Beschleunigungsgesetze entsprechen.

Wenn wir voraussetzen, dass in dem Ausgangspunkte der Bewegung, also für $x = 0$, dieselbe gegeben sei durch

$$y = \alpha \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

so erkannten wir, dass obige Gleichung für die fortgepflanzte Bewegung, also für die eines Punktes, der um x vom Anfangspunkt entfernt ist, auf die Gleichung führt

$$y = \alpha \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right).$$

Setzen wir dagegen jetzt voraus, dass der Ausgangspunkt eine ganze Reihe von Impulsen erhalte von verschiedener Periode, so ist seine Bewegung gegeben durch die Summe

$$Y = \alpha_1 \sin 2\pi \frac{t}{T_1} + \alpha_2 \sin 2\pi \frac{t + \tau_2}{T_2} + \cdots \cdot \alpha_n \sin 2\pi \frac{t + \tau_n}{T_n},$$

worin $T_1 T_2 \ldots T_n$ die Schwingungsdauern der verschiedenen Bewegungen und $\tau_2 \ldots \tau_n$ die Zeiten bedeuten, um welche die zweite, dritte, nte Bewegung später oder früher beginnt als die erste. Wir werden im nächsten Kapitel zeigen, wie wir im Stande sind, dem Ausgangspunkte der Bewegung eine solche zusammengesetzte Bewegung zu ertheilen.

Hat der Ausgangspunkt, für den $x = 0$ ist, diese Bewegung, so ergibt sich ganz in derselben Weise wie für die einfache Schwingung, dass die Bewegung eines um x von dem Ausgangspunkte entfernten Punktes die Bewegung haben muss

$$Y = \alpha_1 \sin 2\pi\left(\frac{t}{T_1} - \frac{x}{\lambda_1}\right) + \alpha_2 \sin 2\pi\left(\frac{t + \tau_2}{T_2} - \frac{x}{\lambda_2}\right) + \cdots \alpha_n \sin 2\pi\left(\frac{t + \tau_n}{T_n} - \frac{x}{\lambda_n}\right)$$

wenn wir mit $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n$ die Wellenlängen der einzelnen Bewegungen bezeichnen, also setzen

$$\lambda_1 = cT_1, \quad \lambda_2 = cT_2 \ldots . \lambda_n = c \, . \, T_n.$$

Die Richtigkeit dieser Gleichung für die resultirende Bewegung lässt sich auch sehr leicht noch nachträglich zeigen, indem man aus derselben in der schon mehrfach durchgeführten Weise die Quotienten $\frac{dv}{dt}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ berechnet, man findet, dass aus derselben sich ergibt

$$\frac{dv}{dt} = c^2 \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Schon die Form der Gleichung für die aus dem Zusammenwirken mehrerer Schwingungen verschiedener Periode resultirende Bewegung gibt zu erkennen, dass dieselbe keine einfach periodische ist, bei der das Bewegliche sich ebenso weit und ebenso lange an der einen Seite der Gleichgewichtslage bewegt, als an der andern. Denn es lässt sich kein Werth von T und λ angeben, der für alle Werthe von t und x den Abstand Y durch eine einfache Gleichung von der Form

$$Y = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

mit einem von x und t unabhängigen Werthe der Amplitude A wiedergeben liesse. Die Bewegung ist vielmehr eine zusammengesetzt periodische, in welcher sich der Punkt bald nach der einen, bald nach der andern Seite weiter von der Gleichgewichtslage entfernt, je nach der Grösse der Amplituden und der Periode der einzelnen Bewegungen. Ein weiteres allgemeines einfaches Gesetz dieser Bewegungen als das oben abgeleitete, dass die resultirende Bewegung in jedem Momente die Summe aller Theilbewegungen sei, lässt sich nicht angeben. Das Gesetz der Bewegungen hängt eben in jedem Falle von den einzelnen Bewegungen ab. Um ein Bild derselben zu erhalten, wollen wir den speciellen Fall näher betrachten,

dass zwei Bewegungen sich gleichzeitig in der Reihe fortpflanzen, deren zweite die halbe Schwingungsdauer der ersten hat. Die Gleichung dieser Bewegung ist dann

$$Y = a \,.\, \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + b \,.\, \sin 2\pi \left(\frac{t + \tau}{{}^1/_2\, T} - \frac{x}{{}^1/_2\,\lambda}\right),$$

oder wenn wir $\tau = 0$ setzen, also annehmen, dass beide Bewegungen gleichzeitig begonnen haben,

$$Y = a \,.\, \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + b \,.\, \sin 4\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right),$$

oder auch

$$Y = \left\{a + 2\, b \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right\} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right).$$

Diese Form der Gleichung lässt erkennen, dass wir die resultirende Bewegung als eine solche der grössern Periode bezeichnen können, deren Amplitude aber selbst wieder abhängig ist von der Zeit t und der Lage des Punktes in der Reihe. Die Abhängigkeit der Amplitude von beiden Umständen gibt uns eine Untersuchung der Abhängigkeit von x, denn wir erhalten, wie wir sahen, in der Punktreihe neben einander auf eine Wellenlänge alle Bewegungszustände dargestellt, welche der einzelne Punkt nach einander annimmt.

Wir betrachten deshalb die Lage der Punkte der Reihe auf einer Wellenlänge λ in einem Momente $t = n\,T$. Da $\sin 2\, n\, \pi = 0$, $\cos 2\, n\, \pi = 1$, so wird dann

$$Y = -\left\{a + 2\, b \,.\, \cos 2\pi \frac{x}{\lambda}\right\} \sin 2\pi \frac{x}{\lambda},$$

somit wird für

$$x = \frac{\lambda}{8} \qquad 2\frac{\lambda}{8} \qquad 3\frac{\lambda}{8} \qquad 4\frac{\lambda}{8} \qquad 5\frac{\lambda}{8} \qquad 6\frac{\lambda}{8} \qquad 7\frac{\lambda}{8} \qquad 8\frac{\lambda}{8}$$

$$y = -a\sqrt{{}^1/_2} - b;\ -a \pm 0;\ -a\sqrt{{}^1/_2} + b;\ 0;\ +a\sqrt{{}^1/_2} - b;\ +a \pm 0;\ +a\sqrt{{}^1/_2} + b;\ 0$$

Fig. 96 stellt die hiernach sich ergebende Wellenform dar für die drei Fälle $b = 2\, a$, $b = a$, $b = {}^1/_2\, a$. Die punktirten Linien deuten die einzelnen Wellen, die ausgezogenen die resultirenden Wellen. Die Figuren geben die doppelte Periode in allen drei Fällen deutlich zu erkennen, zeigen aber, dass je nach dem Verhältnisse der Amplituden die Bewegungen noch sehr verschieden sein können. Man kann die Bewegung im Allgemeinen dahin charakterisiren, dass die Bewegung mit der grössten Amplitude der Welle ihre Periode als charakteristisch aufdrückt, und dass dann durch die übrigen Bewegungen innerhalb dieser Periode wieder periodische Verschiedenheiten auftreten. So ist die Bewegung Fig. 96 a als eine solche von der Periode ${}^1/_2\, \lambda$ zu bezeichnen, in der jedesmal auf der Strecke $2\, \frac{\lambda}{2}$ durch die zweite Bewegung der erste Wellenberg und das letzte Wellenthal verstärkt erscheinen. Die Bewegung Fig. 96 c ist dagegen eine solche von der Periode λ, welche von der einfach schwingenden Bewegung sich dadurch unterscheidet, dass der schwingende Punkt sich

sehr schnell nach der einen Seite der Gleichgewichtslage bewegt, dann sehr viel langsamer derselben sich wieder nähert und über dieselbe hinaus zu seiner andern äussersten Lage geht.

Fig. 96 a.

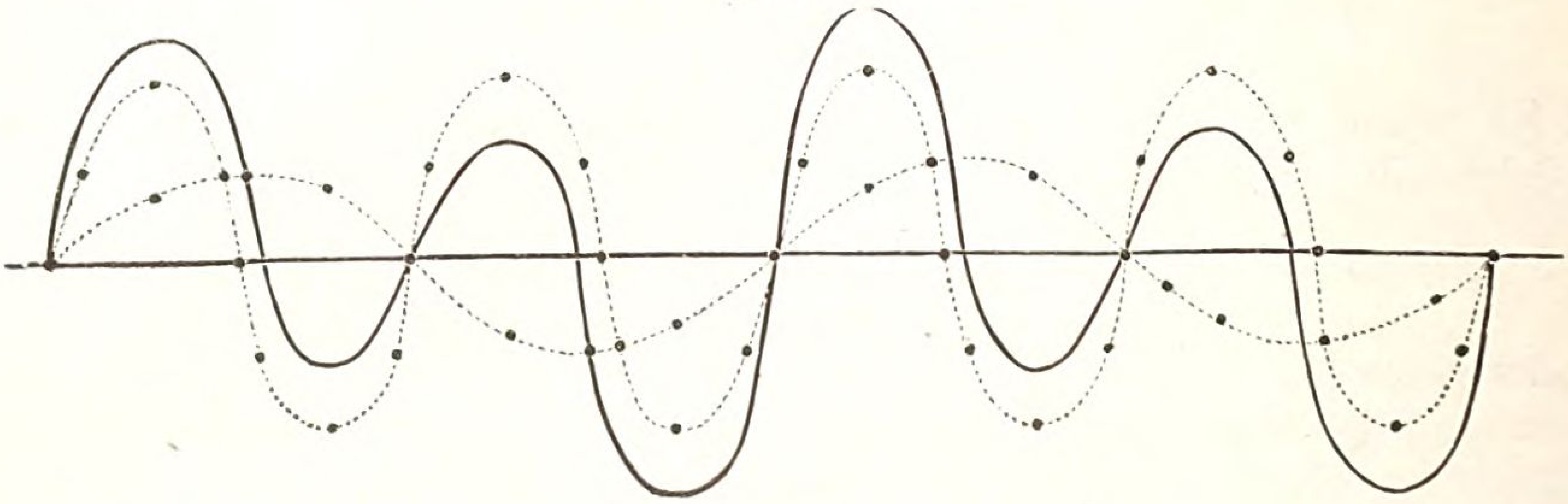


Fig. 96 b.

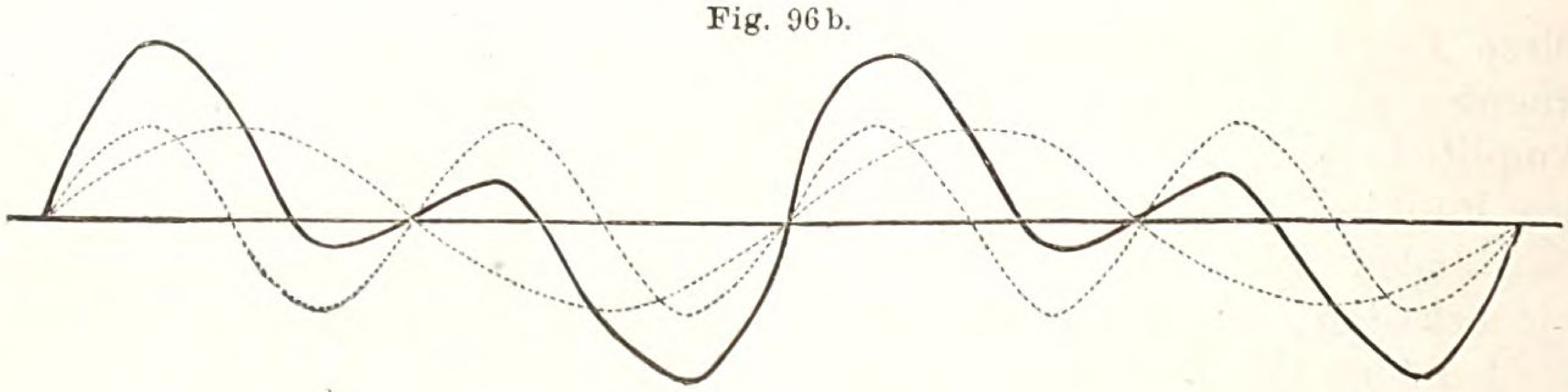
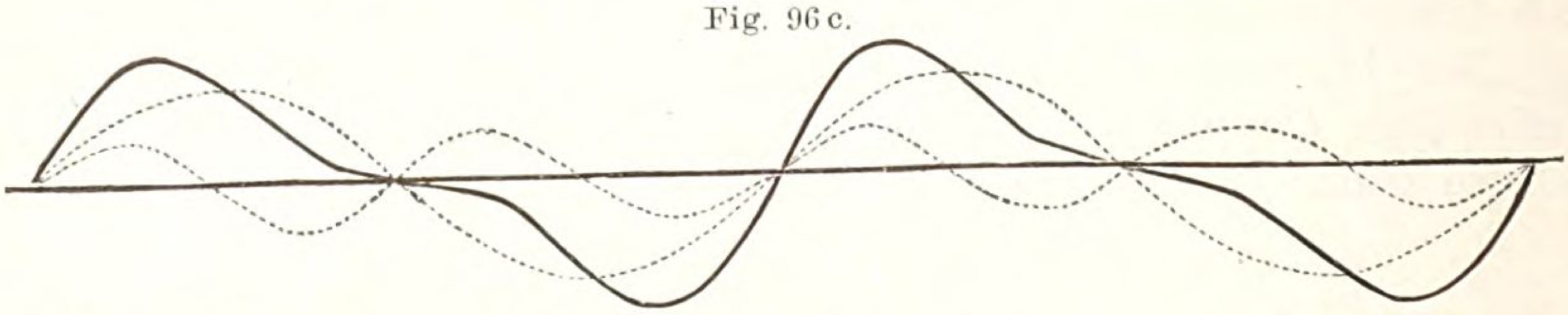


Fig. 96 c.



Wie die resultirende Bewegung sich mit Aenderung der Phase einer der Theilbewegungen ändert, zeigen Fig. 97 a und 97 b. In Fig. 97 a ist vorausgesetzt, dass die Bewegung mit der kleinern Schwingungsdauer

Fig. 97 a.

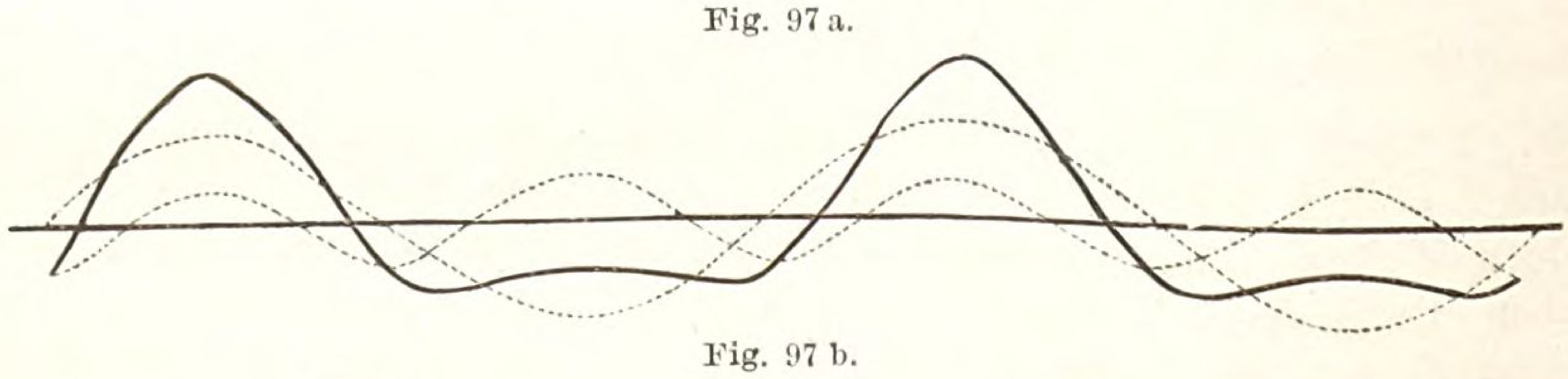
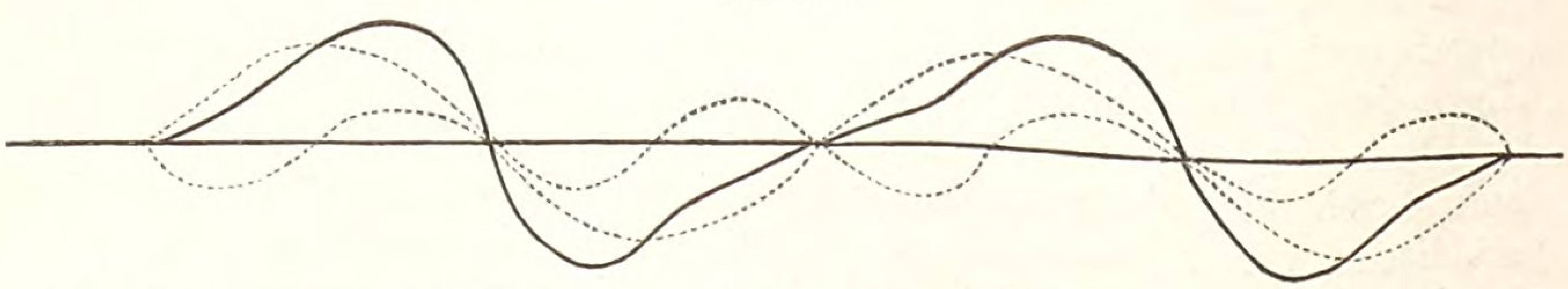


Fig. 97 b.



um ein Viertel ihrer Schwingungsdauer gegen die andere Bewegung zurück sei, in Fig. 97 b, dass sie um eine halbe Schwingungsdauer zurück sei. Die erste Welle entspricht also der Gleichung

$$Y = a \, . \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + b \, . \sin 2\pi \left(\frac{t - \frac{1}{8} T}{\frac{1}{2} T} - \frac{x}{\frac{1}{2} \lambda}\right)$$

$$Y = a \,.\, \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) - b \,.\, \cos 4\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right).$$

Die zweite der Gleichung

$$Y = a \,.\, \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + b \,.\, \sin 2\pi \left(\frac{t - {}^1\!/_4\, T}{{}^1\!/_2\, T} - \frac{x}{{}^1\!/_2\, \lambda}\right)$$

$$Y = a \,.\, \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) - b \,.\, \sin 4\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right).$$

Ferner ist $b = {}^1\!/_2\, a$ gesetzt. Bestimmt man die dem Momente $t = n\,T$ entsprechenden Werthe von Y, so erkennt man sofort, dass obige Curven die Bewegung darstellen.

In ganz gleicher Weise erhält man die resultirenden Bewegungen, wenn die Verhältnisse der beiden Theilbewegungen andere sind, oder wenn mehr als zwei Bewegungen sich gleichzeitig ausbreiten.

Ebenso wie gleichgerichtete Schwingungen verschiedener Periode können sich auch nach verschiedenen Richtungen stattfindende Schwingungen in einer Punktreihe fortpflanzen. Die Bahnen der Punkte werden dann nicht mehr Ellipsen, sondern andere Curven, deren Form von dem Schwingungsverhältniss und der Phasendifferenz der einzelnen Bewegungen abhängig ist. Wir erhalten die Form der Curven auch hier am bequemsten, indem wir die zusammengehörigen Werthe von y und z bestimmen, in derselben Weise, wie wir es bei den Bewegungen gleicher Periode gethan haben. Wir betrachten auch hier nur den einfachsten Fall, dass die Schwingungsdauer der einen Bewegung halb so gross sei wie die der andern, da die Untersuchung anderer Fälle in ganz derselben Weise stattzufinden hat. Wir wollen ferner annehmen, dass die beiden Bewegungen in zu einander senkrechten Richtungen stattfinden, und transversal seien.

Sei die eine Bewegung

$$y = a \,.\, \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right),$$

die zweite

$$z = b \,.\, \sin 2\pi \left(\frac{t + \tau}{{}^1\!/_2\, T} - \frac{x}{{}^1\!/_2\, \lambda}\right) = b \,.\, \sin 4\pi \left(\frac{t + \tau}{T} - \frac{x}{\lambda}\right).$$

Die letztere Gleichung können wir schreiben

$$\frac{z}{b} = \sin 4\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \cos 4\pi \frac{\tau}{T} + \cos 4\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \cdot \sin 4\pi \frac{\tau}{T},$$

oder auch

$$\frac{z}{b} = 2 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \cos 4\pi \frac{\tau}{T} +$$

$$+ \left(\cos^2 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) - \sin^2 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right) \sin 4\pi \frac{\tau}{T}.$$

Nun ist

$$\sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) = \frac{y}{a}; \qquad \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) = \sqrt{1 - \frac{y^2}{a^2}}.$$

Setzen wir diese Ausdrücke in die Gleichung für z, so wird

$$\frac{z}{b} = 2\,\frac{y}{a}\sqrt{1 - \frac{y^2}{a^2}}\cos 4\pi\,\frac{\tau}{T} + \left(1 - 2\,\frac{y^2}{a^2}\right)\sin 4\pi\,\frac{\tau}{T}.$$

Diese Gleichung liefert uns für jedes y das zugehörige z, und man sieht, wie der Werth desselben wesentlich von der durch τ gegebenen Phasendifferenz der Theilbewegungen abhängt.

Nehmen wir an, beide Bewegungen begännen im Ausgangspunkte zu derselben Zeit, also es sei $\tau = 0$, und ferner es sei $a = b$, so wird

$$z = \pm\, 2y\sqrt{1 - \frac{y^2}{a^2}} = \pm\, 2\,\frac{y}{a}\sqrt{a^2 - y^2}.$$

Fig. 98 α zeigt die hierdurch dargestellte Curve. Die Punkte beginnen gleichzeitig die Bewegung nach der Seite der positiven y und z, sie erreichen nach z die äusserste Lage m, wenn $y = a\sqrt{1/2}$; mit weiter wachsendem y wird z wieder kleiner, es wird 0, wenn $y = a$. Nimmt dann y wieder bis zu Null ab, so werden die Werthe für z negativ, $-\,a$, wenn $y = a\sqrt{1/2}$; 0, wenn $y = 0$ wird. Die erste Hälfte der Bahn des Punktes, welche einer Schwingung parallel z entspricht, besteht also aus den beiden congruenten Stücken $o\,m\,b$ und $b\,n\,o$. Ganz ebenso ist die Bahn auf der Seite der negativen y beschaffen.

Fig 98.

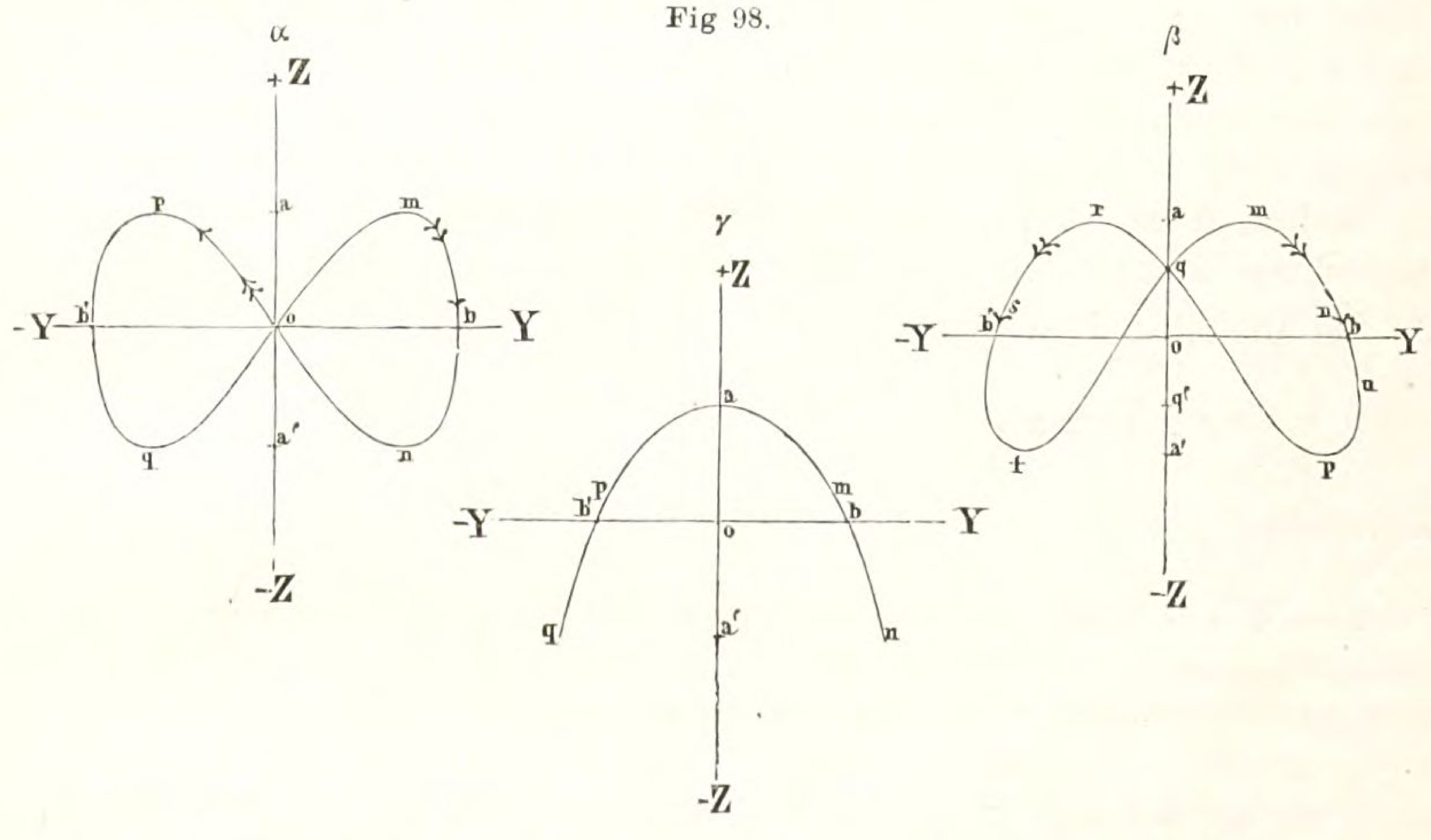


Fig. 98 β zeigt die Bahn, wenn wir $\tau = 1/_{16}\,T$ setzen, also annehmen, die Bewegung nach z sei um $1/_8$ ihrer Schwingungsdauer derjenigen nach y voraus. Die Gleichung für z wird dann

$$z = \sqrt{1/_2}\cdot\frac{2y}{a}\cdot\sqrt{a^2 - y^2} + \sqrt{1/_2}\cdot a\cdot\left(1 - 2\,\frac{y^2}{a^2}\right).$$

Man sieht, dass die Curve von der ersten sich nur dadurch unterscheidet, dass der Schnittpunkt der einzelnen Curvenäste nach der Seite der positiven z verschoben ist und die Curve in ihren beiden Hälften mehr abgeflacht ist. Wächst τ, so rückt der Schnittpunkt weiter herauf, und die

Hälften der Curven werden immer flacher, bis, wenn $\tau = \frac{T}{8}$, somit die Bewegung nach z um ein viertel Schwingung derjenigen nach y voraus ist, die Curve die Gestalt Fig. 98 γ annimmt. Die Gleichung der Curve wird dann

$$z = a\left(1 - 2\,\frac{y^2}{a^2}\right).$$

Die Punkte durchlaufen den Zweig amn, dann zurück nma, dann apq und zurück qpa, kurz sie gehen in der Curve qan einfach hin und her.

Ist τ grösser als $\frac{T}{8}$, so treten, wenn es zwischen $\frac{T}{8}$ und $\frac{T}{4}$ liegt, wieder dieselben Curven wie zwischen 0 und $\frac{T}{8}$ auf, sie werden aber von den Punkten in umgekehrter Richtung durchlaufen. Wächst τ über $\frac{1}{4}T$, so rückt der Schnittpunkt unter 0 bis a' und wieder zurück nach 0, bis τ gleich $\frac{1}{2}T$ ist. Es wird überflüssig sein, dies im Einzelnen abzuleiten.

In Betreff der von den Punkten beschriebenen Curven möge noch bemerkt werden, dass wenn das Schwingungsverhältniss nicht genau 1 : 2 ist, dass dann jeder Punkt nach und nach die eben abgeleiteten Curven durchläuft. Ist das Schwingungsverhältniss z. B. 100 : 201, so werden alle diese Curven innerhalb der Zeit durchlaufen, innerhalb deren der betrachtete Punkt 100 Schwingungen der grössern Dauer zurücklegt. Daraus ergibt sich dann auch, dass die neben einander liegenden Punkte nicht die gleichen Curven beschreiben, dass vielmehr auf 100 Wellenlängen alle diese Curven neben einander auftreten.

§. 81.

Schwingungen eines räumlich ausgedehnten Punktsystems. Wenn in einem räumlich ausgedehnten Punktsystem das Gleichgewicht eines Punktes gestört und derselbe in eine schwingende Bewegung versetzt wird, so muss auch das Gleichgewicht aller übrigen Punkte gestört werden, wenn wir annehmen, dass die Punkte sich durch elastische Kräfte in bestimmten Gleichgewichtslagen halten, wie wir sie bei den Punktreihen voraussetzten. Denn man kann jedes räumlich ausgedehnte Punktsystem als aus Punktreihen zusammengesetzt ansehen, die wir erhalten, wenn wir durch einen beliebigen Punkt des Systems nach allen Richtungen des Raumes hin gerade Linien legen. Diese Linien laufen dann von jedem Punkte aus wie die Radien einer Kugel und jeder dieser unendlich vielen Radien ist eine Punktreihe. Wird nun der erste oder mit ihm eine Anzahl ihm benachbarter Punkte in eine schwingende Bewegung versetzt, so muss auf allen Radien, da deren Anfangspunkte in eine schwingende Bewegung versetzt sind, eine solche sich fortpflanzen.

Je nach der Art, wie die Punkte in dem System vertheilt sind, kann die Fortpflanzung der Bewegung in dem System eine verschiedene sein. Wie wir sahen, hängt die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in einer Punktreihe nur von der Beschaffenheit derselben ab und zwar von dem Werthe des Quotienten $\sqrt{\frac{e}{d}}$, der Elasticität der Punktreihe und deren Dichtigkeit. Sind nun die Punkte in dem System so vertheilt, dass nach den einzelnen Richtungen hin auf der ganzen Länge der Radien dieser Quotient den-

selben Werth hat, wie wir es bisher für die einzelnen Punktreihen annahmen, so nennt man das System ein homogenes. In einem solchen System pflanzt sich die Wellenbewegung nach jeder Richtung mit constanter Geschwindigkeit fort, die Wellenlänge ist auf der ganzen Länge eines jeden Radius dieselbe.

Behalten auf den einzelnen Radien in verschiedenen Entfernungen vom Mittelpunkte Elasticität und Dichtigkeit nicht denselben Werth, ändert sich die Elasticität allein oder die Dichtigkeit oder beide, aber nicht in demselben Verhältnisse, so ist das Punktsystem ein nicht homogenes oder heterogenes. In einem solchen pflanzt sich die Bewegung in verschiedenen Entfernungen vom Mittelpunkte nicht mit gleicher Geschwindigkeit fort, die Wellenlängen sind nicht auf der ganzen Länge der Radien gleich, sondern ändern sich überall dort, wo eine Aenderung der Beschaffenheit des Punktsystems, also des Quotienten $\sqrt{\frac{e}{d}}$ eintritt.

Die homogenen Punktsysteme können isotrop oder anisotrop sein. Isotrope Punktsysteme nennt man solche, bei denen für alle Punktreihen und für alle in den Punktreihen stattfindenden Schwingungen der Quotient $\sqrt{\frac{e}{d}}$ denselben Werth hat, einerlei nach welcher Richtung und auf welcher Punktreihe die Schwingungen stattfinden. Gleichartige Schwingungen, also auf allen Radien transversale oder auf allen Radien longitudinale, pflanzen sich nach allen Richtungen mit derselben Geschwindigkeit fort.

Ist der Quotient $\sqrt{\frac{e}{d}}$ nicht für alle Schwingungen oder nach allen Richtungen derselbe, so nennt man das System ein anisotropes. Es ist das der Fall, wenn die Dichtigkeit oder die Elasticität der verschiedenen Punktreihen eine verschiedene ist, oder auch wenn in einer und derselben Punktreihe die elastische Kraft, mit der die Punkte gegen die Gleichgewichtslage zurückgetrieben werden, eine je nach der Richtung der Schwingungen verschiedene ist. In dem letztern Falle kann eine solche Verschiedenheit nur bei den transversalen Schwingungen vorhanden sein, je nach der Richtung, in welcher, stets senkrecht zur Punktreihe, die Punkte die Gleichgewichtslage verlassen. In jeder Punktreihe pflanzt sich dann eine gleichartige Schwingung mit constanter Geschwindigkeit fort, die aber von Punktreihe zu Punktreihe, oder auch in einer und derselben Punktreihe je nach der Richtung der transversalen Schwingungen verschieden ist.

Wir betrachten zunächst die Ausbreitung der Bewegung in einem isotropen Punktsystem und nehmen an, alle Schwingungen seien gleichartige, also auf allen Punkten entweder transversale oder longitudinale.

Ist die Oscillationsdauer der erregten Schwingungen gleich T, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit gleich c, so hat sich nach der Zeit T die schwingende Bewegung auf allen Radien durch die Strecke cT ausgebreitet, so dass alle auf der Fläche einer mit dem Radius cT beschriebenen Kugel liegenden Punkte gerade im Begriff sind, ihre Bewegung zu beginnen. Der Ausgangspunkt der Bewegung, also der Mittelpunkt der Kugel hat gerade eine Schwingung vollführt und die Punkte der einzelnen Radien befinden sich in den verschiedenen Oscillationsphasen, die um $\frac{1}{4}\,cT$ entfernten Punkte haben $\frac{3}{4}$, die um $\frac{1}{2}\,cT$ entfernten $\frac{1}{2}$ Schwingung zurückgelegt

u. s. f.; alle auf einer um den Mittelpunkt gelegten Kugelfläche befindlichen Punkte befinden sich in derselben Phase.

Der Bewegungszustand, der innerhalb der mit dem Radius cT beschriebenen Kugel zur Zeit T stattfindet, pflanzt sich in der folgenden Zeit T in der Richtung der Radien weiter fort, so dass am Ende der Zeit $2\,T$ alle Punkte im Innern der Kugel vom Radius $2\,c\,T$ an der Bewegung theilnehmen. Die Punkte auf dieser Kugelfläche beginnen ihre Bewegung, die in der Entfernung $^3/_2\,c\,T$ liegenden haben die Hälfte, die im Abstande $^5/_4\,c\,T$ dreiviertel und die Punkte auf der Kugel vom Radius $c\,T$ haben eine Oscillation zurückgelegt.

Wenn die Erregung der Bewegung im Mittelpunkte fortgedauert hat, so haben die Punkte innerhalb der Kugel vom Radius cT dieselbe Phase der Oscillation wie zur Zeit T, indess jetzt bei Zurücklegung der zweiten Oscillation.

In den folgenden Zeiten T pflanzt sich dann die Bewegung zu den Kugelflächen $3\,c\,T$, $4\,c\,T$. . fort, die Punkte in der Kugel $c\,T$ legen ihre 3, 4 . ., in der Schale $c\,T - 2\,c\,T$ ihre 2, 3 . ., in der Schale $2\,c\,T - 3\,c\,T$ ihre 1, 2 . . Bewegung zurück. Alle Punkte, die auf Kugelflächen liegen, welche vom Mittelpunkte oder der innern Grenze der einzelnen Kugelschalen von der Dicke $c\,T$ gleich weit entfernt sind, befinden sich in derselben Phase der Bewegung, die Punkte in der centralen Kugel in der 3, 4 . . . nten Schwingung, die Punkte in der ersten Schale in der 2, 3 . . . $(n - 1)$ten Schwingung u. s. f.

Der ganze den Mittelpunkt der Bewegung umgebende Raum theilt sich somit in eine Reihe von Kugelschalen, deren Dicke jedesmal gleich $c\,T$ ist, und in denen alle gleich weit von der Grenze der Schalen entfernten Punkte sich in den gleichen Phasen der Bewegung befinden. Der Dicke der Kugelschalen entspricht auf den einzelnen Radien die Länge einer Welle, man nennt deshalb die Dicke der einzelnen Kugelschalen, welche von Kugeln mit dem Radius $n\,c\,T$ und $(n - 1)\,c\,T$ begrenzt sind, eine Wellenlänge und diese Kugelschalen selbst Wellen. In einem isotropen System pflanzt sich somit die Bewegung in kugelförmigen Wellen fort.

Hört nach einiger Zeit die schwingende Bewegung des Mittelpunktes auf, so gelangen dadurch auch die vom Mittelpunkte entferntern Punkte nach einander zur Ruhe, da die Bewegung des Mittelpunktes es ist, welche die Bewegung der folgenden Punkte unterhält. Denn da diese ihre Bewegung an die weiter entfernten Punkte übertragen, können sie nur ihre Bewegung beibehalten, wenn sie von dem Mittelpunkte her neue Impulse erhalten. Dadurch entsteht dann eine innere Grenze der Bewegung. Diese innere Grenze muss ebenso eine Kugel sein wie die äussere Grenze, deren Radius mit wachsender Zeit gerade ebenso wächst wie die äussere Grenze, da jeder Punkt zur Ruhe kommt, sobald er seine Bewegung an die folgenden Punkte übertragen hat. Daraus folgt, dass wenn nach der Zeit t, dieselbe vom Beginne der Bewegung des Mittelpunktes an gerechnet, die Bewegung des Mittelpunktes aufhört, von da ab eine Kugelschale sämmtliche bewegte Punkte einschliesst, deren Dicke gleich $c\,t$ ist. Zur Zeit t' ist die äussere Grenze dieser Schale eine Kugel vom Radius $c\,t'$, die innere eine Kugel vom Radius $c\,(t' - t)$. Mit wachsender Zeit erweitert sich diese Schale demnach immer mehr, ihre Dicke bleibt aber immer dieselbe.

In nicht isotropen Wellen kann sich darnach die Bewegung nicht in kugelförmigen Wellen fortpflanzen, dort hängt die Entfernung, bis zu welcher sich die Bewegung in den verschiedenen Richtungen in gleichen Zeiten ausbreitet, von der Beschaffenheit der einzelnen Radien ab. Zur Bestimmung der Grenze, bis zu der sich die Bewegung ausgebreitet hat, muss man deshalb das Gesetz kennen, nach welchem die Eigenschaften der Punktreihe sich ändern. Wir werden in der Lehre vom Lichte einige Fälle der Art betrachten.

Nicht homogene Punktsysteme können wir als einzelne an einander grenzende homogene betrachten; in jedem einzelnen Theile gelten dann die Gesetze der Ausbreitung in einem homogenen Systeme, und es bedarf nur einer Untersuchung, welche Aenderung der Bewegung bei dem Uebergange derselben aus einem Punktsystem in das andere stattfindet.

§. 82.

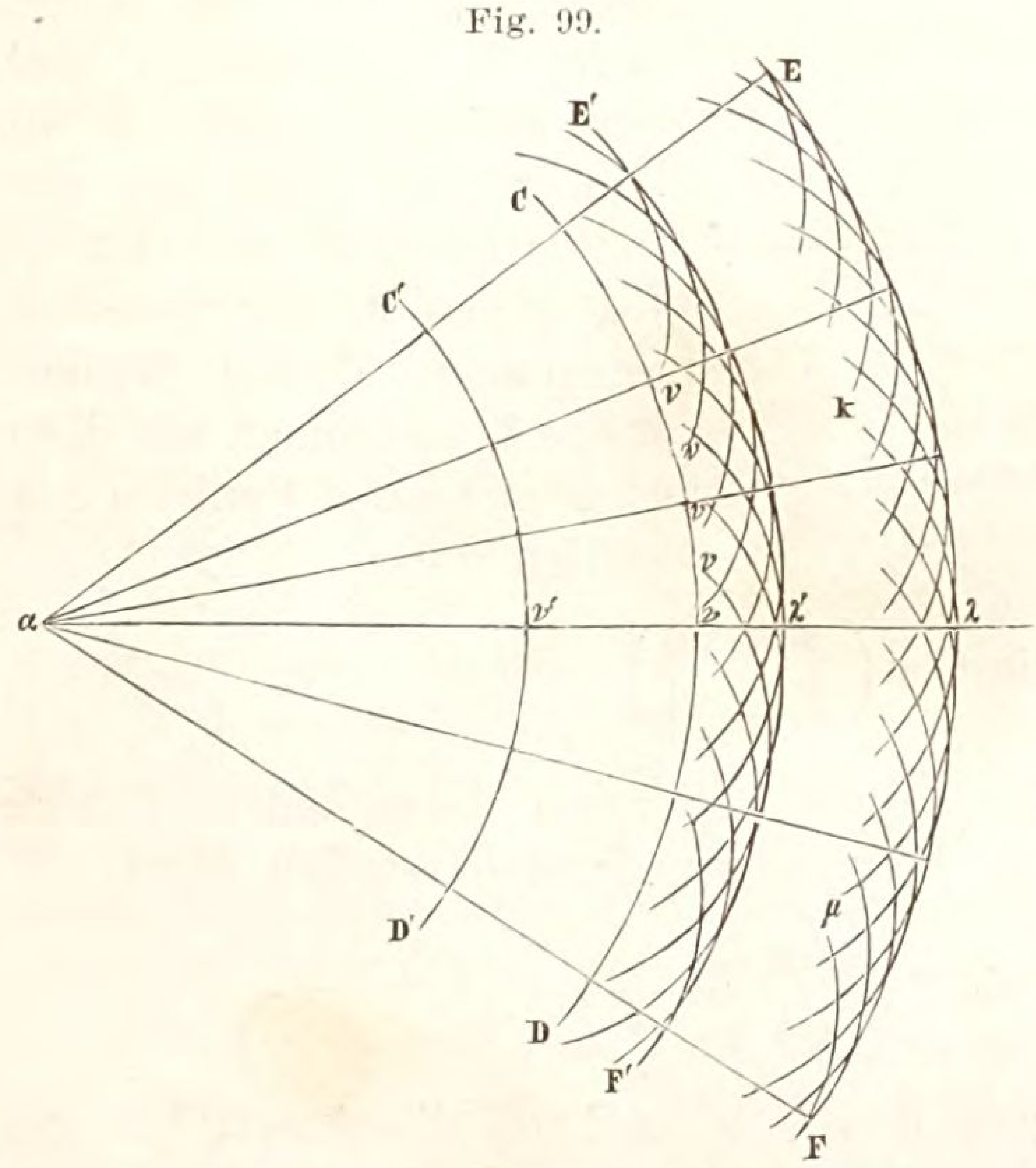
Huyghens'sches Princip. Die im vorigen §. dargelegte Auffassung über die Ausbreitung der schwingenden Bewegung in einem räumlich ausgedehnten Punktsystem macht eine Voraussetzung, welche noch bewiesen werden muss, die Voraussetzung nämlich, dass sich die Bewegung nur nach der Richtung der Radien von dem Ausgangspunkte aus fortpflanze. In Wirklichkeit muss ja jeder Punkt des Systems, so wie er von der Bewegung ergriffen wird, der Ausgangspunkt einer schwingenden Bewegung nach allen Richtungen sein. Schon Huyghens hat indess auf Grund des Princips der Coexistenz der kleinen Bewegungen, welches wir zum Theil schon bei der Entwicklung der Interferenzerscheinungen angewandt haben, gezeigt, dass auch nach dieser Auffassung der Ausbreitung der Bewegung das Resultat gerade so ist, als wenn sich die Schwingungen nur nach der Richtung der Radien fortpflanzten. Das Princip der Coexistenz der kleinen Bewegungen lässt sich vollständig so aussprechen: Ein Punkt eines Systems, der durch mehrere Impulse bewegt wird, vollführt eine Bewegung, die sich als Resultante nach dem Satze vom Kräfteparallelogramm berechnen lässt. Wenn durch die Bewegung dieses Punktes auch benachbarte Punkte bewegt werden, die Bewegung dieser letztern aber nur Folge ist einer der componirenden Bewegungen jenes Punktes, so bewegen sich dieselben gerade so, als habe der betrachtete Punkt nur diese Theilbewegung. Kreuzen sich also z. B. zwei Punktreihen in einem Punkte, so wird, wenn in den beiden sich Schwingungen fortpflanzen, der Kreuzungspunkt durch beide ihn treffende Punkte bewegt, von dieser Bewegung pflanzt sich aber in jeder Punktreihe nur die Bewegung fort, welche der betreffenden Punktreihe angehört. Die Richtigkeit dieses Princips ergibt sich schon aus den Sätzen über die stehenden Wellen; wir sahen, dass dort die Schwingungsknoten stets in Ruhe sind, weil durch diese in jedem Momente nach entgegengesetzter Richtung zwei Bewegungen in entgegengesetzter Phase hindurchgehen. Trotzdem aber die resultirende Bewegung in dem Falle in Ruhe ist, geht jede der beiden Bewegungen für sich in der Reihe weiter.

Dass nun, auch wenn wir jeden Punkt des Systems als Mittelpunkt einer nach allen Richtungen sich ausbreitenden Bewegung ansehen, sobald er von der Bewegung getroffen wird, somit die Bewegung jedes Punktes als die resultirende aller ihn treffenden Bewegungen angesehen wird, die

Bewegung sich in der im vorigen §. dargelegten Weise ausbreitet, ergibt sich folgendermassen.

Sei CD Fig. 99 die äussere, $C'D'$ die innere Grenze einer vom Punkte α ausgegangenen Welle. Betrachten wir nun jeden Punkt zwischen CD und CD' als Wellenmittelpunkt, von dem die Bewegung sich nach allen Richtungen ausbreitet, so müssen zunächst alle von jedem Punkte ausgehenden Wellen kugelförmig sein, wenn wir ein isotropes System voraussetzen. Denn wir wissen, dass die Ausbreitungsgeschwindigkeit nur von der Elasticität und Dichtigkeit der Punktreihe abhängig ist. Von dem Punkte ν z. B. hat sich in der Zeit t die Bewegung auf die mit dem Radius $\nu\lambda = c\,t$ beschriebene Kugel fortgepflanzt, deren Mittelpunkt der Punkt ν ist. Gleiches gilt von allen Punkten der Kugelfläche CD, von allen pflanzen sich in derselben Zeit Bewegungen bis zu Kugelflächen fort, deren Radius gleich $c\,t$ ist. Die äussere Grenze, bis zu der sich die Bewegung auf diese Weise fortgepflanzt hat, ist dann die Fläche, welche alle diese Kugeln berührt, welche sie also einhüllt. Diese Fläche ist aber eine Kugel, EF, welche den Punkt α zum Mittelpunkte hat, und welche mit dem Radius $\alpha\nu + c\,t = \alpha\lambda$ beschrieben ist. Denn die von α am weitesten entfernten Punkte der einzelnen Kugeln sind diejenigen, deren Radien $\nu\lambda$ mit $\alpha\nu$ eine gerade Linie bilden, diese liegen aber auf einer Kugelfläche, deren Radius gleich $\alpha\lambda$ ist.

Fig. 99.



Gleiches gilt von allen zwischen CD und CD' liegenden Punkten, von allen hat sich die Bewegung bis zu einer Kugelfläche übertragen, welche um $c\,t$ weiter von α entfernt ist als die Punkte selbst. Die innere Grenze der Welle ist demnach die Kugelfläche $E'F'$, welche mit dem Radius $\alpha\nu' + \nu'\lambda'$ um α beschrieben ist, da diese Kugel alle jene einzelnen Kugeln berührend umhüllt, welche von allen ν' der Kugelfläche $C'D'$ mit den Radien $\nu'\lambda'$ beschrieben werden.

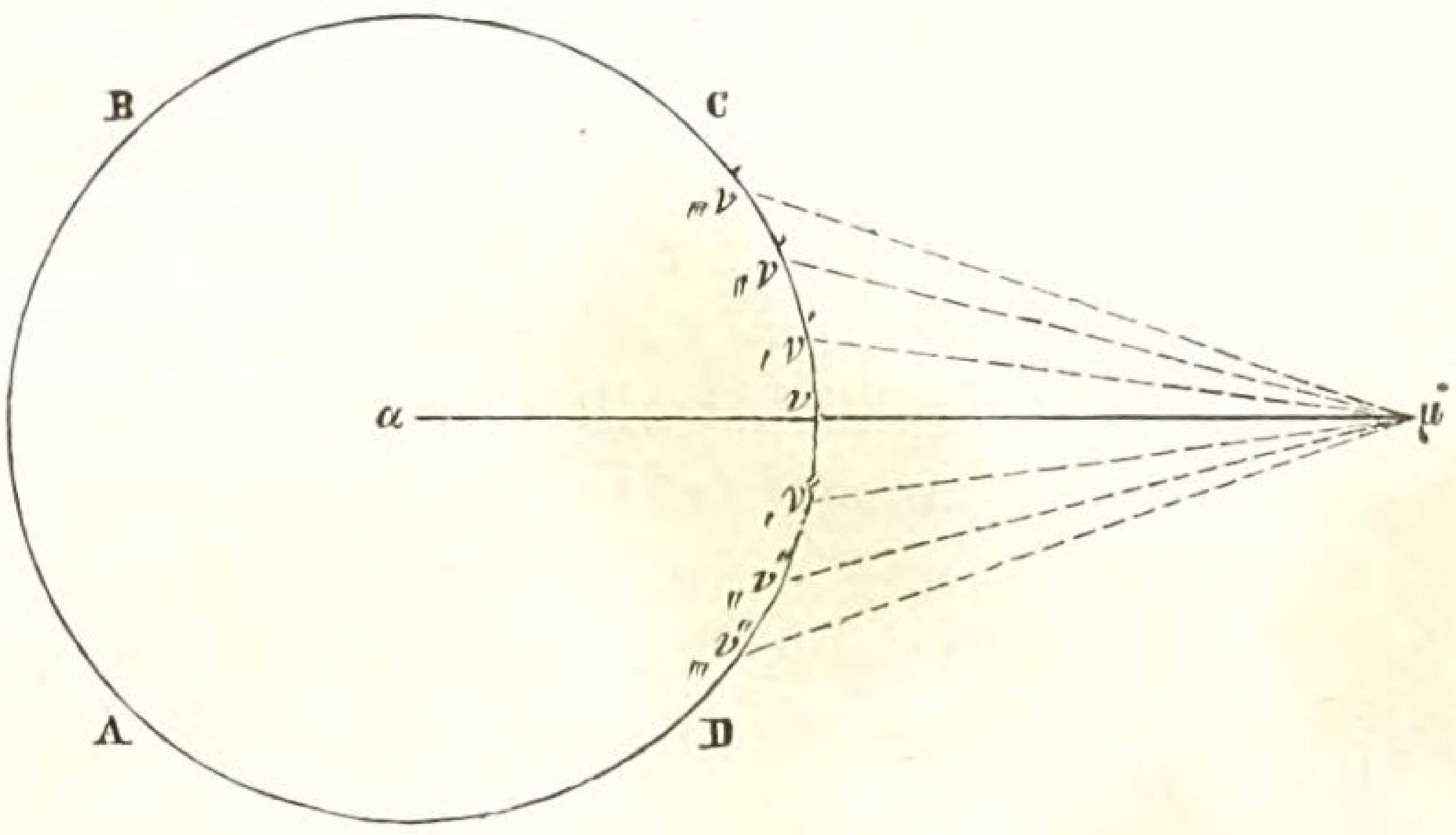
Da ferner jeder Punkt, wenn er die an ihn ankommenden Schwingungen in der Richtung, in welcher die Bewegung ankam, folgenden Punkten übertragen hat, zur Ruhe kommt, wenn ihn nicht neue Impulse treffen, so folgt, dass die zwischen α und $E'F'$ liegenden Punkte in Ruhe sind, somit dass $E'F'$ die innere Grenze der Bewegung ist.

Es ergibt sich also zunächst nach der Huyghens'schen Construction der fortgepflanzten Welle, dass dieselbe sich ganz der Darstellung des vorigen §. entsprechend in kugelförmigen Wellen ausbreitet.

Dass weiter die Bewegung irgend eines Punktes μ der abgeleiteten

Welle Fig. 100 gerade so ist, als wenn sich die Bewegung nur in der Richtung $\alpha\,\nu\,\mu$ zu ihm fortgepflanzt hätte, zeigt folgende Ueberlegung.

Fig. 100.



Der Punkt μ hat eine gewisse Zeit τ, nachdem die Bewegung auf der Kugel $ABCD$ angekommen war, eine Bewegung, die sich von dem Punkte ν aus ihm mitgetheilt hat. Ist der Abstand $\nu\,\mu$ gleich δ, die Schwingungsdauer T, die Wellenlänge λ, so können wir diese Bewegung des Punktes darstellen durch

$$y = a \sin 2\pi \left(\frac{\tau}{T} - \frac{\delta}{\lambda}\right).$$

Die Bewegung, welche der Punkt μ gleichzeitig von einem andern Punkte ν' der Kugel $ABCD$ her besitzt, können wir dann darstellen durch

$$y_1 = a_1 \sin 2\pi \left(\frac{\tau}{T} - \frac{\delta'}{\lambda}\right),$$

wenn δ' der Abstand des Punktes μ von ν' und a_1 die Amplitude der Schwingung ist, welche von ν' herrührend der Bewegung des Punktes μ gegeben wird.

Je nach der Lage des Punktes ν' auf der Kugel $ABCD$ hat nun die Phasendifferenz

$$\frac{\delta' - \delta}{\lambda}$$

und die Amplitude a_1 immer andere Werthe. Je weiter der Punkt ν' von ν entfernt ist, um so grösser ist die Phasendifferenz, um so kleiner dagegen die Amplitude a_1. Denn die Amplitude a_1 hängt wesentlich ab von der Neigung der in ν' stattfindenden Schwingung gegen diejenige, welche durch die von ν herrührende Bewegung im Punkte μ erzeugt wird. So kann eine longitudinale Schwingung von μ nur durch die $\nu\,\mu$ parallele Componente der von ν' herkommenden Bewegung hervorgerufen werden, eine transversale nur durch die zu $\nu\mu$ senkrechte Componente. Wir müssen demnach eine auf $\nu'\mu$ longitudinale oder transversale Bewegung mit dem Cosinus des Neigungswinkels von $\nu'\mu$ gegen $\nu\mu$ multipliciren. Zur Berechnung der resultirenden Bewegung in μ müssten wir darnach die Resultirende aller der unzählig vielen Schwingungen, die von der Kugel $ABCD$ nach μ kommen, jede mit der von der Lage des Ausgangspunkts abhängigen Amplitude und Phase berechnen, eine Aufgabe, deren Lösung grosse Schwierigkeit bieten würde. Glücklicherweise kann man die Aufgabe in anderer Weise lösen.

Wir denken uns nämlich die Kugel durch Schnitte, welche senkrecht zu $\alpha\,\mu$ sind, in Zonen getheilt, derart, dass die Verbindungslinien von μ mit der Grenze der Zonen jedesmal um $^1/_2\,\lambda$ zunehmen, so dass also, wenn

${}_{,}\nu'$, ${}_{,}\nu''$.. die Durchschnitte der Zonengrenzen mit der Ebene der Zeichnung sind,

$${}_{,}\nu'\mu - \nu\mu = {}_{,,}\nu'\mu - {}_{,}\nu'\mu = {}_{,,,}\nu'\mu - {}_{,,}\nu'\mu = \tfrac{1}{2}\lambda.$$

Die sämmtlichen von den Punkten der centralen, unmittelbar um ν liegenden Zone zur Zeit τ in μ vorhandenen Bewegungen treiben dann den Punkt μ nach derselben Richtung, die von der ersten die centrale umgebenden Zone ${}_{,}\nu'\,{}_{,,}\nu'\,{}_{,,}\nu''\,{}_{,}\nu''$ herkommenden Bewegungen aber nach der entgegengesetzten, da unserer Voraussetzung nach ${}_{,}\nu'\mu - \nu\mu = \tfrac{1}{2}\lambda$, somit die Phasendifferenz aller aus der zweiten Zone kommenden Bewegungen gegen die der centralen Zone eine halbe Wellenlänge beträgt. Die Bewegungen der dritten Zone sind wieder mit denen der centralen Zone gleicher, mit denen der zweiten Zone entgegengesetzter Phase u. s. f. Die Bewegungen aller ungeradzahligen Zonen sind mit der der centralen Zone gleicher, die der geradzahligen Zonen entgegengesetzter Phase.

Berechnet man nun die Grösse der so entstehenden Zonen, so ergibt sich, dass dieselben von der centralen Zone aus ganz stetig zunehmen; die Zunahme ist beim Uebergange von einer Zone zu der nächstfolgenden immer die gleiche, so dass stets die Grösse einer Zone gleich ist der halben Summe der vorhergehenden und nachfolgenden Zone, also die zweite gleich der halben centralen plus der halben dritten u. s. f., allgemein

$$Z_{n+1} = \tfrac{1}{2}(Z_n + Z_{n+2}).$$

Daraus folgt, dass die Anzahl der schwingenden Punkte in einer Zone gleich ist der halben Summe der schwingenden Punkte der vorhergehenden und der nachfolgenden Zone, somit auch dass die Anzahl der aus einer Zone zu dem Punkte μ sich fortpflanzenden Schwingungen gleich ist der halben Summe der aus der vorhergehenden und der nachfolgenden Zone zu dem Punkte μ gelangenden Schwingungen.

Die schwingende Bewegung nun, welche von den einzelnen Punkten der äussern Hälfte der zweiten Zone zu μ gelangt, ist stets von entgegengesetzter Phase als die von den einzelnen Punkten der äussern Hälfte der centralen Zone dorthin gelangende, und ebenso ist die von der innern Hälfte der zweiten Zone von entgegengesetzter Phase als die von der innern Hälfte der dritten Zone. Da nun weiter die Neigungen der Verbindungslinien der einzelnen Punkte dieser Zonen mit μ nur äusserst wenig verschieden, respective die mittlere Neigung der Verbindungslinien der halben centralen und halben dritten Zone gleich ist der Neigung der Verbindungslinien der zweiten Zone mit μ, so folgt aus der Gleichheit

$$Z_2 = \tfrac{1}{2}(Z_1 + Z_3),$$

dass die von der zweiten Zone herrührende Bewegung durch die von der halben ersten und halben dritten herkommende in jedem Momente im Punkte μ aufgehoben wird.

Ganz ebenso wird die Bewegung von der vierten Zone aufgehoben von der noch übrig bleibenden Hälfte der dritten und der halben fünften Zone, die Bewegung von der sechsten Zone durch die halbe fünfte und halbe siebente Zone und so fort über die ganze primäre Welle hin, so weit von derselben Bewegung nach μ hingelangt. Es bleibt somit nur die von der unmittelbar um ν ligenden halben centralen Zone ausgehende

Bewegung im Punkte μ übrig; die Bewegung des Punktes μ ist also ganz dieselbe, als wenn sich die Bewegung nur in der Richtung $\alpha \nu \mu$ fortgepflanzt hätte, also in der Richtung des von α nach μ gelegten Radius.

Es folgt somit auch nach der Huyghens'schen Construction der abgeleiteten Welle, dass die Bewegung in dem Punktsystem sich so ausbreitet, wie wir es im vorigen §. ableiteten; wir werden demnach in spätern Fällen sowohl die eine als die andere Anschauungsweise betreffs der Fortpflanzung anwenden können.

§. 83.

Fortpflanzung der Wellen in nicht homogenen Systemen; Reflexion der Wellen. Wir erwähnten bereits im §. 81, dass ein nicht homogenes Punktsystem als aus aneinander grenzenden homogenen Punktsystemen bestehend angesehen werden könne. Es folgt daraus, dass in den einzelnen Theilen des heterogenen Systems die Bewegung sich wie in einem homogenen Systeme ausbreiten müsse, dass zur Kenntniss der Ausbreitung in dem heterogenen Systeme nur die Erscheinungen an der Grenze zweier Systeme zu untersuchen seien.

Wir sahen schon im vorigen §., dass eine in einem homogenen Systeme sich ausbreitende Welle niemals zurückkehrt, dass sie vielmehr bei dem Uebergange auf neue Schichten die vorhergehenden in Ruhe zurücklässt. Ebenso wie eine Kugel, welche auf eine ihr gleiche stösst, an diese ihre ganze Geschwindigkeit abgibt und nach dem Stosse in Ruhe bleibt, so überträgt auch jeder Punkt seine Bewegung an den ihm in der Punktreihe folgenden und bleibt nach Abgabe seiner Bewegung in Ruhe.

Anders, wenn die Bewegung an der Grenze zweier Systeme ankommt. Wenn eine Kugel auf eine andere stösst, welche eine grössere oder kleinere Masse hat, als die stossende, so bleibt sie in beiden Fällen nach dem Stosse in Bewegung. Hat die gestossene Kugel eine kleinere Masse als die stossende, so fährt die stossende Kugel nach dem Stosse fort sich in demselben Sinne zu bewegen wie vor dem Stosse; hat die gestossene Kugel eine grössere Masse, so wird die stossende Kugel zurückgeworfen, sie bewegt sich in einem ihrer frühern Bewegung entgegengesetzten Sinne.

Ganz dieselben Erscheinungen müssen eintreten, wenn eine schwingende Bewegung an der Grenze zweier verschiedener Medien ankommt, da es auch hier die elastischen Kräfte sind, welche die Bewegung der Punkte bewirken. Es muss also zunächst die Bewegung in das zweite Mittel hinübertreten, es müssen die Punkte des zweiten Mediums in eine schwingende Bewegung versetzt werden und diese schwingende Bewegung muss in dem zweiten Medium sich wie in jedem homogenen Medium verbreiten. Bei diesem Uebertritt in das zweite Medium kann keine Aenderung der Phase eintreten, die an der Grenze ankommende Welle setzt sich nur mit veränderter Wellenlänge und geänderter Amplitude in dem zweiten Mittel fort. Ist also die ankommende Welle durch die Gleichung gegeben

$$y = \alpha \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right),$$

so wird die Bewegung in dem Abstande x' von der Grenze dargestellt durch die Gleichung

$$y = d \,.\, \alpha \,.\, \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} - \frac{x'}{\lambda'} \right),$$

wenn $d\alpha$ die Amplitude und λ' die Wellenlänge in dem zweiten Medium bedeutet.

Zugleich bleiben aber auch die in der letzten Schicht des ersten Mediums liegenden Punkte in Bewegung. Ist das zweite System weniger dicht, so werden die in der Grenze liegenden Punkte einfach ihre Bewegung fortsetzen, nur wird die Amplitude der folgenden Bewegungen kleiner sein, gerade wie die an eine kleinere stossende Kugel nach dem Stosse in der frühern Richtung mit kleinerer Geschwindigkeit weiter geht. Dadurch werden diese Punkte Mittelpunkte neuer Wellen, welche sich rückwärts in dem ersten System ausbreiten. Da die Bewegung der Mittelpunkte dieser neuen Wellen dieselbe Phase besitzen, wie die an der Grenze ankommende Bewegung, so muss auch die Phase der zurückgehenden Wellen dieselbe sein, als wären sie eine Fortsetzung der ankommenden Bewegung, das heisst in irgend einem Abstande x' von der Grenze ist die Phase dieselbe, als wenn sich die Bewegung von der Grenze um die Strecke x' fortgepflanzt hätte. Da die zurückkehrende Welle in demselben Mittel sich ausbreitet wie die ankommende Welle, muss ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit und Wellenlänge dieselbe sein. Bezeichnen wir demnach mit $r\alpha$ die Amplitude der reflectirten Welle, so ist im Abstande x' von der Grenze die Bewegung in derselben gegeben durch die Gleichung

$$y = r\,\alpha \,.\, \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x + x'}{\lambda} \right).$$

Ist das zweite Mittel dichter als das erste, so muss die Phase der Bewegung in der Grenze, welche die Ursache der reflectirten Welle ist, die entgegengesetzte derjenigen der ankommenden werden. Die bei der longitudinalen sich gegen die Grenze hin bewegenden Punkte werden stärker zurückgestossen, die sich von der Grenze entfernenden stärker zurückgezogen; die bei der transversalen Bewegung in dem einen oder andern Sinne sich von der Gleichgewichtslage entfernenden Punkte werden von den folgenden Punkten stärker zurückgezogen, als wenn die folgenden Schichten gleiche Dichtigkeit hätten. Die Wirkung des dichtern Mittels ist also in allen Fällen dieselbe, als wenn die in der Grenze befindlichen Punkte, weil ihre Bewegung gehemmt wird, einen ihrer Bewegung entgegengesetzten Impuls erhalten hätten. Dadurch werden sie Mittelpunkte einer neuen Bewegung, welche in demselben Momente beginnt, in welchem die Bewegung an der Grenze ankommt, deren Richtung aber derjenigen der ankommenden gerade entgegengesetzt ist, sie ist gegen die negative Seite der y gerichtet, wenn die ankommende gegen die positive gerichtet ist und umgekehrt. Da nun diese Bewegung sich genau so in dem ersten Mittel rückwärts ausbreitet, wie in dem ersten Falle, so ist die Bewegung in dem Abstande x' von der Grenze gegeben durch die Gleichung

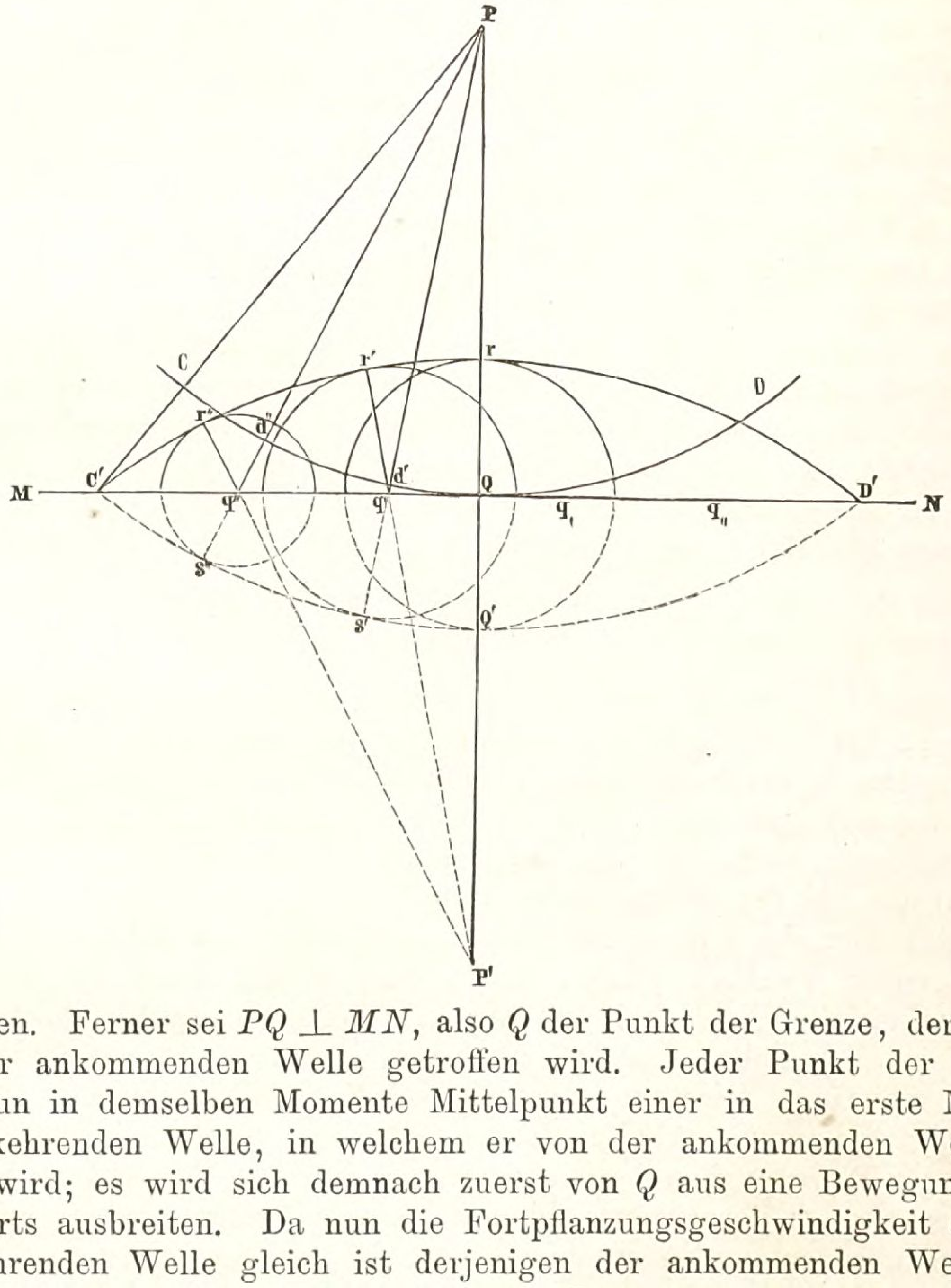
$$y = -\, r\,\alpha \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x + x'}{\lambda} \right) = r\,\alpha \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x + x' + \frac{1}{2}\lambda}{\lambda} \right).$$

Die Bewegung hat überall die entgegengesetzte Phase von derjenigen, die an einem dünnern Medium reflectirt ist, oder sie findet gerade so statt,

als hätte sie eine halbe Wellenlänge mehr zurückgelegt. Man bezeichnet das auch kurz dadurch, dass bei der Reflexion an einem dichtern Punktsystem der Verlust einer halben Wellenlänge stattfinde.

Die Richtung, nach welcher eine an der Grenze zweier Systeme ankommende Welle zurückkehrt, lässt sich sehr leicht mit Hülfe der Huyghens'schen Construction der Wellen ableiten. Sei zu dem Ende P der Mittelpunkt einer Welle und MN Fig. 101 die Grenze zwischen zwei

Fig. 101.



Systemen. Ferner sei $PQ \perp MN$, also Q der Punkt der Grenze, der zuerst von der ankommenden Welle getroffen wird. Jeder Punkt der Grenze wird nun in demselben Momente Mittelpunkt einer in das erste Medium zurückkehrenden Welle, in welchem er von der ankommenden Welle erreicht wird; es wird sich demnach zuerst von Q aus eine Bewegung nach rückwärts ausbreiten. Da nun die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der zurückkehrenden Welle gleich ist derjenigen der ankommenden Welle, so wird innerhalb der Zeit, in der sich die Bewegung von den Punkten C oder D, die gleich weit von PQ entfernt sind, bis MN fortgepflanzt hat, von Q aus rückwärts die Bewegung bis zu einer Halbkugel fortgepflanzt, deren Radius $Qr = CC'$ ist. Die Punkte q', q'' .. werden später getroffen, die Grenze, bis zu der sich die Bewegung fortgepflanzt hat, wenn die Bewegung in C' angekommen ist, sind deshalb Halbkugeln mit kleineren Radien; die Radien $q'r'$.. sind gleich den Strecken, welche die schwingende Bewegung noch bis C' zurücklegen muss, nachdem q' ... getroffen sind, also $CC' - d'q$...

Die Grenze, bis zu welcher sich die Bewegung im ersten Mittel nach rückwärts ausgebreitet hat, wenn CD ganz an der Grenze der beiden Systeme angekommen ist, ist die Fläche, welche alle in der angegebenen Weise construirten Halbkugeln berührend umhüllt. Diese Fläche ist eine Kugelfläche, welche wir mit dem Radius $P'r = P'C'$ um den Punkt P' beschreiben müssen, welcher ebenso weit senkrecht hinter der Fläche MN liegt, als der Punkt P, der Mittelpunkt der ankommenden Welle vor derselben. Denn denken wir uns, dass die Welle ungehindert fortgeschritten wäre, so würde die Grenze derselben $C'Q'D'$, die mit dem Radius PC' beschriebene Kugelfläche sein, welche die um Q, q' mit den Radien $Qr, q'r'$.. beschriebenen Kugeln auf der andern Seite berührend einhüllt. Die Fläche, welche die Kugeln an der Seite rr' einhüllt, muss daher eine Kugel von gleichem Radius sein, die aber ihre Convexität nach der entgegengesetzten Seite wendet, deren Mittelpunkt also auf der entgegengesetzten Seite von MN liegen muss, und zwar so, dass $P'C' = PC'$, somit auch $PQ = P'Q$, also ebenso weit hinter MN, wie P vor MN liegt.

Von der als eben vorausgesetzten Grenze zweier Punktsysteme wird demnach eine ankommende Welle gerade so reflectirt, als ginge sie von einem Mittelpunkte aus, welcher ebenso weit hinter dieser Grenze liegt, als der Mittelpunkt der ankommenden Welle vor der Grenze liegt.

Aus diesem Satze lässt sich sofort noch eine andere Form des Reflexionsgesetzes ableiten. Aus der Gleichheit $P'Q = PQ$ folgt, dass die Dreiecke $P'C'Q$ und $PC'Q$, ferner ebenso $P'q''Q$ und $Pq''Q$... deckend sind, und daraus, dass die Winkel $Pq''Q = P'q''Q$; $P'q'Q = Pq'Q$... oder, da $P'q''Q = r''q''C'$.. als Scheitelwinkel, dass auch

$$Pq''Q = r''q''C'; \quad Pq'Q = r'q'C',$$

oder die Winkel, unter welchen die Radien der ankommenden und reflectirten Welle die Grenzfläche schneiden, einander gleich sind. Nach der im §. 81 zu Grunde gelegten Anschauung der Fortpflanzung der schwingenden Bewegung sind nun die Radien der Kugelwellen die einzelnen Punktreihen, auf denen die Schwingungen sich fortpflanzen. Nennen wir deshalb diese Radien die Wellenstrahlen, so können wir obigen Satz dahin aussprechen, dass die reflectirten Strahlen und die ankommenden Strahlen in der durch die Normale PQ und den einfallenden Strahl Pq' bestimmten Ebene mit der reflectirenden Fläche gleiche Winkel bilden. Die in dem Punkte q', wo der Strahl Pq' die reflectirende Fläche trifft, zur Grenzfläche gezogene Normale bezeichnet man gewöhnlich als Einfallsloth, und den Winkel, welchen der einfallende Strahl mit demselben bildet, als Einfallswinkel, den der reflectirte Strahl mit demselben bildet, als Reflexionswinkel. Aus der Gleichheit der Winkel $r'q'C'$ und $Pq'Q$ folgt nun auch die Gleichheit von Einfallswinkel und Reflexionswinkel. Wir können demnach als eine andere Form des Reflexionsgesetzes dasselbe dahin ausdrücken, dass der reflectirte Strahl mit dem einfallenden Strahl und dem Einfallsloth in derselben Ebene liegt, und dass der Reflexionswinkel gleich dem Einfallswinkel ist.

Wir haben bisher vorausgesetzt, dass die Grenzfläche der beiden Punktsysteme eben ist; die zweite Form des Reflexionsgesetzes ist nun sehr bequem, um auch sofort die Reflexion an krummen Flächen zu übersehen;

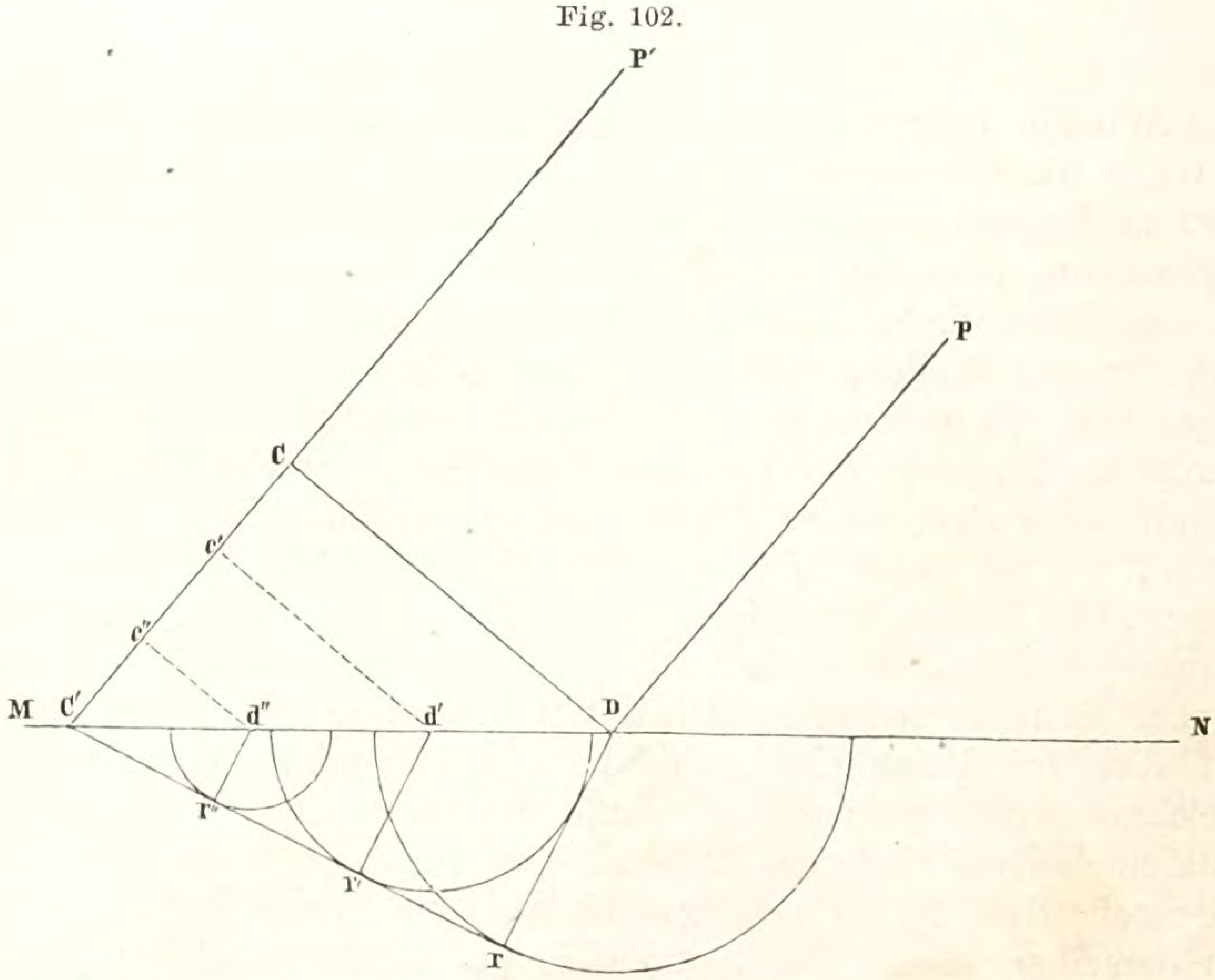
krumme Flächen können wir als eine stetige Reihenfolge sehr kleiner Ebenen betrachten, deren Normalen, also die Einfallslothe, nicht, wie bei einer Ebene, parallel, sondern gegen einander geneigt sind. Für jede noch so kleine Ebene gilt nun unser Reflexionsgesetz; kennt man die Lage der einzelnen Einfallslothe, kann man aus der Gleichheit des Einfallswinkels und Reflexionswinkels an jedem Punkte der krummen Fläche die Richtung des reflectirten Strahles construiren. Wir werden später specielle Fälle derart betrachten.

§. 84.

Brechung der Wellen. Die Huyghens'sche Construction gibt uns ebenfalls unmittelbar die Richtung, nach welcher sich die in das zweite Punktsystem übergehende Welle fortpflanzen muss. Auch für das zweite System ist jeder Punkt der Grenze, so wie er von der schwingenden Bewegung getroffen wird, ein Wellenmittelpunkt, von welchem aus sich die Bewegung nach allen Richtungen in das zweite System fortpflanzt, mit einer Geschwindigkeit, welche je nach der Beschaffenheit des zweiten Systemes grösser oder kleiner ist als diejenige im ersten Systeme. Ist der Quotient $\sqrt{\frac{e}{d}}$ im zweiten Systeme kleiner, so pflanzt sich die Bewegung langsamer fort, ist der Quotient grösser, so pflanzt sie sich rascher fort.

Um die Richtung der Fortpflanzung in dem zweiten Systeme zu erhalten, sei CD Fig. 102 ein sehr kleines Stück einer Wellenfläche, so klein, dass wir es als eben betrachten können, so dass wir also den Mittel-

Fig. 102.



punkt der Welle gegenüber der Ausdehnung des Wellenstückes so weit entfernt annehmen dürfen, dass wir alle Wellenstrahlen, die zu dem Stück gehören, als parallel ansehen können. Das Stück der Welle, dessen Durchschnitt CD ist, sei gleichzeitig senkrecht zur Ebene NDP.

In dem Augenblicke nun, in welchem die Welle im Punkte D die Grenzfläche trifft, pflanzt sich von D aus die Bewegung in dem zweiten Systeme fort. Ist c die Fortpflanzungsgeschwindigkeit im ersten, c_1 im zweiten System, so verhalten sich die Strecken in beiden Systemen, durch welche sich die Bewegungen in gleichen Zeiten fortpflanzen, wie $c : c_1$.

Innerhalb der Zeit, in der sich die Bewegung in dem ersten System von C bis C' fortpflanzt, bis also die Welle ganz in das zweite System übergegangen ist, hat sie sich deshalb von D aus im zweiten System bis zu einer Halbkugel ausgebreitet, deren Radius

$$D r = \frac{c_1}{c} \cdot C C'.$$

Von den zwischen D und C' liegenden Punkten beginnen sich ebenso Wellen im zweiten System auszubreiten, sobald sie von der ankommenden Welle getroffen werden. Die Radien der Halbkugeln, bis zu denen die Bewegung sich ausgebreitet hat, bis die ankommende Welle bis zum Punkte C' fortgeschritten ist, erhalten wir in derselben Weise, wir haben die Strecke, welche die Welle noch in dem ersten Mittel zurückzulegen hat, mit dem Quotienten der Geschwindigkeit c_1 und c zu multipliciren. So wird der Radius ϱ der um den Punkt d' beschriebenen Welle

$$\varrho = \frac{c_1}{c} \cdot c' C'.$$

Die Grenze, bis zu der sich die Bewegung überhaupt in dem zweiten Systeme ausgebreitet hat, wenn sie im ersten bis zu C' fortgeschritten ist, erhalten wir in der Fläche, welche alle die so construirten Halbkugeln berührt.

Die Fläche erhalten wir, wenn wir durch c' eine zur Ebene $C'Dr$ senkrechte Tangentialebene an die um D beschriebene Halbkugel legen. Denn diese Ebene berührt nicht nur die um D mit dem Radius Dr beschriebene Halbkugel, sondern auch alle mit den betreffenden Radien um die Punkte d beschriebenen Kugeln. Ziehen wir nämlich $d'r' \perp C'r$, so ist

$$d'r' : Dr = d'C' : DC'.$$

Ziehen wir $d'c'$ parallel DC, so ist ferner

$$d'C' : DC = c'C' : CC',$$

somit, wenn wir gleichzeitig setzen

$$Dr = \frac{c_1}{c} \cdot CC'$$

$$d'r' : \frac{c_1}{c} CC' = c'C' : CC',$$

oder

$$d'r' = \frac{c_1}{c} \cdot c'C' = \varrho,$$

das heisst die von d' auf $C'r$ herabgelassene Senkrechte ist der Radius der um d' beschriebenen Halbkugel, somit ist die durch $C'r$ zur Ebene $DC'r$ senkrecht gelegte Ebene Tangentialebene an die um d' mit dem Radius ϱ beschriebene Halbkugel. Ebenso gilt es für alle um die verschiedenen Punkte d beschriebenen Halbkugeln.

Bezeichnen wir nun die Winkel CDC' und $rC'D$, welche die angekommene und die in das zweite Mittel übergegangene Welle mit der Grenze bilden, mit φ und φ', so ist

$$\sin\varphi = \frac{CC'}{C'D}; \quad \sin\varphi' = \frac{Dr}{C'D} = \frac{\frac{c_1}{c} \cdot CC'}{C'D}$$

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi'} = \frac{c}{c_1}.$$

Der Winkel, den die in das zweite System übergegangene Welle mit der Grenze bildet, ist ein anderer, als derjenige, welchen die ankommende Welle mit derselben bildet. Ist die Welle in das zweite System übergegangen, so pflanzt sie sich einfach parallel sich selbst nach der Richtung der Wellennormalen fort. Da nun die Fortpflanzungsrichtung mit dem Einfallslothe denselben Winkel bildet, welchen die Welle mit der Grenzebene bildet, so folgt, dass die Fortpflanzungsrichtung einer Welle bei dem Uebergange sich stets ändert, ausser wenn der Winkel φ gleich Null ist, da dann auch $\varphi' = 0$. Die Aenderung der Fortpflanzungsrichtung findet stets so statt, dass der Quotient des Sinus des Einfallswinkels und des Sinus des Winkels, den die Fortpflanzungsrichtung in dem zweiten System mit dem Einfallsloth bildet, des Brechungswinkels, gleich ist dem Quotienten aus der Fortpflanzungsgeschwindigkeit im ersten System und derjenigen im zweiten System. Da bei Voraussetzung eines isotropen Systems diese Fortpflanzungsgeschwindigkeiten für alle Richtungen dieselben sind, so folgt, dass der Quotient aus dem Sinus des Einfallswinkels und Brechungswinkels für zwei gegebene Systeme einen constanten Werth hat. Man bezeichnet diesen Quotienten als den Brechungsexponenten. Weil eben der Wellenstrahl bei dem Uebertritt in ein anderes System stets, ausser bei senkrechtem Eintritt gebrochen wird, nennt man den Uebertritt der Wellen aus einem Mittel in ein anderes, die Brechung der Wellen.

Das Gesetz der Brechung können wir kurz in den beiden Sätzen zusammenfassen, der gebrochene Strahl liegt mit dem einfallenden und dem Einfallslothe in derselben Ebene, und der Quotient aus dem Sinus des Einfalls- und Brechungswinkels ist für zwei gegebene Systeme constant.

Darnach lässt sich auch sofort die Welle im zweiten System construiren, wenn eine kugelförmige Welle an der Grenze zweier Systeme ankommt, indem man für jeden Radius der Welle die durch das Brechungsgesetz angegebene Construction ausführt. Die Form der gebrochenen Welle ist dann eine ziemlich complicirte.

Für die Brechung in krummen Flächen gilt dieselbe Bemerkung, welche wir im vorigen §. für die Reflexion an solchen Flächen machten; wir gehen hier auf specielle Fälle nicht ein.

Zweites Kapitel.

Von der Wellenbewegung der Körper.

§. 85.

Schwingende Bewegung der Körper in ihren einzelnen Theilen in Folge der Elasticität. Bewegungen der Art, wie wir sie im vorigen

Kapitel betrachtet haben, können wir in allen Körpern mit Hülfe der elastischen Kräfte hervorbringen. Bei den festen Körpern haben wir im ersten Kapitel des zweiten Abschnitts gezeigt, dass die Moleküle durch die zwischen ihnen thätigen Kräfte in festen gegenseitigen Lagen gehalten werden, und dass durch eine jede Verschiebung der Moleküle gegen einander elastische Kräfte auftreten, welche die Moleküle wieder gegen ihre Gleichgewichtslage hintreiben. Wir sahen weiter, dass diese elastischen Kräfte in allen Fällen der Grösse der Verschiebungen proportional sind. Wird ein Stab seiner Länge nach ausgedehnt, so ist die geweckte elastische Kraft der Verlängerung, dieselbe gemessen in Bruchtheilen der ursprünglichen Länge, proportional. Da nun die Verlängerung des Stabes gleich der Summe der Vergrösserung der Abstände der einzelnen Molekülschichten, die ursprüngliche Länge gleich der Summe der ursprünglichen Abstände der Molekülschichten ist, so folgt, dass die Kraft, mit welcher eine von der benachbarten entfernte Molekülschicht in ihre Gleichgewichtslage zurückgetrieben wird, der Verschiebung direkt proportional ist. Das Gleiche, sahen wir, ist der Fall bei der Biegung und bei der Torsion.

Wird deshalb in einem festen Körper an irgend einer Stelle eine solche Verschiebung der Moleküle hervorgebracht, und dann der Körper sich selbst überlassen, so müssen die Moleküle durch die elastischen Kräfte gegen die Gleichgewichtslage zurückgetrieben werden. Da sie nun so lange einen Antrieb erhalten, bis sie in ihrer Gleichgewichtslage angekommen sind, erreichen sie dieselbe mit einer gewissen Geschwindigkeit und müssen in Folge dessen über die Gleichgewichtslage hinausgehen. Sofort aber werden sie von den elastischen Kräften zurückgezogen, sie können also nur so weit über die Gleichgewichtslage hinausgehen, als sie vorher an der andern Seite von derselben entfernt waren. Sie kehren deshalb wieder zurück zur Gleichgewichtslage, gehen wieder über dieselbe hinaus u. s. f., kurz sie gerathen in Schwingungen; das Gesetz der schwingenden Bewegung muss das im vorigen Kapitel abgeleitete sein, da das hier wirksame Kraftgesetz das dort vorausgesetzte ist. Von der zuerst in Schwingung versetzten Stelle muss sich die Bewegung in den Körpern ausbreiten, da die an einer Stelle bewirkte Störung des Gleichgewichts auch das Gleichgewicht der umgebenden Moleküle stört.

Ganz ebenso wie bei den festen Körpern erhalten wir Schwingungen in Flüssigkeiten und Gasen, doch in diesen nur, wenn wir den Molekülen eine solche Verschiebung ertheilen, dass sie einander genähert oder von einander entfernt werden, also nur, wenn wir Verdichtungen oder Verdünnungen hervorbringen. Denn bei den Flüssigkeiten und den unter einem bestimmten Drucke stehenden Gasen befinden sich die Moleküle nicht in festen gegenseitigen Lagen, sondern nur in bestimmten Abständen; Verschiebungen der Moleküle, die nicht mit einer Veränderung der Abstände verbunden sind, rufen keine elastischen Kräfte hervor. In Flüssigkeiten und Gasen können also durch Elasticität nur longitudinale Schwingungen stattfinden und sich ausbreiten.

Wir betrachten in diesem Kapitel die hauptsächlichsten Schwingungserscheinungen, die wir an den Körpern hervorrufen können.

§. 86.

Fortpflanzung longitudinaler Wellen in Stäben. Der einfachste Fall der Ausbreitung von Schwingungen in festen Körpern ist derjenige der Fortpflanzung von longitudinalen Schwingungen in einem unbegrenzten Stabe, respective in einem Stabe von sehr grosser Länge. Denken wir uns das eine Ende eines sehr langen Stabes etwa durch einen Schlag mit einem Hammer oder auf irgend eine andere Weise in longitudinale Schwingungen gesetzt, so muss sich in demselben die schwingende Bewegung genau in der Weise fortpflanzen, wie wir es im vorigen Kapitel für eine Punktreihe ableiteten. Jede Molekülschicht des Stabes senkrecht zur Stabachse entspricht einem Punkte der Punktreihe, da alle Moleküle einer solchen Schicht sich gemeinsam bewegen, wie der damals betrachtete Punkt. Ist daher α die Amplitude, welche der ersten Schicht des Stabes ertheilt wird, so ist die Verschiebung y einer um x von dem ursprünglich bewegten Stabende entfernten Molekülschicht aus ihrer Gleichgewichtslage zur Zeit t

$$y = \alpha \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right),$$

wenn T die Schwingungsdauer und λ die Länge der Wellen ist. Letztere ist mit T verknüpft durch die Gleichung

$$\lambda = c\,.\,T,$$

wenn c die Fortpflanzungsgeschwindigkeit bedeutet, welche, wie wir sahen, gegeben ist durch

$$c = \sqrt{\frac{e}{d}}.$$

Um letztere zu erhalten, haben wir für e nur die Elasticität und für d die Dichtigkeit des Stabes nach unserer damaligen Definition einzusetzen. Bezeichnen wir mit E den Elasticitätscoefficienten der Substanz, aus welcher der Stab besteht, und mit q den Querschnitt des Stabes, so ist

$$e = Eq$$

denn das ist die Kraft, mit der eine Molekülschicht gegen ihre Gleichgewichtslage zurückgetrieben wird, wenn ihre Verschiebung gleich eins wird (§. 30).

Als Dichtigkeit d der Punktreihe bezeichneten wir die Masse der Längeneinheit, wir haben also die Masse der Längeneinheit des Stabes dafür zu setzen. Ist s das specifische Gewicht des Stabes, so wird

$$d = \frac{sq}{g},$$

denn es ist dann sq das Gewicht der Längeneinheit des Stabes. Damit wird dann

$$c = \sqrt{\frac{g\,.\,Eq}{sq}} = \sqrt{\frac{gE}{s}}.$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen Wellen in einem Stabe ist demnach von dem Querschnitte des Stabes ganz unabhängig, sie wird lediglich bestimmt von dem Elasticitätscoefficienten und der Dichtigkeit des Materials.

Den Ausdruck für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit findet man häufig unter einer andern Form. Wird ein Stab von der Länge l und dem Querschnitte q durch ein Gewicht P belastet, so ist nach §. 30. die Verlängerung

$$\varepsilon = \frac{1}{E} \cdot \frac{Pl}{q}.$$

Setzen wir nun die Längen unseres Stabes gleich 1 Meter und nehmen als Gewicht P das Gewicht π eines Stabes desselben Materials, desselben Querschnitts und von 1 Meter Länge, so wird die Verlängerung δ

$$\delta = \frac{1}{E} \cdot \frac{\pi}{q}.$$

Nun ist nach der Definition $\pi = qs$, somit

$$\delta = \frac{1}{E} \cdot s; \quad E = \frac{s}{\delta},$$

Setzen wir diesen Ausdruck für den Elasticitätscoefficienten in die Gleichung für c, so wird

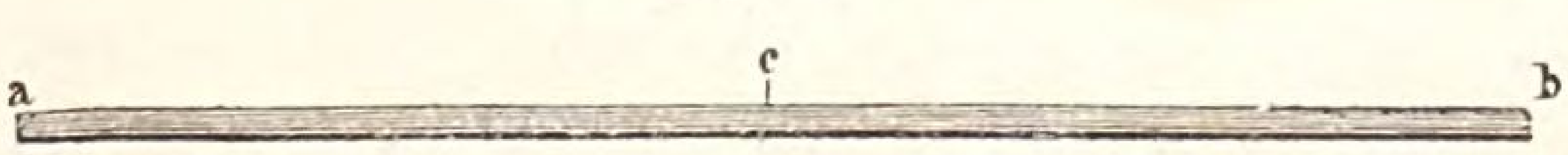
$$c = \sqrt{\frac{g}{\delta}},$$

die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen Schwingungen in einem Stabe ist gleich der Quadratwurzel des Quotienten aus der Zahl g und der Verlängerung, welche ein Stab desselben Materials von 1 Meter Länge durch ein dem Gewichte des Stabes gleiches Gewicht erfährt.

§. 87.

Longitudinale Schwingungen begrenzter Stäbe. Wird an irgend einer Stelle eines begrenzten Stabes eine longitudinale Schwingung hervorgerufen, so breitet sich dieselbe durch den Stab bis zur Grenze aus, wird an der Grenze reflectirt und liefert, da eine kurze Zeit nach dem Beginne der Schwingungen in dem Stabe sich Bewegungen nach entgegengesetzter Richtung fortpflanzen, stehende Wellen. Die Stäbe gerathen also in Schwingungen, deren Dauer von der Länge und dem Material abhängig ist, aus dem die Stäbe gemacht sind und ausserdem von der Art, wie die Stäbe befestigt sind. Wir wollen zunächst einen Stab betrachten, der wie ab Fig. 103 nur in seiner Mitte leicht gehalten wird, an seinen Enden frei ist.

Fig. 103.



Setzen wir voraus, das Ende b werde in eine schwingende Bewegung versetzt, deren Amplitude α sei, deren Schwingungsdauer T. Die Bewegung pflanzt sich dann durch den Stab bis zum Ende a fort, wird dort reflectirt und kehrt in dem Stabe gegen b zurück. Da die Dichtigkeit der Luft gegenüber derjenigen des festen Körpers eine sehr kleine ist, wird die Amplitude der Bewegung bei der Reflexion so wenig geschwächt, dass wir auch für die gegen b zurückkehrende Bewegung dieselbe gleich α setzen können. Die Reflexion geschieht ferner, da das zweite Mittel ein dünneres ist, ohne Umkehr des Vorzeichens der Schwingungen. Zur Zeit t wird deshalb die Bewegung einer um x von b entfernten Molekülschicht durch folgende Gleichungen

gegeben sein. Erstens ist der Abstand y_1 der Molekülschicht von der Gleichgewichtslage durch die bei b erregte Bewegung

$$y_1 = \alpha \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right),$$

die Bewegung, welche von b ausgeht, wird bei a reflectirt, nachdem sie die Länge l des Stabes durchlaufen hat, sie hat dann noch, um zu der betrachteten um x von b entfernten Molekülschicht zu gelangen, den Weg $l - x$ zurückzulegen. Da sie nun bei a ohne Aenderung des Vorzeichens reflectirt wird, so ist der Abstand y_2 der betrachteten Schicht von der Gleichgewichtslage zur Zeit t in Folge dieser Bewegung

$$y_2 = \alpha \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{l}{\lambda} - \frac{l-x}{\lambda}\right),$$

die resultirende Bewegung ist deshalb

$$Y = y_1 + y_2 = 2\alpha \cos 2\pi \frac{l-x}{\lambda} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{l}{\lambda}\right).$$

Die Gleichung zeigt, dass die Bewegung diejenige stehender Wellen von der Schwingungsdauer T ist. Die Anzahl der sich auf dem Stabe ausbildenden stehenden Wellen hängt ab von der Länge des Stabes und der Schwingungsdauer T. Welche stehende Wellen sich auf dem Stabe überhaupt ausbilden können, ergibt sich aus der Bedingung, dass jedenfalls an den Enden des Stabes ein Schwingungsmaximum sein muss, das heisst also, dass dort die Amplitude der Bewegung jedenfalls den grössten Werth 2α haben muss. Da nun die Amplitude der Bewegung der verschiedenen durch den Abstand x vom Ende b gegebenen Molekülschichten durch den Factor

$$2\alpha \cos 2\pi \frac{l-x}{\lambda}$$

gegeben ist, so folgt, dass

$$\cos 2\pi \frac{l-x}{\lambda} = \pm 1 \text{ sein muss für } x = 0 \text{ und } x = l.$$

Es muss somit

$$\cos 2\pi \frac{l}{\lambda} = \pm 1; \quad 2\pi \frac{l}{\lambda} = n\pi, \quad l = n\frac{\lambda}{2},$$

es muss also die Länge des Stabes irgend ein Vielfaches einer halben Wellenlänge sein. Oder es können nur solche Schwingungen in dem Stabe zu stehenden Wellen Anlass geben, deren Oscillationsdauern so sind, dass während einer oder zwei oder irgend einem Vielfachen einer halben Oscillationsdauer die Bewegung sich durch die ganze Länge des Stabes fortpflanzt.

Die langsamsten Schwingungen, welche der Stab annehmen kann, sind somit solche, für welche $l = \frac{1}{2}\lambda$. Da nun, wenn c die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Bewegung im Stabe ist, somit

$$c = \sqrt{\frac{gE}{s}},$$

zwischen λ und T die Beziehung besteht

$$\lambda = cT = T . \sqrt{\frac{gE}{s}},$$

so folgt für die Dauer der langsamsten Schwingungen

$$T = \frac{2\,l}{c} = 2\,l \sqrt{\frac{s}{gE}} .$$

Die Schwingungsdauer des Stabes ist also gleich der doppelten Länge des Stabes dividirt durch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen im Stabe; sie ist deshalb unabhängig von der Grösse und der Form des Querschnitts, sie wird nur bedingt von der Länge, dem Elasticitätscoefficienten und dem specifischen Gewichte des Materials, aus dem der Stab besteht.

Die in einer Secunde von dem Stab vollführte Anzahl von Schwingungen ist

$$N = \frac{1}{T} = \frac{c}{2l} = \frac{1}{2\,l} \sqrt{\frac{gE}{s}},$$

sie ist also gleich dem Quotienten aus der Fortpflanzungsgeschwindigkeit und der doppelten Länge des Stabes.

Die Bewegung, welche die einzelnen Theile des Stabes vollführen, ergibt sich aus der Betrachtung der Werthe y, wenn wir den Moment fixiren, in dem

$$\sin 2\,\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{l}{\lambda}\right) = 1.$$

Dann ist

$$y = 2\,\alpha \cos 2\,\pi \frac{l - x}{\lambda};$$

somit ist für

$x = 0$	$x = {}^1/_4 l = {}^1/_8 \lambda$	$x = {}^1/_2 l = {}^1/_4 \lambda$	$x = {}^3/_4 l = {}^3/_8 \lambda$	$x = l = \frac{\lambda}{2}$
$y = 2\,\alpha$	$y = \alpha \sqrt{2}$	$y = 0$	$y = -\,\alpha \sqrt{2}$	$y = -\,2\alpha.$

Die Mitte des Stabes ist somit ein Knotenpunkt, der stets in Ruhe bleibt, und die beiden Hälften des Stabes schwingen jede wie eine halbe stehende Welle, so dass die beiden Hälften stets in entgegengesetzter Phase schwingen.

Gibt man den erregten Schwingungen die halbe Dauer, so kann ebenfalls der Stab in stehende Schwingungen gerathen. Es ist dann $l = \lambda$

$$T_1 = \frac{\lambda}{c} = \frac{l}{c} = \frac{2\,l}{2\,c} .$$

Die Bewegung des Stabes erhalten wir wieder, indem wir die Werthe von y betrachten, wenn der von der Zeit abhängige Coefficient der Gleichung für $y = 1$ ist.

Dann wird, da jetzt $l = \lambda$ für

$x = 0$	$x = {}^1/_4 l = {}^1/_4 \lambda$	$x = {}^1/_2 l = {}^1/_2 \lambda$	$x = {}^3/_4 l = {}^2/_4 \lambda$	$x = l = \lambda$
$y = 2\alpha$	$y = 0$	$y = -\,2\alpha$	$y = 0$	$y = 2\,\alpha$

In dem Stabe sind somit 2 Knotenpunkte in ${}^1/_4 l$ und ${}^3/_4 l$; das zwischen den beiden Knotenpunkten liegende Stück schwingt als eine stehende Welle, und die beiden Viertel zwischen den Knotenpunkten und den Enden als halbe stehende Wellen; diese beiden halben stehenden Wellen sind

unter sich in gleicher Phase, das zwischen den Knotenpunkten liegende Stück ist in gerade entgegengesetzter Phase.

Die Schwingungsanzahl ist in diesem Falle die doppelte von vorher

$$N_1 = 2 \frac{c}{2l}.$$

Allgemein können in dem Stabe stehende Wellen existiren, deren Schwingungsdauern T_n und Schwingungszahlen N_n sind

$$T_n = \frac{2l}{n.c} \qquad N_n = n \frac{c}{2l},$$

worin n jede ganze Zahl sein kann. Es entstehen dann in dem Stabe n Knotenpunkte, von denen die den Enden nächsten von den Enden um $\frac{l}{2n}$ entfernt sind, und welche überhaupt im Stabe einen Abstand von $\frac{l}{n}$ besitzen. Einer Ableitung im Einzelnen wird es nach dem Vorigen nicht bedürfen.

Mit denselben Schwingungszahlen kann ein Stab schwingen, wenn seine beiden Enden fest eingeklemmt sind, jedoch ist der Bewegungszustand oder die Vertheilung der Bewegung in dem Stabe dann eine ganz andere. Es folgt das schon daraus, dass in dem Falle die Enden des Stabes, da sie fest eingeklemmt sind, stets in Ruhe sein müssen. Um die Bewegung des Stabes dann zu erhalten, nehmen wir an, es sei an irgend einer Stelle des Stabes etwa durch Reiben eine schwingende Bewegung erzeugt, und es sei dadurch im Abstande d von dem Ende b ein Schwingungsmaximum entstanden. Wir rechnen die Zeit t von dem Beginne der Schwingungen an dieser Stelle. Von hier aus pflanzt sich dann die Bewegung im Stabe nach beiden Seiten fort, wird an den Grenzen a und b reflectirt und geht von beiden Enden im Stabe wieder zurück. Da die beiden Stabenden als fest vorausgesetzt werden, so geschieht die Reflexion so, wie an einem Mittel von unendlich grosser Dichtigkeit, somit tritt ein Wechsel des Vorzeichens der Bewegung oder Verlust einer halben Wellenlänge an beiden Enden ein, die reflectirte Amplitude hat aber merklich dieselbe Grösse als die ankommende.

Die Bewegung, welche eine um x von b entfernte Molekülschicht in Folge jeder der beiden zu ihr kommenden erhält, ist dann durch folgende beiden Gleichungen gegeben. Erstens für die an b reflectirte Bewegung

$$y_1 = -\alpha \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{d}{\lambda} - \frac{x}{\lambda}\right);$$

zweitens für die an a reflectirte

$$y_2 = -\alpha \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{l-d}{\lambda} - \frac{l-x}{\lambda}\right);$$

somit wird die resultirende Bewegung

$$y = y_1 + y_2 = -2\alpha \cos 2\pi \frac{l-d-x}{\lambda} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{l}{\lambda}\right);$$

die in dem Stabe möglichen Bewegungen ergeben sich wieder aus den für die Stabenden vorhandenen Bedingungen, dass für diese stets $y = 0$ sein muss.

Es muss deshalb für $x = 0$ und für $x = l$ der Werth von y immer 0 sein, oder es muss

$$\cos 2\pi \frac{l-d}{\lambda} = 0 \qquad \cos 2\pi \frac{d}{\lambda} = 0$$

oder es muss sowohl

$$2\pi \frac{l-d}{\lambda} = (2n+1)\frac{\pi}{2}; \quad l-d = (2n+1)\frac{\lambda}{4}$$

als auch

$$2\pi \frac{d}{\lambda} = (2n+1)\frac{\pi}{2} \qquad d = (2n+1)\frac{\lambda}{4},$$

worin n jede ganze Zahl sein kann. Der Abstand der Stelle des Stabes, an welchem ein Schwingungsmaximum vorhanden ist, muss demnach von beiden Stabenden ein ungerades Vielfaches von einer viertel Wellenlänge entfernt sein. Daraus folgt, dass die Länge des Stabes selbst irgend eine Anzahl von halben Wellenlängen sein muss. Ist die Zahl derselben n, so folgt wie vorhin für die Schwingungsdauer T_n und Schwingungsanzahl N_n

$$T_n = \frac{1}{n}\,\frac{2l}{c} \qquad N_n = n\frac{c}{2l}.$$

Die Vertheilung der Bewegung im Stabe ist nun für die einzelnen Fälle leicht zu erhalten. Ist $n = 1$, so ist $l = {}^1/_2\lambda$; $d = {}^1/_4\lambda$. Es wird dann, wenn das von der Zeit abhängige Glied der Gleichung $\pm$ 1 ist, sein

$$\begin{array}{lllll} x = 0 & x = {}^1/_4 l = {}^1/_8\lambda & x = {}^1/_2 l = {}^1/_4\lambda & x = {}^3/_4 l = {}^3/_8\lambda & x = l \\ y = 0 & y = \mp \alpha\sqrt{2} & y = \mp 2\alpha & y = \mp \alpha\sqrt{2} & y = 0. \end{array}$$

Der Stab schwingt somit als eine stehende Welle, deren Knotenpunkte die Endpunkte des Stabes sind.

Ist $n = 2$, so ist $l = \lambda$ und d entweder gleich ${}^1/_4\lambda$ oder ${}^3/_4\lambda$; setzen wir $d = {}^1/_4\lambda$, so wird, wenn der von der Zeit abhängige Factor gleich 1 ist, aus

$$y = -2\alpha \cos 2\pi \frac{{}^3/_4 l - x}{\lambda} = -2\alpha\cos 2\pi \frac{{}^3/_4\lambda - x}{\lambda}$$

$$\begin{array}{llllll} \text{für } & x = 0 & x = {}^1/_4 l = {}^1/_4\lambda & x = {}^1/_2 l = {}^1/_2\lambda & x = {}^3/_4 l = {}^3/_4\lambda & x = l \\ & y = 0 & y = 2\alpha & y = 0 & y = -2\alpha & y + 0. \end{array}$$

Der Stab erhält in der Mitte einen Knotenpunkt, jede Hälfte schwingt wie eine stehende Welle.

Ist $n = 3$, so zerfällt der Stab in drei stehende Wellen, die Knotenpunkte liegen in ${}^1/_3$ der Stablänge von den Enden und von einander. Allgemein zerfällt der Stab in n stehende Wellen und die Knotenpunkte liegen $\frac{1}{n}$ Stablänge von den Enden und von einander.

Die Schwingungszahlen werden andere, wenn wir den Stab etwa an seinem Ende bei a fest einklemmen, dagegen das Ende b freilassen. Betrachten wir das Ende b als den Ursprung der Bewegung, so werden die Gleichungen für eine Molekülschicht im Abstande x von b, da die von b ausgehenden Bewegungen bei a mit Wechsel des Vorzeichens reflectirt werden,

$$y_1 = \alpha \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

$$y_2 = -\alpha \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{l}{\lambda} - \frac{l-x}{\lambda}\right),$$

somit wird die resultirende

$$y = y_1 + y_2 = 2\alpha \,.\, \sin 2\pi \frac{l-x}{\lambda} \,.\, \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{l}{\lambda}\right).$$

Die in dem Stabe möglichen Bewegungen erhalten wir auch hier wieder aus den Bedingungen für die Enden des Stabes. Am Ende b, also wo $x = 0$ ist, müssen die Amplituden den grössen Werth haben, da das Ende frei ist, am Ende a, wo $x = l$ ist, muss y zu allen Zeiten gleich Null sein. Letzteres ist schon nach der Form der Gleichung erfüllt. Zur Bestimmung der Beziehung zwischen l und λ haben wir daher nur zu beachten, dass

$$\sin 2\pi \frac{l}{\lambda} = \pm 1$$

$$2\pi \frac{l}{\lambda} = (2n+1)\frac{\pi}{2}; \quad l = (2n+1)\frac{\lambda}{4}.$$

Es können demnach nur solche stehende Wellen in dem Stabe bestehen, für welche die Länge des Stabes eine viertel Wellenlänge oder ein ungerades Vielfaches von einer viertel Wellenlänge ist. Da auch hier die Beziehung besteht $\lambda = cT$, so folgt für die Schwingungsdauer und Schwingungsanzahl

$$T_n = \frac{4l}{(2n+1)c} \qquad N_n = (2n+1)\frac{c}{4l}.$$

Die langsamsten Schwingungen sind jene, für welche $n = 0$, also $l = \frac{1}{4}\lambda$ ist, die Schwingungsdauer ist

$$T = \frac{4l}{c}.$$

Die langsamsten Schwingungen eines an einem Ende festen, an dem andern Ende freien Stabes haben also die doppelte Dauer, als wenn der Stab an beiden Enden frei oder an beiden Enden fest ist.

In dem Falle nehmen die Werthe von y, wenn der von der Zeit abhängige Factor der Gleichung gleich 1 ist, ab von $y = 2\alpha$, wenn $x = 0$ ist, bis $y = 0$, wenn $x = l$ ist. Der Stab schwingt daher wie eine halbe stehende Welle.

Die nächst raschern Schwingungen sind jene, für welche $n = 1$ ist, deren Dauer ist

$$T = 3\,\frac{4l}{c}.$$

Man findet leicht, dass dann in $\frac{1}{3}$ des Stabes vom freien Ende ein Knotenpunkt vorhanden ist, so dass $\frac{2}{3}$ des Stabes als eine stehende Welle und das letzte Drittel am freien Ende als eine halbe stehende Welle schwingt.

Dann können Schwingungen im Stabe bestehen, deren Anzahl die 5fache, 7fache etc. ist, so dass die überhaupt möglichen Schwingungszahlen sich verhalten, wie die Reihe der ungeraden Zahlen. Bei der fünf-

fachen Schwingungszahl entstehen in dem Stabe 3, bei der siebenfachen 5, überhaupt bei der $(2n + 1)$fachen $2n - 1$ Knotenpunkte, es entstehen n ganze und eine halbe stehende Welle. Einer Ableitung im Einzelnen wird es nicht bedürfen.

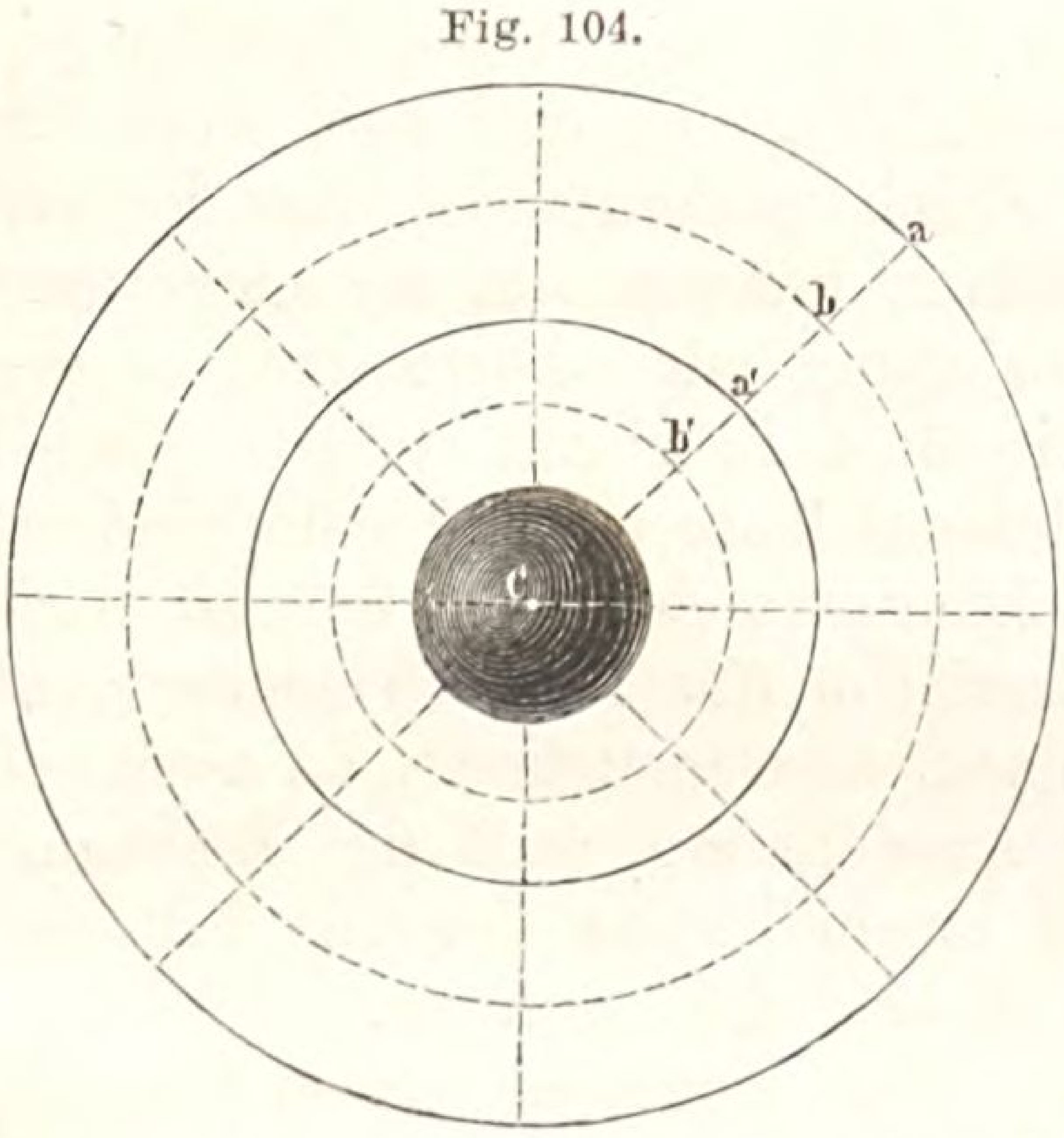
Die experimentellen Bestätigungen für die in diesem Paragraphen abgeleiteten Sätze werden wir im nächsten Kapitel kennen lernen, da wir die longitudinalen Schwingungen am sichersten durch die von ihnen hervorgerufenen Töne untersuchen.

§. 88.

Ausbreitung longitudinaler Schwingungen in Flüssigkeiten und Gasen. In Flüssigkeiten und in Gasen, welche unter einem bestimmten Drucke stehen, werden die Moleküle durch die zwischen ihnen thätigen Kräfte in bestimmten gegenseitigen Abständen gehalten; eine Veränderung der Abstände ruft elastische Kräfte hervor, es folgt somit, wie wir schon §. 86 bemerkten, dass auch in diesen Körpern longitudinale Schwingungen stattfinden und sich verbreiten können.

Denken wir uns etwa eine elastische Kugel C Fig. 104 im Innern einer Flüssigkeit oder eines Gases, etwa in der Luft, in longitudinale Schwingungen versetzt, so dass also die Kugel in rascher Folge abwechselnd grösser und kleiner werde. Eine Ausdehnung der Kugel stösst dann alle an der Oberfläche derselben anliegenden Theile in der Richtung der Radien fort. In Folge dieser den Theilchen nach aussen ertheilten Geschwindigkeit tritt rings um die Kugel eine Verdichtung der Flüssigkeit ein, und in Folge dieser Verdichtung übt die unmittelbar die Kugel umgebende Schicht einen stärkern Druck von innen nach aussen, als umgekehrt die weitern Schichten nach innen. Es muss in Folge dieses grösseren Druckes die nach aussen gerichtete Bewegung sich auf eine weitere Schicht übertragen, von wo aus sie dann aus denselben Gründen immer weiter fortschreitet.

Fig. 104.



Zieht die Kugel, nachdem sie das Maximum der Ausdehnung erreicht hat, sich wieder zusammen, so wird in den dadurch frei gewordenen Raum die Flüssigkeit durch den Druck der Umgebung hineingetrieben. Die Flüssigkeit, welche die Kugel unmittelbar umgibt, erhält somit eine rückgängige Bewegung, in Folge deren in der unmittelbaren Umgebung der Kugel eine Verdünnung eintritt, welche dann die rückgängige Bewegung der folgenden Schicht veranlasst. Die Verdünnung und die durch sie bewirkte rückgängige Bewegung pflanzt sich also gerade so nach allen Richtungen fort, wie vorher die Verdichtung und die voran gehende Bewegung. Jeder Schwingung der Kugel entspricht also die Ausbildung einer Welle, welche sich in Flüssigkeiten und Gasen als isotropen Medien, in Form von kugelförmigen Wellen genau in der §. 81 betrachteten Weise

ausbreiten. Sind die durch a und a' Fig. 104 gelegten Kreise gleicher Phase, beginnen z. B. die Theilchen auf a zum n mal, auf a' zum $(n+1)$ mal ihre forschreitende Bewegung, so ist aa' gleich einer Wellenlänge, die zwischen a und a' liegenden Punkte zeigen dann neben einander alle möglichen Phasen der Oscillation, die auf dem Kreise C liegenden Punkte haben $n + {}^1/_2$ Oscillationen vollführt und sind im Begriff, von der Gleichgewichtslage aus ihre rückgängige Bewegung zu beginnen. Zwischen C und a befindet sich die eine, zwischen b und a' die andere Hälfte der Welle. Ist T die Schwingungsdauer der Bewegung, so ist, wie wir sahen, die Wellenlänge λ gegeben durch

$$\lambda = c \,.\, T,$$

wenn c die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Bewegung ist, für welche wir, da die Bewegung eine longitudinale ist, die Gleichung haben

$$c = \sqrt{\frac{e}{d}}\,.$$

Zur Bestimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit haben wir nur die Grössen e und d den Verhältnissen entsprechend zu bestimmen. Beginnen wir mit den Flüssigkeiten.

Die Grösse e ist, wie wir sahen, die Kraft, mit der die einander genäherten Theilchen sich abstossen, die entfernten sich anziehen, wenn die Verschiebung der Theilchen der Einheit gleich geworden ist, mit der wir also die Grösse der Verschiebung multipliciren müssen, um die einer vorhandenen Verschiebung entsprechende Anziehung oder Abstossung zu erhalten. Denken wir uns eine Flüssigkeitssäule in einem Gefässe eingeschlossen, dessen Wände sich nicht ausdehnen können, und comprimiren wir diese Flüssigkeit etwa parallel der Längsaxe des Gefässes, so wird die dieser Compression entsprechende elastische Kraft gleich jener sein, welche die schwingende Bewegung veranlasst und fortpflanzt, da auch bei dieser nur eine Zusammendrückung und Ausdehnung nach der Richtung der Radien stattfindet, weil jeder parallel einem Radius liegende Flüssigkeitsfaden von der umgebenden Flüssigkeit eingeschlossen ist.

Ist nun v das Volumen der in dem Gefässe eingeschlossenen Flüssigkeit, ist $\varkappa$ der Compressionscoefficient der Flüssigkeit, wenn der Druck für die Flächeneinheit um die Grösse p zunimmt, so ist die einer Volumverminderung dv entsprechende Druckzunahme dp durch die Gleichung gegeben

$$\frac{dv}{v} = \varkappa \frac{dp}{p}$$

oder

$$dp = \frac{p}{\varkappa} \frac{dv}{v}\,.$$

Der Quotient $\frac{dv}{v}$ gibt uns die Volumverminderung der Flüssigkeit in Bruchtheilen des ursprünglichen Volumens. Da nun der Voraussetzung nach die Volumverminderung nur durch eine Verkürzung der Flüssigkeitssäule parallel einer Richtung, wie bei den longitudinalen Schwingungen, stattfindet, so gibt uns der Quotient gleichzeitig die Verschiebung der Flüssigkeitstheile gegen einander gemessen nach ihrem ursprünglichen

Abstand. Da wir nun weiter wissen, dass die durch eine Compression geweckte elastische Kraft stets gleich ist der äussern dieselbe bewirkenden Kraft, so folgt, dass dp gleich ist der zwischen den Molekülen in der Flächeneinheit thätigen Kraft, wenn dieselben um die Grösse $\frac{dv}{v}$, dieselbe gegeben in Bruchtheilen des ursprünglichen Abstandes, einander genähert sind. Daraus folgt, dass die Grösse e gegeben ist durch

$$e = \frac{p}{\varkappa} q,$$

wenn wir mit q den Querschnitt der betrachteten oder schwingenden Flüssigkeitssäule bezeichnen.

Die Grösse d ist die Masse der Längeneinheit der schwingenden Flüssigkeitssäule, es ist somit, wenn s das specifische Gewicht derselben bedeutet,

$$d = \frac{s\,q}{g}.$$

Wir erhalten somit für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der schwingenden Bewegung

$$c = \sqrt{\frac{p \cdot g}{\varkappa \,.\, s}}.$$

Die Werthe $\frac{p}{\varkappa}$, denen als Einheit der Fläche der Quadratmillimeter zu Grunde liegt, haben wir im §. 39 für einige Flüssigkeiten nach den Versuchen von Grassi mitgetheilt. Bei der Berechnung von c ist indess zu beachten, dass bei den §. 39 angegebenen Werthen von $\frac{p}{\varkappa} = E$ das Kilogramm als Einheit zu Grunde liegt. Wird nun als Längeneinheit das Meter genommen, so ist s das Gewicht einer 1 Meter langen Flüssigkeitssäule von 1 Quadratmillimeter Querschnitt, also das Gewicht von 1 Cubikcentimeter, ebenfalls in Kilogrammen auszudrücken.

Wir erhalten dann z. B. für Wasser von 4^0

$$\frac{p}{\varkappa} = 205; \quad s = 0{,}001; \quad g = 9{,}81$$

$$c = 1425 \text{ Meter}.$$

Für Quecksilber würde sich aus den Werthen

$$\frac{p}{\varkappa} = 3503; \quad s = 0{,}0136; \quad g = 9{,}81; \quad c = 5026 \text{ Meter}$$

ergeben.

Wie wir im nächsten Abschnitte sehen werden, haben Colladon und Sturm für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit im Wasser ganz mit den theoretisch abgeleiteten übereinstimmende Werthe erhalten, nämlich für die Temperatur 8^0 den Werth $c = 1435$ M.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in Gasen erhalten wir, indem wir in dem eben abgeleiteten Ausdrucke $\varkappa = 1$ setzen; denn nach dem Mariotte'schen Gesetze ist die der Volumverminderung dv entsprechende Druckmehrung dp durch die Gleichung gegeben

$$\frac{dv}{v} = \frac{dp}{p}.$$

Denn haben wir ein Volumen v eines Gases unter dem Drucke p und wächst der Druck um dp, so nimmt das Volumen um dv ab, so dass nach dem Mariotte'schen Gesetze

$$pv = (p + dp)(v - dv) = pv + vdp - pdv - dpdv.$$

Bei den hier betrachteten schwingenden Bewegungen ist nun dv so klein, dass wir $dpdv$ gleich Null setzen dürfen, dann folgt aber aus dieser Gleichung

$$vdp - pdv = 0 \text{ oder } dp = p\frac{dv}{v}.$$

Wir haben somit für die Grösse e in jedem Falle den Druck einzusetzen, unter welchem das Gas augenblicklich steht. Bedeutet demnach auch jetzt s das specifische Gewicht des Gases, so wird

$$c = \sqrt{\frac{pg}{s}}.$$

Ist nun s' die Dichtigkeit des Gases unter dem Druck P der Atmosphäre, so ist nach dem Mariotte'schen Gesetze

$$\frac{p}{s} = \frac{P}{s'},$$

somit

$$c = \sqrt{\frac{Pg}{s'}}.$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen hängt somit, da Dichtigkeit und Elasticität des Gases sich im gleichen Verhältnisse ändern, nicht von dem Drucke, unter welchem das Gas steht, ab, sondern ist für alle Drucke dieselbe.

An dem Ausdruck für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen in Gasen müssen wir eine Correction anbringen, die, wie wir später in der Wärmelehre nachweisen werden, ihren Grund darin hat, dass jede Compression der Gase eine Erwärmung, jede Ausdehnung eine Abkühlung zur Folge hat. Diese Erwärmung und Abkühlung bewirkt, dass von den Stellen der Verdichtung die Moleküle mit grösserer Kraft zu denen der Verdünnung getrieben werden, so zwar, dass die elastische Kraft im Verhältnisse 1 zu 1,40 vergrössert wird. Wir müssen deshalb den vorhin bestimmten Werth von c mit $\sqrt{1{,}40}$ multipliciren und erhalten somit

$$c = \sqrt{\frac{Pg}{s'} \cdot 1{,}40}\,.$$

Bei der Bestimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit in Gasen ist ferner darauf zu achten, dass die Dichtigkeit derselben bei einem gegebenen Drucke wesentlich von der Temperatur abhängig ist. Bezeichnen wir die Dichtigkeit des Gases bei der Temperatur des schmelzenden Eises mit s_0, so ist bei einer Temperatur t, dieselbe nach Graden der hunderttheiligen Skala gemessen,

$$s' = \frac{s_0}{1 + 0{,}00367\,t}.$$

Für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen bei der Temperatur t erhalten wir demnach

$$c = \sqrt{\frac{P \cdot g \cdot 1{,}40}{s_0}(1 + 0{,}00367\, t)}.$$

Die Dichtigkeit der Luft unter dem Drucke der Atmosphäre und bei der Temperatur 0^0 ist gleich 0,001293. Setzen wir für P den Druck der Atmosphäre, 10,333 Gramm auf das Quadratmillimeter ein, so wird für Luft in Metern

$$c = 331{,}3 \sqrt{1 + 0{,}00367\, t}.$$

Die Uebereinstimmung dieses Werthes mit der Erfahrung werden wir im nächsten Abschnitt nachweisen.

§. 89.

Stehende Wellen in Flüssigkeitscylindern. Schliesst man eine Flüssigkeit oder ein Gas in Röhren ein und erregt dann an einer Stelle der eingeschlossenen Flüssigkeit eine schwingende Bewegung, so pflanzt sich dieselbe in der Flüssigkeit fort und wird an den Enden reflectirt. Die in der Flüssigkeit in entgegengesetzter Richtung sich fortpflanzenden Schwingungen müssen dann ganz in derselben Weise zu stehenden Wellen Anlass geben, wie die in begrenzten Stäben vorhandenen Schwingungen.

Wir können auch hier dieselben verschiedenen Fälle unterscheiden wie bei den festen Stäben, die Flüssigkeit oder das Gas ist an beiden Enden frei oder es ist an dem einen Ende fest, an dem andern frei. Ersteres ist dann der Fall, wenn eine Flüssigkeit in einer heberförmigen an beiden Enden offenen Röhre, oder auch in einer offenen in eine grössere Flüssigkeitsmasse tauchenden Röhre zum Schwingen gebracht wird. Denn auch in dem letztern Falle ist die umgebende Flüssigkeit in Bezug auf die schwingende Bewegung weniger dicht als die in die Röhre eingeschlossene; denn die Flüssigkeit ausserhalb der Röhre kann bei einer an deren Ende ankommenden Verdichtung nach allen Seiten und deshalb leichter ausweichen als die Flüssigkeit im Innern der Röhre, welche sich nur parallel der Röhrenaxe bewegen kann. Das Gleiche gilt selbstverständlich für mit Gasen gefüllte Röhren, also etwa für eine in der Luft gehaltene an beiden Seiten offene Röhre. Die Gesetze der schwingenden Bewegung solcher begrenzter Cylinder von Flüssigkeiten und Gasen müssen zusammenfallen mit denen begrenzter an beiden Seiten freier Stäbe, wie nach den ausführlichen Entwicklungen der letzten §§. wohl nicht weiter nachgewiesen zu werden braucht. Ist demnach l die Länge des eingeschlossenen Flüssigkeits- oder Gascylinders, so sind die Schwingungsdauern der in denselben möglichen stehenden Wellen

$$T = \frac{2\, l}{n c},$$

somit die möglichen Schwingungszahlen

$$N = n \frac{c}{2 l},$$

worin c die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen bedeutet und n jede Zahl der natürlichen Zahlenreihe sein kann.

Der zweite Fall wird realisirt, wenn eine Flüssigkeit oder ein Gas

in einer an dem einem Ende offenen, an dem andern Ende geschlossenen Röhre zum Schwingen gebracht wird. Da die Bewegung der Theilchen durch den Verschluss an dem einen Ende gehemmt ist, müssen die stehenden Schwingungen hier gerade erfolgen wie in Stäben, die an dem einen Ende fest, an dem andern frei sind. Die Schwingungsdauern und Schwingungszahlen sind daher in diesem Falle

$$T = \frac{4\,l}{(2\,n-1)\,c}; \quad N = (2\,n-1)\,\frac{c}{4\,l}.$$

Wir werden in dem nächsten Abschnitte sehen, wie bei den Orgelpfeifen diese Fälle realisirt sind.

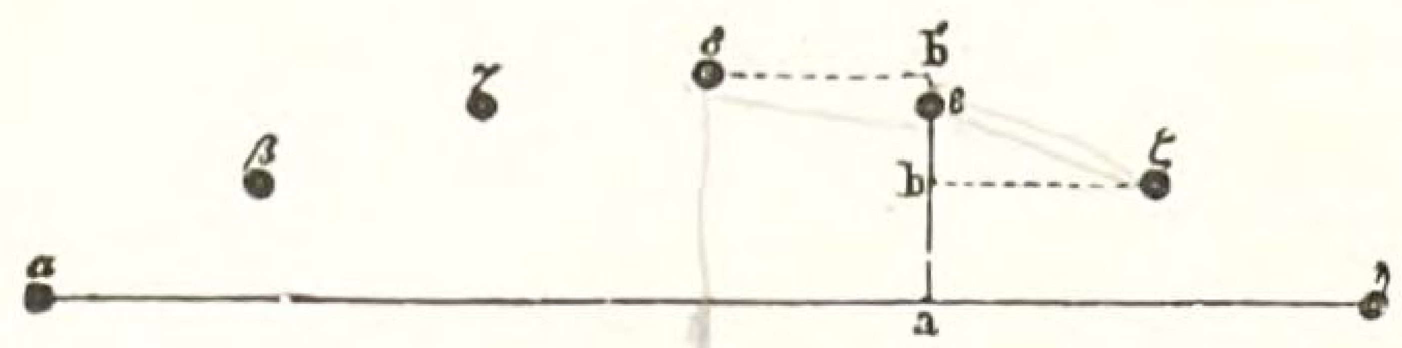
§. 90.

Transversale Schwingungen von fadenförmigen gespannten Körpern. Spannt man eine dünne, möglichst vollkommen biegsame Schnur von grosser Länge aus und versetzt dieselbe durch rasches Aufundabbewegen des einen Endes in transversale Schwingungen, so sieht man, wie diese an der Stelle, an der man sie erregte, verschwinden, dafür aber sofort an einer andern Stelle auftreten. Sie pflanzen sich als Wellenberg und Wellenthal auf der Schnur fort; nach und nach erhalten immer andere Theile der Schnur die Gestalt einer Welle, wie wir sie im vorigen Kapitel bei Betrachtung der transversalen Schwingungen einer Punktreihe abgeleitet haben.

Die transversalen Schwingungen einer Schnur, welche an sich nicht elastisch aber durch Gewichte gespannt ist, so dass jeder Punkt eine bestimmte Ruhelage hat, müssen sich nach denselben Gesetzen fortpflanzen, welche wir im vorigen Kapitel für die Fortpflanzung transversaler Schwingungen in Punktreihen ableiteten, so lange die Schnur oder die Saite eine so geringe Dicke hat, dass wir annehmen dürfen, alle Punkte eines Querschnittes bewegen sich ganz in gleicher Weise und die Ausbiegungen seien so klein, dass wir die bei einer Ausbiegung stattfindende Verlängerung vernachlässigen können. An Stelle der durch die Verschiebung der Punkte in einer elastischen Punktreihe geweckten elastischen Kraft tritt einfach die Spannung der Saite.

Um das zu zeigen, können wir direkt die Entwicklungen des §. 76 hier anwenden, welche uns die Beschleunigung eines Punktes in einer schwingenden Punktreihe lieferten. Ist $\alpha\eta$ Fig. 105 ein Stück der schwingenden Saite, etwa eine halbe Wellenlänge, und sind $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ benachbarte Querschnitte einer an dem einen Ende befestigten, durch ein an dem andern Ende angehängtes Gewicht p gespannten Saite, so

Fig. 105.



wird auch hier in Folge der Spannung jeder einzelne Querschnitt nach beiden Seiten gegen die benachbarten Querschnitte hingezogen und zwar mit einer der Spannung p gleichen Kraft. Der Querschnitt ε wird demnach einerseits gegen δ, andererseits gegen ζ mit der Kraft p hingezogen; in Folge dessen suchen sich die Punkte in ihre relative Gleichgewichtslage zu ziehen, in welcher sie alle in einer geraden Linie, der Ruhelage

der Saite befinden. Die Gleichgewichtslage von ε in Bezug auf ζ ist b, in Bezug auf δ ist b'. Die Kraft, mit welcher der Punkt nach b getrieben wird, ist gleich der zu εb parallelen Componente der Spannung, also gleich $p \sin \varepsilon \zeta b$; und ebenso ist die ihn nach b' treibende Kraft gleich $p \,.\, \sin \varepsilon \delta b'$. Die den Punkt ε nach der Gleichgewichtslage, also gegen a hintreibende Kraft ist somit $p\,(\sin \varepsilon\zeta b - \sin \varepsilon \delta b')$. Nun ist

$$\sin \varepsilon \zeta b = \frac{\varepsilon b}{\varepsilon \zeta}; \quad \sin \varepsilon \delta b' = \frac{\varepsilon b'}{\varepsilon \delta},$$

worin wir, da ausdrücklich vorausgesetzt wurde, dass wir die Verlängerung der Saite vernachlässigen dürfen, $\varepsilon \zeta = \varepsilon \delta = ad$ setzen dürfen. Die den Querschnitt ε gegen a treibende Kraft ist somit

$$p \cdot \frac{\varepsilon b - \varepsilon b'}{ad}.$$

Die Beschleunigung wird deshalb, wenn m die Masse des Querschnittes ist,

$$\frac{p}{m} \cdot \frac{\varepsilon b - \varepsilon b'}{ad}$$

oder auch, wenn d die Masse der Längeneinheit der Saite ist,

$$\frac{p}{d} \cdot \frac{\varepsilon b - \varepsilon b'}{ad^2}.$$

Wir erhalten somit ganz denselben Ausdruck wie §. 76, mit dem Unterschiede nur, dass an Stelle der Elasticität ae, welche in der Punktreihe durch die Verschiebung der Punkte geweckt wird, die Spannung p tritt. Bezeichnen wir mit α die Amplitude und mit T die Schwingungsdauer der erregten Bewegung, ferner mit λ die Wellenlänge, so ergibt sich deshalb auch aus einer der im §. 76 gemachten identisch gleichen Entwicklung zur Zeit t nach Beginn der Schwingung für den Abstand y eines Punktes, welcher vom Ausgangspunkt der Bewegung um die Strecke x entfernt ist:

$$y = \alpha \,.\, \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right).$$

Ist c die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Bewegung, so ist auch hier $\lambda = cT$ und

$$c = \sqrt{\frac{p}{d}}.$$

Ist nun q der Querschnitt und s das specifische Gewicht der Saite, so ist

$$d = \frac{q \cdot s}{g},$$

somit

$$c = \sqrt{\frac{p \cdot g}{q \cdot s}}.$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Bewegung ist somit der Quadratwurzel aus dem spannenden Gewichte direkt, derjenigen aus dem Querschnitt der Saite und ihrem specifischen Gewichte umgekehrt proportional.

Da man auf dünnen und schwach gespannten Schnüren die Wellen, welche an einer Stelle erregt sind, hinlaufen sehen kann, so kann man

durch eine Messung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit die abgeleiteten Sätze experimentell prüfen. Solche Messungen sind von den Gebrüdern E. H. und W. Weber ausgeführt; sie wandten eine runde, aus feiner Baumwolle hergestellte Schnur an, von der die Länge eines Meter 3,165 Gramm wog. Als die Schnur durch ein Gewicht von 610,5 Gr. gespannt war, erhielten sie die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $c = 43,^{m}361$. Nach der Theorie müsste dieselbe sein

$$c = \sqrt{\frac{610,5 \,.\, 9,81}{3,165}} = 43,483.$$

Bei einer Spannung von 2027 Gr. fand sich $c = 80,^{m}429$, während die Theorie den Werth 79,254 ergibt. Man sieht, wie genau die Beobachtung mit der schon von Euler gegebenen Theorie übereinstimmt.

Eine Vergleichung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der transversalen Schwingungen in einer dünnen gespannten Saite mit derjenigen der longitudinalen in Folge der Elasticität führt zu einer äusserst einfachen Beziehung. Für die letztere erhielten wir, wenn E den Elasticitätscoefficienten des Materials bedeutet,

$$c' = \sqrt{\frac{E g}{s}};$$

daraus folgt

$$\frac{c}{c'} = \sqrt{\frac{P}{E q}}.$$

Der Quotient unter dem Wurzelzeichen ist aber nach §. 30 nichts anders als die Verlängerung δ der gespannten Saite in Bruchtheilen der Länge derselben, welche sie durch das spannende Gewicht P erfährt. Das Verhältniss zwischen der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der transversalen und longitudinalen Schwingungen einer gespannten Saite ist somit gleich der in Bruchtheilen der ursprünglichen Länge gegebenen Verlängerung, welche die Saite durch das spannende Gewicht erhält, vorausgesetzt, dass durch die Spannung die Elasticitätsgrenze nicht überschritten ist.

§. 91.

Stehende Schwingungen gespannter Saiten. Wenn man eine gespannte Saite in irgend einer Weise, etwa durch Zupfen an einer Stelle in Schwingungen versetzt, so pflanzen sich diese Schwingungen bis an die Enden fort, werden dort, da die Enden der Saite stets fest sein müssen, mit Umkehr des Vorzeichens reflectirt und pflanzen sich dann in der Saite rückwärts fort. Die sich dann entgegen kommenden Schwingungen müssen stehende Wellen liefern, deren Schwingungsdauer von der Grösse der Spannung, der Länge und Dicke der Saite und dem specifischen Gewichte des Materials abhängig ist.

Die in der Saite möglichen Schwingungen und deren Dauer ergeben sich ganz genau in derselben Weise, wie wir die Schwingungen longitudinal schwingender, an beiden Enden fester Stäbe erhielten. Wir gelangen durch eine der im §. 87 durchgeführten wörtlich gleiche Entwicklung zu dem Resultate, dass in einer gespannten Saite alle jene Schwingungen stehende Wellen veranlassen können, für welche die Länge der Saite irgend ein Vielfaches einer halben Wellenlänge ist. Da nun, wenn T die Schwing-

ungsdauer, c die Fortpflanzungsgeschwindigkeit und λ die Wellenlänge der Bewegung ist,

$$T = \frac{\lambda}{c},$$

so folgt, da l immer gleich $n\,\frac{\lambda}{2}$, somit

$$\lambda = \frac{2\,l}{n}$$

ist, worin n jede Zahl der natürlichen Zahlenreihe sein kann, dass die möglichen Schwingungsdauern gegeben sind durch

$$T = \frac{2\,l}{n\,c}.$$

Die Schwingungszahlen, welche gleich dem reciproken Werthe der Schwingungsdauern sind, werden deshalb

$$N = n\,\frac{c}{2\,l}.$$

Die langsamsten Schwingungen sind jene, für welche n gleich 1 ist, bei diesen schwingt die ganze Saite als eine stehende Welle zwischen den festen Endpunkten hin und her. Die Schwingungsdauer ist dann

$$T = \frac{2\,l}{c} = 2\,l\,\sqrt{\frac{q\,.\,s}{g\,.\,P}}.$$

Dieselbe ist somit der Länge der Saite und der Quadratwurzel aus dem Querschnitte und dem specifischen Gewichte der Saite direkt, der Quadratwurzel aus der Spannung derselben umgekehrt proportional. Nehmen wir, was meistens der Fall ist, an, dass die Saite einen kreisförmigen Querschnitt vom Radius r hat, so ist $q = r^2\pi$, und wir können setzen

$$T = 2\,l\,r\,\sqrt{\frac{\pi\,.\,s}{g\,.\,P}},$$

oder die Schwingungsdauer der Saite ist ihrem Durchmesser direkt proportional.

Dieses aus der Theorie sich ergebende Resultat ist von den Gebrüdern Weber experimentell geprüft worden durch direkte Messung der Schwingungsdauer der Schnur, welche ihnen zu den im vorigen §. erwähnten Versuchen gedient hatte. Die Schnur hatte eine Länge von 16,622 Meter. Bei der Spannung $P = 610{,}5$ Gr. ergab sich für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c der Werth 43, 4 M., die Schwingungsdauer der Schnur, wenn sie als eine stehende Welle schwang, musste deshalb

$$T = \frac{2\,l}{c} = \frac{33{,}244}{43{,}4} = 0{,}766 \text{ Secunden}$$

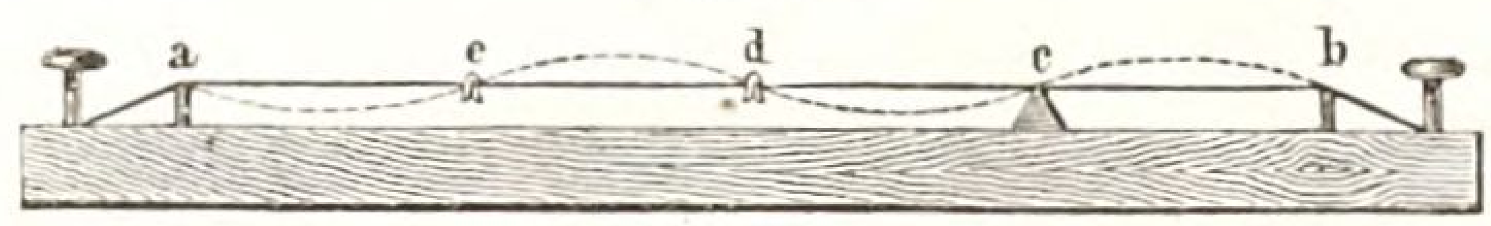
sein. Der Versuch ergab 0,773 Secunden, ein Werth, welcher von dem gefundenen sich nicht um ein Hundertstel des beobachteten Werthes unterscheidet.

Weitere Bestätigungen der Theorie werden wir im nächsten Abschnitte kennen lernen.

Ist n grösser als 1, so theilt sich die Saite in mehrere für sich

schwingende, durch ruhende Knotenpunkte von einander getrennte Theile. Ist $n = 2$, so entsteht ein Knotenpunkt in der Mitte und jede Hälfte der Saite schwingt für sich, ist $n = 3$, so entstehen zwei Knotenpunkte, die je $^1/_3$ der Saitenlänge von den Enden der Saite entfernt sind. Man kann diese Theilungen der Saite bei transversalen Schwingungen leicht hervorrufen und beobachten. Man unterstützt die Saite $a\,b$ Fig. 106 etwa durch einen untergeschobenen Steg in $\frac{1}{n}$ der Saitenlänge von dem einen Ende b der Saite im Punkte c, und hängt dann auf

Fig. 106



die Saite eine Anzahl kleiner Papierhäkchen, sogenannte Reiterchen, welche an der Stelle, wo sie eingeknickt sind, möglichst schmal sind. Streicht oder zupft man dann die Saite in der Nähe von b, und überlässt man dann die Saite sich selbst, so werden die Reiterchen überall von der Saite abgeworfen mit Ausnahme der Punkte, welche $\frac{2}{n}, \frac{3}{n} \cdot \cdot$ von c entfernt sind. An diesen Stellen, den Schwingungsknoten, bleiben sie ruhig hängen, und um so ruhiger, je schmaler man die Reiterchen genommen hat.

Dieser Versuch ist auch deshalb interessant, weil er direkt sichtbar macht, dass sich die Bewegung durch die Knotenpunkte einer Saite fortpflanzt, ja dass bei einer gespannten Saite ein Knotenpunkt die Quelle der Bewegung für dieselbe werden kann. Der Punkt c Fig. 106 ist durch einen Steg unterstützt, und trotzdem pflanzt sich die Bewegung durch ihn auf den andern Theil der Saite fort. Man sieht leicht, dass diese Ausbreitung über c hinaus durch die periodischen longitudinalen Impulse veranlasst wird, die der Punkt c in Folge der Schwingungen des Stückes $b\,c$ erhält.

Bei den in der musikalischen Praxis hauptsächlich angewandten Metallsaiten findet man die Resultate der Theorie nicht in aller Strenge bestätigt, man erhält dort merkliche Abweichungen zwischen den beobachteten und den nach der obigen Theorie berechneten Schwingungszahlen, welche um so grösser sind, je kürzer und dicker die Saiten sind. Für solche Saiten gilt unsere Theorie eben nur angenähert, da die Voraussetzung, dass solche Saiten nur durch die Spannung elastisch seien, nicht mehr erfüllt ist; solche Saiten haben auch ohne Spannung schon eine gewisse Steifigkeit, es wird bei ihnen durch eine Biegung, auch wenn sie nicht gespannt sind, Elasticität geweckt, in Folge deren die aus der Gleichgewichtslage gebrachte Saite sich gegen die Gleichgewichtslage hin bewegt und um dieselbe Schwingungen vollführt. Daraus folgt dann, dass die Schwingungsdauer einer solchen Saite stets etwas kleiner, die Schwingungszahl somit etwas grösser sein muss, als die obige Theorie sie liefert.

Diese Folgerung ist durch Versuche von N. Savart bestätigt worden, er fand, dass die wirklich beobachtete Schwingungszahl N_1 stets grösser war als die beobachtete N; für eine gegebene Saite ergab sich weiter, dass die Differenz zwischen den Quadraten der beobachteten und berechneten Schwingungszahl constant, also unabhängig von der Spannung P war. Savart nimmt an, dass diese Differenz

$$N_1^2 - N^2 = N_0^2$$

das Quadrat der Schwingungszahl sei, welche der Saite nur in Folge ihrer eignen Elasticität zukommt.

Diese von Savart gegebene Regel hat Duhamel durch folgende Ueberlegung abzuleiten versucht.

Für eine absolut biegsame, nur durch Spannung P elastische Saite gibt die Theorie die Schwingungszahl N nach der Gleichung

$$N^2 = \frac{1}{4\,l^2}\,\frac{g\,P}{q\,s} = \frac{g}{4\,l\,p}\,P,$$

wenn wir das Gewicht der Saite $l\,q\,s = p$ setzen.

Hat nun die Saite schon durch ihre eigene Elasticität eine gewisse Schwingungszahl N_0, so können wir uns die Saite als absolut biegsam denken, aber durch ein Gewicht P_0 gespannt, so zwar, dass in Folge dessen die Schwingungszahl gleich N_0 wird, so dass also

$$N_0^{\,2} = \frac{g}{4\,l\,p}\,P_0.$$

Die steife Saite wird demnach gerade so schwingen, als wenn sie nicht durch die Spannung P, sondern durch das Gewicht $P + P_0$ gespannt wäre, und es muss deshalb die Schwingungszahl gegeben sein durch

$$N_1^{\,2} = \frac{g}{4\,l\,p}\,(P + P_0) = N^2 + N_0^{\,2}.$$

Nach der von A. Seebeck gegebenen Theorie der Schwingungen steifer Saiten ist indess die Ableitung von Duhamel nicht streng richtig und ebenso der Savart'sche Satz nur ein angenäherter. Für dünne, nur wenig steife Saiten gibt Seebeck den Ausdruck

$$N_1 = N\left(1 + \frac{1}{l}\sqrt{\frac{E\,q}{P}}\right),$$

worin E den Elasticitätscoefficienten des Materials der Saite bedeutet, so dass bei einer gegebenen Saite der Unterschied der beobachteten und der nach der einfachen Theorie berechneten Schwingungszahl der Quadratwurzel aus der Spannung umgekehrt proportional ist.

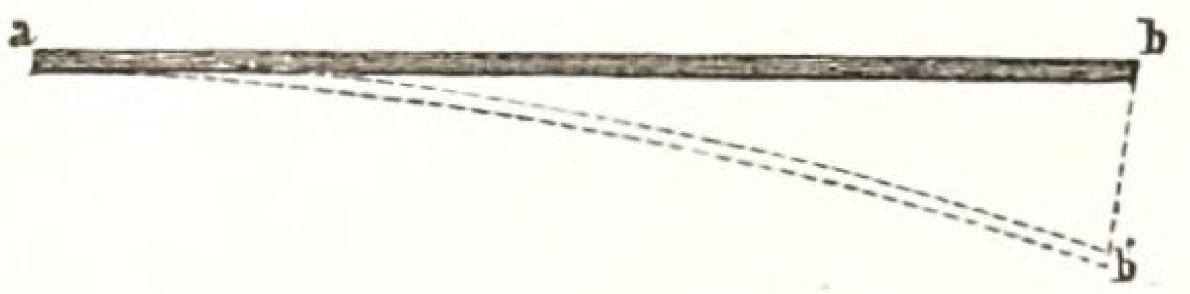
§. 92.

Transversalschwingungen von Stäben. Ebenso wie gespannte Saiten, so können auch elastische Stäbe in schwingende Bewegung gesetzt werden, wenn man denselben eine Biegung ertheilt und sie dann sich selbst überlässt. Sie vollführen dann transversale Schwingungen um ihre Gleichgewichtslage, deren Dauer von der Grösse der Amplitude unabhängig ist, da wir früher sahen, dass die durch Biegung geweckte Elasticität der Grösse der Biegung proportional ist.

Wegen der Complicirtheit des Vorganges der Biegung, bei der nicht nur eine Verschiebung der Molekülschichten, sondern auch eine Drehung derselben stattfindet, können wir die Ausbreitung solcher Wellen und die Ausbildung stehender Wellen nicht unmittelbar aus unserer Theorie ableiten; wir begnügen uns deshalb mit der Betrachtung des einfachsten

Falles, nämlich der Schwingungen eines an seinem einen Ende festen Stabes. Wird ein solcher Stab ab Fig. 107 an seinem einen Ende herabgebogen und dann sich selbst überlassen, so schwingt er wie ein Pendel oder wie eine halbe stehende Welle hin und her. Bezeichnen wir die Beschleunigung der schwingenden Bewegung, wenn der Punkt b um die Abstandseinheit von der Gleichgewichtslage entfernt ist, mit k^2, so ist die Beschleunigung, wenn b um die Strecke y von der Gleichgewichtslage entfernt ist,

Fig. 107.



$$\varphi = -k^2 y.$$

Das Gesetz der Beschleunigung ist somit dasselbe wie bei einem Pendel, oder auch wie das von uns bei der Betrachtung der schwingenden Bewegung eines Punktes zu Grunde gelegte. Es folgt somit gerade wie dort, dass die Schwingungsdauer T eines solchen Stabes gegeben ist durch

$$T = \frac{2\pi}{k}.$$

Im §. 32 sahen wir nun, dass eine am Ende b angreifende Kraft P dem Stabe eine Biegung $bb' = y$ ertheilt, welche, wenn β die Breite, h die Dicke, l die Länge des als rechteckig vorausgesetzten Stabes und E der Elasticitätscoefficient des betreffenden Materials ist, gegeben ist durch die Gleichung

$$y = 4\,\frac{P}{E}\,\frac{l^3}{\beta h^3}.$$

Die den Stab gegen die Gleichgewichtslage zurücktreibende Kraft ist somit

$$P = -\frac{E}{4}\,\frac{\beta h^3}{l^3}\,y,$$

wo wir das negative Vorzeichen auf der rechten Seite setzen, weil die Kraft stets gegen die Gleichgewichtslage gerichtet ist.

Um hieraus die Beschleunigung des Stabes zu erhalten, haben wir P mit einer der Masse des Stabes proportionalen Grösse zu dividiren. Denn die Grösse P gibt uns die am Ende b des Stabes angreifende, der durch die Biegung im Stabe geweckten elastischen gleiche Kraft; wir müssen deshalb, um die Beschleunigung des Stabes zu erhalten, P durch jene Masse dividiren, welche im Punkte b die Masse des ganzen Stabes ersetzt. Diese Masse ist jedenfalls derjenigen des Stabes proportional, sie würde das Trägheitsmoment des Stabes dividirt durch das Quadrat der Stablänge sein, wenn der Stab bei den Schwingungen nicht gebogen würde. In Folge der Formänderung des Stabes beschreiben aber die verschiedenen Punkte des Stabes verschiedene Bögen, somit hängt die in b anzubringende Masse in anderer Weise von derjenigen des Stabes ab, sie ist bei der hier vorausgesetzten Homogenität des Stabes einfach

$$m' = r\,m$$

zu setzen, wenn r eine Constante und m die Masse des Stabes bedeutet. Damit wird die Beschleunigung

$$\varphi = - \frac{E \beta h^3}{4 r m l^3} y,$$

oder es ist

$$k^2 = \frac{E \beta h^3}{4 r m l^3}.$$

Ist nun s das specifische Gewicht des Stabes, so ist

$$m = \frac{\beta h l s}{g},$$

somit

$$k^2 = \frac{1}{4 r} \frac{h^2}{l^4} \frac{E g}{s},$$

und

$$T = \frac{2 \pi}{k} = 2 \pi \sqrt{4 r} \frac{l^2}{h} \sqrt{\frac{s}{E g}}.$$

Die Schwingungszahl des Stabes wird dann, wenn wir gleichzeitig $2 \pi \sqrt{4 r} = a$ setzen,

$$N = \frac{1}{a} \frac{h}{l^2} \sqrt{\frac{E g}{s}}.$$

Die gleichen Ausdrücke, nur mit etwas anderm Werthe der Constanten a gelten auch für cylindrische Stäbe, bei denen statt der Dicke h der Radius ϱ des Stabes einzusetzen ist.

Ebenso gelten die gleichen Ausdrücke, nur mit immer andern Constanten, wenn der Stab nicht, wie wir voraussetzten, am einen Ende fest, am andern Ende frei ist, sondern auch wenn er an beiden Enden fest oder an beiden Enden frei ist, oder auch wenn der Stab an einem oder beiden Enden auf eine Unterlage gelegt, also halb frei ist.

Die Schwingungsdauer eines Stabes ist somit allgemein dem Quadrate der Stablänge und der Quadratwurzel aus dem specifischen Gewichte des Stabes direkt, der Dicke des Stabes und der Quadratwurzel aus dem Elasticitätscoefficienten umgekehrt proportional.

Die Werthe der Constanten a sind, um einige Beispiele anzugeben, wenn das eine Ende des Stabes fest, das andere frei ist, für einen parallelepipedischen Stab $a = 6{,}19$, für einen cylindrischen $a = 3{,}57$, wenn beide Enden fest oder beide Enden frei sind $a = 0{,}973$, resp. $0{,}562$.

Dass die transversalen Schwingungen elastischer Stäbe complicirter sind als die longitudinalen, ergibt sich auch aus der Betrachtung des Bewegungszustandes, z. B. eines an beiden Enden freien Stabes. Bei den longitudinalen Schwingungen bildet sich dann ein Knotenpunkt in der Mitte, bei den transversalen treten dagegen zwei Knoten auf, welche um 0,2242 der Stablänge von den beiden Enden, die selbst also um 0,5516 der Stablänge von einander entfernt sind. Man kann diese Knotenpunkte bei parallelepipedischen Streifen leicht auffinden, indem man die obern Seiten mit Sand bestreut und dann die Stäbe zum Schwingen bringt, etwa indem man sie mit einem Bogen streicht. Der Sand wandert dann von den schwingenden Stellen zu den Knoten hin, auf denen er in Ruhe bleibt, so dass er dort in Gestalt feiner, zur Längsaxe des Stabes senkrechter Linien sich ansammelt. Legt man z. B. einen Glasstreifen in den vorhin angegebenen

Stellen auf zwei Stege, so wandert der Sand zu den Stellen hin und bleibt dort liegen, ein Beweis, dass dort die Knoten sich befinden.

Ausser den im Vorstehenden abgeleiteten langsamsten Schwingungen können die Stäbe auch raschere Schwingungen vollführen, indem sie sich in einzelne schwingende Abtheilungen zerlegen. Wir gehen auf diese Frage indess nicht ein, da sie nur ein theoretisches Interesse hat, weil wir diese Schwingungen niemals zu benutzen haben.

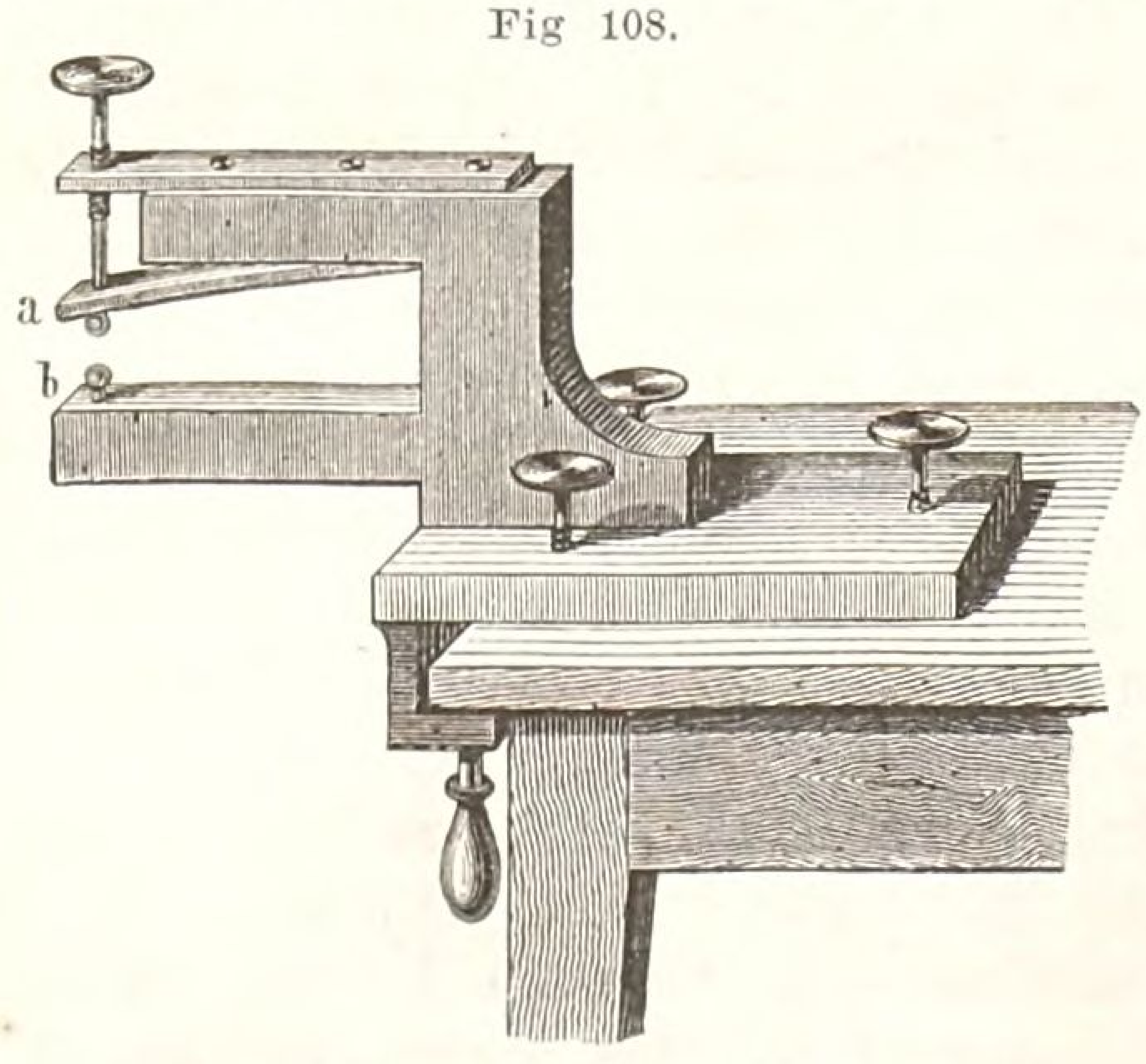
§. 93.

Transversale Schwingungen von Platten; Chladni's Klangfiguren. Dünne Platten eines festen elastischen Körpers, wie etwa Glas oder Metall oder auch gespannte Membranen gerathen, wenn man sie an einer Stelle schlägt oder an ihrem Rande mit dem Bogen streicht, ebenfalls in stehende Schwingungen. Die theoretische Ableitung dieser Schwingungen gehört zu den schwierigsten Aufgaben der mathematischen Physik und ist überhaupt erst in einigen Fällen gelungen, wir geben daher nur die wichtigsten Resultate.

Eine Membran, wie z. B. das Fell einer Pauke, kann entweder als Ganzes schwingen oder sich in schwingende Theile zerlegen, welche dann durch ruhende Linien, die sogenannten Knotenlinien, von einander getrennt sind. Eine Platte kann niemals als Ganzes schwingen, sondern zerlegt sich immer in mehrere, durch Knotenlinien getrennte Theile. Diese Knotenlinien ordnen sich immer zu regelmässigen Figuren, den sogenannten Klangfiguren, und die grosse Mannigfaltigkeit derselben auf ein und derselben Platte beweist, wie mannigfaltig die Theilung der Platte sein kann. Um die Knotenlinien sichtbar zu machen, bestreut man nach dem Vorgange von Chladni die Platten mit etwas staubfreiem Sand; bei dem Schwingen der Platte wandert dann der Sand nach den ruhenden Linien hin und gibt so die Klangfigur zu erkennen.

Um die Platten in Schwingungen zu versetzen, befestigt man sie in ihrer Mitte oder an einer andern Stelle mit der von Strehlke angegebenen Gabel Fig. 108, indem man sie mit der Schraube zwischen den beiden mit Tuch überzogenen Köpfen *a* und *b* festklemmt. Die über diese Köpfe gebundenen Tuchstückchen müssen von Zeit zu Zeit erneuert werden, damit die Sandkörnchen, welche in dem Tuch haften, die Platte nicht ritzen. Die Platte wird dann mit einem mit Colophonium bestrichenen Geigenbogen am Rande gestrichen, während man sie noch an irgend einer Stelle mit dem Finger festhält. Um die Figuren schön ausgebildet zu erhalten, muss man den Bogen senkrecht am Rande der Platte herabführen, und das Streichen so lange fortsetzen, bis keine vereinzelten Sandkörner mehr auf der

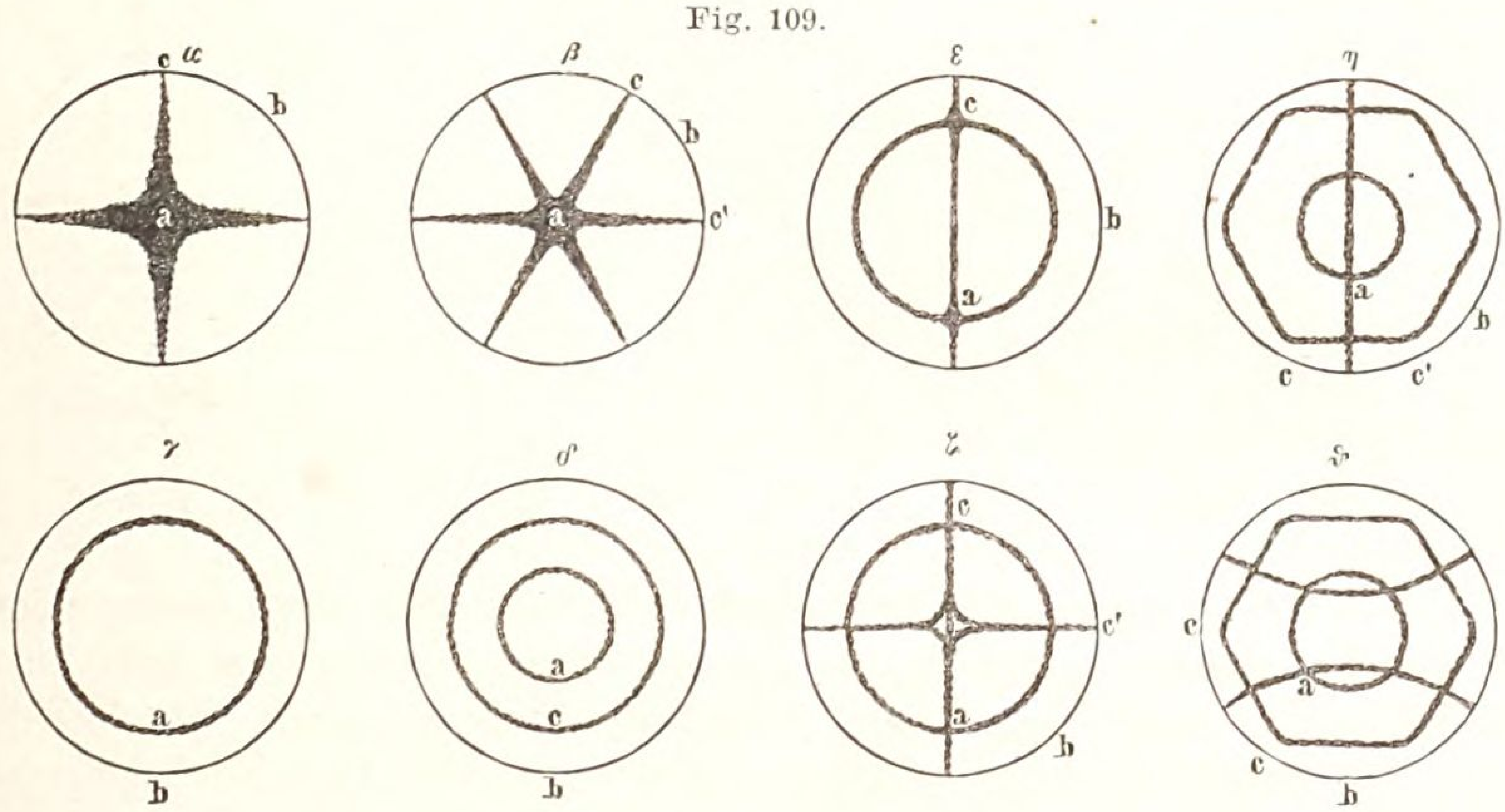
Fig 108.



Platte liegen. Um die Figuren recht scharf zu erhalten, darf man nicht zu viel Sand auf die Platten streuen.

Am einfachsten stellen sich die Klangfiguren auf kreisförmigen Platten, welche auch von Kirchhoff theoretisch abgeleitet sind. Dieselben bestehen entweder aus Durchmessern der Scheibe, oder aus concentrischen Kreisen, oder aus einer Combination beider; Fig. 109 gibt eine Anzahl solcher Figuren. Die Einklemmungspunkte sind stets mit a bezeichnet, der Punkt,

Fig. 109.



an dem die Platte zu streichen ist, mit b, und jener, an dem dieselbe festzuhalten ist, mit c. Klemmt man die Platte in der Mitte ein, so erhält man Figuren, die aus Durchmessern zusammengesetzt sind, deren Zahl von der Anzahl der Punkte abhängt, welche man berührt. Die Fig. α entsteht, wenn man einen Punkt des Randes festhält und in einem Abstande von 45^0 vom Berührungspunkte streicht; β bei der Berührung zweier 60^0 von einander entfernter Punkte, zwischen denen in der Mitte man streicht.

Klemmt man die Platte excentrisch ein und berührt keinen Punkt des Randes, so erhält man die aus Knotenkreisen bestehenden Figuren γ und δ. Der Durchmesser des Knotenkreises γ ist nach der Theorie von Kirchhoff, mit der die Versuche von Savart und Strehlke übereinstimmen, fast genau 0,68 des Scheibendurchmessers.

Die Figuren ε und ζ zeigen beide Theilungsarten gleichzeitig, ε mit einem Knotenkreis, dessen Durchmesser 0,78, ζ mit einem, dessen Durchmesser 0,82 des Scheibendurchmessers ist.

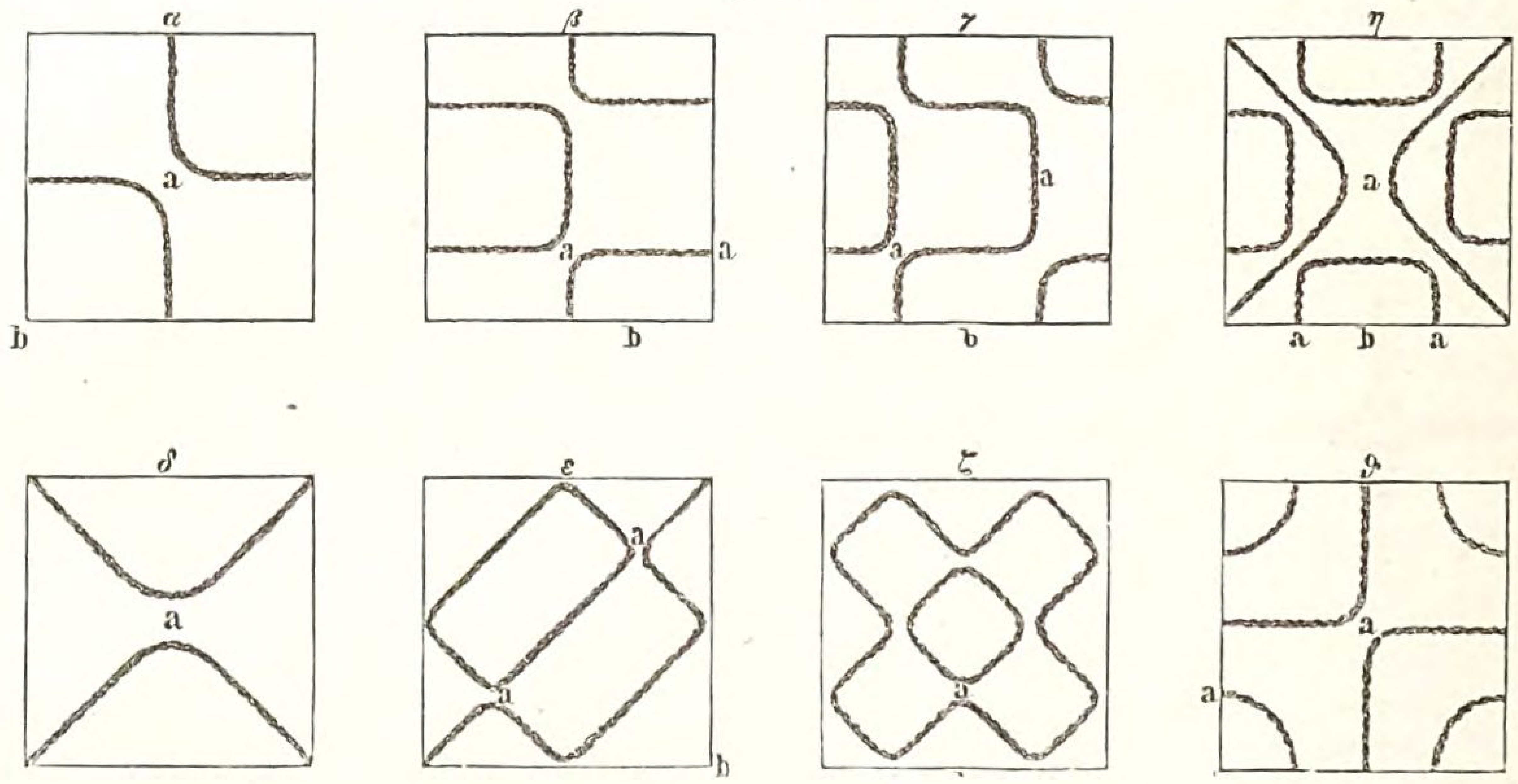
Die Figuren η und ϑ zeigen häufige, bei nicht ganz homogenen Platten vorkommende Verzerrungen.

Bei viereckigen Platten bestehen die Figuren aus Curven der verschiedensten Formen, von denen Fig. 110 eine Anzahl darstellt.

Aus den Versuchen von Strehlke hat sich für diese Figuren ergeben, dass dieselben niemals aus geraden Linien, sondern stets aus Curven zusammengesetzt sind, und dass die Curven sich niemals schneiden. So werden die Figuren α und δ häufig als Kreuze dargestellt, dessen Arme bei a den Seiten, bei δ den Diagonalen des Quadrates parallel sind. Strehlke zeigte, dass die Figuren aus je zwei hyperbolischen Aesten gebildet sind.

Das scheinbare Durchschneiden der Linien tritt ein, wenn man auf die Platten eine zu grosse Menge Sand gebracht hat, so dass die Knotenlinien eine zu grosse Breite haben.

Fig. 110.



Die Schwingungszahlen der Platten hängen von ihren Dimensionen und von der Theilung ab, die langsamsten Schwingungen entsprechen der einfachsten Theilung, je grösser die Anzahl der einzelnen schwingenden Theile ist, um so grösser ist die Schwingungszahl. Das Verhältniss der Schwingungszahlen bei den verschiedenen Theilungen ist ein sehr complicirtes und lässt sich im Allgemeinen nur durch Versuche bestimmen; nur für kreisförmige Platten lässt sich nach der Theorie von Kirchhoff das Verhältniss der verschiedenen Schwingungszahlen bei den verschiedenen Theilungsarten berechnen.

In Bezug auf die Abhängigkeit der Schwingungszahlen von den Dimensionen der Platten hat sich aus den Versuchen ergeben, dass bei Platten ähnlicher Form die Schwingungszahlen bei gleicher Theilung der Platten sich verhalten umgekehrt wie die homologen Dimensionen. Ist also bei zwei quadratischen Platten etwa die Länge der Seite und die Dicke der einen doppelt so gross als die der andern, so ist ihre Schwingungszahl die halbe. Eine Berechnung der absoluten Schwingungszahl aus den Dimensionen der Platte ist nicht möglich.

Auch gekrümmte Platten, wie Glocken, können in der verschiedensten Weise schwingen; schlägt man Glocken einfach mit einem Klöppel an, so theilt sich die Glocke in vier gleiche schwingende Theile, so dass die Knotenlinien senkrecht zum Rande der Glocke werden und den Rand in Abständen von 90^0 schneiden.

Wenn man auf die Platten staubigen Sand oder noch besser mit Lycopodium gemischten Sand streut, so werden die Figuren sehr viel reicher, es zeigen sich neue Linien und selbst Flächen mit dem feinen Pulver bedeckt. So treten die Figuren 111 und 112 an Stelle der Figuren α und δ Fig. 110 auf, wenn man die Platten entweder an der Ecke des Quadrates oder in der Mitte der Seite streicht. Diese von Faraday als Ergänzungsfiguren bezeichneten Figuren rühren indess nicht direkt von der schwingenden Bewegung der Platten her, sondern von den Luftströmungen, welche durch die schwingende Bewegung an der obern Seite

der Platte erzeugt werden. Denn nach den Versuchen Faraday's treten dieselben nicht auf, wenn man die Platten in sehr luftverdünnten Räumen zum Schwingen bringt. Faraday legte eine Glasplatte auf vier Korkfüsschen unter die Glocke der Luftpumpe und versetzte sie vermittels eines Stabes, der an einer Stelle der Platte senkrecht zu ihrer Ebene angekittet und durch eine Stopfbüchse aus der Glocke herausgeleitet war, in Schwingungen. Zu dem Zwecke wurde der Stab ausserhalb durch Reiben in longitudinale Schwingungen versetzt; da diese Schwingungen des Stabes senkrecht zur Ebene der Platte erfolgen, gehen sie in die Platte als transversale über. So lange nun die Luft unter der Glocke der Luftpumpe die gewöhnliche Dichtigkeit hatte, traten die Staubfiguren gerade so auf, wie wenn man den Versuch in freier Luft anstellt. Als aber die Luft bis auf 5 bis 3 Centim. Quecksilberdruck ausgepumpt war, traten sie nicht mehr auf, der Staub wanderte gerade so wie der staubfreie Sand in der Luft zu den Knotenlinien, die Staubansammlungen an den Stellen der stärksten Schwingung traten nicht auf.

Fig. 111.

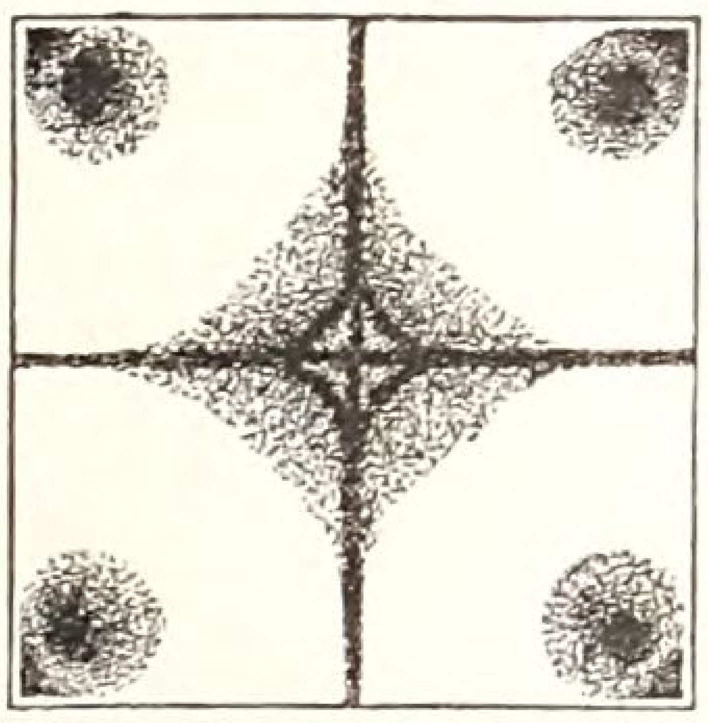
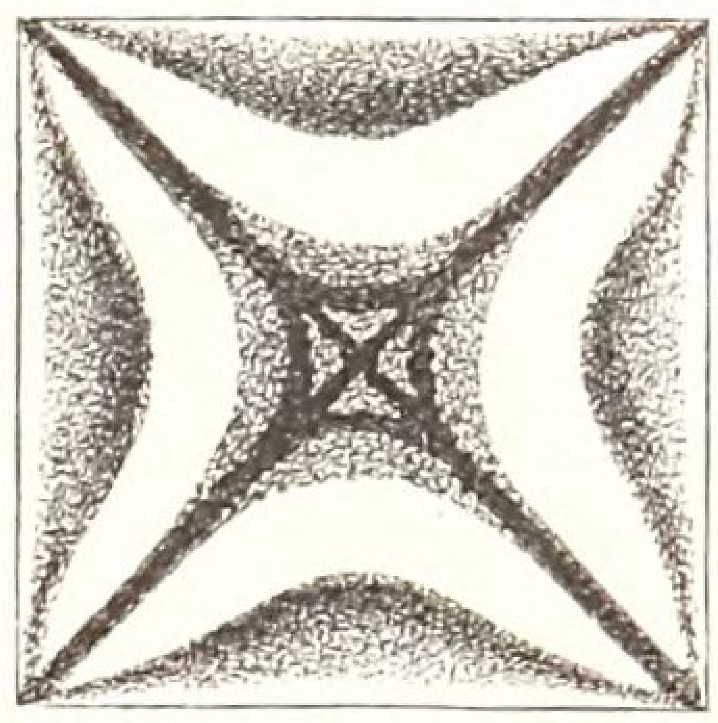


Fig. 112.



Wie diese Staubfiguren durch die Luftströmungen zu Stande kommen, davon kann man sich im Allgemeinen leicht Rechenschaft geben. Wenn der schwingende Theil einer Platte sich aufwärts bewegt, wird die darüber befindliche Luft aus der Stelle getrieben und zwar um so mehr, je näher sie dem Orte der stärksten Schwingung ist, um so weniger, je näher sie den Knotenlinien ist. Wenn nun der schwingende Theil der Platte in der zweiten Hälfte der Oscillation gegen die Gleichgewichtslage zurückkehrt, kann die über den Stellen der stärksten Vibration befindliche Luft, da sie eine von der Platte fortgerichtete Bewegung hat, der Platte nicht so rasch folgen. Es bildet sich daher dort ein luftverdünnter Raum, in welchen nun die Luft von den Knotenlinien her, wo sie in Ruhe geblieben war, eindringt. Dadurch entsteht ein von allen Seiten gegen die Orte der stärksten Vibration gerichteter Luftstrom, der das Lycopodium mit dorthin führt. An den Stellen stauen sich dann die Luftströme und bewirken in Folge dessen einen schwachen aufsteigenden Luftstrom, der sich dadurch zu erkennen gibt, dass das Lycopodium an den Stellen, an denen es abgelagert wird, immer in einer wirbelnden Bewegung ist.

§. 94.

Zusammengesetzte Schwingungen. Wir haben in den letzten §§. die wichtigsten durch die Elasticität der Körper entstehenden schwingenden Bewegungen im Einzelnen betrachtet. Zur Vervollständigung unserer Untersuchung müssen wir noch darauf hinweisen, dass in den seltensten Fällen die von uns einzeln betrachteten Schwingungen einzeln auftreten, dass vielmehr in den meisten Fällen die Schwingungen verschiedener Art, also longitudinale und transversale, und besonders die Schwingungen gleicher Art aber verschiedener Periode gleichzeitig auftreten.

Von besonderer Wichtigkeit ist, wie wir sehen werden, in akustischer Beziehung das gleichzeitige Auftreten der Schwingungen gleicher Art aber verschiedener Periode. Eine gespannte Saite oder auch ein longitudinal schwingender, an beiden Enden freier oder fester Stab, oder eine solche schwingende Luftsäule können nach den Entwicklungen Schwingungen vollführen, deren Anzahl sich verhält wie die Zahlen der natürlichen Zahlenreihe. Wenn man nun eine Saite oder einen longitudinal schwingenden Stab in Schwingungen versetzt, so tritt in den seltensten Fällen nur eine der möglichen Schwingungen auf, sondern in der Regel treten eine ganze Anzahl derselben gleichzeitig auf. Die Amplitude der einzelnen Schwingungen, welche die Bewegung zusammensetzen, hängt ab von der Art der Erregung und von der Stelle, wo sie stattfindet.

Erregen wir z. B. in einer gespannten Saite an irgend einer Stelle Bewegungen, so können alle jene Schwingungen in der Saite sich ausbilden, welche nur an der Stelle der Erregung oder in deren unmittelbaren Nähe keinen Knotenpunkt haben. Denn da die zunächst bewegte Stelle jedenfalls eine schwingende Bewegung annimmt, können keine Schwingungen in der Saite sich ausbilden, bei denen die Saite an dieser Stelle in Ruhe bleiben muss. Alle übrigen Bewegungen können sich in der Saite ausbilden und thun es auch, wie Theorie und Versuch zeigen. Die Theorie setzt uns sogar in den Stand zu berechnen, welche Schwingungen in jedem Falle auftreten müssen, und welches das Verhältniss der Amplituden sein muss; in welcher Weise das möglich, möge folgende Andeutung zeigen.

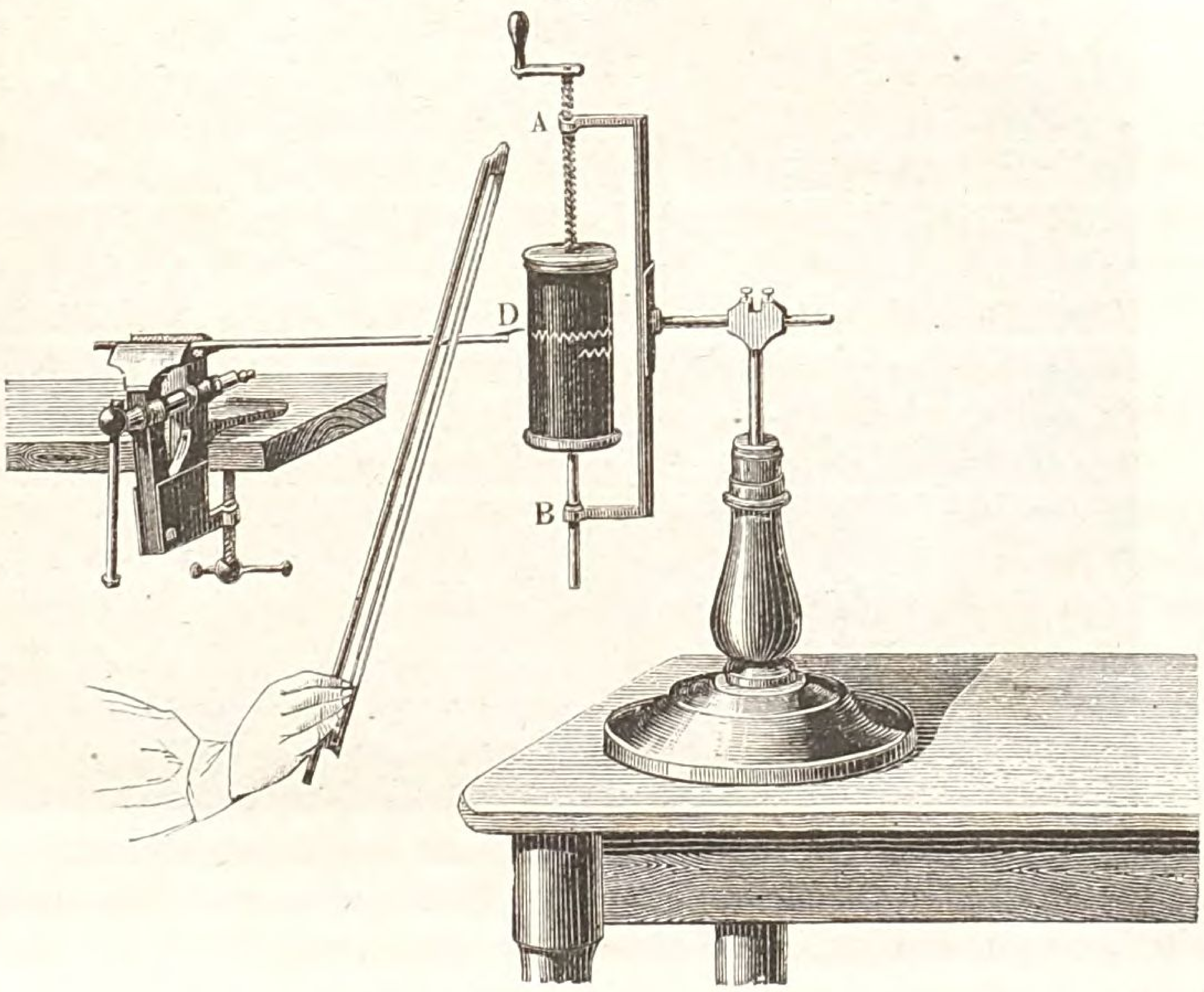
Zupfen wir eine Saite an einer bestimmten Stelle, indem wir sie dort etwa mit dem weichen Finger zur Seite biegen, so geben wir dadurch der Saite eine bestimmte Form, welche die Saite dann in der äussersten Lage, von der aus sie wieder in die Gleichgewichtslage zurückkehrt, besitzt. Eine ebensolche Form nimmt die schwingende Saite in der äussersten Lage auch an, wenn gewisse Schwingungen mit bestimmtem Verhältnisse der Amplituden in der Saite vorhanden sind. Alle die Schwingungen nun, welche in der Saite vorhanden sein müssen, und mit demselben Amplitudenverhältniss, welches dazu erforderlich ist, damit die schwingende Saite in der äussersten Lage die Form erhält, welche ihr durch die Ausbiegung ertheilt ist, entstehen in der Saite, wenn man sie nach der Ausbiegung loslässt, so dass sie in Schwingung geräth. Biegt man z. B. die Saite in ein Viertel der Saitenlänge mit dem weichen Finger seitwärts, so erhält sie annähernd die Form der halben Welle Fig. 96c, welche entsteht, wenn zwei Wellen sich gleichzeitig in einer Punktreihe fortpflanzen, deren Schwingungsanzahl sich wie 1 zu 2 verhält, und von denen die rascher schwingende die halbe Amplitude der langsamern hat. Würde die Form der Saite genau die dort abgebildete sein, so würde ein solches Zupfen an dieser Stelle in der That genau die langsamsten Schwingungen, bei der sie als Ganzes schwingt und die Schwingungen der doppelten Periode, bei der jede Hälfte für sich schwingt, hervorrufen und die Amplitude der zweiten Schwingung würde halb so gross sein als die der ersten.

Die Integralrechnung setzt uns mit Hülfe der sogenannten Fourier'schen Reihen in den Stand, aus der Form der Saiten, die wir ihr bei der ersten Ausbiegung geben, zu berechnen, welche einzelnen Schwingungen,

und in welchem Verhältniss der Amplituden, dieser Form entsprechen, gerade wie wir im §. 80 umgekehrt im Stande waren, aus den gegebenen Schwingungen und deren Amplitudenverhältniss die Form der Wellen zu construiren.

Es ist nicht schwierig, auch durch den Versuch die Zusammensetzung der Schwingungen eines Stabes oder einer gespannten Saite zu erkennen. Sehr bequem für diesen Zweck ist das zuerst von Savart und Duhamel angewandte graphische Verfahren, welches die Schwingungen sich direkt aufzeichnen lässt. Man versieht den schwingenden Körper mit einem feinen Stift und dreht vor demselben einen mit Russ geschwärzten Cylinder Fig. 113, so dass der Stift den Cylinder nur ganz leicht berührt. Die Axe

Fig. 113.

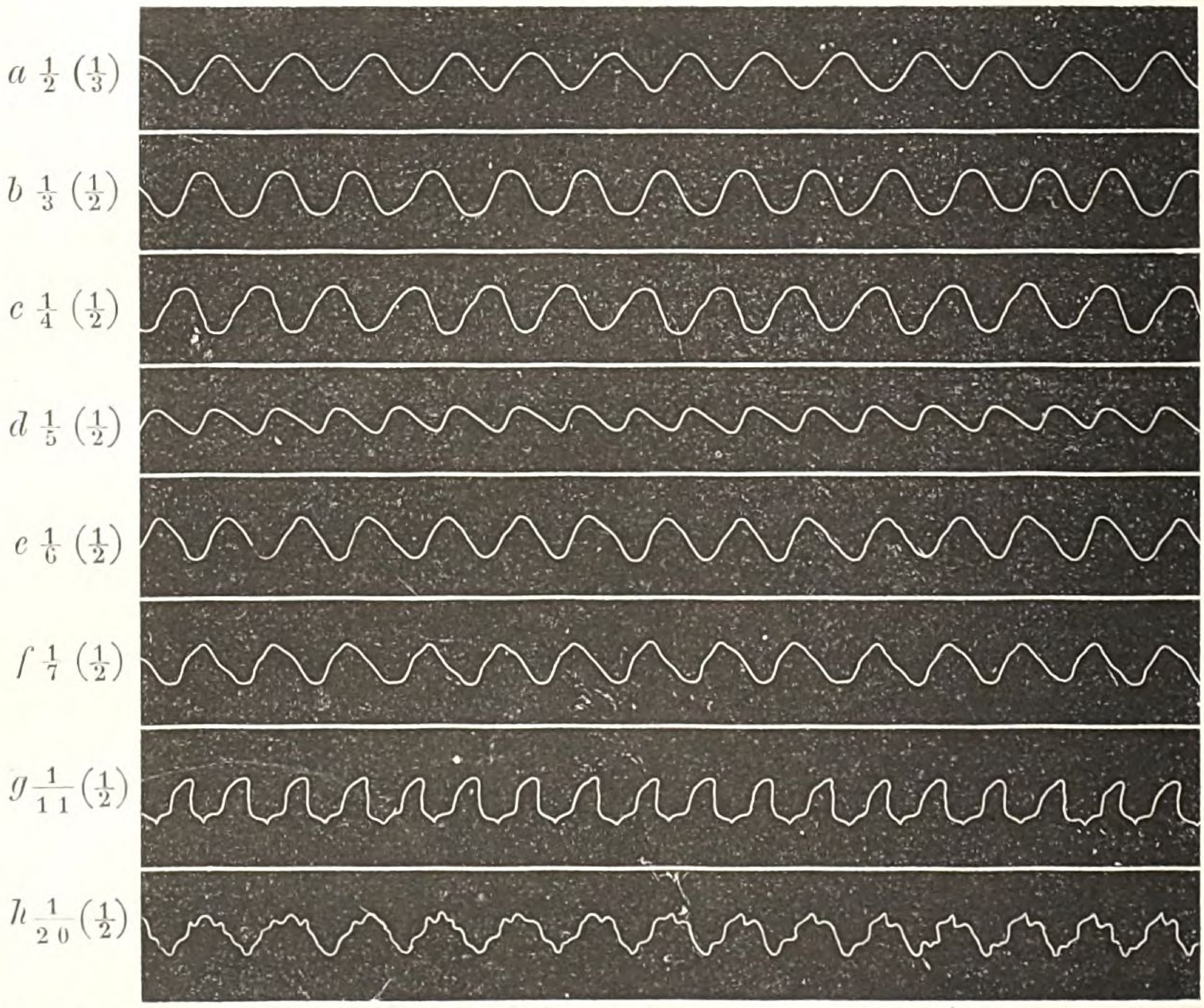


des Cylinders ist mit einem Schraubengange versehen, so dass derselbe bei der Drehung gleichzeitig gehoben oder gesenkt wird. Wird der Cylinder gedreht, wenn der schwingende Körper in Ruhe ist, so zieht die Spitze auf dem Cylinder eine einfache Spirallinie. Versetzt man den Körper in Schwingungen, so dass die Spitze parallel der Axe des Cylinders hin und her geht, so erhält die Spirallinie eine Wellenform, und jeder Welle entspricht eine ganze Schwingung des Körpers. Wenn der schwingende Körper gleichzeitig in mehreren Perioden schwingt, so entspricht die Welle der grössten Periode, ihre Form ist aber, nach den Entwicklungen des §. 80, die, welche sich aus allen diesen Schwingungen zusammensetzt, da sich auf der gezeichneten Welle alle nach einander stattfindenden Bewegungen neben einander darstellen. Man bekommt so auf der Walze genau die Form, welche eine Punktreihe annimmt, in welcher alle die Schwingungen sich gleichzeitig fortpflanzen, und von denen wir §. 80 einige ableiteten. Kennt man demnach die Abhängigkeit der Wellenform von den sie zusammensetzenden Schwingungen, so kann man aus der Beobachtung der

Wellenform die einzelnen in der zusammengesetzten Bewegung vorhandenen Schwingungen ableiten.

In Fig. 114 sind einige Wellenformen abgebildet, welche von einer schwingenden Saite in der angegebenen Weise aufgezeichnet worden sind;

Fig. 114.



dieselben werden erhalten, wenn die Saiten an der durch den ersten neben jeder Curve stehenden Bruch angegebenen Entfernung von dem einen Ende der Saite gezupft werden, und wenn der zeichnende Stift an der durch den zweiten Bruch angegebenen Stelle angebracht ist. Dass die Form der gezeichneten Curven auch von diesem Umstande abhängig ist, erkennt man unmittelbar, da der Stift die etwa in der Saite vorhandenen Schwingungen, welche an der Stelle, wo der Stift sich befindet, einen Knotenpunkt haben, nicht angeben kann.

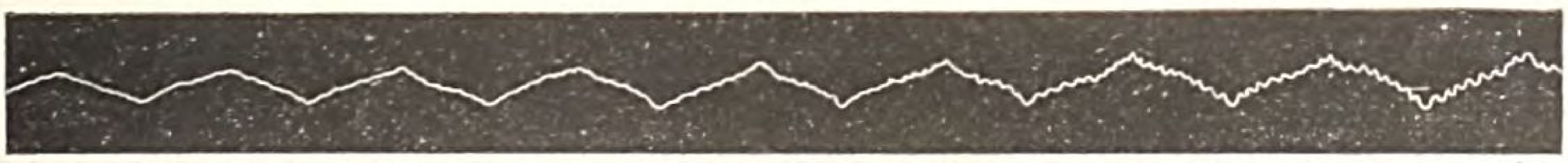
Das ist auch der Grund, weshalb die Fig. a fast genau die Curve für die einfachen Schwingungen liefert; denn da die Saite in der Mitte gezupft ist, können sich in derselben keine Schwingungen ausbilden, welche ein geradzahliges Vielfaches der langsamsten sind, also wenn wir die letztern mit 1 bezeichnen, nicht die Schwingungen 2, 4, 6 . .; da der Stift bei $^1/_3$ sitzt, kann er ferner die Schwingungen 3, 6, 9 . ., welche an der Stelle $^1/_3$ einen Knotenpunkt haben, nicht aufzeichnen. Ausser den Schwingungen 1 können also nur 5, 7, 11 . . aufgezeichnet werden. Die Einfachheit der Curven zeigt, dass diese Schwingungen sehr schwach sind.

Die Curve *b* ist der ersten fast gleich, hier können die geradzahligen Schwingungen nicht gezeichnet werden, die Schwingungen 3, 6, 9 . . nicht auftreten.

Die übrigen Curven lassen die Bewegungen sehr deutlich als zusammengesetzte erkennen, die Form wird um so complicirter, je näher dem Ende die Saite gezupft wird. Da der Stift in der Mitte befestigt ist, fehlen übrigens in den Curven alle geradzahligen, etwa in der Bewegung vorhandenen Schwingungen.

Eine sehr eigenthümliche Curve gibt eine nahe ihrem Ende mit dem Violinbogen gestrichene Saite, ein in der Mitte derselben befestigter Stift gibt, wie Fig. 115 zeigt, gleichgeneigte, auf- und absteigende gerade Linien.

Fig. 115.



Daraus folgt, dass die Mitte der Saite, von den kleinen, durch die später zu besprechenden Kräuselungen angedeuteten Vibrationen abgesehen, mit gleichförmiger Geschwindigkeit hin und hergeht. Denn die überall gleiche Neigung der auf- und absteigenden Linien, welche bei constanter Rotationsgeschwindigkeit entstehen, beweist, dass die Mitte der Saite an allen Stellen ihrer Bahn mit derselben Geschwindigkeit auf- und niedergeht, und dass an den Enden der Bahn die Bewegung sich momentan ohne merkliche vorhergehende Verzögerung umkehrt.

Wie Helmholtz gezeigt hat, folgt daraus eine ganz bestimmte Zusammensetzung der Schwingungen, es sind alle Schwingungen in der Saite vorhanden, die Amplituden derselben nehmen mit wachsender Schwingungszahl so ab, dass sie dem Quadrate der Schwingungszahl umgekehrt proportional sind. Ist also die Amplitude der langsamsten Schwingungen gleich 1, so ist die der doppelten Anzahl $^1/_4$, die der dreifachen $^1/_9$ u. s. f. Durch das Zusammenwirken aller dieser Bewegungen entsteht die gleichförmige Bewegung der Mitte einer gestrichenen Saite.

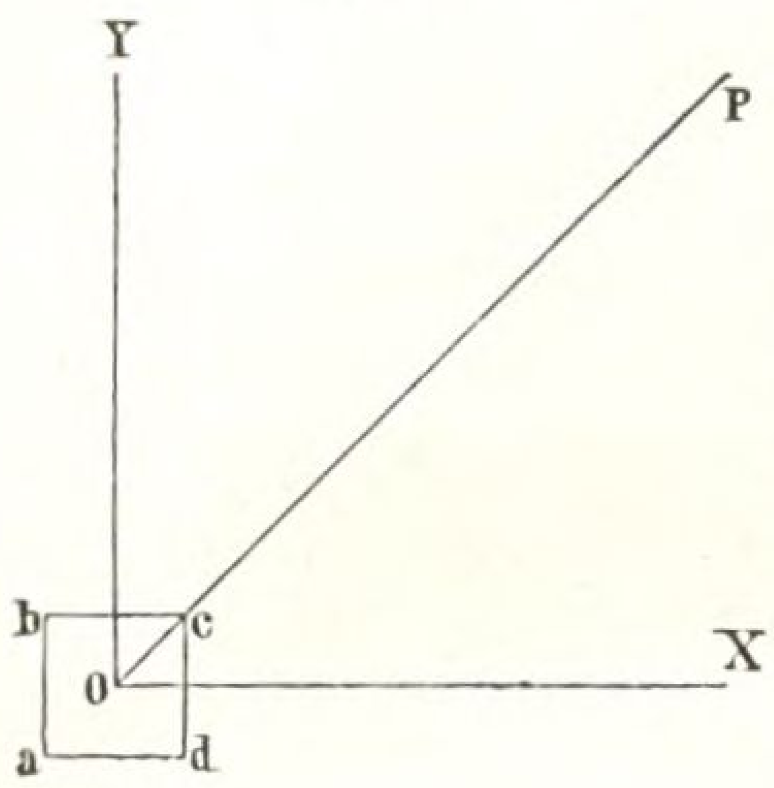
Wie bei den Saiten, so ist es bei allen schwingenden Körpern, sie geben in der Regel alle in ihnen möglichen stehenden Schwingungen gleichzeitig mit Amplituden, die von den Umständen der Erregung abhängig sind. Auf die Bedeutung dieses Umstandes in der Akustik kommen wir im nächsten Kapitel zurück.

Ebenso wie gleichgerichtete Schwingungen verschiedener Periode, so treten auch in der Regel gleichzeitig verschieden gerichtete Schwingungen auf, und da diese Schwingungen selten von genau gleicher Dauer sind, ergibt sich, dass die schwingenden Theile der Körper in der Regel nicht in geraden Linien hin und hergehen, sondern sich nach den §§. 79 und 80 in Curven bewegen. Derartige Curven treten besonders leicht bei transversal schwingenden Stäben auf, welche nicht genau cylindrisch oder quadratisch sind; man kann sie leicht hervorrufen auch an quadratischen Stäben. Zur Beobachtung versieht man dieselben an ihrem obern Ende mit einem glänzend polirten Knöpfchen; bei der Schnelligkeit der Bewegung sieht man dann die Bahn des Knöpfchens als eine glänzende Linie.

Stossen wir einen quadratischen Stab *a b c d* Fig. 116 parallel der Richtung *O X*, so zeigt der glänzende Punkt eine Linie parallel *O X*, ebenso wenn man ihn parallel *O Y* stösst, eine Linie parallel *O Y*. Ist der Stab genau quadratisch und vollkommen isotrop, das heisst ist seine Elasticität genau dieselbe, nach welcher Richtung man ihn auch biegt, so wird ein

Stoss auch nach einer andern Richtung, etwa nach OP, den Stab in einer geraden Linie schwingen lassen. Die Bewegung parallel OP können wir zusammengesetzt ansehen aus ihren Componenten parallel OX und OY; ein Stoss parallel OP bewirkt, dass beide Componenten ohne Phasendifferenz zusammentreten, und die gleiche Dicke und Elasticität parallel den Richtungen OX und OY bewirkt, dass die Schwingungen nach beiden Richtungen stets gleichzeitig stattfinden, also keine Phasendifferenz erhalten. Deshalb bleiben die Schwingungen nach §. 79 linear und parallel OP.

Fig. 116.



Die Schwingungen des Stabes geschehen elliptisch, der glänzende Knopf auf dem Stabe beschreibt eine Ellipse, wenn man den Stab erst parallel OX stösst und ihm dann, während er schwingt, einen Antrieb parallel OY ertheilt. Welche der im §. 79 abgeleiteten Ellipsen dann entsteht, das hängt davon ab, in welchem Momente der Bewegung parallel OX er den zweiten Antrieb erhalten hat. So lange die Schwingungen des Stabes dauern, beschreibt dann der Punkt dieselbe Ellipse.

Anders ist es, wenn der Stab nach OX dicker ist oder eine grössere Elasticität besitzt als parallel OY. Die Schwingungen sind dann dauernd linear, nur wenn der Anstoss parallel OX oder OY geschieht, jeder anders gerichtete Stoss lässt, wenn der Unterschied der Dicke oder Elasticität nur klein ist, nach und nach alle im §. 79 abgeleiteten Formen auftreten. Geben wir dem Stabe einen Stoss parallel OP, so geschieht die Bewegung parallel OX schneller als parallel OY, der Punkt kehrt also parallel OX früher zur Gleichgewichtslage zurück und beginnt seine zweite Schwingung parallel OX früher als parallel OY. Die zweite Schwingung des Stabes beginnt also mit einer gewissen Phasendifferenz der beiden zu einander senkrechten Componenten, sie wird deshalb elliptisch. Bei jeder Schwingung wird dann die Phasendifferenz etwas grösser, es müssen deshalb nach und nach alle die im §. 79 abgeleiteten Ellipsen auftreten. Die ganze Reihenfolge entwickelt sich innerhalb der Zeit, in welcher der Stab nach OX eine Schwingung mehr macht als nach OY. Macht der Stab z. B. in der Zeit, in welcher er nach OY 100 Schwingungen vollführt, nach OX 101 Schwingungen, so treten innerhalb dieser 100 Schwingungen alle jene Figuren auf, die 101. Schwingung des Stabes ist dann wieder die gerade Linie parallel OP.

Ist der Unterschied der Dicke parallel OX und OY bedeutend, so dass nach der einen Richtung in derselben Zeit die doppelte oder dreifache Anzahl von Schwingungen vollführt wird, als nach der andern, so erhält man die Figuren, welche wir in §. 80 besprochen haben. Ist die Schwingungsgeschwindigkeit nach der einen Richtung genau die doppelte, so gibt ein Stoss parallel OP die Fig. 98α, ist das Verhältniss nicht genau 1 : 2, so treten nach und nach die verschiedenen §. 80 abgeleiteten Figuren auf.

Sehr bequem zur Darstellung und deshalb zum Studium aller dieser Schwingungsfiguren ist das fast gleichzeitig von Lippich und Melde angegebene Universalkaleidophon. Dasselbe besteht aus zwei federnden Metallstreifen; der eine grössere wird an einen Tisch angeklemmt, und der kleinere

wird mit einer Klemme an das obere Ende des grössern so befestigt, dass seine Ebene senkrecht ist zur Ebene des grössern. Am obern Ende des kleinern ist ein glänzend polirtes Metallknöpfchen angebracht. Der kleinere Streifen ist in seiner Klemme verschiebbar, so dass man die Länge des frei schwingenden obern Endes und damit die Schwingungsdauer beliebig variiren kann. Lässt man nun die untere Feder allein schwingen, so bewegt sich das Knöpfchen mit derselben nach der einen, schwingt die obere allein, so bewegt sich das Knöpfchen nach der zur ersten senkrechten Richtung. Lässt man die untere Feder schwingen und stösst gleichzeitig die obere, so erhält man die aus beiden Bewegungen resultirende Curve, deren Form von dem Schwingungsverhältniss und der Phasendifferenz der Einzelbewegungen abhängt.

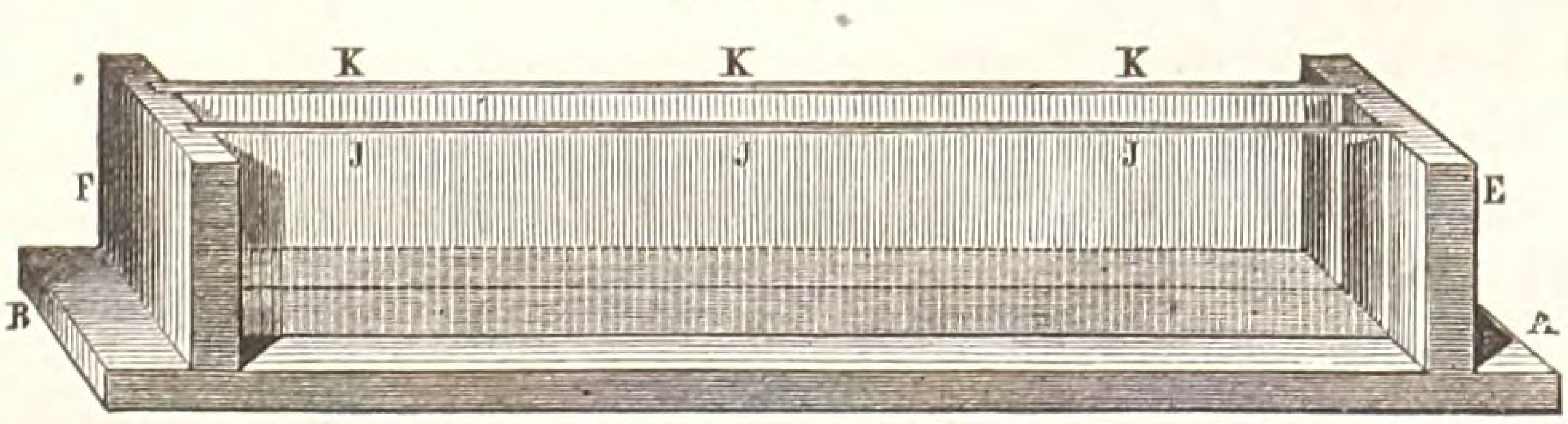
§. 95.

Transversale Flüssigkeitswellen. Im §. 85 zeigten wir, dass in Flüssigkeiten durch Elasticität nur longitudinale Wellen erzeugt und fortgepflanzt werden können. In den der Wirkung der Schwere unterworfenen Flüssigkeiten können eben durch die Wirkung der Schwere auch transversale Schwingungen und Wellen erzeugt werden.

Wenn man auf die ruhende Oberfläche einer in einem weiten Gefäss befindlichen Flüssigkeit einen Tropfen fallen lässt oder in eine ruhende Wassermasse einen Stein hineinwirft, so sieht man, wie sich rings um die getroffene Stelle die Flüssigkeit wallförmig emporhebt. Dieser Flüssigkeitswall breitet sich dann über der Oberfläche aus und an der Stelle, wo er zuerst entstand, bildet sich eine ringförmige Vertiefung. Ebenso wie der zuerst entstandene Wall breitet sich dann auch diese Vertiefung aus. Meist, und besonders wenn man die Tropfen in bestimmten Zwischenräumen auf dieselbe Stelle der Oberfläche fallen lässt, folgt auf diese Vertiefung wieder Erhöhung und Vertiefung, die nach einander als Wellenberge und Wellenthäler über die Flüssigkeit sich ausbreiten.

Dass wir es hier mit einer wirklichen Wellenbewegung, das heisst mit einer hin und hergehenden Bewegung der einzelnen Flüssigkeitstheilchen zu thun haben, das ist von den Gebrüdern Weber direkt gezeigt worden. Zum Studium dieser Wellen benutzten dieselben eine sogenannte Wellenrinne. Diese besteht Fig. 117 aus einem 1,5 bis 2 M. langen ge-

Fig. 117.

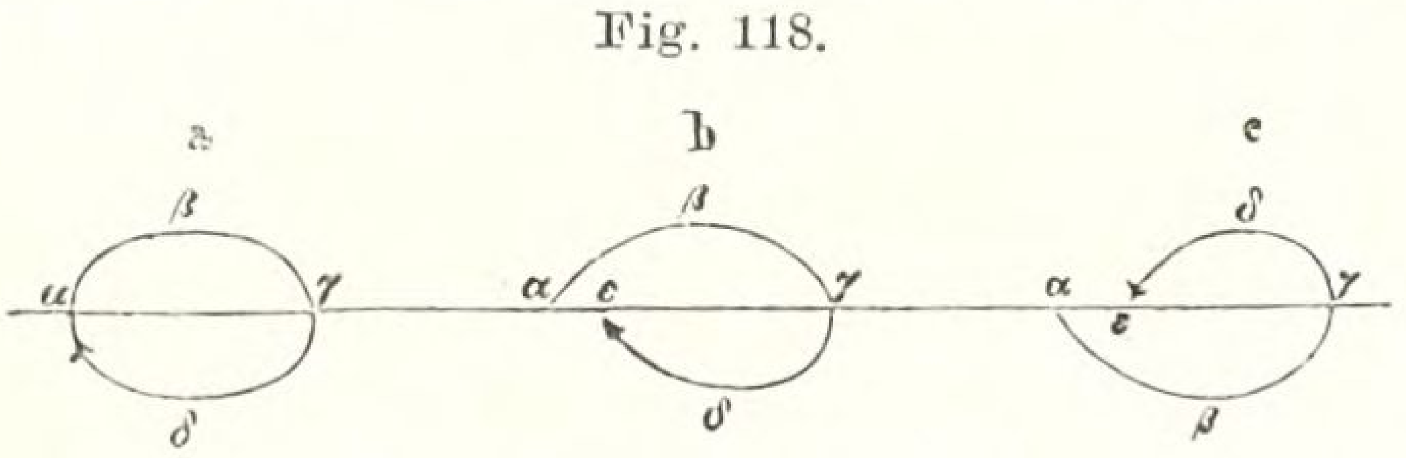


raden, glatt gehobelten Brett AB, auf dem in zwei tiefen Furchen etwa 1,5 Centim. von einander zwei dicke etwa 16 Centim. hohe Spiegelglasscheiben fest und wasserdicht eingefugt sind. Diese beiden Glasscheiben J und K werden ausserdem durch die beiden senkrechten Bretter E und F, in welche sie ebenfalls wasserdicht eingefugt sind, gehalten. Man füllt die Rinne bis zu einer passenden Höhe mit der Flüssigkeit, deren Wellen

man beobachten will. Um den Bewegungsvorgang in der ganzen Flüssigkeit zu beobachten, wendet man eine durchsichtige Flüssigkeit, am besten Wasser an, und verrührt in demselben geringe Quantitäten eines Pulvers, welches mit dem Wasser gleiches specifisches Gewicht hat, etwa Bernsteinpulver. Die kleinen Körnchen nehmen dann genau die Bewegung der Wassertheilchen an, an deren Stelle sie sich befinden, so dass man aus deren Bewegung auf die des Wassers schliessen kann. Um die Wellen zu erzeugen, hebt man an dem einen Ende der Rinne durch Aufsaugen in einer in die Flüssigkeit tauchenden Röhre etwas Flüssigkeit in die Höhe und lässt dieselbe dann niederfallen. Es entsteht dadurch eine Welle, welche in der Rinne fortschreitet, an dem andern Ende reflectirt wird, und so mehrfach hin und hergeht.

An den im Innern der Flüssigkeit schwebenden Bernsteinkörnchen erkennt man dann, dass, wenn auf einander folgende Wellen eine gleiche Gestalt haben, die der Oberfläche nahen Theilchen sich in geschlossenen nahezu elliptischen Bahnen (Fig. 118 *a*) bewegen. Geht durch die Rinne eine Welle von *B* nach *A*, der Wellenberg voran, so bewegen sich die Wassertheilchen unter dem Berge in dem Bogen $\alpha\beta\gamma$ aufwärts, vorwärts, abwärts in derselben Richtung, nach welcher der Berg fortschreitet.

Fig. 118.



Folgt dann das Wellenthal, welches ebenso tief ist als der Berg hoch ist, so bewegt sich das Theilchen weiter durch den Bogen $\gamma\delta\alpha$ zu dem Ausgangspunkte zurück. Unmittelbar unter der Oberfläche der Flüssigkeit ist die Höhe des Punktes β über $\alpha\gamma$ gleich der Höhe des Wellenberges und der Abstand des Punktes δ vom Niveau $\alpha\gamma$ gleich der Tiefe des Wellenthales.

Geht das Wellenthal dem Berge voraus, so bewegt sich das Theilchen zunächst von γ durch δ nach α und kehrt auf dem Wege $\alpha\beta\gamma$ nach γ zurück. Die horizontale Bewegung geschieht unter dem Berge stets nach der Richtung, nach welcher die Welle fortschreitet, unter dem Thale stets nach der entgegengesetzten Richtung.

Die Bahnen der Flüssigkeitstheilchen sind keine in sich geschlossenen, wenn Wellenberg und Wellenthal nicht von gleicher Grösse sind. Ist das dem Wellenberge folgende Thal merklich kleiner, so ist die Bahn der Theilchen diejenige 118 *b*, ist das Thal grösser 118 *c*, in beiden Fällen geht das Theilchen nicht zum Ausgangspunkt zurück, sondern erreicht schon früher das Flüssigkeitsniveau.

Die schwingende Bewegung der Flüssigkeitstheilchen unter der Welle beschränkt sich nicht auf die der Oberfläche nahen Theilchen, sondern ist noch in grosser Tiefe deutlich zu erkennen; nach den Versuchen der Gebrüder Weber ist sie in einer Tiefe noch sichtbar, welche 350 mal die Höhe des Wellenberges betrug. Indess nimmt mit wachsender Tiefe die verticale Componente der Bewegung immer mehr ab, in einer Tiefe, welche 120 mal die Höhe des Wellenberges betrug, war sie nur kaum merklich und in noch grösseren Tiefen war die Bewegung lediglich eine horizontal hin und her gehende, die Amplitude der horizontalen Bewegung wurde nicht merklich kleiner.

Die Bewegung der Flüssigkeitstheilchen in den Wellen ist demnach eine combinirte, zusammengesetzt aus einer longitudinalen und transversalen, so dass sie sich nahe der Oberfläche in verticalen, nahe elliptischen Bahnen bewegen.

Dass diese Wellen nicht durch die Elasticität der Flüssigkeit, sondern durch die Schwere in Folge der eingetretenen Gleichgewichtsstörung erzeugt und fortgepflanzt werden, ergibt sich unmittelbar aus einer Untersuchung ihrer Fortpflanzungsgeschwindigkeit. Wären die Wellen Folge der durch die Verschiebung der Flüssigkeitstheilchen geweckten elastischen Kräfte, so müsste die Geschwindigkeit ihrer Ausbreitung nur von der Natur der Flüssigkeit abhängen, in der sie vorhanden sind. Das ist aber bei diesen Wellen nicht der Fall, die Geschwindigkeit der Ausbreitung hängt viel weniger von der Natur der Flüssigkeiten als von andern Umständen ab.

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit hängt nämlich zunächst ab von der Höhe der Wellen, und zwar wächst sie mit der Höhe derselben.

Man kann das direkt auf einer Wasserfläche erkennen, auf der die Wellen sich von einer Stelle nach allen Seiten ausbreiten. Die Höhe der Wellen nimmt mit ihrer Ausbreitung ab; lässt man nun an der Stelle der ersten Erregung durch regelmässig auf einander folgendes Einfallenlassen eines Steines immer neue Wellen entstehen, während die früher entstandenen sich immer weiter verbreiten, so zeigt sich, dass in der Nähe der Erregungsstelle die auf einander folgenden Berge viel weiter von einander abstehen als entfernter von derselben. Da nun der Abstand zweier Berge gleich der Wellenlänge der schwingenden Bewegung ist, so folgt, dass die Länge der Wellen mit der Höhe sich ändert; da nun weiter eine Welle sich jedesmal dann ausbildet, wenn die Flüssigkeitstheilchen eine Schwingung vollführen, folgt, dass bei grösserer Amplitude die Wellenlänge grösser, somit die Geschwindigkeit der Ausbreitung grösser ist.

Die Geschwindigkeit der Ausbreitung hängt ferner ab von der Tiefe der Flüssigkeit, und zwar wächst sie mit der Tiefe, jedoch langsamer als die letztere, so dass, wenn die Flüssigkeit eine gewisse Tiefe hat, eine weitere Zunahme der Tiefe ohne Einfluss zu sein scheint. Bei gleicher Höhe der Wellen fanden die Gebrüder Weber eine Zunahme der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wasserwellen von 5,7 M. auf 10 M., als die Tiefe des Wassers in der Rinne von 2,7 Centim. auf 10,8 erhöht wurde.

Bei hinreichender Tiefe scheint die Natur der Flüssigkeit keinen Einfluss auf die Fortpflanzungsgeschwindigkeit zu haben, denn bei einer Tiefe von 21,6 Cent. pflanzten sich auf Wasser und Branntwein unter den gleichen Umständen erregte Wellen mit der gleichen Geschwindigkeit von 13,5 M. fort.

Alles das beweist, dass diese Wellen nicht durch die Elasticität der Flüssigkeiten entstehen; es lässt sich nun auch leicht erkennen, dass solche Wellen durch Störung des hydrostatischen Gleichgewichtes sich ausbilden müssen. Ist z. B. durch Aufsaugen in einer Röhre an einer Stelle Flüssigkeit über das Niveau gehoben und lässt man dieselbe in Folge ihrer Schwere dann niedersinken, so muss zur Herstellung des Gleichgewichtes die umgebende Flüssigkeit steigen. Da indess die Ausgleichung der Gleichgewichtsstörung nicht momentan durch die ganze Flüssigkeit stattfindet,

muss die Flüssigkeit sich rings um jene Stelle in Form eines Walles über das Niveau der Umgebung heben. An der Stelle, wo die Flüssigkeit zuerst gehoben war, muss dann eine Vertiefung entstehen, da die fallende Flüssigkeit eine nach unten gerichtete Geschwindigkeit hat, die erst durch hydrostatischen Druck, also wenn die Flüssigkeit unter das Niveau herabgesunken ist, aufgehoben werden kann. Es bildet sich also rings um die Erregungsstelle der erste Wellenberg, an der Stelle selbst das erste Wellenthal.

Der entstandene Wellenberg muss dann wieder niedersinken und an seiner äussern Seite einen neuen Wellenberg hervorrufen, da durch den ersten Anstoss die Flüssigkeitstheilchen eine nach aussen gerichtete Bewegung haben und an der Stelle, wo er sich befand, muss sich ein Wellenthal ausbilden. Man sieht, wie in Folge einer solchen Gleichgewichtsstörung sich Wellenberg und Wellenthal in der Flüssigkeit ausbreiten müssen.

Erzeugt man die Bewegung etwa dadurch, dass man in die Flüssigkeit einen Stein wirft, so entsteht die Welle in derselben Weise, der durch den fallenden Stein auf die Flüssigkeit ausgeübte Druck bewirkt dann, dass ringsumher die Flüssigkeit steigen muss.

Wenn nun auch diese Wellen nicht durch Elasticität entstehen, so verhalten sie sich doch im Uebrigen gerade wie die bisher von uns betrachteten Wellen. Da sie ferner wegen ihrer geringen Fortpflanzungsgeschwindigkeit und relativ grossen Höhe leicht beobachtet und verfolgt werden können, so eignen sie sich vortrefflich zum direkten Nachweis einer Anzahl der im vorigen Kapitel abgeleiteten Sätze, so besonders der Sätze über die Durchkreuzung und Reflexion der Wellen. Man kann so direkt das Princip der Interferenz daran erkennen, dass die Wellen sich ungestört durchkreuzen, und ebenso die damals abgeleitete Form der reflectirten Welle unmittelbar anschaulich machen.

Vierter Abschnitt.

Vom Schalle.

Erstes Kapitel.

Von der Erregung des Schalles.

§. 96.

Entstehung des Schalles. Wenn man eine sehr schwach gespannte Saite von hinreichender Länge in Schwingungen versetzt, so kann man die einzelnen Schwingungen verfolgen und zählen; spannt man die Saite stärker, so werden die Schwingungen bald so rasch, dass man sie einzeln nicht mehr wahrnehmen kann, dass man an Stelle der Saite eine halbdurchsichtige Fläche sieht, welche die Saite bei ihrer Bewegung beschreibt. Bei noch stärkerer Spannung ist die Bewegung kaum mehr sichtbar; sie wird uns statt dessen in anderer Weise wahrnehmbar, wir erhalten einen Eindruck auf unser Ohr, die schwingende Bewegung erzeugt einen Schall.

Der Schall entsteht nur durch eine schwingende Bewegung und jede schwingende Bewegung von hinreichender Schnelligkeit erzeugt einen Schall. Alle im vorigen Kapitel besprochenen durch die Elasticität der Körper bewirkten Schwingungen erzeugen deshalb einen Schall, ein in longitudinale Schwingungen versetzter Stab oder eine Luftsäule, transversale Schwingungen von Stäben, hinreichend gespannten Saiten, Platten und Glocken erzeugen einen Schall, einen Klang.

Ausser durch diese regelmässigen Schwingungen in Folge der Elasticität kann man noch auf andere Weise durch in rascher Folge wiederholte Stösse einen Schall hervorrufen. So erhält man einen Schall, wenn man eine Karte oder eine biegsame Feder dem Umfange eines gezähnten Rades so weit nähert, dass die Zähne des rotirenden Rades der Karte jedesmal einen Schlag ertheilen; man erhält ebenso einen Schall, wenn man gegen eine rotirende Scheibe bläst, welche auf einem Kreise, dessen Mittelpunkt in der Rotationsaxe liegt, in regelmässigen Zwischenräumen durchbohrt ist. Der Luftstrom dringt dann abwechselnd durch die Oeffnungen hindurch, abwechselnd wird er zurückgehalten, es entsteht so eine regelmässige Folge von Luftstössen, welche wir als Schall hören.

Auch scheinbar continuirliche Bewegungen erzeugen oft einen Schall, man kann aber leicht erkennen, dass dieselben schwingende Bewegungen erzeugen, die dann die Ursache des Schalles sind. So erzeugt der continuirliche in den Fuss einer Orgelpfeife oder an dem Mundloch einer Flöte vorübergeführte Luftstrom einen Schall, wir werden sehen, dass dieser Luftstrom die in der Orgelpfeife oder der Flöte befindliche Luftsäule in regelmässige Schwingungen versetzt.

Wir können daher allgemein sagen, dass die Ursache des Schalls hinreichend schnelle schwingende Bewegungen sind. Damit wir den Schall wahrnehmen, müssen die Bewegungen sich unserm Ohr mittheilen, und dazu ist erforderlich, dass die Schwingungen in einer Umgebung stattfinden, welche sie aufnehmen und bis zu unserm Ohre fortpflanzen kann. In den meisten Fällen ist dieses Mittel, durch welches die Bewegung sich ausbreitet, die Luft. Schwingt ein Körper, so treibt er nach der Richtung, nach welcher seine Theile sich hin bewegen, die Luft vor sich her, bewirkt also dort eine Verdichtung, welche sich in der §. 88 betrachteten Weise ausbreiten muss, kehrt der Körper zurück, so entsteht an derselben Stelle auf die Verdichtung folgend eine Verdünnung, welche sich dann ebenso ausbreitet. Es sind somit die durch den bewegten Körper hervorgerufenen und sich von dort ausbreitenden longitudinalen Schwingungen der Luft, welche die erzeugte Bewegung unserm Ohre übermitteln, so dass wir den Schall wahrnehmen können. Wie die Luft, so kann jeder Körper, der überhaupt in Folge der Elasticität Schwingungen vollführen kann, die an einer Stelle erregten Schwingungen fortpflanzen und so unserm Ohre übermitteln. Tauchen wir eine Glocke in Wasser und lassen sie anschlagen, so können wir den Klang hören, ebenso wenn wir dieselbe an das eine Ende eines beliebig langen Stabes befestigen, dessen anderes Ende in der Nähe unseres Ohres ist.

Erzeugen wir dagegen die Schwingungen in einem Raume, von dem aus dieselben sich nicht ausbreiten können, so können wir auch keinen Schall wahrnehmen. Hängen wir z. B. eine Glocke an einen weichen

Faden unter den Recipienten einer Luftpumpe und entfernen die Luft aus demselben, so können wir keinen Klang in Folge der Schläge der Glocke wahrnehmen, da die Schwingungen der Glocke sich nicht nach aussen übertragen können. Lassen wir die Luft zurücktreten, so dass durch dieselbe die Schwingungen sich dem Recipienten mittheilen können, oder hängen wir die Glocke in dem Recipienten an einen Draht auf, durch den sich die Schwingungen ausbreiten können, so ist der Schall sofort hörbar.

§. 97.

Qualität des Schalles. Jeder Gehörseindruck ist ein Schall, je nach der Verschiedenheit des Eindrucks unterscheiden wir im Schall grosse Verschiedenheiten. Wir unterscheiden:

1. Geräusche und Klänge oder Töne. Klänge oder Töne nennen wir solche Gehörseindrücke, welche auf unser Ohr einen gleichmässigen Eindruck machen, welche also während ihrer Dauer sich im Wesentlichen gleich bleiben, während Geräusche solche Gehörseindrücke sind, welche während ihrer Dauer einem mehr oder weniger raschen Wechsel unterworfen sind, oder welche ein wirres Gemisch verschiedener Klänge sind. Die Geräusche selbst unterscheidet unsere Sprache ihrer Art nach als Knall, ein kurz andauerndes rasch und plötzlich abbrechendes Geräusch als Rasseln, Knistern, Sausen etc. Wir haben uns nur mit den regelmässigen Gehörseindrücken, den Klängen oder Tönen zu beschäftigen.

2. Die Klänge oder Töne, oder wie man sie auch bezeichnet, die musikalischen Klänge unterscheidet man als höhere oder tiefere. Worauf dieser Jedem, der ein normales Ohr hat, deutliche Unterschied beruht, lässt sich leicht erkennen. Der Ton eines longitudinal schwingenden Stabes ist stets höher, als wenn der Stab transversal schwingt, der Klang des transversal schwingenden ist um so höher, je kürzer und dicker derselbe ist, ebenso ist der Klang der transversal schwingenden Saite um so höher, je kürzer die Saite oder je stärker sie gespannt ist. Da die longitudinalen Schwingungen eines Stabes von kürzerer Dauer sind als die transversalen, und da diese um so schneller erfolgen, je kürzer und dicker der Stab ist, so folgt, dass die Tonhöhe von der Dauer der Schwingungen abhängt, dass ein Ton um so höher ist, je grösser die Anzahl der Schwingungen ist, welche der den Ton erzeugende Körper in gleichen Zeiten vollführt, je grösser also die Zahl der Schwingungen ist, die unser Ohr in einer gegebenen Zeit treffen. Wir werden genauer demnächst zeigen, dass die Höhe des Klanges nur von der Anzahl der in einer gegebenen Zeit stattfindenden Schwingungen abhängt, dass einer gleichen Anzahl von Schwingungen auch die gleiche Tonhöhe entspricht.

3. Bei Klängen gleicher Höhe unterscheiden wir ihre verschiedene Farbe; als Klangfarbe bezeichnen wir jene Eigenthümlichkeit des Klanges, welche denjenigen eines Instrumentes von dem eines andern unterscheidet. Die Ursache dieser Verschiedenheit, welche schon Ohm in der Verschiedenheit der Schwingungsform gesehen hatte, ist besonders von Helmholtz genauer untersucht; er zeigte, dass dieselbe in der That von der Form der Schwingungen oder genauer von den verschiedenen in einem Klange vorhandenen Tönen abhängig ist. Jede regelmässig periodische Wiederkehr von Stössen in unser Ohr erzeugt einen Klang; innerhalb jeder

Schwingungsperiode bleibt dabei die Bewegung ganz willkührlich, wenn nur genau dieselbe Bewegung, welche innerhalb der ersten Periode bestand, jedesmal wiederkehrt. Die Schwingung innerhalb einer Periode kann dabei eine einfache sein, sie kann aber auch eine zusammengesetzte sein, indem die langsamste von einer solchen der halben oder ein Drittel etc. Schwingungsdauer begleitet ist, deren jede somit einem höhern Tone entspricht, welcher mit dem tiefsten zugleich anklingt. Diese mitklingenden Töne sind es, welche die Farbe des Klanges bedingen. Wir werden demnächst sehen, wie sich die einzelnen Töne eines Klanges bestimmen lassen.

4. Bei Klängen gleicher Höhe und Farbe unterscheiden wir Verschiedenheit der Stärke oder Intensität. Verschiedenheit der Stärke erzeugen wir bei einer gespannten Saite durch Aenderung der Schwingungsamplitude, oder was dasselbe ist, durch Aenderung der Schwingungsgeschwindigkeit bei gleicher Dauer der Schwingung. Der grössern Amplitude entspricht der stärkere Klang.

Da der Schall in unserm Ohre durch den Stoss der schwingenden Lufttheilchen zur Wahrnehmung kommt, so werden wir am rationellsten die Stärke des Tones nach der Stärke des Stosses messen. Diese ist aber der lebendigen Kraft der stossenden Theilchen, also dem Quadrate ihrer Geschwindigkeit proportional. Wir werden daher die Stärke des Tones dem Quadrate der Schwingungsgeschwindigkeit, oder was dasselbe ist, dem Quadrate der Amplitude proportional zu setzen haben.

§. 98.

Bestimmung der Schwingungszahlen. Zur Bestimmung der Schwingungszahl der Töne kann man sich der im vorigen Kapitel abgeleiteten Sätze über die Schwingungszahlen der durch Elasticität schwingenden Körper bedienen. Da indess gerade die durch jene Schwingungen bewirkten Klänge uns den experimentellen Nachweis für die meisten der dort abgeleiteten Sätze liefern müssen, sind andere Methoden erwünscht, welche eine direkte Zählung der Schwingungen gestatten.

Die erste dieser Methoden benutzt die von Cagniard Latour construirte Sirene. Dieselbe besteht (Fig. 119) aus einer cylindrischen Trommel *BB*, von der unten in der Mitte der Bodenplatte eine Röhre *R* ausgeht, mittelst welcher der Apparat auf eine Windlade gesetzt wird, aus der ein kräftiger Luftstrom in die Trommel gesandt wird. Die obere Platte der Trommel ist, wie der Durchschnitt Fig. 119 erkennen lässt, durch eine bestimmte Anzahl von Löchern durchbohrt, die auf einem Kreise liegen, dessen Mittelpunkt sich in der Axe der Trommel befindet. Die Löcher sind alle gleich weit von einander entfernt und alle nach gleicher Richtung schief gebohrt, so dass sie alle etwa von links nach rechts aufsteigende, unter genau dem gleichen Winkel gegen die Verticale geneigte Kanäle durch die Platte bilden.

Unmittelbar über der die Trommel oben abschliessenden Platte befindet sich eine zweite Platte, welche auf der mit der Axe der Trommel zusammenfallenden Axe *AF* Fig. 120 befestigt ist und mit dieser Axe sich drehen kann. Um die Platte möglichst leicht beweglich zu machen, ist dieselbe unten bei *a* Fig. 119 conisch zugespitzt in ein Lager von Messing

gestellt, und oben durch die Schraube A, deren Spitze in eine conische Vertiefung der Axe passt, lose gehalten. Die Platte C Fig. 120 hat auf einem Kreise, dessen Durchmesser gleich ist dem Durchmesser des in der

Fig. 119.

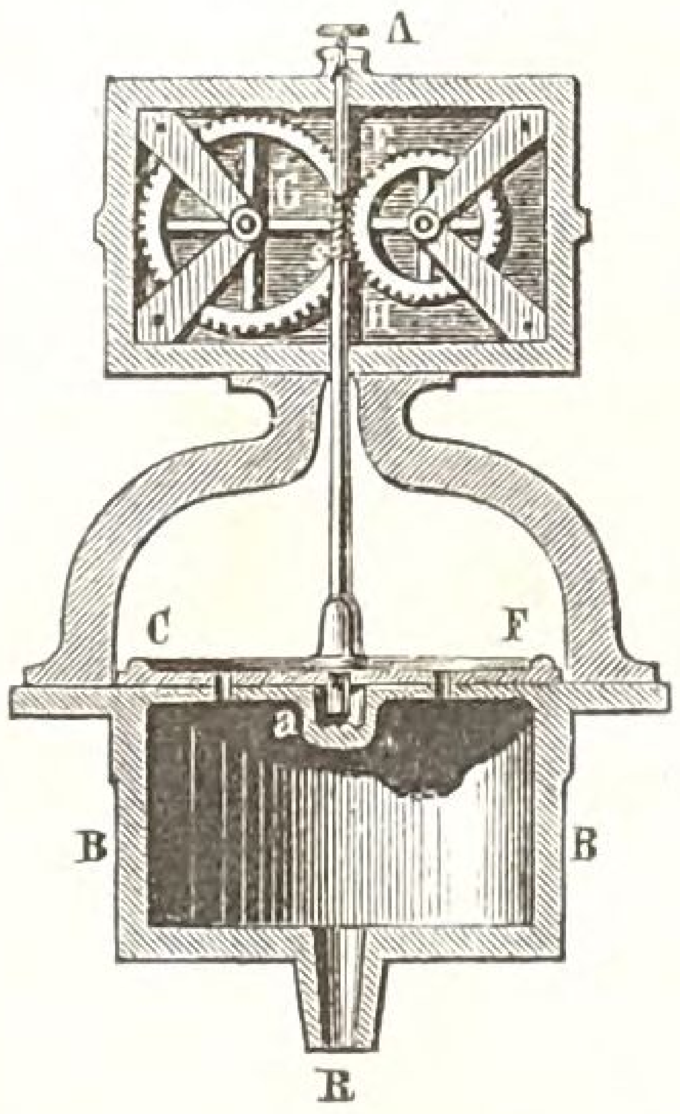


Fig. 120.

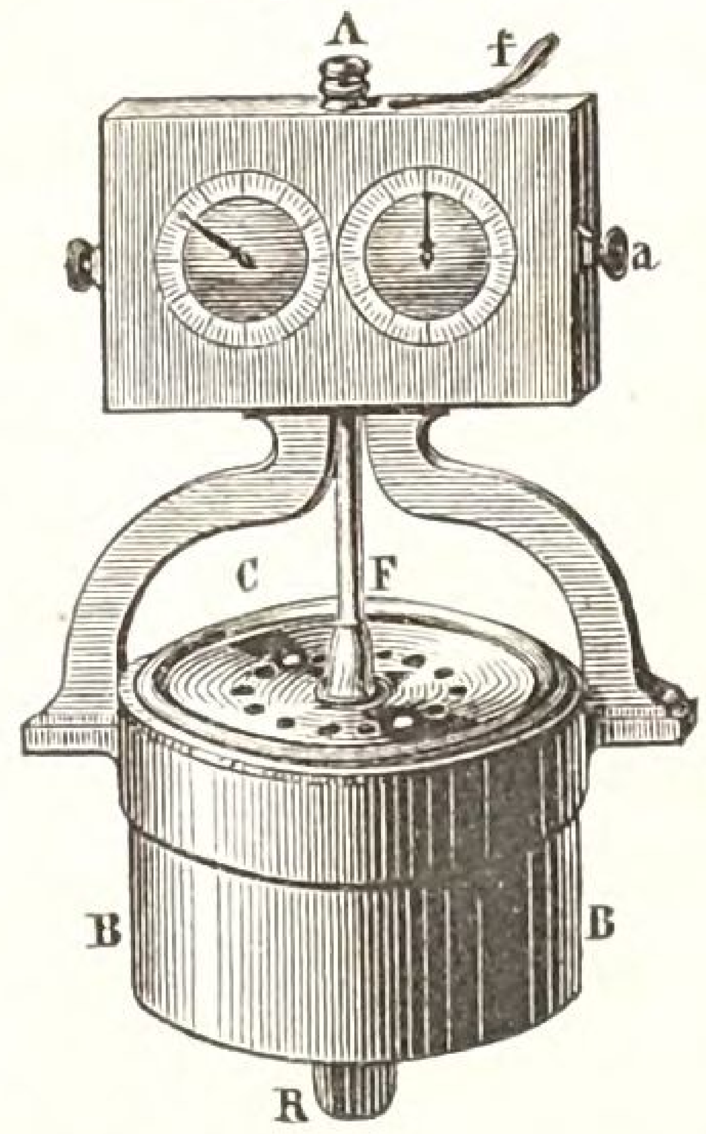
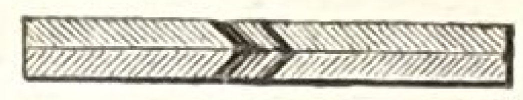


Fig. 121.



Trommeldecke durchlöcherten Kreises, dieselbe Anzahl von Löchern, so dass dieselbe sich auf die Löcher der untern Platte legen und so einen das Innere der Trommel mit der äussern Luft verbindenden Kanal herstellen, oder bei einer kleinen Drehung der Scheibe den Zwischenräumen der untern Löcherreihe entsprechen, die Trommel also abschliessen. Ist bei der rotirenden Bewegung der Scheibe auf diese Weise die Trommel geöffnet, so kann der in die Trommel getriebene Luftstrom nach aussen entweichen, ist die Trommel abgesperrt, so kann die Luft nicht entweichen. Es tritt somit bei einer Rotation der Scheibe die Luft in regelmässigen Stössen hervor, und zwar bei jeder Umdrehung der Scheibe in so viel Stössen, als die Scheibe Oeffnungen hat. Denn da alle Löcher der obern Scheibe genau gleichzeitig über die der untern zu stehen kommen, wird die Trommel so oft geöffnet, als die obere Scheibe Löcher hat. Hat also die Scheibe etwa 16 Oeffnungen, so entstehen bei jeder Drehung 16 Luftstösse, also auch ebensoviele Schwingungen, die bei einer hinreichend raschen und ganz constanten Rotation einen Ton bestimmter Höhe geben.

Die Rotation der Scheibe wird durch den Luftstrom selbst bewirkt; zu dem Zwecke sind die Löcher auch durch die obere Scheibe schief geführt, aber, wie Fig. 121 zeigt, entgegengesetzt geneigt, als die Löcher der untern Scheibe; sind sie unten von links nach rechts aufsteigend geführt, so oben von rechts nach links. Dadurch stösst der die untere Scheibe von links unten nach rechts oben durchsetzende Luftstrom gegen die Wände der obern Löcher und die horizontale Componente seiner Geschwindigkeit wird in die entgegengesetzte verwandelt, die obere Scheibe geräth dadurch in Rotation nach der Richtung, nach welcher der Luftstrom die Scheibe stösst. Die Geschwindigkeit der Rotation ist je nach der Stärke des Luftstroms verschieden und kann damit innerhalb weiter Grenzen variirt werden.

Durch Reguliren des Luftstromes kann man nun irgend eine Rotationsgeschwindigkeit herstellen und constant erhalten, somit einen Ton bestimmter Höhe erzeugen und festhalten. Um die Schwingungsanzahl dieses Tones dann zu erhalten, hat man nur die Anzahl der Rotationen der

Scheibe zu kennen; diese mit der Anzahl der Löcher der Scheibe multiplicirt gibt die Anzahl der Schwingungen.

Zur Bestimmung der Umdrehungszahl der Scheibe ist in der Axe AF bei s eine Schraube ohne Ende eingeschnitten, welche in ein Zahnrad E Fig. 119 eingreift und dieses bei jeder Umdrehung der Scheibe um einen Zahn dreht. An der Axe des Rades ist ein Zeiger befestigt, der auf dem Zifferblatt (Fig. 120) die Umdrehung der Scheibe angibt. Das Rad hat 100 Zähne, dreht sich somit bei 100 Rotationen der Scheibe einmal ganz herum, dem entsprechend ist der Umfang des Zifferblattes in 100 Theile getheilt und nummerirt.

Zur Erleichterung der Zählung ist ein zweites Zahnrad G neben dem ersten angebracht, welches durch ein auf der Axe des Rades E angebrachtes Ansatzstück jedesmal um einen Zahn weiter geschoben wird, wenn das Rad E einmal ganz gedreht ist, die Scheibe also 100 Umdrehungen vollführt hat. Auch dieses Rad hat einen auf einem Zifferblatt sich drehenden Zeiger.

Die beiden gezahnten Räder sind auf der einen Platte des Gehäuses, in das sie eingeschlossen sind, befestigt; diese Platte ist ein wenig verschiebbar. Drückt man auf den Fig. 120 zur Rechten befindlichen Knopf a, so wird die Platte und damit das Rad E so weit zur Linken verschoben, dass die Schraube ohne Ende nicht in dasselbe eingreift. In dieser Lage wird die Platte dann durch die oben auf dem Gehäuse befindliche Feder f, deren Vorsprung in einen Ausschnitt der Platte eingreift, festgehalten. Wenn sich dann auch die Scheibe dreht, so bewegen sich doch Räder und Zeiger nicht. Drückt man auf die Feder f, so springen Platte und Räder in die Lage, in der die Schraube in das Rad eingreift.

Um mit der Sirene die Schwingungsanzahl eines Tones zu bestimmen, stellt man zunächst das Zählwerk ausser Verbindung mit der Scheibe und merkt sich die Stellung der Zeiger. Dann bringt man durch passendes Reguliren des Luftstromes den gewünschten Ton hervor und hält ihn constant auf gleicher Höhe. Ist das erreicht, so bringt man mit dem Schlage einer Secunde das Zählwerk mit der Axe in Verbindung und lässt die Sirene eine bestimmte Secundenzahl, etwa eine halbe oder ganze Minute gehen. Man schaltet dann das Zählwerk wieder aus und bestimmt auf den Zifferblättern die Zahl der Rotationen. Das Product aus der Zahl der Rotationen und der Anzahl der Oeffnungen der Scheibe gibt dann die Schwingungsanzahl während der Dauer des Versuches, und der Quotient aus dieser Zahl und der Anzahl Secunden, die der Versuch gedauert hat, die Schwingungszahl des Tones, also jene Zahl von Schwingungen, die in der Secunde stattfinden müssen, um den gehörten Ton zu erzeugen.

Ein anderes Mittel zur direkten Zählung der Schwingungen benutzte Savart; er ersetzte die Sirene durch ein gezähntes Rad, dessen Zähne bei der Rotation gegen eine Karte oder eine kleine elastische Holzplatte schlagen. Jeder Schlag gibt eine Schwingung, aus der Anzahl der Zähne und der Rotationsgeschwindigkeit des Rades erhält man also die Schwingungszahl wie bei der Sirene.

Ein drittes Mittel ist das §. 94 angegebene Verfahren der graphischen Darstellung der Schwingungen. Da jede Schwingung, wie wir sahen, auf der Spirallinie, die auf der Walze Fig. 113 entsteht, eine Welle er-

zeugt, so hat man nur die auf einem in bekannter Zeit entstandenen Stück der Spirallinie vorhandenen Wellen zu zählen. Es ist nur dazu erforderlich, dass man die Umdrehungsgeschwindigkeit der Walze kennt.

Sehr bequem ist dieses Verfahren, um die Schwingungszahlen zweier von verschiedenen festen Körpern, etwa einer Saite und einer Stimmgabel erzeugter Klänge zu vergleichen. Man bringt die beiden schwingenden Körper nahe bei einander so an, dass ihre Spitzen gleichzeitig die Walzen berühren und versetzt sie in Schwingung. Man hat dann nur die auf gleichen Längen der von beiden Spitzen beschriebenen Spiralen vorhandenen Wellen zu zählen; da diese Wellen in gleichen Zeiten entstanden sind, so ist das Verhältniss ihrer Zahlen das der Schwingungszahlen der beiden Töne.

Andere Methoden zur Bestimmung der Schwingungszahlen werden wir noch im Laufe unserer Untersuchung kennen lernen.

§. 99.

Die Tonverhältnisse und Intervalle. Mit Hülfe der soeben beschriebenen verschiedenen Methoden können wir nun zunächst den schon im §. 97 aufgestellten Satz beweisen, dass ein Klang seiner Höhe nach lediglich durch seine Schwingungszahl bestimmt ist, dass eine bestimmte Schwingungszahl n uns eine ganz bestimmte Tonhöhe angibt. Wir bringen zu dem Ende mit der Sirene einen Ton bestimmter Höhe hervor, ebenso etwa mit dem Savart'schen gezähnten Rade oder mit einer Stimmgabel oder einer gespannten Saite, deren Schwingungen wir sich aufzeichnen lassen. Der Versuch beweist dann, dass wenn unser Ohr diese auf die verschiedensten Arten erzeugten Töne als gleich hoch erkennt, die Schwingungszahlen genau gleich sind.

Die grosse Zahl der in der Musik gebrauchten und in die Tonleiter eingeordneten Töne sind nun zunächst durch ihre Höhe unterschieden, es fragt sich daher zunächst, in welchem Verhältnisse dieselben in der Beziehung zu einander stehen.

Töne verschiedener Höhe haben verschiedene Schwingungszahlen, das Verhältniss der Schwingungszahlen nennt man das Tonverhältniss oder Intervall.

Lässt man zwei Töne zusammen anklingen, so erhält man einen Accord. Schlagen wir nun einen Accord an, etwa den Accord der beiden Töne *c* und *e* der gewöhnlichen Durtonleiter, die sogenannte grosse Terz, so gibt uns dieser Zusammenklang einen bestimmten Eindruck; unser Ohr empfindet dann wesentlich denselben Eindruck des Zusammenklanges, ob wir diesen Accord in einer tiefern oder höhern Lage des Tonsystems anschlagen, eine Terz hat wesentlich denselben Klang, ob wir sie mit tiefern oder höhern Tönen erzeugen. Es folgt daraus, dass der Charakter eines Accordes, also auch derjenige eines Intervalls unabhängig ist von der absoluten Schwingungszahl der Töne, welche ihn zusammensetzen. Wenn man nun aber in allen Fällen die Schwingungszahlen der beiden die Terz zusammensetzenden Klänge bestimmt, so ergibt sich, dass, welches auch die Schwingungszahl der einzelnen Töne ist, das Verhältniss ihrer Schwingungszahlen immer genau dasselbe und zwar wie 4 : 5 ist; wir finden ebenso dass jedesmal, wenn wir zwei Töne zusammen klingen lassen, deren Schwingungs-

zahlen im Verhältniss von 4 : 5 stehen, dieser Accord auf unser Ohr den Eindruck der Terz macht.

Wir gelangen so zu dem Satze, dass jeder musikalische Accord durch ein bestimmtes Verhältniss der Schwingungszahlen, also durch einen Quotienten $\frac{n}{n'}$ bestimmt ist; welches in diesem Quotienten auch der Werth der einzelnen Zahlen ist, wenn nur der Werth des Quotienten derselbe ist, so ist der Accord oder das Intervall dasselbe.

Die Zusammenklänge zweier Töne unterscheidet unser Ohr als consonirende oder dissonirende, erstere machen auf unser Ohr einen angenehmern gleichmässigern Eindruck als letztere; je weniger angenehm ein Accord unser Ohr für sich allein stehend berührt, um so dissonirender ist er. Unser Tonsystem ist auf die consonirenden Accorde aufgebaut, wir haben deshalb die Verhältnisse derselben aufzusuchen.

Die Musik erkennt als consonirende Accorde die Octave, in der gewöhnlichen Durtonleiter *c* und c_1, die Sexte *c* und *a*, die Quinte *c* und *g*, die Quarte *c* und *f*, die grosse Terz *c* und *e* und die kleine Terz *c* und *es*. Eine Vergleichung der Schwingungszahlen ergibt für dieselben folgende Tonverhältnisse:

Octave	$\frac{n}{n'}$	$= \frac{2}{1}$
Sexte	„	$= \frac{5}{3}$
Quinte	„	$= \frac{3}{2}$
Quarte	„	$= \frac{4}{3}$
Grosse Terz.	„	$= \frac{5}{4}$
Kleine Terz.	„	$= \frac{6}{5}$.

Die Octave macht also zwei Schwingungen, wenn der Grundton eine macht, die Sexte 5, wenn der Grundton 3 macht u. s. f.

Es ergibt sich somit, dass jedesmal, wenn zwei Töne zusammenklingen, deren Schwingungsverhältniss gleich dem zweier Zahlen der Zahlenreihe von 1 bis 6 ist, ein consonirender Accord entsteht. Die Consonanz ist um so vollkommner, je einfacher das Verhältniss der Schwingungszahlen der sie bildenden Töne ist. So nennt man musikalisch Octave und Quinte, also Töne, deren Zahlen wie 1, 2, 3 sich verhalten, vollkommne Consonanzen, die übrigen Consonanzen sind unvollkommne.

Die Octave gilt als eine so vollkommne Consonanz, dass ein consonirender Accord auch dann consonirend bleibt, wenn man den Grundton durch seine höhere Octave ersetzt, also den Accord, wie es bezeichnet wird, umlagert. Durch die Umlagerung wird die Octave nicht geändert, die Sexte geht über in $\frac{6}{5}$, die kleine Terz, die Quinte in $\frac{4}{3}$, die Quarte, die Quarte in $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$, die Quinte, die kleine Terz in $\frac{10}{6} = \frac{5}{3}$, die Sexte. Die grosse Terz gibt das Intervall $\frac{8}{5}$, welches zwischen Quint und Sexte liegt, man nennt es die kleine Sexte. Die Entstehung dieses Intervalls lässt dasselbe noch als Consonanz erkennen, es ist indess die unvollkommenste der angeführten Consonanzen.

Worauf es beruht, dass wir die Zusammenklänge, deren Töne dieses einfache Verhältniss der Schwingungszahlen haben, als consonirende empfinden, dagegen die weniger einfachen Tonverhältnisse als dissonirend, werden wir nach Kenntnissnahme der Einrichtung des Ohres kurz besprechen.

§. 100.

Die mehrfachen Accorde. Ausser den zweistimmigen können wir auch mehrstimmige consonirende Accorde bilden; die Bedingungen der Consonanz ergeben sich aus dem Vorigen dahin, dass nur solche mehrstimmige Accorde consonirend sein können, in denen alle darin vorkommenden zweistimmigen Accorde consonirende sind. In einem dreistimmigen Accord sind 3 zweistimmige, in einem vierstimmigen sind 6, alle diese müssen für sich consonirende Accorde sein, wenn der mehrstimmige consonirend sein soll.

Demnach können aus den consonirenden zweistimmigen Accorden überhaupt nur 6 dreistimmige Accorde gebildet werden, welche auf zwei und deren Umlagerungen zurückgeführt werden können. Consonirend können nicht sein:

Prim, Terz, Quart . . . $1 : \frac{5}{4} : \frac{4}{3}$
Prim, Quart, Quint . . . $1 : \frac{4}{3} : \frac{3}{2}$
Prim, Quint, Sext . . . $1 : \frac{3}{2} : \frac{5}{3}$

denn der oberste der drei in jedem dieser Accorde enthaltenen Zweiklänge ist eine Dissonanz, bei dem ersten $\frac{16}{15}$, dem zweiten $\frac{9}{8}$ und dem dritten $\frac{10}{9}$. Consonirende Dreiklänge sind:

1. Prim, grosse Terz, Quint . . $1 : \frac{5}{4} : \frac{3}{2}$
2. Prim, Quart Sext $1 : \frac{4}{3} : \frac{5}{3}$
3. Prim, kleine Terz, Quint . . $1 : \frac{6}{5} : \frac{3}{2}$
4. Prim, grosse Terz, Sext . . $1 : \frac{5}{4} : \frac{5}{3}$

und mit Hinzunahme der kleinen Sexte noch

5. Prim, kleine Terz, kleine Sext $1 : \frac{6}{5} : \frac{8}{5}$
6. Prim, Quart, kleine Sext . . $1 : \frac{4}{3} : \frac{8}{5}$

denn hierin sind die jedesmal obersten Intervalle im ersten kleine Terz gleich $\frac{6}{5}$, im zweiten grosse Terz gleich $\frac{5}{4}$, im dritten grosse Terz, im vierten Quarte gleich $\frac{4}{3}$, im fünften Quarte, im sechsten kleine Terz. Würden wir mit der kleinen Terz die Sexte verbinden, so würde das oberste Intervall $\frac{25}{18}$, und bei Verbindung der grossen Terz mit der kleinen Sexte würde es $\frac{32}{25}$.

Die Accorde No. 2 und 5 sind Umlagerungen des ersten, jene No. 4 und 6 des dritten. Der Accord 5 entsteht, wenn wir den Grundton durch seine höhere Octave ersetzen, der Accord 2, wenn wir in No. 1 den Grundton und die Terz durch ihre höhere Octave ersetzen. Denn durch die erste Umlagerung erhalten wir

$$\frac{5}{4} : \frac{3}{2} : 2 = 1 : \left(\frac{12}{10} = \frac{6}{5}\right) : \frac{8}{5}$$

durch die zweite

$$\frac{3}{2} : 2 : \frac{10}{4} = 1 : \frac{4}{3} : \left(\frac{20}{12} = \frac{5}{3}\right).$$

Ebenso entstehen die Accorde No. 4 und 6 aus 3, denn wir erhalten durch die Umlagerung des Grundtones

$$\frac{6}{5} : \frac{3}{2} : 2 = 1 : \left(\frac{15}{12} = \frac{5}{4}\right) : \left(\frac{10}{6} = \frac{5}{3}\right)$$

und wenn ausserdem die Terz umgelagert wird

$$\frac{3}{2} : 2 : \frac{12}{5} = 1 : \frac{4}{3} : \left(\frac{24}{15} = \frac{8}{5}\right).$$

Man unterscheidet deshalb in der Musik eigentlich nur zwei consonirende Dreiklänge, den Accord 1 aus grosser Terz und Quint, den man den grossen oder Durdreiklang nennt, und den Accord 3 aus kleiner Terz und Quint, den man den kleinen oder Molldreiklang nennt. Diese mit ihren Umlagerungen sind überhaupt die einzig möglichen consonirenden mehrfachen Accorde. Vierstimmige consonirende Accorde gibt es nicht mehr, denn die Hinzunahme der höhern oder tiefern Octave eines der in dreistimmigen Accorden vorhandenen Töne, die sogenannten Verdoppelungen liefern keinen neuen Accord. Die Accorde 4 und 5, deren erster aus dem Molldreiklange, deren zweiter aus dem Durdreiklange durch Umlagerung des Grundtones entstanden ist, heissen die Terzsextaccorde oder schlechtweg Sextaccorde, die beiden andern die Quartsextaccorde jedesmal des Dreiklanges, aus dem sie durch Umlagerung entstanden gedacht werden können.

§. 101.

Die Tonleiter. Wir erwähnten vorhin schon, dass die grosse Zahl der in der Musik gebrauchten und in die Tonleiter eingeordneten Töne sich aus den consonirenden Accorden ergeben. Bilden wir von irgend einem Tone, den wir als *c* bezeichnen, die diatonische Durtonleiter, so ergeben sich für diese folgende Schwingungsverhältnisse

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & \frac{9}{8} & \frac{5}{4} & \frac{4}{3} & \frac{3}{2} & \frac{5}{3} & \frac{15}{8} & 2 \\ c & d & e & f & g & a & h & c_1, \end{array}$$

unter welche wir die deutsche Bezeichnung dieser Töne gesetzt haben. Es sind das die Töne innerhalb einer Octave. Von der Octave c_1 wiederholt sich die Reihe einfach, indem ebenso wie die Octave die Verdoppelung des Grundtones ist, so auch die innerhalb der folgenden Octave liegenden Töne die Verdoppelungen der in der tieferen Octave liegenden Töne sind. Tiefere Octaven erhalten wir jedesmal durch Halbirung der Schwingungszahlen der höhern Octave. Um die höhere Octave zu bezeichnen, werden wir rechts unten an die Buchstaben, welche die Töne unserer Grundoctave angeben, die Zahlen 1, 2 . . setzen; diese Zahlen geben uns dann jene Potenz von 2, mit welcher wir die Schwingungszahlen der Grundoctave multipliciren müssen, um die Schwingungszahl des Tones der betreffenden Octave zu erhalten. Tiefere Octaven bezeichnen wir dadurch, dass wir der unten rechts hingeschriebenen Zahl das negative Vorzeichen geben, andeutend, dass wir die Schwingungszahlen dieser Töne erhalten, wenn wir jene der Grundoctave mit der betreffenden negativen Potenz von 2 multipliciren, resp. durch diese Potenz von 2 dividiren.

Da somit die Tonverhältnisse einer Octave sich stets wiederholen, haben wir nur zu zeigen, wie sich die Töne, welche die Musik innerhalb einer Octave verwendet, ausser den in der diatonischen Durtonleiter vorkommenden, noch die erhöhten und vertieften, aus den consonirenden Accorden ergeben. Von den Tönen der diatonischen Durtonleiter erhalten wir die meisten schon aus den consonirenden Zweiklängen, nämlich

$$\begin{array}{cccccc} 1 & \frac{5}{4} & \frac{4}{3} & \frac{3}{2} & \frac{5}{3} & 2 \\ c & e & f & g & a & c_1, \end{array}$$

es fehlen in der Reihe die Secunde $d = \frac{9}{8}$ und die Septime $h = \frac{15}{8}$. Wir erhalten diese sofort durch den Dreiklang. Will man nämlich den Durdreiklang noch von andern Tönen bilden, so reicht man mit den durch die consonirenden Zweiklänge gegebenen nicht aus; Secunde und Septime treten schon hinzu, wenn wir von der Quint, als dem nach der Octave consonirendsten Intervall, den Dreiklang bilden wollen. Wir erhalten dann als Accord, da $\frac{3}{2}$ dessen Grundton ist,

$$\frac{3}{2} \qquad \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} = \frac{15}{8} \qquad \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{4} = 2 \cdot \frac{9}{8}.$$

Die Terz der Quint ist somit die Septime, und die Quinte die höhere Octave der Secunde.

Die Bildung des Durdreiklanges von den andern Tönen der diatonischen Durtonleiter fordert nun weitere zwischen den Tönen derselben einzuschaltende Töne. Anstatt dieselben durch die Dreiklänge abzuleiten, können wir sie noch leichter durch die Forderung erhalten, dass wir zunächst wieder von jedem Tone der Durtonleiter die diatonische Tonleiter bilden wollen.

Bilden wir die Tonleiter von d, so sind die Schwingungszahlen

$$\frac{9}{8};\ \frac{9}{8} \cdot \frac{9}{8} = \frac{81}{64} = \frac{5}{4} \cdot \frac{81}{80};\ \frac{5}{4} \cdot \frac{9}{8} = \frac{45}{32} = \frac{4}{3} \cdot \frac{25}{24} \cdot \frac{81}{80}$$
$$\frac{4}{3} \cdot \frac{9}{8} = \frac{3}{2};\ \frac{3}{2} \cdot \frac{9}{8} = \frac{27}{16} = \frac{5}{3} \cdot \frac{81}{80};\ \frac{5}{3} \cdot \frac{9}{8} = \frac{15}{8};\ \frac{15}{8} \cdot \frac{9}{8} = \frac{135}{64} = 2 \cdot \frac{25}{24} \cdot \frac{81}{80}.$$

Von diesen Zahlen ist die erste, vierte und sechste schon in der Tonleiter von c enthalten als d, g, h; die zweite und fünfte haben eine im Verhältniss $\frac{81}{80}$ höhere Schwingungszahl, sie sind, wie man das bezeichnet, um ein Komma höher als die betreffenden Töne e und a in der Tonleiter von c. Wir wollen, um das anzudeuten, dieselben mit $\bar{e}$ und $\bar{a}$ bezeichnen. Wesentlich verschieden von den frühern Tönen sind der dritte und siebente, sie sind im Verhältniss $\frac{25}{24} \cdot \frac{81}{80}$ höher als die entsprechenden, f und c_1 der Tonleiter von c. Das Intervall $\frac{25}{24}$ bezeichnet man als das eines kleinen halben Tones, so dass diese Töne also um einen kleinen halben Ton und ein Komma höher sind als f und c. Der Grund dieser Erhöhung liegt darin, dass zwischen der zweiten und dritten Stufe der Durtonleiter das Verhältniss $\frac{10}{9}$, zwischen der sechsten und siebenten $\frac{9}{8}$ ist, ersteres ein kleiner, letzterer ein grosser ganzer Ton. Dagegen ist das Verhältniss zwischen der dritten und vierten Stufe $\frac{16}{15}$, zwischen der siebenten und achten Stufe ebenfalls $\frac{16}{15}$, ein grosser halber Ton. Damit in der Tonleiter von d an zwischen der zweiten und dritten Stufe das Intervall ein ganzer Ton werde, muss f erhöht werden, wodurch dann auch das Intervall zwischen der dritten und vierten Stufe verkleinert wird. Das Gleiche gilt für die siebente Stufe. Die um einen halben Ton erhöhten Töne bezeichnet man durch Anhängen der Silbe *is* an den den betreffenden Ton bezeichnenden Buchstaben, musikalisch werden sie durch ein dem betreffenden Tone vorgesetztes Doppelkreuz bezeichnet, so dass z. B. das um einen halben Ton erhöhte c gleich *cis* = ♯ c ist. Die in der Durtonleiter von d vorkommenden *fis* und *cis* sind nun um ein Komma mehr als einen halben Ton erhöht, wir wollen sie deshalb mit $\overline{fis}$ und $\overline{cis}$ bezeichnen. Die Töne der Durtonleiter von d sind demnach

$$d\ \bar{e}\ \overline{fis}\ g\ \bar{a}\ h\ \overline{cis}\ d_1.$$

Nach derselben Bezeichnungsweise werden die Töne der Durtonleiter von *e* aus

$$e\ \overline{fis}\ gis\ a\ h\ cis_1\ dis_1\ e_1,$$

es werden also neu eingeschaltet *gis cis dis*, die um einen halben Ton erhöhten *g*, *c* und *d*.

Die Tonleiter von *g* bedarf keiner neuen Intervalle. Die Tonleiter von *a* dagegen gibt folgende Tonverhältnisse

$$\tfrac{5}{3};\ \tfrac{15}{8};\ \tfrac{25}{12} = 2 \cdot \tfrac{25}{24};\ \tfrac{20}{9} = \tfrac{9}{4} \cdot \tfrac{80}{81};\ \tfrac{5}{2};\ \tfrac{25}{9} = \tfrac{8}{3} \cdot \tfrac{25}{24};$$

$$\tfrac{75}{24} = 3 \cdot \tfrac{25}{24};\ \tfrac{10}{3}.$$

Hierin ist neu der Ton $\frac{9}{4} \cdot \frac{80}{81}$, das um ein Komma vertiefte d_1, bezeichnen wir das mit $\underline{d}_1$, so werden diese Töne

$$a\ h\ cis\ \underline{d}_1\ e_1\ fis_1\ gis_1\ a_1.$$

Die Tonleiter von *h* gibt folgende Töne

$$h\ \overline{cis_1}\ dis_1\ c_1\ \overline{fis_1}\ gis_1\ \overline{ais_1}\ h_1.$$

Würde man nun ausser von den Tönen der diatonischen Tonleiter von *c* aus auch von den neu hinzugekommenen die diatonische Tonleiter bilden wollen, und beschränkte man sich bei den letztern auf die reinen halben Töne, so wären in die Octave 29 Töne einzuschalten, indem zu den einfach erhöhten Tönen die doppelt erhöhten wie *cisis*, *disis* etc. kämen.

Damit würde indess dem musikalischen Bedürfniss noch nicht genügt; schon wenn wir die Durtonleiter von dem bisher übergangenen Ton *f* bilden wollen, wird die Einführung eines neuen Intervalls nöthig. Wir erhalten dieselbe in der bisherigen Weise, indem wir die Tonverhältnisse der Tonleiter von *c* aus mit $\frac{4}{3}$ multipliciren.

$$\tfrac{4}{3};\ \tfrac{3}{2};\ \tfrac{5}{3};\ \tfrac{16}{9} = \tfrac{15}{8} \cdot \tfrac{24}{25} \cdot \tfrac{80}{81};\ 2;\ \tfrac{20}{9} = \tfrac{9}{4} \cdot \tfrac{80}{81};\ \tfrac{10}{4}.$$

Mit Ausnahme des vierten Tones haben wir alle diese Töne schon früher erhalten, es sind

$$f\ g\ a\ c_1\ \underline{d}_1\ e_1,$$

der vierte Ton ist jedoch nicht nur neu, sondern auch in ganz anderer Weise gebildet, nämlich durch Vertiefung des Tones $h = \frac{15}{8}$ um einen halben Ton und ein Komma. Die Vertiefung eines Tones um einen halben Ton wird in der Musik dadurch bezeichnet, dass man vor denselben ein *b* setzt, die Namen der vertieften Töne erhält man, indem man an denjenigen des Tones, zu welchem die Vertiefung gehört, die Silbe *es* oder den Buchstaben *s* hängt; nur die Vertiefung von *h* wird mit *b* bezeichnet. Das in die *fdur* Tonleiter eintretende *b* ist nun um einen halben Ton und ein Komma erniedrigt, wir müssen es deshalb als $\underline{b}$ bezeichnen.

Ebenso wie die Vertiefung von *h* in der Durtonleiter von *f* erhält man die Vertiefungen aller übrigen Töne, wenn man von den consonirenden Zweiklängen anstatt der grossen Terz und grossen Sexte die kleine Terz und kleine Sexte einführt, und dann die von dem Molldreiklange der Quinte verlangte Secunde und Septime einführt. Man erhält dann die sogenannte Molltonleiter von *c*. Dieselbe wird aus den Zweiklängen

$$1 \quad \tfrac{6}{5} \quad \tfrac{4}{3} \quad \tfrac{3}{2} \quad \tfrac{8}{5} \quad 2$$

und mit dem Molldreiklange von der Quinte

$$\tfrac{3}{2} \quad \tfrac{3}{2} \cdot \tfrac{6}{5} = \tfrac{9}{5} \quad \tfrac{3}{2} \cdot \tfrac{3}{2} = \tfrac{9}{4} = 2 \cdot \tfrac{9}{8},$$

somit

$$1 \quad \tfrac{9}{8} \quad \tfrac{6}{5} \quad \tfrac{4}{3} \quad \tfrac{3}{2} \quad \tfrac{8}{5} \quad \tfrac{9}{5} \quad 2.$$

Nun ist

$$\tfrac{6}{5} = \tfrac{5}{4} \cdot \tfrac{24}{25} = es; \quad \tfrac{8}{5} = \tfrac{5}{3} \cdot \tfrac{24}{25} = as; \quad \tfrac{9}{5} = \tfrac{15}{8} \cdot \tfrac{24}{25} = b,$$

so dass also die Molltonleiter wird

$$c \;\; d \;\; es \;\; f \;\; g \;\; as \;\; b \;\; c,$$

in welcher das Verhältniss der aufeinander folgenden Töne ist

$$\tfrac{9}{8} \quad \tfrac{16}{15} \quad \tfrac{10}{9} \quad \tfrac{9}{8} \quad \tfrac{16}{15} \quad \tfrac{9}{8} \quad \tfrac{10}{9},$$

so dass sich hier zwischen der zweiten und dritten, sowie zwischen der fünften und sechsten Stufe ein grosser halber Ton findet. Es wird überflüssig sein hier, wie wir es eben bei den Durtonleitern thaten, durch Bildung der einzelnen Molltonleitern zu zeigen, dass die Vertiefung sämmtlicher Töne um einen halben Ton, theils auch um einen halben Ton und ein Komma und ebenso die Doppelvertiefungen eintreten müssen, wenn wir sämmtliche Molltonleitern nur so weit bilden wollen, wie vorher die Durtonleitern. Die Rechnungen ergeben das ohne Mühe. Wir bemerken, dass dadurch zu den vorhin abgeleiteten noch 23 Töne in die Octave einzuschalten sind, so dass eine Octave dadurch im Ganzen 52 Töne enthält, welche nach der von uns angenommenen Bezeichnung folgende Reihe bilden, wobei wir der leichtern Uebersicht wegen die um ein Komma erhöhten oder vertieften Töne über oder unter die Hauptreihe der reinen Töne setzen.

$$\overline{c} \;\; \overline{cis} \;\; \overline{cisis} \qquad\qquad\qquad\qquad \overline{es} \;\; \overline{e} \;\; \overline{eis} \;\; \overline{fes} \;\; \overline{f} \;\; \overline{fis}$$

$$c \;\; cis \;\; cisis \;\; deses \;\; des \;\; d \;\; dis \;\; disis \;\; eses \;\; es \;\; e \;\; eis \;\; fes \;\; f \;\; fis \;\; geses$$

$$\underline{deses} \;\; \underline{des} \;\; \underline{d} \;\; \underline{dis}$$

$$\overline{as} \;\; \overline{a} \;\; \overline{ais} \qquad\qquad\qquad \overline{ces_1}$$

$$ges \;\; g \;\; gis \;\; gisis \;\; ases \;\; as \;\; a \;\; ais \;\; aisis \;\; bb \;\; b \;\; h \;\; his \;\; ceses_1 \;\; ces_1 \;\; c_1$$

$$\underline{bb} \;\; \underline{b}.$$

Von der Octave c_1 wiederholen sich die Töne.

Die Schwingungszahlen der in der Hauptreihe vorkommenden reinen und einfach erhöhten und vertieften Töne sind folgende

c . . .	1	Prim
$\sharp\, c = cis$	$\tfrac{25}{24}$	übermässige Prim
$\flat\, d = des$	$\tfrac{9}{8} \cdot \tfrac{24}{25} = \tfrac{27}{25}$	kleine Secunde
$d =$. .	$\tfrac{9}{8}$	grosse Secunde
$\sharp\, d = dis$	$\tfrac{9}{8} \cdot \tfrac{25}{24} = \tfrac{75}{64}$	übermässige Secunde
$\flat\, e = es$	$\tfrac{6}{5}$	kleine Terz
e . . .	$\tfrac{5}{4}$	grosse Terz
$\sharp\, e = eis$	$\tfrac{5}{4} \cdot \tfrac{25}{24} = \tfrac{125}{96}$	übermässige Terz
$\flat\, f = fes$	$\tfrac{4}{3} \quad \tfrac{24}{25} = \tfrac{32}{25}$	verminderte Quarte
f . . .	$\tfrac{4}{3}$	reine Quarte

♯ *f* = *fis*	$\frac{4}{3} \cdot \frac{25}{24} = \frac{25}{18}$	übermässige Quarte
b g = *ges*	$\frac{3}{2} \cdot \frac{24}{25} = \frac{36}{25}$	verminderte Quinte
g . . .	$\frac{3}{2}$	reine Quinte
♯ *g* = *gis*	$\frac{3}{2} \cdot \frac{25}{24} = \frac{25}{16}$	übermässige Quinte
b a = *as*	$\frac{8}{5}$	kleine Sexte
a . . .	$\frac{5}{3}$	grosse Sexte
♯ *a* = *ais*	$\frac{5}{3} \cdot \frac{25}{24} = \frac{125}{74}$	übermässige Sexte
b h = *b*	$\frac{9}{5}$	kleine Septime
h . . .	$\frac{15}{8}$	grosse Septime
♯ *h* = *his*	$\frac{15}{8} \cdot \frac{25}{24} = \frac{125}{64}$	übermässige Septime
b c = *ces*	$2 \cdot \frac{24}{25} = \frac{48}{25}$	verminderte Octave.

Die doppelt erhöhten und doppelt vertieften Töne erhält man aus dieser Tabelle, indem man die einfach erhöhten oder vertieften mit $\frac{25}{24}$ resp. $\frac{24}{25}$ multiplicirt, die Töne der obern Reihe durch Multiplication der Töne der Hauptreihe mit $\frac{81}{80}$, die der untern durch Multiplication der betreffenden Töne mit $\frac{80}{81}$.

§. 102.

Die musikalische Temperatur. Die durch Bildung der Dur- und Molltonleitern sich ergebende Reihe von 52 Tönen innerhalb einer Octave ist wegen ihrer grossen Reichhaltigkeit nicht nur unbequem, sondern in der praktischen Musik geradezu unbrauchbar, da auf manchen Instrumenten, besonders denen mit festen Tönen, wie z. B. dem Klavier, sich alle die kleinen Intervalle gar nicht darstellen lassen. Zudem würde das Beibehalten aller jener Intervalle auch überflüssig sein, da selbst musikalisch gebildete Ohren kleine Unreinheiten eines Intervalls in einem Accorde nicht mehr wahrzunehmen im Stande sind. Unsere jetzige Musik vereinfacht daher das Tonsystem sehr bedeutend, indem sie anstatt 52 Tönen innerhalb der Octave nur 12 Töne einschaltet. Zunächst lässt sie auf den Instrumenten mit festen Tönen diejenigen der obern und untern Reihe, also $\bar{c}$ etc., $\underline{d}$ etc. fort, und behält nur die Töne der Hauptreihe bei. In dieser lässt sie die doppelt erhöhten und doppelt vertieften fort und ersetzt sie durch die nächstliegenden ganzen Töne, so dass für *cisis* der Ton *d*, für *deses c* genommen wird, und schliesslich unterscheidet sie nicht die einander nahe liegenden einfach vertieften Töne, sondern ersetzt dieselben, wie z. B. *cis* und *des*, *eis* und *f*, *e* und *fes* durch einen Ton. Die Tonreihe wird dadurch

$$c \binom{cis}{des} d \binom{dis}{es} \binom{e}{fes} \binom{eis}{f} \binom{fis}{ges} g \binom{gis}{as} a \binom{ais}{b} \binom{h}{ces} \binom{his}{c_1}.$$

Es werden dadurch Töne einander gleichgesetzt, welche im Verhältniss von $\frac{81}{80}$ oder $\frac{128}{25}$ oder sogar $\frac{128}{125} \cdot \frac{81}{80}$ stehen, respective stehen würden, wenn man die Töne der *cdur* Tonleiter ganz ungeändert liesse, und anstatt eines zwischen den als gleich gesetzten Tönen liegenden einen der beiden Töne annähme. Zur Verminderung dieser Unreinheiten wird deshalb ausser den Octaven, bei denen wegen ihrer vollkommenen Consonanz die geringste Unreinheit fühlbar wird, kein einziger Ton nach dem theoretischen Schwingungsverhältniss benutzt, sondern alle werden temperirt.

Die jetzt in der Regel angewandte Temperatur ist die gleichschwebende, das heisst man geht von jedem Ton zu dem nächstfolgenden durch die gleiche Stufe, so dass also das Verhältniss der Schwingungszahlen

$$\frac{cis = des}{c} = \frac{d}{cis = des} = \frac{dis = es}{d} \cdots\cdots = \frac{c_1}{h = ces_1} = i$$

gesetzt wird. Der Werth dieses dann einen halben Ton bildenden Intervalles i ergibt sich daraus, dass das Fortschreiten durch 12 halbe Töne von einem Grundton zur nächsthöhern Octave führen muss, denn es wird

$$c_1 = i\,h = i^2\,ais = i^3\,a = i^4\,gis \ldots\ldots = i^{12}\,c.$$

Damit wird

$$i^{12} = \frac{c_1}{c} = 2; \quad i = \sqrt[12]{2} = 1{,}05946.$$

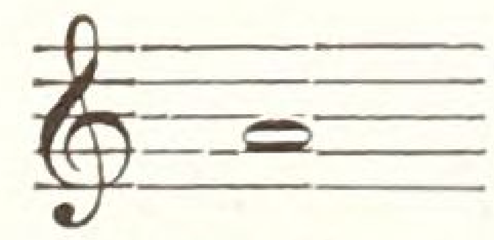
Nach der gleichschwebenden Temperatur erhalten wir darnach für die Töne der *cdur* Tonleiter statt der reinen Schwingungsverhältnisse folgende zusammengestellt mit dem reinen und dem Unterschiede der reinen und temperirten Verhältnisse. Die Fehler sind in Form von Decimalbrüchen angegeben, dessen Zähler jedesmal die temperirte, dessen Nenner die reine Schwingungszahl. Ist demnach in der Rubrik Fehler die Zahl grösser als 1, so ist der temperirte Ton zu hoch.

Ton	Reines Schwingungsverhältniss	Temperirtes Schwingungsverhältniss	Fehler
c	1	1	1
d	1,125	1,12246	0,99774
e	1,25	1,25992	1,01026
f	1,3333	1,33484	1,00113
g	1,50	1,49831	0,99888
a	1,6666	1,68179	1,00907
h	1,875	1,88775	1,00680

Man sieht, dass die temperirten von den reinen Verhältnissen nicht unbeträchtlich abweichen; in demselben und zum Theil noch höhern Maasse weichen die einfach erhöhten und vertieften, sowie die doppelterhöhten und vertieften von den temperirten ab, so z. B. wird *d* für *eses* gesetzt, während *eses* eigentlich 1,14514, der Fehler somit durch die Zahl 0,9821 ausgedrückt wird. Dass durch solche Unreinheiten der Wohlklang der Accorde doch einigermassen leiden muss, ist nicht zu bezweifeln, die Accorde aus reinen Tönen sind viel wohlklingender, als die aus temperirten. Deshalb wäre es für die Musik sehr wünschenswerth, ein Tonsystem zu erhalten, das sich näher der reinen Stimmung anschliesst. Das geht nur durch Einschaltung einer grössern Anzahl von Tönen in die Octave. Schwierig ist das nur für die Instrumente mit festen Tönen; bei den Streichinstrumenten z. B. wendet man in der That schon mehr Töne an, da *cis* ganz anders gegriffen wird wie *des* etc. Für das Harmonium haben Helmholtz und Appun bereits eine Tonreihe angewandt, welche der reinen Stimmung sehr nahe kommt. Helmholtz wandte in der Octave 30, Appun 36 Töne an. Ob sich Aehnliches allgemein durchführen lässt, müssen die praktischen Musiker entscheiden.

§. 103.

Absolute Schwingungszahl der Töne. Die Tonleiter bestimmt das Verhältniss der Schwingungszahlen der in der Musik angewandten Töne; es bedarf daher nur der Bestimmung der absoluten Schwingungszahl eines Tones, um die aller übrigen zu kennen. Als Normalton, von dem aus man alle übrigen stimmt, wird das sogenannte eingestrichene *a* angenommen, dessen musikalisches Zeichen



ist. Die Octave, innerhalb welcher dieser Ton liegt, ist die sogenannte eingestrichene Octave.

Um diesen Ton festzuhalten, hat man die sogenannte Stimmgabel construirt. Dieselbe besteht aus einem gabelförmig gebogenen Stahlstabe, an dem unten an der Biegung ein Stäbchen angebracht ist (Fig. 122). Bringt man die Gabel zum Tönen, indem man sie mit einem Bogen streicht oder eine der Zinken an einen harten Körper anschlägt, so schwingt sie wie ein gerader Stab mit zwei Schwingungsknoten (Fig. 123), die ziemlich nahe bei der Biegung liegen. Die beiden Zinken schwingen zugleich nach innen, die Biegung nach unten, dann die Zinken nach aussen, die Biegung nach oben. Die Töne der allein schwingenden Gabel sind sehr schwach, um sie zu verstärken, setzt man den Stiel der Gabel auf einen Tisch oder befestigt die grössern Gabeln direkt auf einem Resonanzkasten (Fig. 122). Da der Stiel der Gabel auf- und niedergeht, theilen sich die Schwingungen der Unterlage, auf welche die Gabel gestellt wird, mit.

Fig. 122.

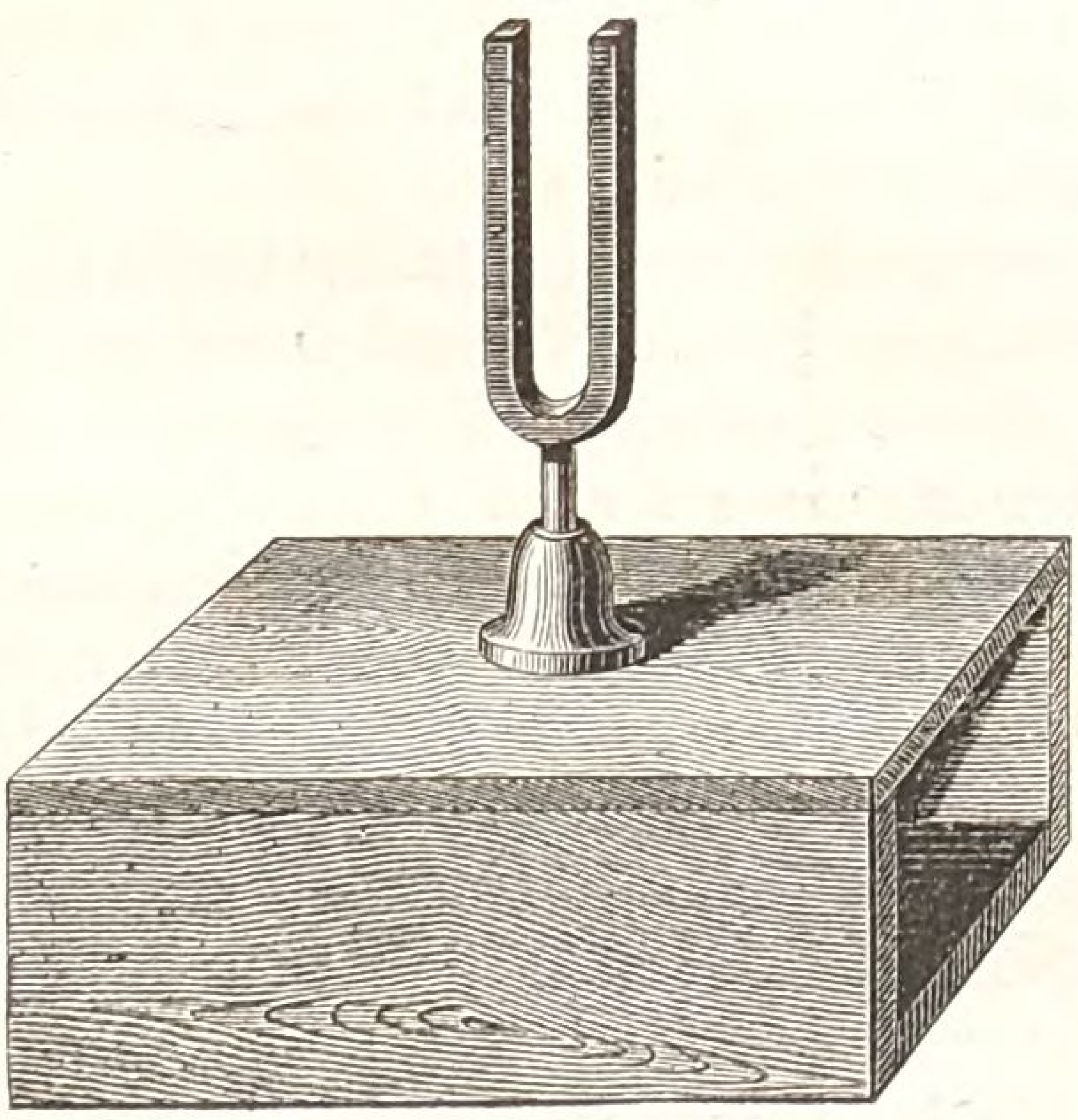
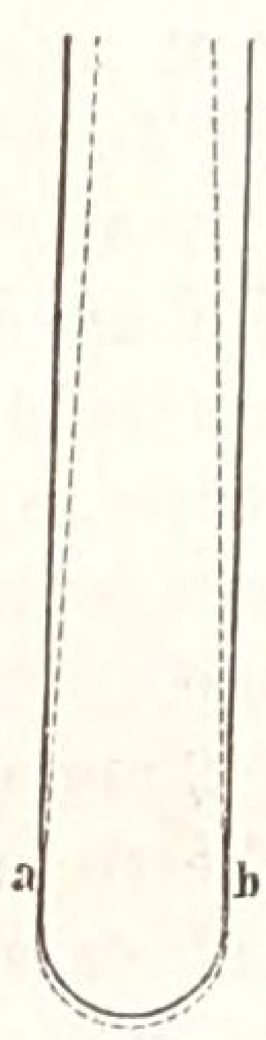


Fig. 123.



Messungen der Schwingungszahlen der Stimmgabeln verschiedener Orchester und zu verschiedenen Zeiten haben nun ergeben, dass der Normalton an verschiedenen Orten und zu verschiedenen Zeiten merklich verschieden genommen ist. Messungen von Fischer und Scheibler ergaben Zahlen, die zwischen 422 und 445 Schwingungen lagen. Deshalb schlug Scheibler im Jahre 1834 auf der Naturforscherversammlung zu Stuttgart vor, man solle den Normalton auf 440 Schwingungen fixiren, ein Vorschlag, der indess in der Praxis nicht durchgeführt wurde. Im Jahre 1857 wurde dann von der französischen Regierung in den vom Staate unterhaltenen Orchestern für den Normalton die Schwingungsanzahl 435 eingeführt, wodurch auch in den meisten andern Orchestern dieser als Normalton sich allmählich einbürgerte.

Aus diesem Ton ergibt sich für das eingestrichene *c* nach der temperirten Stimmung

$$c_1 = \frac{435}{1,68179} = 258,65.$$

Die Schwingungszahlen für die Töne c der verschiedenen in der Musik gebrauchten Octaven sind darnach

Contra c	$=$	$\underline{C} = c_{-2}$	$=$	32,33
Grosses c	$=$	$C = c_{-1}$	$=$	64,66
Kleines c	$=$	$c = c$	$=$	129,32
Eingestrichenes c	$=$	$\bar{c} = c_1$	$=$	258,65
Zweigestrichenes c	$=$	$\bar{\bar{c}} = c_2$	$=$	517,30
Dreigestrichenes c	$=$	$\bar{\bar{\bar{c}}} = c_3$	$=$	1034,60
Viergestrichenes c	$=$	$\bar{\bar{\bar{\bar{c}}}} = c_4$	$=$	2069,2
Fünfgestrichenes c	$=$	$\bar{\bar{\bar{\bar{\bar{c}}}}} = c_5$	$=$	4138,40.

Unterhalb des Contra C und oberhalb des c_5 werden in der Musik keine Töne mehr gebraucht, ja die tiefsten der Contraoctave und die höchsten der viergestrichenen sind schon nur wenig brauchbar.

Hörbar sind indess noch Töne ausserhalb dieser Octaven, besonders nach oben geht die Hörbarkeit noch ziemlich weit, während nach unten das Contra C in der That nahe an der Grenze der wirklich hörbaren Töne ist. An grossen Orgeln findet man allerdings noch wohl die Subcontraoctave, welche bis zu 16 Schwingungen herunter geht, aber nach den Versuchen von Helmholtz ist es ein unbestimmtes Gemisch von Obertönen, welches diese Töne hören macht, die überhaupt nur zur Füllung in der Harmonie verwandt werden können. Nach Helmholtz hat erst ein Ton von 40 Schwingungen eine bestimmte musikalische Höhe, und man erkennt schon an dem Klavier, dass eigentlich erst von der Quarte der Contraoctave an ein melodischer Gang vorhanden ist. Mit 30 Schwingungen hört nach Helmholtz jede Tonempfindung auf, wie sich sowohl bei schwingenden Saiten, welche zum Ausschliessen der Obertöne in der Mitte belastet waren, als auch mit schwingenden Stimmgabeln ergab, bei denen man Schwingungen erhalten konnte, deren Amplitude 9 Mm. betrug.

Nach oben hin ist die Reihe der Töne weniger begrenzt, wobei sich indess zeigt, dass für verschiedene Ohren, die in mittlern Tonhöhen gleich gut hören, die Grenze der Hörbarkeit etwas verschieden ist. Despretz fand, dass d_8 mit etwa 36000 Schwingungen noch hörbar war.

§. 104.

Analyse des Klanges. Bei Besprechung der Qualität des Schalles im §. 97 erwähnten wir schon, dass die Verschiedenheit der Klangfarbe bei gleicher Tonhöhe ihren Grund in der Verschiedenheit ihrer Schwingungsform habe, oder genauer, dass sie von den gleichzeitig in dem Klange vorhandenen Tönen abhängig sei. Wie wir nun bei Besprechung der zusammengesetzten Schwingungen sahen, geben in der That fast alle schwing-

enden Körper nicht einfache Schwingungen, das heisst die Bewegung ihrer Punkte wird nicht durch eine Gleichung von der Form

$$y = a . \sin 2\pi \frac{t}{T}$$

dargestellt, sondern es treten mit den langsamern Schwingungen gleichzeitig die in dem Körper überhaupt möglichen Schwingungen auf, deren Dauer die Hälfte, ein Drittel etc. ist. Die Gleichung für die Schwingung ist demnach ganz allgemein

$$y = a \sin 2\pi \frac{t}{T} + b . \sin 4\pi \frac{t}{T} + c \sin 6\pi \frac{t}{T} + \cdots p \sin 2n\pi \frac{t}{T},$$

wenn wir von etwaigen Phasendifferenzen absehen. Welche von allen diesen möglichen Gliedern in einem bestimmten Falle auftreten, und welches das Verhältniss ihrer Amplituden ist, das hängt von der Beschaffenheit des schwingenden Körpers und von der Art der Erregung ab.

Wie wir weiter sahen, geben uns Schwingungen, welche ihrer Anzahl nach in dem Verhältniss der Zahlen der natürlichen Zahlenreihe stehen, die harmonischen Obertöne des Tones mit der kleinsten Schwingungszahl also, wenn wir den tiefsten Ton 1 mit c bezeichnen,

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \ldots \\ c & c_1 & g_1 & c_2 & e_2 & g_2 & - & c_3 & \ldots \end{matrix}$$

Ist also die Schwingungsform das Bedingende des Klanges, so würde das heissen, dass die Klänge Accorde aus einem Grundtone mit seinen Obertönen seien, und dass die Verschiedenheit des Klanges von der Zusammensetzung der Accorde, also von der Anzahl und Stärke der in ihnen vorhandenen Obertöne abhängig sei.

Nachdem schon Ohm behauptet hatte, dass in den Klängen der Instrumente die Obertöne hörbar seien, ein Satz, den Seebeck indess bestritt, gelang es Helmholtz direkt nachzuweisen, dass in der That in den Klängen die Obertöne vorhanden seien und dass die Verschiedenheit der Klangfarbe durch die verschiedene Zahl und Stärke der in ihm vorhandenen Obertöne bedingt sei.

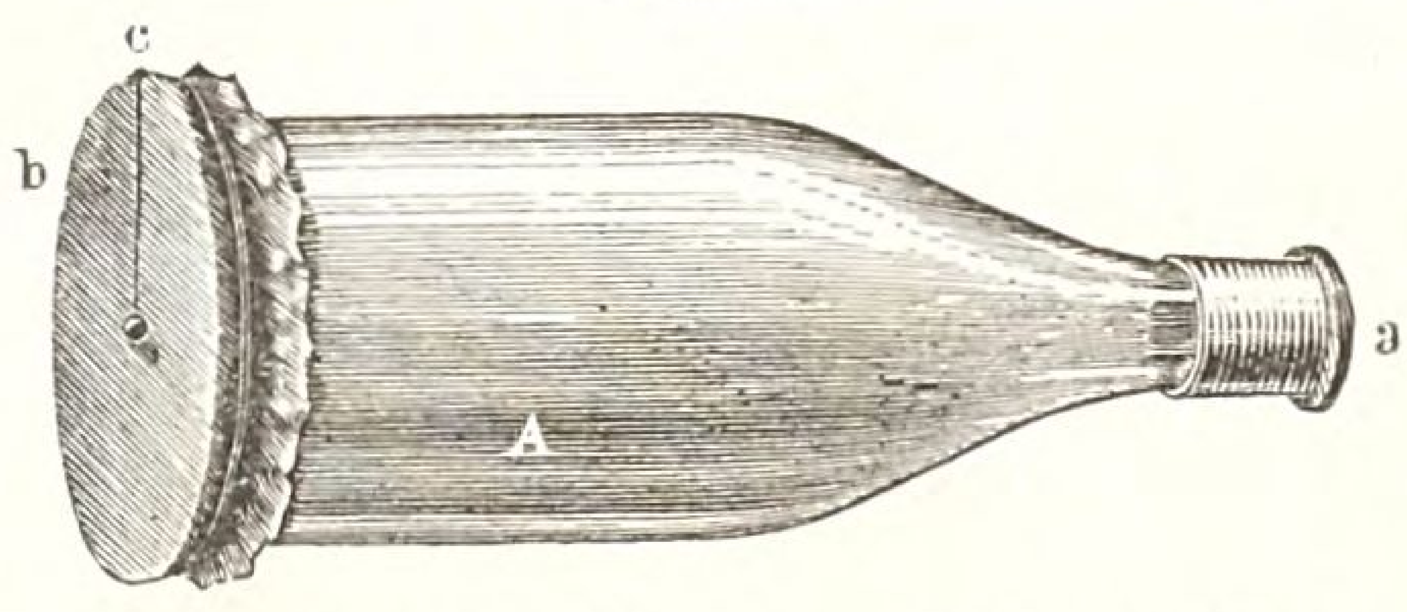
Das einfachste Mittel zur Wahrnehmung der Obertöne in einem Klange ist das direkte Hören derselben, was besonders dann gelingt, wenn man den Ton, den man als Oberton aus einem Klange hören will, sich vorher angegeben hat. Indess da das doch nur einigermassen geübten Ohren möglich ist, und da es immerhin der Fall sein könnte, dass die Wahrnehmung des Tones nur auf einer subjectiven Empfindung beruht, war es wünschenswerth zu zeigen, dass die Obertöne im Klange wirklich existiren, das heisst also, dass die zusammengesetzten Schwingungen wirklich die einzelnen Partialtöne liefern.

Helmholtz benutzte dazu das Phänomen des Mittönens, auf welches wir später zurückkommen werden. Wenn in der Nähe eines Körpers, der selbst ganz bestimmte Schwingungen vollführen kann, Schwingungen gleicher Dauer erregt werden, die sich durch die Luft zu ihm fortpflanzen, so geräth er in Schwingungen. Stellt man zwei gleichgestimmte Stimmgabeln etwa auf Resonanzkasten einander nahe auf und streicht die eine an, so tönt auch die andere, wie man sich überzeugt, wenn man die zuerst

gestrichene festhält. Dieses Mittönen eines Körpers mit bestimmter Schwingungsdauer tritt nur auf, wenn der ihm gleiche Ton in seiner Nähe angegeben wird, durch keinen andern, schon eine kleine Verschiedenheit des angegebenen Tones lässt, wie man sich leicht bei der Stimmgabel überzeugen kann, den Körper nicht mittönen. Wenn man deshalb einen Körper mit bestimmter Schwingungsdauer oder wie man das nennt, mit bestimmtem Eigenton durch einen ausserhalb angegebenen Accord oder Klang zum Tönen bringt, so folgt daraus, dass in dem Klange der dem Eigentone des Körpers gleiche Ton vorhanden ist.

Körper mit bestimmten beliebig gewählten Eigentönen kann man sehr leicht in Membranen erhalten, welche, wie Fig. 124, als Boden einer Flasche ausgespannt sind. Der Hals der Flasche bei *a* ist offen, die Membran *b* vertritt die Stelle des Bodens; man nimmt am besten eine nasse Schweinsblase, die man gleichmässig aufspannt und dann trocknen lässt. Bei *c* wird mit Wachs ein Coconfaden befestigt, der an seinem untern Ende ein kleines Siegellackkügelchen trägt, das gerade vor der Mitte der Membran hängt. Wenn die Membran in Schwingungen geräth, so macht das Pendelchen heftige Sprünge. Den Eigenton der Membran erkennt man, indem man sie leise klopft, oder den Ton aufsucht, bei dem sie in Schwingungen geräth. Die Membran gibt allerdings neben dem Grundtone auch Obertöne, indess sind dieselben so schwach und gehören nicht in die Reihe der harmonischen Töne des Grundtones, dass man durch dieselben keine Störung zu befürchten braucht.

Fig. 124



Ein zweites, noch empfindlicheres Mittel zur Erkennung der Töne sind die von Helmholtz angegebenen Resonatoren; es sind mit zwei Oeffnungen versehene Hohlkugeln oder Röhren aus Glas oder Messing von der Form Fig. 125a und 125b. Die eine Oeffnung derselben, *a*, ist mit scharf abgeschnittenen Rändern versehen, die andere, *b*, ist trichterartig und so geformt, dass man sie in das Ohr einführen kann. Ein solcher Resonator hat ebenfalls einen ganz bestimmten, von dem Volumen der eingeschlossenen Luft und der Grösse der Oeffnung *a* abhängigen Eigenton, den man leicht findet, indem man einen Luftstrom mit ganz schwach gegen das Innere des Resonators geneigter Richtung über die Oeffnung *a* führt. Gerade wie die Membran geräth nun die Luft des Resonators in Schwingung, wenn der Eigenton des Resonators aussen an-

Fig. 125 a.

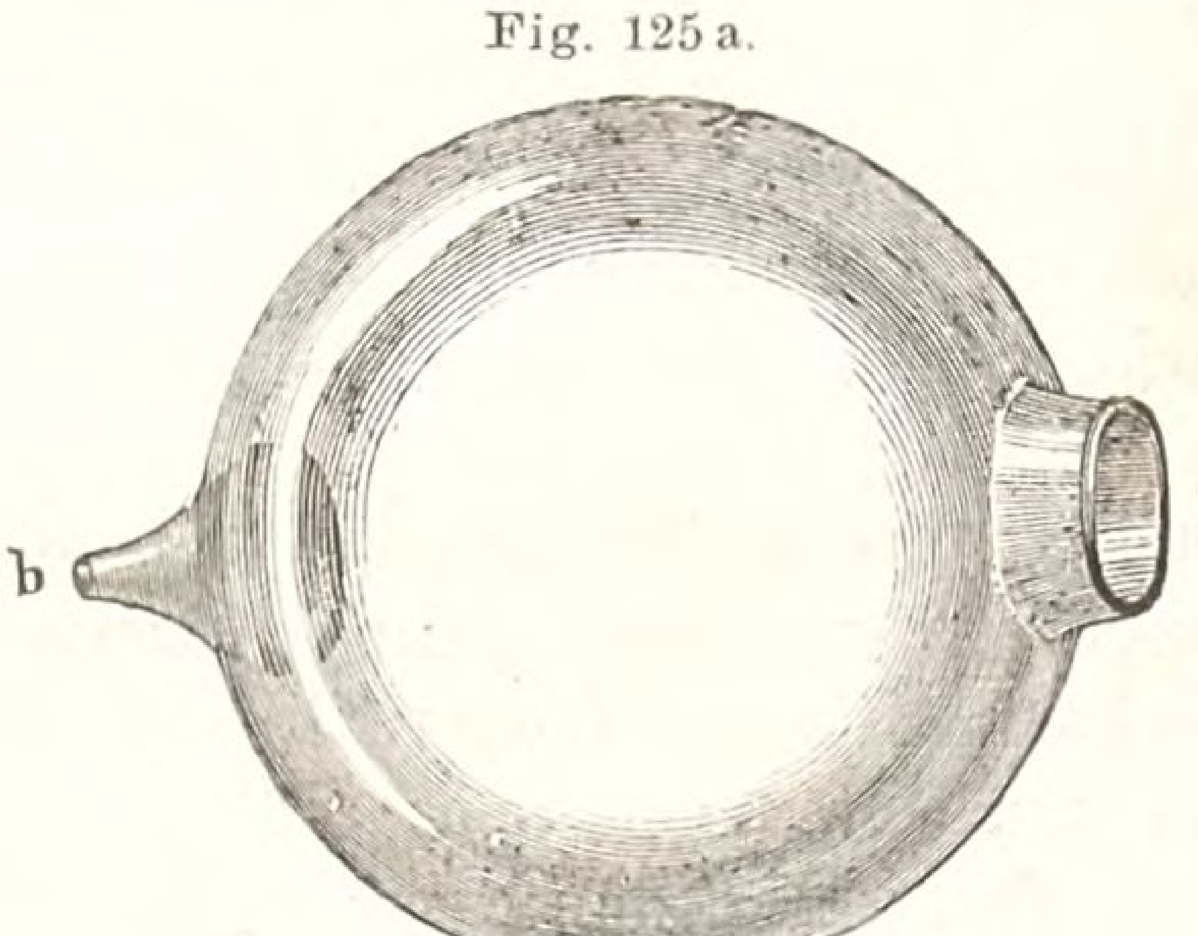


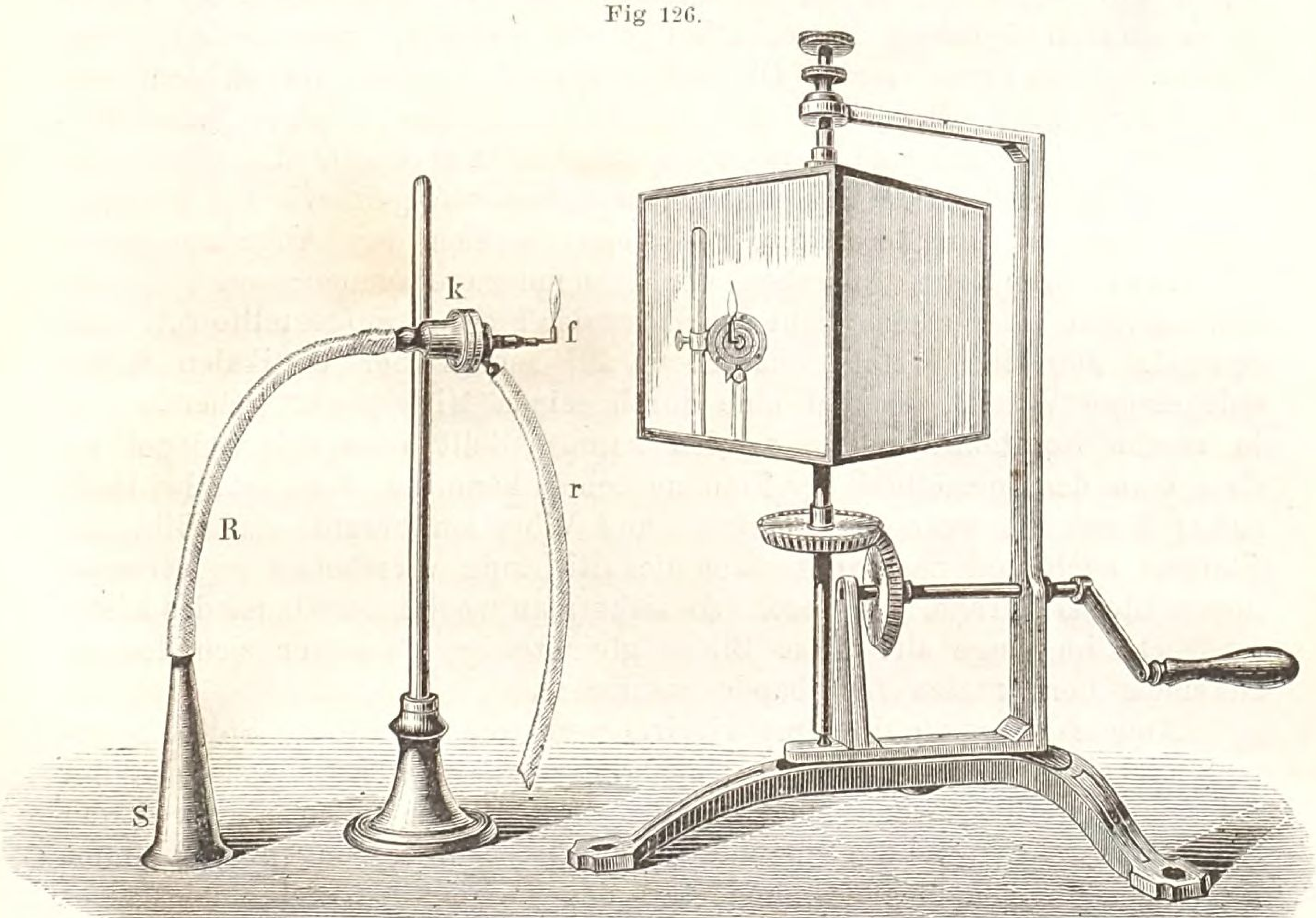
Fig. 125 b.



gegeben wird, bei andern Tönen schwingt sie nicht mit. Führt man deshalb die Oeffnung *b* des Resonators in das Ohr, während man das andere Ohr verschliesst, so werden alle ausserhalb angegebenen Töne mit Ausnahme des dem Eigentone des Resonators gleichen sehr geschwächt, dieser demjenigen des Resonators gleiche dagegen dringt mit grosser Kraft ins Ohr. Ist deshalb in einem aussen angegebenen Accorde der Ton des Resonators vorhanden, so hört man denselben sehr kräftig. Allerdings hat der Resonator auch Obertöne, dieselben sind aber sehr schwach und liegen ausserdem nicht in der harmonischen Reihe des Grundtones, so dass auch bei den Resonatoren dadurch keine Täuschung eintreten kann.

Den Vorzug der Membrane, die Töne unabhängig vom Ohr direkt sichtbar zu machen, verbunden mit der Empfindlichkeit der Resonatoren, bietet die Verbindung der König'schen Flammenkapseln mit den Resonatoren. Diese Flammenkapseln *k* Fig. 126 bestehen aus einem Hohlraume,

Fig. 126.



welcher durch eine sehr dünne Membran in zwei Theile getheilt ist; zwei in einem Kreise auf einander passende Holzstücke sind halbkugelförmig ausgehöhlt, vor die eine Höhlung wird dann die Membran geklebt, und dann werden die beiden Stücke wie die Figur zeigt vor einander gelegt und mit ein paar Schrauben an einander befestigt. Die Membran trennt somit die beiden Halbkugeln luftdicht von einander. Von der hintern Halbkugel führt der Membran gegenüber ein Kanal durch das Holzstück und einen röhrenförmigen Ansatz desselben, auf welchen ein Kautschukschlauch *R* gesteckt werden kann. Wenn man nun den Kautschukschlauch *R* mit seinem andern Ende auf die Oeffnung *b* eines Resonators setzt, so pflanzt sich die Schwingung der Luft in dem Resonator durch den Kautschukschlauch

in die halbkugelförmige Höhlung der Kapsel fort und versetzt dadurch die dieselbe vorn absperrende Membran in Schwingung. Die Membran wird zu dem Zwecke so dünn genommen, dass sie jede Schwingung, welche die in der Kapsel eingeschlossene Luft vollführt, annimmt. Zur Sichtbarmachung dieser Schwingungen dient die vordere Hälfte der Kapsel. Durch ein seitliches Rohr, auf welches der Kautschukschlauch *r* gesteckt wird, lässt man in diese vordere Hälfte Leuchtgas eintreten, welches dann aus dem kleinen Brenner *f* entweicht und angezündet in einer kleinen spitzen Flamme brennt.

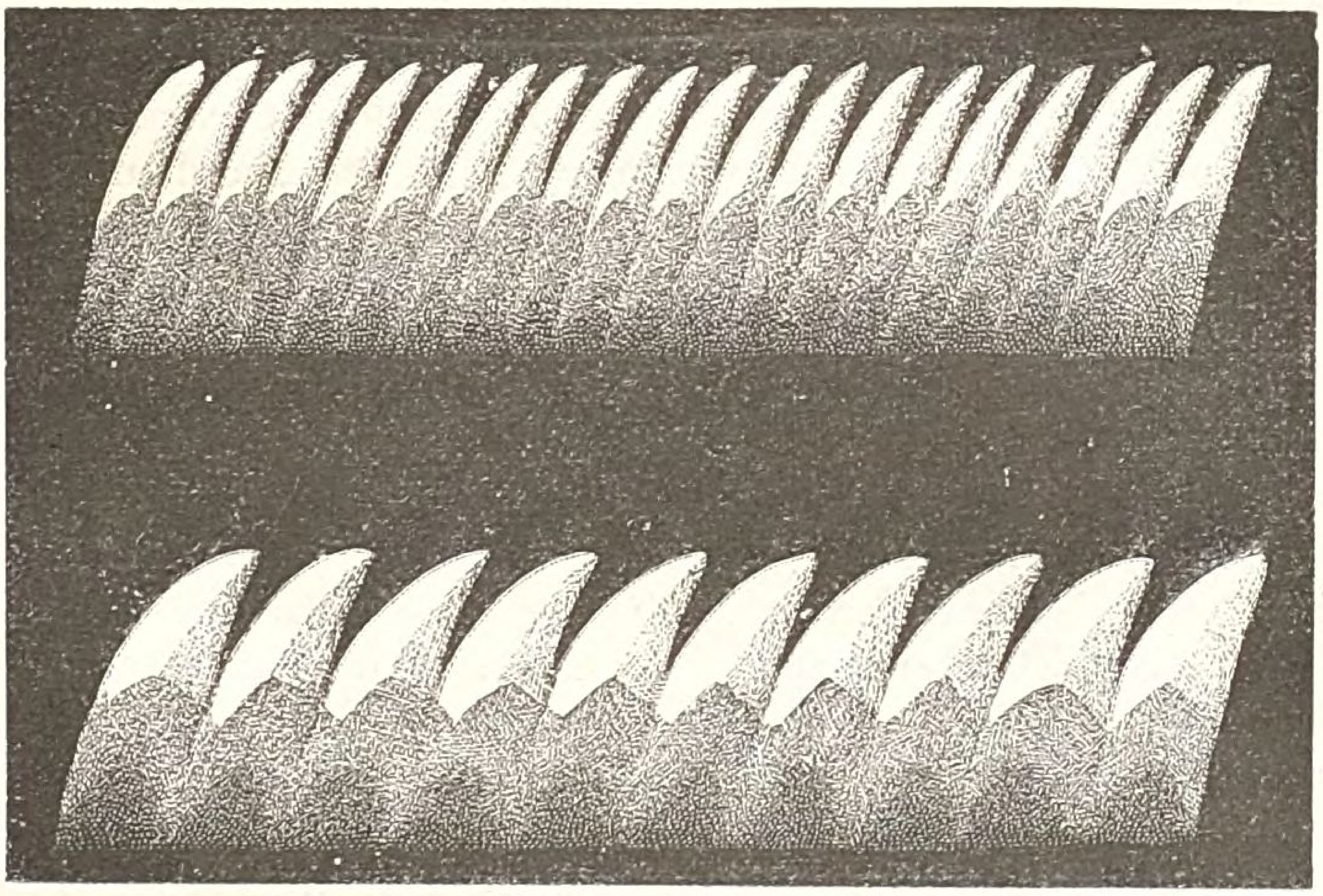
Sobald nun die Schwingungen der Luft des Resonators sich der Kapsel mitgetheilt haben, geräth auch die Flamme in Schwingungen, indem sie abwechselnd grösser und kleiner wird. Denn indem die Membran durch die Schwingungen abwechselnd etwas in die das Gas enthaltende vordere Hälfte der Kapsel hineingedrückt, abwechselnd etwas aus ihr zurückgezogen wird, wird der Druck des Gases in der vordern Hälfte der Kapsel in demselben Rythmus abwechselnd etwas grösser, abwechselnd etwas kleiner. Dem vergrösserten Drucke entspricht ein verstärktes, dem verminderten ein geschwächtes Ausströmen des Gases, ersterm eine Vergrösserung, letzterm eine Verkleinerung der Flamme. Da diese Vibrationen der Flamme mit derselben Geschwindigkeit erfolgen, wie die Schwingungen der Luft im Resonator, so geben sie sich dem Auge nur durch ein etwas verändertes Aussehen der Flamme zu erkennen; um sie deutlich sichtbar zu machen, dient der neben der Flamme aufgestellte rotirende Spiegel. Derselbe besteht aus einem auf seinen vier vertikalen Seiten spiegelnden Würfel, der um eine durch seinen Mittelpunkt gehende Axe in rasche Rotation versetzt werden kann. Stellt man den Spiegel so, dass man das Spiegelbild der Flamme sehen kann, so sieht man bei langsamer Rotation, wenn die Flamme ohne Vibration brennt, das Bild der Flamme nach und nach in horizontaler Richtung verschoben an verschiedenen Stellen, dreht man rasch, so sieht man wegen der Dauer des Lichteindrucks im Auge alle diese Bilder gleichzeitig, sie setzen sich deshalb zu einem horizontalen Lichtbande zusammen.

Anders wenn die Flamme vibrirt, wenn die leuchtende Spitze jedesmal nur einen Moment aufzuckt; sie gibt dann in dem Spiegel auch nur jedesmal ein Bild, wenn sie aufzuckt; diese Bilder fallen aber, da der Spiegel zwischen zwei auf einander folgenden Vergrösserungen der Flamme gedreht ist, neben einander, und statt des horizontalen Lichtbandes sieht man eine Reihe von Flammenbildern neben einander, wie es Fig. 127 zeigt. Die Abstände der einzelnen Flammenbilder hängen von der Schnelligkeit der Vibrationen und von der Schnelligkeit ab, mit welcher der Spiegel gedreht wird, bei gegebener Rotationsgeschwindigkeit nur von der Schnelligkeit der Vibrationen. Fig. 127 zeigt z. B. das Bild zweier Flammen in in einem und demselben rotirenden Spiegel, von denen die Kapsel der obern mit einem Resonator verbunden ist, dessen Schwingungszahl die doppelte ist als jene des Resonators, mit welchem die Kapsel der untern Flamme verbunden ist.

Wie man die angegebenen Mittel zur Untersuchung der verschiedenen Klänge benutzen kann, ergibt sich unmittelbar: man stellt eine Anzahl Membranen oder Resonatoren her, welche der harmonischen Reihe eines

Tones entsprechen, und erzeugt die Klänge in der Höhe, welche dem tiefsten Tone der Reihe entspricht. Die in den Klängen vorhandenen Einzel-

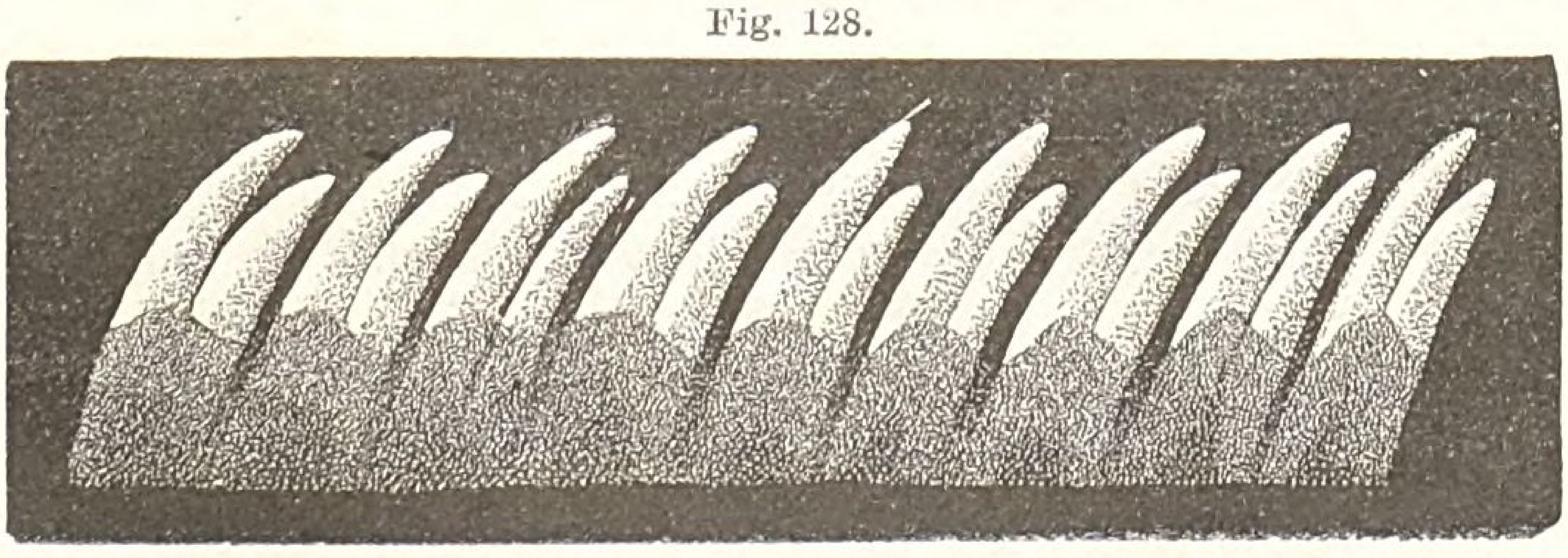
Fig. 127



töne versetzen dann die entsprechenden Membranen oder Resonatoren in Schwingungen, die man in der angegebenen Weise erkennt.

Die Flammenkapseln von König lassen in der Zusammenstellung Fig. 126 auch direkt erkennen, ob ein Klang einfach oder zusammengesetzt ist, und lassen bei nicht zu complicirt zusammengesetzten auch sofort die Bestandtheile des Klanges unterscheiden. Verbindet man das Rohr R, wie die Figur zeigt, mit einem Schalltrichter, und sendet durch denselben einen Klang in die Kapsel, so versetzt jeder in dem Klange vorhandene Einzelton die Membran in Schwingungen und diese Schwingung theilt sich der Flamme mit. Sendet man z. B. in den Schalltrichter einen einfachen Ton, etwa den Ton einer Stimmgabel, so erscheint das Flammenbild wie Fig. 127. Sendet man gleichzeitig zwei einfache Töne hinein, die sich verhalten wie Grundton und Octave, so erscheint das Bild Fig. 128; es besteht aus ab-

Fig. 128.



wechselnd grössern und kleinern Flammen. Die grössern entsprechen dem Momente, in dem Grundton und Octave die Flamme aufflackern lassen, die kleinere jenem, in dem nur die Octave allein die Flamme vergrössern würde. Ganz dasselbe Bild entsteht, wenn man einen Klang hineinsendet, welcher den Grundton und die Octave enthält.

Mit Hülfe der angegebenen Mittel lässt sich nun nachweisen, dass

in der That in den Klängen der musikalischen Instrumente die von der Theorie der Schwingungen geforderten Obertöne existiren, und dass bei jeder Verschiedenheit der Klangfarbe eine Verschiedenheit in der Zusammensetzung aus den Tönen der harmonischen Reihe vorhanden ist. Dass die geringste Aenderung der Klangfarbe sofort eine Veränderung in der Anzahl und Stärke der im Klange vorhandenen Töne bewirkt, lässt sich sehr schön mit der einfachen Flammenkapsel in der Anordnung Fig. 126 zeigen. Die Vocalklänge der menschlichen Stimme sind der verschiedensten Modulation fähig, und man kann von einem zum andern z. B. vom *a* zum *o* durch die allmählichsten Aenderungen übergehen. Man erkennt dann im Spiegel, dass die geringste Modification des Vocalklanges das Flammenbild sofort ändert.

Da sich nun in der That ergibt, dass in den Klängen die harmonischen Obertöne wahrnehmbar vorhanden sind, und dass weiter bei jeder merkbaren Verschiedenheit zweier Klänge eine merkbare Verschiedenheit der harmonischen Töne sich zeigt, so müssen wir schliessen, dass das Wesentliche der musikalischen Klangfarbe durch die den Grundton begleitenden Obertöne bedingt ist. Ein Klang ist ein Accord aus seinem Grundtone und dessen Obertönen, und die verschiedenen Klänge sind verschiedene Accorde. Die von den musikalischen Instrumenten gelieferten Klänge sind demnach keine einfachen Töne, solche können keine verschiedene Klangfarbe haben, sondern Zusammenklänge mehrerer Töne. Deshalb nennt sie Helmholtz auch Klänge, indem er die Bezeichnung Ton für die durch einfache Schwingungen bewirkte Empfindung wählt. Töne können sich demnach nur durch ihre Höhe unterscheiden.

Dass das Wesentliche des musikalischen Klanges durch die den Grundton begleitenden Obertöne bedingt wird, hat schliesslich Helmholtz noch dadurch gezeigt, dass er Klänge aus einfachen Tönen zusammensetzte, nachdem er vorher die Bestandtheile derselben erkannt hatte. Wir werden auf die wichtigsten dieser Versuche demnächst zurückkommen, wenn wir die Vocalklänge der menschlichen Stimme besprechen, welche durch einfache Töne, solche von Stimmgabeln, zusammenzusetzen Helmholtz gelungen ist. Hier möge nur erwähnt werden, dass der Klang einer Stimmgabel, welche etwa *c* gibt, deutlich der eines dumpfen *U* ist, gibt man zu diesem Tone kräftig den Ton c_1 an, so unterscheidet man im ersten Momente deutlich Grundton und Octave, nach einiger Zeit tritt aber die Octave mehr zurück und statt dessen hört man in der Höhe *c* einen dem *O* nahen Klang. Durch das Hinzutreten der Octave zum Grundton ist also der Klang ein anderer geworden, und gerade diese Verschmelzung des Obertones mit dem Grundtone unter Aenderung der Klangfarbe beweist, dass der Klang wesentlich durch die Obertöne bedingt ist.

§. 106.

Klänge durch Schwingungen fester Körper. Wir haben im vorigen Kapitel die Schwingungen der festen Körper aus der Theorie der Schwingungen abgeleitet, die von diesen Schwingungen erzeugten Töne respective Klänge sind das beste Mittel, um die Richtigkeit jener Sätze experimentell nachzuweisen. Nach der ausführlichen Ableitung der Gesetze ist es daher nicht erforderlich, an dieser Stelle nochmals genauer

auf diese Schwingungen einzugehen, wir geben nur kurz die Resultate der die Theorie bestätigenden Versuche und betrachten etwas näher nur die Schwingungen gespannter Saiten, weil nur diese in der praktischen Musik in ausgedehnter Weise zur Tonerzeugung benutzt werden.

Für die Schwingungen longitudinal schwingender Stäbe erhielten wir als Anzahl

$$N = \frac{1}{al} \sqrt{\frac{Eg}{s}},$$

worin l die Länge, E der Elasticitätscoefficient, s das specifische Gewicht des Stabes und a eine von der Befestigungsweise des Stabes und der Art der Erregung abhängige Constante ist. Für einen an beiden Enden freien Stab ist für die langsamsten Schwingungen $a = 2$ und die weitern Töne sind die harmonischen Obertöne des tiefsten Tones.

Die Gleichung zeigt, dass die Tonhöhe eines longitudinal schwingenden Stabes ausser von den Constanten nur von der Länge des Stabes abhängig ist, nicht von dem Querschnitte des Stabes. Der Versuch bestätigt dies, wie denn schon Chladni vor Entwicklung der Theorie diesen Satz lediglich aus seinen Versuchen ableitete.

Ebenso zeigten Chladni und später besonders Wertheim, dass die Schwingungszahlen longitudinal schwingender an beiden Enden freier Stäbe durch obige Gleichung gegeben sind, indem Wertheim aus den Tonhöhen schwingender Stäbe den Elasticitätscoefficienten berechnete und denselben mit dem durch direkte Ausdehnungsversuche gefundenen so nahe gleich fand, als es die Genauigkeit der letztern Versuche gestattete.

Ferner zeigte Chladni, dass die höhern von einem an beiden Enden freien Stabe gelieferten Töne die harmonischen Obertöne des Grundtones sind, denn die Reihe der von Chladni gefundenen Töne ist genau die Reihe der harmonischen Töne.

Schliesslich zeigte Chladni, dass der Theorie entsprechend die Schwingungszahl des tiefsten Tones eines an dem einem Ende festen, an dem andern Ende freien Stabes halb so gross ist, als die eines an beiden Enden freien Stabes von gleicher Länge, und dass die höhern Töne eines solchen Stabes nur die ungeradzahligen Obertöne sind, entsprechend den Ergebnissen der §. 87 vorgeführten Rechnungen.

In der praktischen Musik kommen die longitudinalen Töne nirgend zur Verwendung.

Für transversal schwingende Saiten erhielten wir im §. 91 die Gleichung

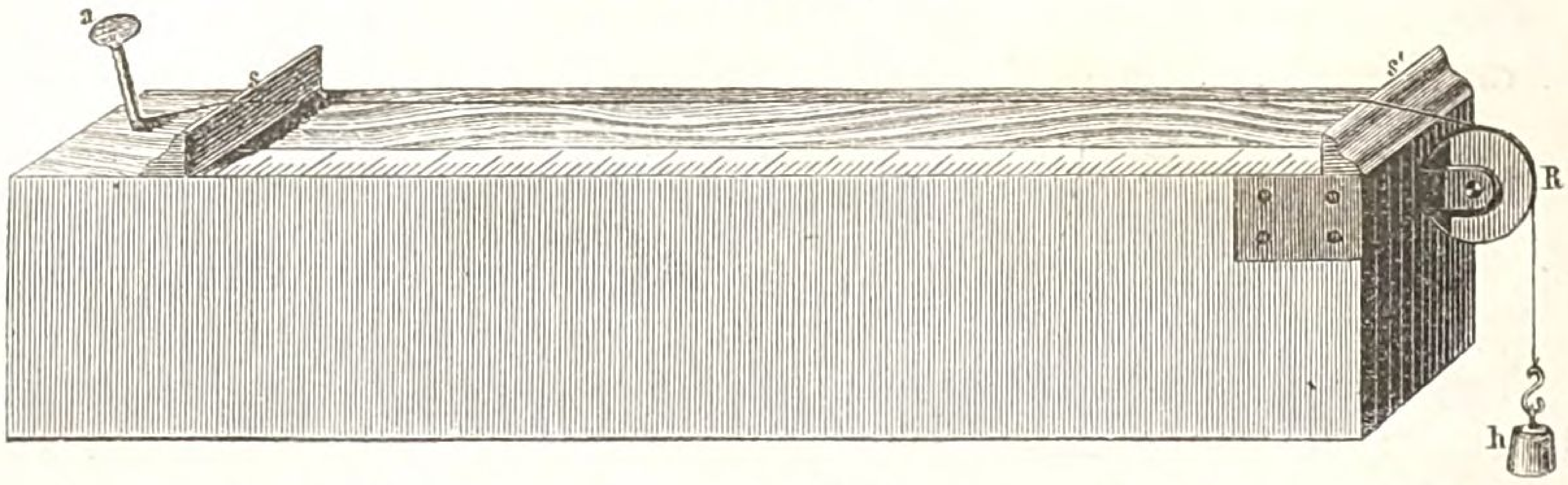
$$N = \frac{n}{2l} \sqrt{\frac{gP}{qs}}$$

wenn l die Länge, q der Querschnitt, s das specifische Gewicht und P die Spannung der Saite bedeutet, für die langsamsten Schwingungen ist $n = 1$ zu setzen, die höhern Töne werden erhalten, wenn man für n nach und nach die Reihe der natürlichen Zahlen einsetzt.

Hiernach soll die Schwingungszahl und somit die Tonhöhe von Saiten gleicher Länge der Quadratwurzel der Spannung direkt, der Quadratwurzel aus dem Querschnitte und dem specifischen Gewichte umgekehrt proportional sein, ausserdem ist bei sonst gleichen Umständen die Tonhöhe der Länge der Saite umgekehrt proportional.

Man kann alle diese Sätze mit leichter Mühe aus den auf einem Monochord erregten Tönen nachweisen. Das Monochord Fig. 129 besteht aus einer Saite, welche auf einem Kasten von trocknem Holze, einem so-

Fig. 129.



genannten Resonanzkasten ausgespannt ist. Die Saite ist bei *a* mit einem Wirbel befestigt, dann um eine genau bestimmte Länge zu den Versuchen zu verwenden über die beiden scharfen Holzstege *s*, *s'* und schliesslich über die Rolle *R* geführt, welche sich mit möglichst wenig Axenreibung dreht. In den an dem Ende der Saite befestigten Haken können verschiedene spannende Gewichte eingehängt werden. Man gibt der Saite zwischen den Stegen gewöhnlich die Länge von 1 Meter und theilt den Abstand der beiden Stege *s*, *s'* in Millimeter. Ein auf dem Monochord verschiebbarer Steg gestattet von der Saite beliebige genau gemessene Stücke zu den Versuchen zu verwenden.

Durch Aenderung des Gewichtes kann man die Spannung, durch Benutzung des Steges die Länge des schwingenden Stückes der Saite verändern, durch Einziehen verschiedener Saiten Material und Querschnitt der Saite wechseln. Bestimmt man unter den verschiedenen Umständen die Tonhöhe, so findet man alle in oben aufgestellter Gleichung enthaltenen Sätze bestätigt. Bei Metallsaiten ist jedoch auf die Steifigkeit zu achten, oder man muss von solchen nur recht dünne wählen, bei denen die Steifigkeit keinen merklichen Einfluss hat.

Ebenso ist es leicht zu zeigen, dass ausser dem Grundtone die Saite die der Reihe der natürlichen Zahlen entsprechenden Obertöne gibt. Am bequemsten berührt man dazu die Saite mit dem Finger leicht an der Stelle, welche den dem hervorzubringenden Obertone entsprechenden aliquoten Theil der Saite trennt, und bringt dann diesen Theil zum Schwingen; nimmt man dann den Finger fort, so gibt die ganze Saite diesen Ton. Will man etwa den 4. Ton erzeugen, berührt man so die Saite, dass zwischen Finger und Steg sich ein Viertel der Saite befindet.

Bei der Verwendung der schwingenden Saiten in der praktischen Musik werden auch gerade diese Sätze zur Regelung der Tonhöhe benutzt. So sind bei allen Streichinstrumenten Geige, Bratsche, Cello die Saiten, welche die tiefern Töne geben sollen, dicker und weniger straff gespannt, und meist sind diese Saiten, um ihr Gewicht zu vergrössern, ohne dass sie wegen zu grosser Dicke zu steif werden, mit einem feinen Drahte umwickelt. Bei allen diesen Instrumenten wird die Stimmung nur durch die Spannung der Saiten erhalten, welche an dem einen Ende befestigt sind und mit ihrem andern Ende in einen drehbaren Wirbel eingesteckt sind, durch dessen Drehung man die Spannung ändern kann. Dasselbe

gilt für die Klaviere, wo ausserdem noch die Saiten eine verschiedene Länge haben. Bei den Streichinstrumenten werden ebenfalls die verschiedenen Töne durch Aenderung der Saitenlänge hervorgebracht, indem der Spieler die Saiten an den betreffenden Punkten auf das Griffbrett niederdrückt.

Die Klänge der schwingenden Saiten sind je nach Art und der Stelle ihrer Erregung ausserordentlich verschieden, wie das nach Erkennung der Natur des Klanges schon aus §. 94 folgt. Die in der Musik verwandten Saiteninstrumente können wir in zwei Gruppen theilen, in solche, bei denen die Saiten durch Zupfen oder Schlagen in Schwingung versetzt werden, wie Zither, Guitarre und besonders das Klavier, und solche, bei denen die Erregung der Saiten durch Streichen mit dem Bogen stattfindet. Wir beschränken uns hier darauf, kurz die von Helmholtz für das Klavier und die Violine erhaltenen Resultate mitzutheilen.

Wie erwähnt, ist zunächst die Art der Erregung einer Saite von wesentlichem Einfluss auf die Stärke und Zahl der Obertöne, dieselbe wird um so grösser, je schärfere Discontinuitäten bei der Erzeugung der Bewegung entstehen. Wird die Saite gezupft, entfernt also der zupfende Finger die Saite ihrer ganzen Länge nach aus der Gleichgewichtslage, so entsteht eine Discontinuität nur dadurch, dass an der Stelle, wo sie gezupft wird, sich eine mehr oder weniger scharfe Ecke bildet, schärfer, wenn sie wie bei der Zither mit einem Metallstift, als wenn sie wie bei der Guitarre mit dem weichen Finger zur Seite gebogen wird. Deshalb gibt die erstere Art des Reissens auch einen schärfern Klang mit einer grössern Zahl klingender hoher Obertöne als die letzte Art; in beiden Fällen ist jedoch der Grundton der stärkste.

Wird die Saite mit einem scharfkantigen harten Hammer geschlagen, der sofort wieder abspringt, so wird nur der vom Schlage getroffene Punkt unmittelbar in Bewegung gesetzt, sofort nach dem Schlage ist die übrige Saite noch in Ruhe, sie geräth in Bewegung, indem die von dem Schlag erzeugte Welle auf der Saite hin und her läuft. Die Beschränkung der ursprünglichen Bewegung auf einen Punkt der Saite gibt in derselben die schärfste Discontinuität, es treten deshalb viele Obertöne auf, welche zum Theil grössere Amplituden haben als der Grundton.

Ist der schlagende Hammer weich und elastisch, so hat die Bewegung Zeit, auf der Saite sich auszubreiten, ehe der Hammer wieder zurückspringt, und zugleich wird durch den Anschlag eines solchen Hammers der geschlagene Theil der Saite nicht durch einen plötzlichen Stoss in Bewegung gesetzt, sondern seine Geschwindigkeit wächst allmählich mit dem Drucke des Hammers. Die Discontinuität in der Saite ist deshalb eine geringere, die Obertöne sind weniger stark als bei Schlagen mit einem harten Hammer.

Mit scharfem harten Metall gerissen oder geschlagen ist deshalb der Klang einer Saite schärfer oder leerer, indem das sogenannte Leere eines Klanges eben darin seinen Grund hat, dass die Obertöne gegenüber dem Grundton stark sind. Ist der Grundton der vorwiegende und treten besonders die höhern unpaarzahligen Obertöne zurück, so ist der Klang voll und harmonisch, wiegt der Grundton zu sehr vor oder tritt er gar allein auf, so wird der Klang dumpf.

Die Fortschaffung der höhern unpaarigen Obertöne hat man nun auch, wie wir sahen, durch Wahl der richtigen Erregungsstelle in der Hand, da diejenigen Schwingungen gar nicht auftreten, welche an dieser Stelle einen Knotenpunkt haben, und diejenigen nur schwach, für welche der Knotenpunkt in der Nähe der geschlagenen Stelle liegt.

Um den Klavieren einen vollen und weichen Ton zu geben, wird deshalb der Hammer mit einer dicken Lage stark gepressten und dadurch elastisch gewordenen Filzes bedeckt, und gleichzeitig werden die für die tiefern Töne bestimmten Hämmer schwerer gemacht, damit der von ihnen den Saiten gegebene Schlag eine längere Dauer hat. Diese längere Dauer des Schlages ist für die tiefern Töne zur Verstärkung des Grundtones nöthig, weil die Schwingungsdauer der Saite eine grössere ist, und die Stärke der Obertöne davon abhängig ist, einen wie grossen Bruchtheil der Schwingungsdauer der Saite der Druck des Hammers dauert. Bei den höhern Tönen ist selbst bei relativ kürzerer Dauer des Schlages der Grundton der stärkere, weil bei der geringern Länge und stärkern Spannung der Saiten doch die höhern Obertöne sich nicht so stark entwickeln.

Als Anschlagstelle wählt man bei den Klavieren $^1/_7$ bis $^1/_9$ der Saitenlänge, um so die Töne 7 und 9, die tiefsten der Obertöne, die nicht in den Dreiklang passen, fortzuschaffen.

Um ein Bild von der Stärke der Obertöne zu geben, ist in folgender von Helmholtz gegebenen Tabelle dieselbe für einige Erregungsarten angegeben, unter der Voraussetzung, dass die Erregungsstelle in $^1/_7$ der Saitenlänge ist.

Ordnungszahl des Tones	Anschlag durch Reissen	Anschlag durch einen elastischen Hammer, dessen Berührung dauert in Bruchtheilen der Schwingungsdauer des Grundtones			Anschlag mit einem ganz harten Hammer
		$^3/_7$	$^3/_{10}$	$^3/_{14}$	
1	100	100	100	100	100
2	81,2	99,7	189,4	249	324,7
3	56,1	8,9	100,9	242,9	504,9
4	31,6	2,3	17,3	118,9	504,9
5	13,0	1,2	0,0	26,1	324,7
6	2,8	0,01	0,5	1,3	100,0
7	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0

Die drei mittlern Columnen gelten für das Klavier, die erste derselben etwa in der zweigestrichenen Octave, während höher hinauf die Obertöne noch stärker zurücktreten; in der eingestrichnen und in den höhern Tönen der kleinen Octave gilt die mit $^3/_{10}$ überschriebene Columne und in der grossen, sowie in der Contraoctave die Columne $^3/_{14}$. In den tiefern Tönen der Contraoctave treten die Obertöne noch stärker hervor. Diese Intensitätsverhältnisse können indess nach der Güte der Hämmer und der richtigen Stellung derselben beträchtlich schwanken.

Dass die Zusammensetzung des Klanges der gestrichenen Saiten eine ganz andere ist, ergibt sich nach §. 94 direkt. Bei den gestrichenen Saiten ist der Grundton stärker als jeder Oberton, der Klang ist deshalb ein viel vollerer, der Ton ist aber viel schärfer gleichzeitig als in den gleichen Lagen des Klaviers, weil die Obertöne bei der Violine schon vom

dritten, bei dem Cello vom fünften an nicht unbeträchtlich stärker sind als beim Klavier. An welcher Stelle zwischen dem Steg und dem Griffbrett man bei der Violine oder dem Cello streicht, das hat auf den Klang keinen wesentlichen Einfluss, nur darf man dem Griffbrett nicht zu nahe kommen. Gewöhnlich streicht man in der Nähe des Stegs etwa $^1/_{10}$ der Saitenlänge.

Die bei den gestrichenen Saiten sich ergebenden Klänge werden wesentlich durch die gute und gleichmässige Bogenführung bedingt; jede Unregelmässigkeit hat eine Discontinuität in den Schwingungen und damit ein kratzendes Geräusch zur Folge. Deshalb hängt bei keinem Instrument die Schönheit und die Fülle des Klanges so von der Kunst des Spielers ab, wie bei den Streichinstrumenten.

Bei den Instrumenten, deren Töne durch schwingende Saiten erzeugt werden, hängt indess der Klang noch wesentlich von dem Bau des Instrumentes, der Güte des Resonanzkastens oder Resonanzbodens ab. Wir kommen darauf später zurück, bemerken hier nur, dass die Schwingungen der Saite sich dem Resonanzboden mittheilen, und dass erst durch die Schwingungen des Resonanzbodens die Töne kräftig werden. Derjenige Resonanzboden ist der beste, der alle Töne gleichmässig verstärkt, so dass das Intensitätsverhältniss der Töne das von den Saiten gegebene bleibt.

Schwingende Stäbe werden in der praktischen Musik kaum angewandt, höchstens könnte man die Strohfiedel erwähnen; dieselbe besteht aus Stäben oder schmalen Streifen von Holz, Glas oder Stahl, die an ihren Schwingungsknoten, welche bei dem tiefsten Tone auftreten (§. 92) auf eine Unterlage, ursprünglich nahm man gedrehtes Stroh, gelegt werden, und dann mit Holzhämmern geschlagen werden. Die Dimensionen der Streifen ergeben sich nach der §. 92 entwickelten Theorie, und die Erfahrung zeigt sich mit der Theorie in Uebereinstimmung. Die Klänge der Stäbe sind ziemlich einfach, da die in ihnen möglichen Obertöne sehr hoch und unharmonisch zum Grundton sind und deshalb nur schwach auftreten und rasch erlöschen. Eine auf einem Resonanzkasten stehende Stimmgabel gibt, gut angestrichen, kaum etwas anderes als den Grundton.

Schwingende Platten werden in der Musik gar nicht benutzt, sie würden wegen ihrer unharmonischen Obertöne auch jeden Accord verderben. Schwingende Membranen werden bei den Pauken und Trommeln angewandt, von denen nur die ersten einen musikalischen, nahezu einfachen Ton liefern. Durch das Ausspannen der Membran über dem abgeschlossenen Luftraum eines Kessels wird bei diesen bewirkt, dass die Membran nur die dem tiefsten Tone entsprechenden Schwingungen vollführt.

§. 107.

Klänge erregt durch schwingende Luftsäulen. Eine ebenso ausgedehnte Anwendung wie die schwingenden festen Körper zur Erzeugung musikalischer Klänge, finden in den Blasinstrumenten und der Orgel die direkt in Schwingungen versetzten Luftsäulen. Die Blasinstrumente, resp. als deren Typus die Orgelpfeifen zerfallen in zwei Klassen, die Labialpfeifen und die Zungenpfeifen. In erstern wird die Schwingung der Luftsäule nur durch einen passend geführten Luftstrom hervorgerufen, in letz-

tern dagegen wird eine Combination schwingender elastischer Körper und einer Luftsäule zur Erzeugung des Tones benutzt.

Die Labialpfeifen Fig. 130 und Fig. 131 bestehen aus einem Fusse *a*, welcher auf die Mündung eines Windkastens gesetzt wird, und durch welchen der Luftstrom in den Raum *b* unter der Bodenplatte der Röhre *R* eintritt. Die Bodenplatte lässt an der einen Wand einen Spalt, durch welchen der Luftstrom austritt, um sich an der obern Lippe *l*, welche die in der Vorderwand der Pfeife gelassene Mundspalte *lm* nach oben begrenzt, zu schneiden. Der Luftstrom dringt deshalb zum Theil in die Röhre hinein und treibt die unmittelbar über der Mundspalte liegende Luft nach oben und verdichtet sie zugleich. Diese Verdichtung bewirkt dann, dass eine kurze Zeit der Luftstrom nach aussen abgelenkt wird; in Folge dessen dehnt sich die vorher verdichtete Luft an der Mundspalte wieder aus und erhält eine nach unten gerichtete Bewegung. Die durch die Ausdehnung eintretende Verdünnung bewirkt dann, dass die Luft neuerdings in die Röhre dringt und so fort. Die Luft erhält also zunächst an der Mundspalte eine auf einander folgende Verdichtungen und Verdünnungen bewirkende schwingende Bewegung. Diese Schwingungen pflanzen sich dann in der Röhre *R* fort, werden an der obern Grenze reflectirt, und werden so, da bald gleichzeitig Schwingungen von unten nach oben und von oben nach unten gehen, zu stehenden Schwingungen.

Fig. 130.

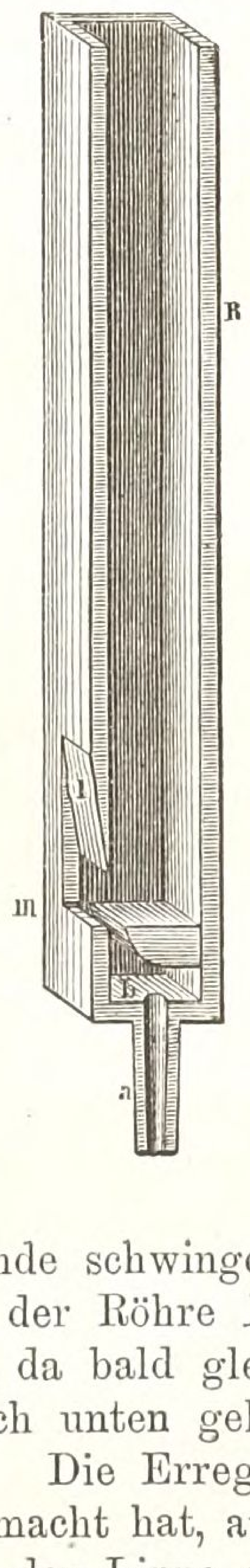
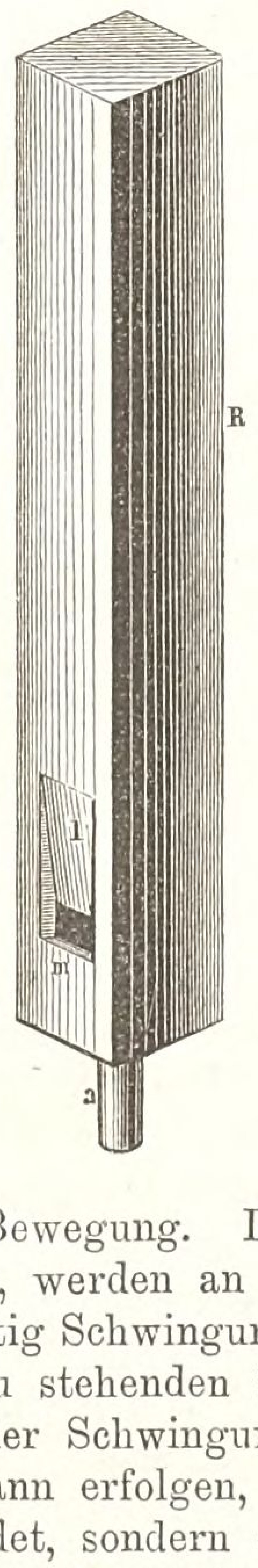


Fig. 131.



Die Erregung der Schwingungen kann, worauf Sonreck aufmerksam gemacht hat, auch dann erfolgen, wenn der Luftstrom sich anfänglich nicht an der Lippe schneidet, sondern einfach an der Mundöffnung vorüber geführt wird. Da der hydraulische Druck eines Luftstroms kleiner ist als der Druck der ruhenden Luft, bringt dieser an der Spalte vorbeistreichende Luftstrom auf die Luft der Pfeife eine Saugwirkung hervor, es bildet sich demnach zunächst an der Mundspalte eine Verdünnung mit nach unten gerichteter Bewegung; ist diese Verdünnung hinreichend fortgeschritten, so lenkt sie jetzt den vorübergehenden Luftstrom in die Pfeife hinein, der dann an die Stelle der Verdünnung eine Verdichtung treten lässt. In Folge dieser wird dann der Luftstrom wieder ganz an der Pfeife vorübergeführt, es bildet sich wieder die Verdünnung u. s. f.

Ist die Pfeife oben offen, so wird die Schwingung dort so reflectirt, wie an dem freien Ende eines longitudinal schwingenden Stabes, da die umgebende Luft sich freier bewegen kann als die Luft in der Röhre; in dieser kann sie sich nur parallel der Axe bewegen, ausserhalb nach allen

Richtungen, die an der obern Grenze ankommende Bewegung trifft also dort gewissermassen ein Mittel von geringerer Dichtigkeit. Da an der Mundöffnung der Sitz der Bewegung ist, verhält sich auch das untere Ende wie das freie Ende eines longitudinal schwingenden Stabes. Eine an dem obern Ende offene Orgelpfeife muss also schwingen wie ein longitudinal schwingender, an seinen beiden Enden freier Stab, resp. an ihren Enden freie Luftsäule. Für diese fanden wir §. 89 als Schwingungszahlen

$$N = n\frac{c}{2l} = \frac{n}{2l}\sqrt{\frac{Pg \,.\, 1{,}40}{s_0}(1 + 0{,}00367\, t)},$$

oder für die Temperatur 0^0

$$N = n\frac{331{,}2}{2l},$$

wenn die Länge der Pfeife in Meter gegeben ist.

Darnach ist die Schwingungszahl der entsprechenden Töne der Länge der Pfeife umgekehrt proportional, und die Reihe der in der Pfeife möglichen Töne ist die Reihe der harmonischen Töne des Grundtones.

Ist die Pfeife oben geschlossen oder gedeckt, so findet die Reflexion an dem obern Ende mit Wechsel des Vorzeichens statt, da die in der Grenze an der Decke befindlichen Lufttheilchen durch die Decke an der Bewegung nach der einen Richtung gehindert werden. Die schwingende Luftsäule ist somit nur an einem Ende frei, am andern Ende fest, die Schwingungszahlen werden somit

$$N_1 = (2n + 1)\frac{c}{4l}.$$

Der tiefste Ton einer gedeckten Pfeife muss also die tiefere Octave einer gleich langen offenen Pfeife sein, und die folgenden Töne müssen die ungeradzahligen Obertöne des Grundtones sein. Nennen wir den tiefsten Ton der gedeckten Pfeife c, so müssen demnach sein die Töne

der gedeckten Pfeife	c	g_1	e_2	7	d_3	. . .
„ offenen „	c_1	c_2	g_2	c_3	e_3	. . .

Bestimmt man die Höhe der Töne, die man bei den Pfeifen durch verschieden starkes Anblasen erhalten kann, so findet man, dass die verschiedenen Töne einer Pfeife in der That in dem von der Theorie verlangten Verhältnisse stehen. Vergleicht man aber die Tonhöhe des Grundtones einer Pfeife mit der von der Theorie verlangten, so ergibt sich derselbe immer etwas zu tief, und zwar bei den offenen Pfeifen noch etwas mehr als bei den gedeckten Pfeifen, so dass auch der Grundton der offenen Pfeife nicht genau die höhere Octave des Tones der gedeckten Pfeife ist. Es folgt somit, dass die Länge der dem Grundton entsprechenden Welle etwas mehr als das Vierfache der Länge der gedeckten und etwas mehr als das Doppelte der Länge der offenen Pfeife ist.

Nach den Versuchen von Liscovius, Wertheim und andern ist die Abweichung der Tonhöhe von der theoretischen um so grösser, je tiefer die Pfeife, das heisst je grösser ihre Dimension senkrecht zur Mundspalte ist, und ferner ist sie wesentlich von der Form und Grösse der Mundspalte abhängig. Nennen wir die Correction, welche an der Länge der gedeckten Pfeife anzubringen ist, damit der berechnete Ton dem gehörten gleich

ist, x, so dass also die Schwingungszahl der gedeckten Pfeife nach der Gleichung berechnet wird

$$N = \frac{c}{4\,(l + x)},$$

so ergibt sich, dass bei gleicher Tiefe der Pfeife und gleicher Mundspalte der Werth von x immer derselbe ist, welches auch die Länge der Pfeife ist.

Diese Abhängigkeit der Correction x bei der gedeckten Pfeife von der Tiefe und Form der Mundspalte lässt für die gedeckte Pfeife zunächst den Grund der Abweichung von Theorie und Erfahrung erkennen; er liegt darin, dass wir die Luftsäule unten als eine vollkommen freie vorausgesetzt haben, wo sich demnach ein Schwingungsmaximum bilden muss, welches genau um eine halbe stehende Welle von dem an der Decke der Pfeife liegenden Schwingungsknoten entfernt ist. Das ist nicht der Fall, das untere Ende communicirt mit der äussern Luft nur durch die Mundspalte, im Uebrigen ruht die Luft auf dem Boden der Pfeife; in Folge dessen bildet sich an der Mundspalte, vielleicht durch theilweise Reflexionen am Boden, nicht der dem Schwingungsmaximum entsprechende Schwingungszustand, sondern ein solcher, der dem Schwingungsknoten etwas näher liegt, oder in der Pfeife entsteht etwas weniger als eine halbe stehende Welle. Je grösser die Mundspalte und je weniger tief die Pfeife ist, um so geringer muss darnach die Correction sein, da sich das untere Ende der Pfeife um so mehr dem Zustand einer vollkommen freien Luftsäule nähert.

Da der ganze Grund der Abweichung an dieser Beschaffenheit des untern Endes liegt, kann sie auf das Verhältniss der Obertöne zum Grundton keinen Einfluss haben. Erzeugt man z. B. den zweiten Ton der Pfeife, welcher der Schwingungszahl 3 entspricht, dessen Wellenlänge also ein Drittel derjenigen des Grundtones ist, so bildet sich in der Pfeife der Knotenpunkt in dem Abstande vom Boden, der genau einer stehenden Welle dieses Tones entspricht. Da die stehende Welle des Grundtones gleich $2\,(l + x)$ ist, so ist der Abstand des Knotens vom Deckel für den zweiten Ton $^2/_3\,(l + x)$ und das übrige Stück der Pfeife bildet eine halbe stehende Welle des Tones weniger der Correction x. Bei dem dritten Ton bilden sich in der Pfeife zwei ganze stehende Wellen, deren jede die Länge $^2/_5\,(l + x)$ hat, und das übrige Stück der Pfeife ist wieder die halbe stehende Welle weniger x u. s. f. Nennen wir L die Länge der stehenden Welle für den $2n - 1$ Ton, so ist immer die Länge l der Pfeife

$$l = (2n - 2)\,L + {}^1/_2 L - x,$$

so dass also immer das an der Mundspalte liegende Stück der Welle eine halbe stehende Welle weniger x sein muss.

Die Richtigkeit dieses Schlusses kann man durch eine Pfeife mit verschiebbarem Stempel nachweisen. Man erzeugt in einer solchen Pfeife etwa den dritten Ton, dessen Schwingungszahl die fünffache des Grundtones ist, dessen Wellenlänge sich aus

$$\lambda = c\,T = \frac{c}{N} = \frac{331{,}2\,\sqrt{1 + 0{,}00367\,t}}{N}$$

ergibt, so dass die stehende Welle L die Hälfte dieser Länge ist, welche

durch die Länge l der Pfeife ausgedrückt gleich $^2/_5\,(l + x)$ ist. Drückt man dann den Stempel einmal um die Länge L in die Pfeife herein, so bekommt man die Pfeifenlänge, deren zweiter Ton gleich dem eben gehörten ist, und schiebt man nochmals den Stempel um L hinab, so bekommt man die Pfeife, deren Grundton der gehörte Ton ist. Das so übrig bleibende Stück l' der ursprünglichen Pfeife ist dann

$$l' = l - {}^4/_5\,l - {}^4/_5\,x = {}^1/_5\,l - {}^4/_5\,x.$$

Da nun die Länge der Welle $L = {}^2/_5\,(l + x)$, folgt

$$l' = {}^1/_2\,L - x; \quad {}^1/_2\,L = l' + x$$

oder es fehlt an dem übrigbleibenden Stück die Grösse x, um es zu einer halben stehenden Welle zu ergänzen.

Bei der offenen Pfeife ist zunächst diese selbe Correction anzubringen; bei dieser tritt aber noch dadurch eine Abweichung von der Theorie ein, dass die Reflexion der Welle nicht genau in der geometrischen obern Grenzfläche der Pfeife stattfindet, sondern dass die schwingende Bewegung etwas über diese hinausgeht. Auch dadurch wird die Wellenlänge etwas grösser, die Höhe des Tones eine etwas geringere, als sie nach unserer Theorie berechnet ist. Auch diese Abweichung der Töne der offenen Pfeifen von der Theorie hängt von dem Querschnitte und besonders der Tiefe der Pfeife ab.

Es ist vielfach, besonders von Wertheim versucht worden, die Abhängigkeit der Abweichungen der Töne der gedeckten und offenen Pfeifen von den sie bedingenden Umständen, Querschnitt der Pfeifen und Grösse der Mundspalte zu bestimmen, wir gehen auf diese Versuche nicht ein und begnügen uns mit der Angabe einer von dem Orgelbauer Cavalier Colle angegebenen empirischen Regel, welche für gewöhnliche Orgelpfeifen ziemlich genau die Schwingungszahlen zu bestimmen gestattet. Bezeichnen wir als theoretische Länge der offenen Orgelpfeife die Länge der stehenden Welle des von ihr gelieferten Tones, so dass die Schwingungszahl

$$N = \frac{c}{2\,l_1}$$

für den tiefsten Ton ist, so ist l_1 gleich der Summe der wirklichen Länge und der doppelten Tiefe zu setzen.

Die annähernde Uebereinstimmung der von den Orgelpfeifen gegebenen Töne mit der Theorie findet nur so lange statt, als die Länge derselben gross ist gegenüber den übrigen Dimensionen; ist das nicht der Fall, ist die Länge den andern Dimensionen annähernd gleich wie bei den kubischen Pfeifen oder den kugelförmigen Resonatoren, so werden die Töne ganz andere, sie werden viel tiefer, als sie aus der Länge der Pfeife berechnet werden. Die Töne solcher Räume hängen wesentlich und zwar nach den Versuchen von Wertheim, Sondhaus und andern in sehr complicirter Weise von dem Volumen der abgeschlossenen Luft ab. Als allgemeines Resultat ergibt sich aus diesen Versuchen, dass die Töne der kubischen Pfeifen um so höher werden, je kleiner das Volumen der abgeschlossenen Luft ist; weiter ergibt sich aus diesen Versuchen, dass bei ähnlichen Formen der Pfeifen und der Anblaseöffnungen sich die Schwingungszahlen umgekehrt verhalten wie die homologen Saiten. Gibt man

also zwei gedeckten Pfeifen die Form eines Würfels und der einen die doppelte Seitenlänge als der andern, oder bläst man zwei kugelförmige Resonatoren an, deren einer den doppelten Durchmesser hat als der andere, so ist die Schwingungszahl der grössern Pfeife oder Kugel halb so gross als diejenige der kleinern.

Alle diese Erfahrungen zeigen, dass unsere einfache Theorie zur Berechnung der Schwingungszahl in Pfeifen nicht ausreicht; wie Helmholtz gezeigt hat, liegt der Grund darin, dass die in den Pfeifen schwingenden Luftsäulen nicht so isolirte für sich schwingende Körper sind, wie longitudinal schwingende Stäbe. Die schwingende Bewegung theilt sich vielmehr auch der ausserhalb der Pfeife befindlichen Luft mit, und diese äussere Bewegung beeinflusst rückwärts diejenige in der Pfeife. Die von Helmholtz gegebene Theorie ist indess eine zu schwierige, als dass wir hier darauf eingehen können.

Das Tonbildende in den Pfeifen ist die schwingende Luftsäule, daraus folgt, dass die Wände der Pfeife auf die Tonhöhe keinen Einfluss haben können. So lange die Wände fest sind, ist das auch nicht der Fall, die Tonhöhe ist unter sonst gleichen Umständen in Pfeifen, deren Wände aus verschiedenem Material sind, genau die gleiche. Wenn die Wände indess weich oder so dünn sind, dass sie mit in Schwingung versetzt werden, so wird die Tonhöhe erniedrigt. Es wird durch das Mitschwingen der Wand die schwingende Masse vergrössert ohne die bewegende Kraft. Feste Wände haben nur Einfluss auf die Farbe der Klänge.

Die Klänge der offenen Pfeifen enthalten je nach ihren Dimensionen die Obertöne verschieden stark; enge cylindrische oder auch rechteckige Pfeifen enthalten die Obertöne in ziemlicher Stärke, dieselben sind indess bei normalem Anblasen alle schwächer als der Grundton; ihr Klang ist in Folge dessen dem der gestrichenen Saiten ähnlich voll und scharf; bei weitern offenen Pfeifen, den Principalstimmen der Orgel, tritt nur der erste Oberton noch deutlich auf, die höhern gar nicht, deshalb ist der Klang der weitern Pfeifen ein viel dumpferer. Die gedeckten Pfeifen enthalten nur die ungeradzahligen Obertöne, dieselben sind aber nur in engen Pfeifen merklich, in denen besonders der erste Oberton, die Quint der höhern Octave des Grundtones kräftig ist; in weitern gedeckten Pfeifen tritt fast nur der Grundton auf, sie haben deshalb auch das Dumpfe des einfachen Tones.

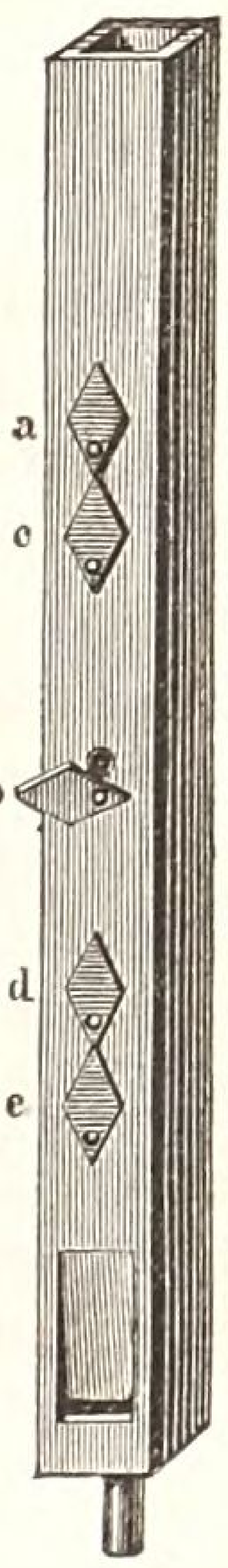
Der Klang in Holzpfeifen ist immer weicher und dumpfer als derjenige in Metallpfeifen, da die Obertöne in den letztern viel kräftiger sind; es liegt das daran, dass die den Obertönen entsprechenden Schwingungen sich mehr dem Holz mittheilen als dem Metall und deshalb rasch geschwächt werden.

Ausser bei der Orgel werden die einfachen Pfeifen in der Orchestermusik angewandt als Flöten, Pickelflöten und Querflöten. Die Pickelflöten werden genau so angeblasen, wie die bisher betrachteten Labialpfeifen der Orgel; bei den andern Flöten wird der Luftstrom über das Mundloch hingeführt, so dass derselbe an dem den Lippen des Bläsers gegenüber befindlichen Rande desselben sich schneidet.

Diese Instrumente sollen nicht nur den der Länge ihres Rohres entsprechenden Grundton und dessen harmonische Obertöne, sondern inner-

halb des Umfanges, in dem sie gebraucht werden, alle Töne der Tonleiter hervorbringen. Man erreicht das dadurch, dass man in der Pfeifenwand an den passenden Stellen Löcher anbringt. Wenn man in die Wand einer Pfeife wie Fig. 132 an einer Stelle ein hinreichend grosses Loch bohrt, so kann an dieser Stelle die Luft auch nach der Seite sich bewegen, gerade wie an dem offenen Ende der Pfeife; es tritt demnach dort ganz in derselben Weise eine Reflexion der Bewegung ein und es muss der Bewegungszustand dort derselbe sein wie an dem offenen Ende einer Pfeife. Bläst man z. B. eine Pfeife so an, dass sie ihren Grundton gibt, und öffnet dann in der Mitte bei *b* das Loch, so springt der Ton sofort in die Octave über, die Pfeife tönt wie eine solche von halber Länge. Oeffnen wir dagegen die Pfeife bei *a*, so wird der Ton, vorausgesetzt, dass die Oeffnung von hinreichender Grösse ist, derselbe, als wenn die Pfeife bei *a* abgeschnitten würde.

Fig. 132.



Dieses Mittel wird bei den in der Orchestermusik benutzten Flöten angewandt. Man versieht die Flöte an den passenden Stellen mit Löchern, die theils mit Klappen geschlossen sind, theils mit dem Finger geschlossen werden; soll die Flöte ihren tiefsten Ton geben, so werden alle Oeffnungen geschlossen, zur Hervorbringung der höhern Töne werden die betreffenden Löcher geöffnet.

§. 108.

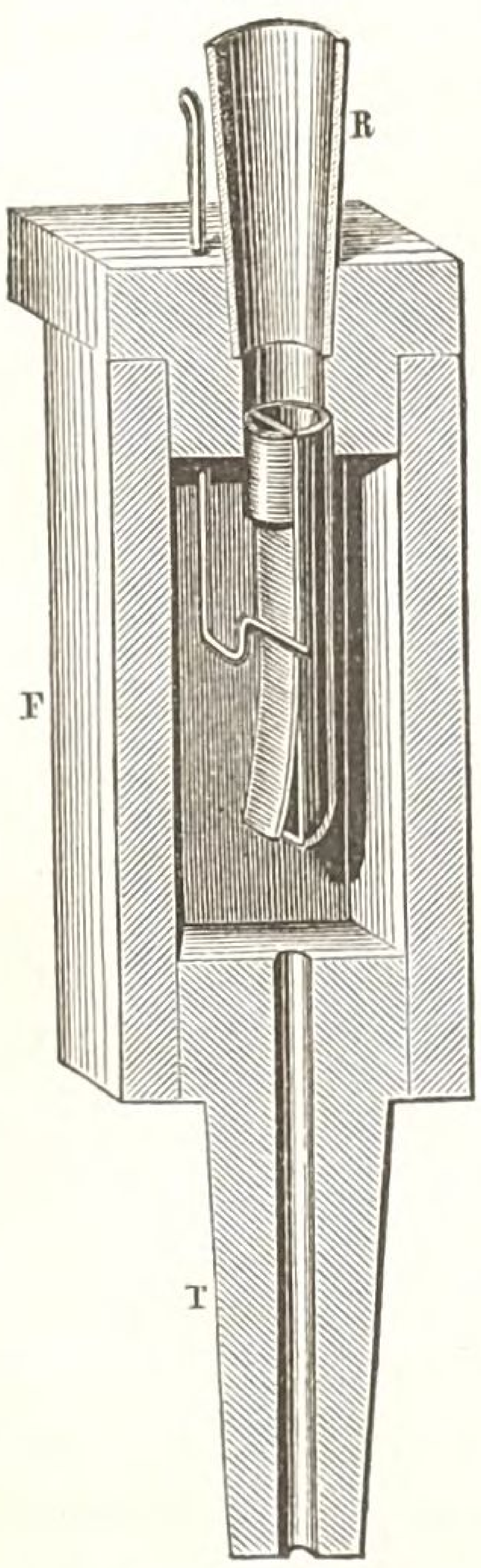
Zungenpfeifen. Die zweite Gattung von Instrumenten, bei denen die Töne direkt durch schwingende Luftsäulen erzeugt werden, sind die Zungenpfeifen. Wir unterscheiden zwei Arten derselben, solche mit harten Zungen, Metallfedern, deren Schwingungen wesentlich von der Elasticität der Zungen bedingt werden, und weiche Zungen, deren Schwingungen nur wenig von der Elasticität der Zungen selbst abhängen. Erstere werden in den Rohrwerken der Orgel, der Harmonika, dem Aeolodikon, letztere bei den Blasinstrumenten der Orchestermusik zur Klangerzeugung verwandt.

Die Erregung des Klanges bei den Zungenpfeifen entspricht derjenigen mit der Sirene. Die Zungenpfeife der Orgel besteht aus dem Mundstück oder Rohrwerk Fig. 133, welches sich in dem Fusse *F* der Pfeife befindet und welches in die Mündung der meist kegelförmig nach oben sich erweiternden Röhre *R* hineingesteckt wird.

Das Rohrwerk besteht bei den aufschlagenden Zungen aus einem Halbcylinder von starkem Messingblech, der an seiner Basis geschlossen, oben jedoch offen ist. Die Schnittfläche des Messinghalbcylinders ist durch eine elastische Metallfeder bedeckt, welche jedoch nur bis etwa $\frac{1}{3}$ der Röhrenlänge fest mit den Schnitträndern verbunden und von da beweglich ist, so dass sie als Feder schwingen kann. Legt die Feder sich bei diesen Schwingungen vor die Ränder der Röhre, so wird dadurch die Röhre abgeschlossen und ein in den Fuss der Pfeife durch die Röhre *r* eintretender Luftstrom kann nicht durch das Messingrohr in die Röhre *R* eintreten. In der Gleichgewichtslage ist die Zunge etwas von dem Rohr weggebogen, so dass zwischen dem Rohr und der Zunge eine kleine Spalte bleibt.

Bei den durchschlagenden Zungen, welche einen weichern Ton geben als die aufschlagenden, ist der Querschnitt des Messingrohrs meist viereckig und die eine Seitenwand besteht aus einem Rahmen, an dessen oberer schmalen Seite die schwingende Zunge befestigt ist. Die Zunge schliesst dann, wenn sie bei ihren Schwingungen den Rahmen passirt, sowohl wenn sie gegen das Innere des Rohres, als auch wenn sie nach aussen schwingt, das Rohr vollständig ab, ohne indess mit ihren Rändern den Rahmen zu streifen.

Fig. 133.



Der Fuss F der Pfeife steht nur durch das Rohrwerk mit der Röhre R in Verbindung, so dass, wenn die Zunge das Rohr schliesst, keine Luft in die Röhre, und da der Fuss ausser an der Eintrittsstelle des auf einer Windlade stehenden Rohres r rings geschlossen ist, überhaupt keine Luft aus ihm entweichen kann.

Um eine Zungenpfeife zum Tönen zu bringen, treibt man einen Luftstrom von passender Stärke durch die Röhre r in den Fuss der Pfeife. Die eindringende Luft dringt dann zunächst zum Theil durch die von der Zunge gelassene Spalte in das Rohr R; gleichzeitig tritt aber eine Verdichtung der Luft in dem Fusse ein, durch welche die Feder einen gegen das Rohr gerichteten Antrieb erhält, gegen dasselbe hinschwingt und es einen Moment verschliesst. Der in die Röhre eindringende Luftstrom wird dadurch unterbrochen. Durch den zuerst in die Röhre R eindringenden Strom hat die Luft hinter der Zunge eine nach oben gerichtete Bewegung erhalten, nach Unterbrechung des Luftstroms muss sie dann eine rückgängige Bewegung bekommen. In Folge ihrer Elasticität schwingt dann auch die Zunge gleichzeitig wieder rückwärts, es erfolgt ein neuer Austritt von Luft und das Spiel wiederholt sich.

Es entstehen also auf diese Weise Schwingungen der Zunge, Schwingungen der Luft in der Röhre und gleichzeitig ein intermittirender Luftstrom gerade so wie bei der Sirene, indem jedesmal wenn die Zunge das Rohrwerk schliesst, der durch dasselbe den Fuss der Pfeife verlassende Luftstrom unterbrochen wird.

Nach den Versuchen von W. Weber entsteht der scharfe und starke Ton der Zungenpfeife wesentlich durch die Stösse des intermittirenden Luftstroms. Die Zahl dieser Stösse wird nur bedingt durch die Schwingungen der Zunge, diese selbst aber hängen ab von der Elasticität der Zunge und gleichzeitig von den Schwingungen der Luftsäule in der Röhre R, so dass die Höhe des Klanges der Zungenpfeife sowohl von der Elasticität der Zunge als von der in der Röhre mitschwingenden Luftsäule abhängt.

Dass in der That die Stösse des intermittirenden Luftstroms den Klang der Zungenpfeife bedingen, ergibt sich daraus, dass zum Tönen derselben die Röhre R gar nicht wesentlich ist, eine für sich angeblasene Zunge, wie sie z. B. bei der Harmonika verwandt werden, gibt fast genau den-

selben, unter Umständen genau denselben Ton, wie wenn man die Röhre aufsetzt. Die für sich schwingende Zunge gibt aber nur dann den Ton, wenn sie angeblasen wird, so dass der intermittirende Luftstrom entsteht, nicht wenn man die Zunge auf andere Weise zum Schwingen bringt.

Dass weiter die Schwingungszahl der in der Pfeife angeblasenen Zunge von der Elasticität der Zunge und der mitschwingenden Luftsäule abhängig ist, folgt daraus, dass die Höhe des Tones der Zungenpfeife von der Länge des mit dem Rohrwerk verbundenen Rohres R abhängt. Nach den Versuchen von W. Weber ist die Schwingungszahl des von der Zungenpfeife gelieferten Tones nur dann gleich der Schwingungszahl der isolirt, also lediglich in Folge ihrer Elasticität schwingenden Zunge, wenn die Röhre eine solche Länge hat, dass sie für sich als offene Pfeife tönend denselben Ton gibt, als die isolirt schwingende Zunge, sei es dass der Ton der Grundton der Röhre ist, oder einer ihrer harmonischen Obertöne. Ist demnach l die Länge der Röhre, die als Grundton den Ton gibt, dessen Schwingungszahl gleich derjenigen der Zunge ist, so ist bei Längen der Röhre l, $2l$, $3l$. . . der Ton der Zungenpfeife derselbe und gleich dem Tone der isolirt schwingenden Zunge.

Hat das Rohr eine zwischenliegende Länge, so wird der Ton der Pfeife, wenn sie in der bisher betrachteten Weise angeblasen wird, tiefer, bringt man sie dadurch, dass man die Luft aus dem Fuss heraussaugt, zum Tönen, so wird der Ton höher.

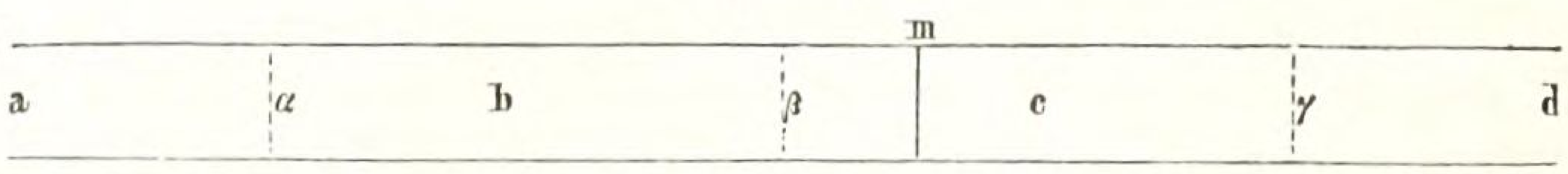
Die Vertiefung des Tones kann, wenn man an das für sich schwingende Rohrwerk allmählich immer längere Röhren setzt, bis nahezu eine Octave betragen, wenn die Länge fast gleich jener wird, deren Grundton gleich dem Ton der isolirt schwingenden Zunge ist; wird diese Länge genau erreicht, so springt der Ton zu seiner ursprünglichen Höhe zurück; verlängert man weiter, so vertieft er sich um eine Quart, wenn die Länge nahe $2l$ und steigt bei der Länge $2l$ wieder um diese Quarte. Bei der Verlängerung auf $3l$ sinkt er um eine kleine Terz. Bei dem ersten Zurückspringen, wenn die Länge l ist, ändert sich somit die Schwingungszahl im Verhältnisse $1:2$, bei dem zweiten von $3:4$, bei dem dritten wie $5:6$.

Weber zeigte weiter, dass wenn bei irgend einer Länge die Zungenpfeife einen bestimmten Ton gibt und derselbe Ton nochmals bei einer grössern Länge entsteht, dass dann die Differenz dieser Längen gleich der Länge der offenen Pfeife ist, welche denselben Ton besitzt; bei der ersten Wiederholung ist es die Länge, welche denselben Ton als Grundton, bei der zweiten jene, welche ihn als ersten Oberton gibt.

Da somit der von der Zungenpfeife gelieferte Ton von den mitschwingenden Luftsäulen abhängig ist, so folgt, dass die Schwingungen der Zunge nicht nur von der Elasticität derselben, sondern auch von der gleichzeitig bewegten Luft bedingt sind. Um diesen Zusammenhang zu verstehen, denken wir uns mit W. Weber eine Zungenpfeife, in welcher die Zunge aus einer zur Röhrenaxe senkrechten Platte besteht. Sei nun ad Fig. 132 eine an beiden Seiten offene Röhre, welche in stehende Schwingungen versetzt ist, so dass bei α, β, γ Schwingungsknoten, bei a, b, c Schwingungsmaxima sich befinden; bei m sei in derselben eine Zunge, welche wie in den Zungenpfeifen genau dieselbe Bewegung besitzt, wie eine an dieser Stelle befindliche Luftschicht, wenn wir die einfache offene Röhre hätten.

Wenn die Platte in Folge ihrer Elasticität und des sie treffenden Druckes der mitschwingenden Luft genau die gleiche Bewegung hat, als die Luft, so werden die Schwingungen der Luft dadurch genau dieselben sein, wie in der offenen Pfeife ohne die Zunge. Wenn aber eine solche Platte vor-

Fig. 134.



handen ist, so kann die Luft sowohl in dem Röhrenstück *md* gerade so schwingen als vorher, wenn das Röhrenstück *ma* fortgenommen ist und die Platte die Rolle einer Zunge der Zungenpfeife spielt, als auch das Stück *ma*, wenn *md* fortgenommen ist. Die beiden Zungenpfeifen geben dann bei verschiedener Länge denselben Ton, da sie ganz gleiche Schwingungen vollführen, die Pfeife *md* aber, wenn sie angeblasen, die Pfeife *ma*, wenn sie durch Saugen zum Tönen gebracht wird.

Dass in der That das Pfeifenstück *md* der angeblasenen Zungenpfeife entspricht, gibt folgende Ueberlegung. Da der durch den Spalt des Rohrwerks in die Pfeife eindringende Luftstrom die gegen das Innere der Pfeife gerichtete Bewegung erzeugt, so beginnt die rückgängige Bewegung der Luft, wenn der Spalt geschlossen ist, es muss also die rückgängige Bewegung der Luft mit der rückgängigen der Zunge zusammenfallen. In den Schwingungsknoten unserer Pfeife *ad* ist nun, wie wir wissen, die Luft stets in Ruhe, zwischen denselben bewegt sie sich hin und her, so dass also gleichzeitig die Luft zwischen $\beta\gamma$ und $\alpha\beta$ gegen β hin und von β fort sich bewegt. Bei a, b, c, d hat die Luft die grösste Geschwindigkeit, bei α, β, γ treten abwechselnd Verdichtungen und Verdünnungen ein. Haben wir nun statt der ganzen Röhre *ad* nur das Stück *md* mit der Zunge *m*, so muss die Luft nach aussen schwingen, wenn die ganze Luftsäule $m\gamma$ nach aussen schwingt, wenn also vor *m* bei β eine Verdichtung entstehen müsste, sie muss nach innen schwingen, wenn die ganze Luftsäule nach innen schwingt und bei γ eine Verdichtung sich bildet. Man sieht, dass dies das Spiel der Zunge einer Zungenpfeife ist, deren Rohrwerk in dem Fusse einer Pfeife sitzt, in den wir Luft einblasen. Durch die im ersten Moment offene Spalte treiben wir die Luft nach γ, und die Zunge wird durch den Druck der Luft mit in Bewegung nach derselben Richtung versetzt. Die Zunge schliesst dann das Rohrwerk und die Luft beginnt in Folge dessen in der Pfeife die Bewegung rückwärts und die Zunge geht in Folge ihrer Elasticität gleichzeitig rückwärts, sie bewegt sich gegen β hin, wo die Luft durch die Rückschwingung aus der Röhre verdichtet wird. Durch den Druck der im Fusse verdichteten Luft erhält dann die Luft der Pfeife die rückgängige Bewegung und gleichzeitig geht die Zunge mit, sie bewegt sich also gegen γ hin, wenn sich bei γ eine Verdichtung bildet, gegen β, wenn sich bei β eine Verdichtung bildet. Daraus ergibt sich auch zugleich der verzögernde Einfluss der Luftschwingungen auf jene der Zunge. Ein solcher Einfluss ist, wie wir sahen, nicht vorhanden, wenn die Röhre gerade eine solche Länge hat, dass sie als offene Pfeife denselben Ton wie die Zunge gibt. Die Stellung der Zunge entspricht dann dem Schwingungsmaximum *c*, wenn der Grundton der Pfeife derjenige der Zunge ist, demjenigen *b*, wenn der erste Oberton der Pfeife derselbe ist u. s. f. An den Stellen

des Schwingungsmaximums geht die Luft einfach hin und her, ohne dass dort merkliche Verdichtungen und Verdünnungen stattfinden, sie übt deshalb auch keine Drucke auf die Platte aus.

Verlängert man nun die Röhre, so rückt die Zunge von c gegen β, sitzt sie wie in m, so schwingt die Zunge von ihrer Gleichgewichtslage nach innen, wenn die Luft nach innen gegen γ hinströmt, wenn also die Luft zwischen m und c verdünnt ist, die schwingende Luft gibt also der Zunge einen Antrieb nach innen, während ihre eigene Elasticität ihr einen Antrieb nach aussen ertheilt, weil sie nach innen zu von ihrer Gleichgewichtslage entfernt ist. Während die Luft von der Gleichgewichtslage nach aussen schwingt, erhält sie, da die Luft zwischen m und c dann verdichtet ist und sich nach aussen bewegt, einen Antrieb nach aussen, die eigene Elasticität der Zunge dagegen gibt ihr einen Antrieb nach innen, da die Zunge nach aussen von der Gleichgewichtslage entfernt ist. In jedem Falle ist also der von der Luft herrührende Antrieb demjenigen der Elasticität entgegen, es muss also die Amplitude der Schwingung und ihre Dauer dadurch vergrössert werden.

Dass bei der angeblasenen Pfeife die Stellung der Zunge der Lage von m in der Pfeife md entspricht, hat schliesslich Weber auch dadurch gezeigt, dass er nachwies, dass wenn der Ton der Pfeife nicht gleich dem der Zunge ist, die Länge der Pfeife immer um etwas weniger als eine halbe stehende Welle grösser ist als die Pfeife, die als offene denselben Ton geben würde. So gab eine Zungenpfeife denselben Ton wie eine Pfeife von 46,8 Centim. Länge, als die Länge der Röhre R betrug

$$
\begin{aligned}
19{,}70 \text{ Centim.} &= 0.\ 46{,}8 + 19{,}70 \\
66{,}05 \quad " \quad &= 1.\ 46{,}8 + 19{,}25 \\
86{,}6 \quad " \quad &= 2.\ 46{,}8 + 20{,}10.
\end{aligned}
$$

Jedesmal ist der Rest etwas kleiner als die halbe stehende Welle 23,4 Cent. Die erste Länge des Rohres entspricht der Lage von m zwischen d und γ, die zweite der zwischen c und β, die dritte der zwischen b und α.

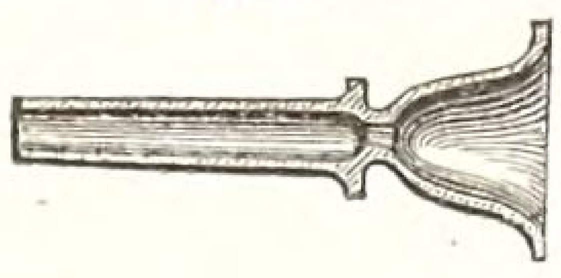
Eine Ableitung der von Weber beobachteten Erscheinungen im Einzelnen würde uns zu weit führen; nicht nothwendig wird es ferner sein, das Verhalten der Pfeife, wenn man sie durch Saugen zum Tönen bringt, noch besonders zu besprechen, da die Ableitung desselben auf den gleichen Principien beruht.

Die zweite Art der Zungenpfeifen ist jene mit weichen Zungen, bei denen die Tonhöhe nicht von der Elasticität der Zungen, sondern nur von der schwingenden Luftsäule abhängt. Weiche Zungen sind die aus elastischen Rohrplatten geschnittenen Zungen der Holzblasinstrumente, Clarinette, Oboe und Fagott, sowie die zur Tonerregung der Blechblasinstrumente benutzten menschlichen Lippen. Die Clarinette hat eine breite Zunge, welche im Mundstücke derselben ähnlich befestigt ist, wie die Zunge in den Rohrwerken der Zungenpfeifen, Oboe und Fagott haben zwei Zungen, welche am Ende des Mundstückes einander gegenüber gestellt und durch einen schmalen Spalt von einander getrennt sind. Zum Anblasen werden die beiden Zungen zwischen die Lippen genommen; beim Hineinblasen wird der Spalt durch den Druck der im Munde zusammengepressten Luft, sowie durch die Elasticität der Zungen und die in den Instrumenten ent-

stehenden Schwingungen der Luft abwechselnd geschlossen und geöffnet. Der dadurch entstehende intermittirende Luftstrom ruft die Schwingungen der Luft in den Instrumenten hervor und unterhält sie.

Bei den Blechblasinstrumenten wird die schwingende Bewegung an dem Mundstücke durch rasch folgendes abwechselndes Schliessen und Oeffnen der Lippen erzeugt. Das Mundstück hat dort eine trichterförmige Gestalt (Fig. 135), die Lippen des Bläsers liegen in der Höhlung und sind im Ruhezustande geschlossen. Durch den Druck der im Munde angesammelten Luft werden sie dann geöffnet, sofort aber, wenn der Luftdruck im Munde nachlässt, wieder geschlossen, durch den dann wieder wachsenden Luftdruck geöffnet u. s. f. Diese intermittirenden Luftströme erregen die Schwingungen in dem Rohre des Instruments, welche wir als Klang wahrnehmen.

Fig. 135.



Die weichen Zungen haben nur eine geringe Elasticität, so dass der Rythmus, in welchem sie schwingen, sich ganz den Schwingungen, welche im Rohre entstehen, anpasst, wenn der Wechsel des Luftdruckes in Folge der Schwingungen, die im Rohre entstehen, hinreichend ist, um die Zungen in schwingende Bewegung zu versetzen. Da nun der Wechsel des Luftdruckes in den Schwingungsknoten, wie am obern Ende der gedeckten Pfeifen, am grössten ist, so muss, nach den Entwicklungen von Helmholtz, an den Zungen ein Schwingungsknoten entstehen; eine durch weiche Zungen zum Tönen gebrachte Röhre muss demnach dieselben Töne geben, wie wenn sie an der Stelle der Zunge geschlossen wäre und an dem andern offenen Ende angeblasen würde.

Befindet sich demnach die Zunge, wie bei der Clarinette, an dem Ende einer cylindrischen Röhre, so sind die Töne der Grundton der Röhre, die Quinte der höhern Octave, die Terz der folgenden Octave, kurz die Reihe der ungeradzahligen Töne. Man kann in der That alle diese Töne bei cylindrischen Röhren hervorbringen.

Ist das Rohr kegelförmig, so ist die Reihe der Töne eine andere. Für kegelförmige Röhren, welche an beiden Seiten offen sind, oder für solche, welche vollständige Kegel bilden und oben an der Spitze geschlossen sind, stimmt die Tonreihe vollständig mit denen von offenen cylindrischen Pfeifen gleicher Länge überein, wie sich übereinstimmend aus den Versuchen von Zamminer und der Theorie von Helmholtz ergibt. Hat das Rohr die Form eines abgestumpften Kegels, so stimmt die Reihe der Töne, wenn die kleinere Endfläche geschlossen ist, weder mit der Reihe der Töne in einer gleich langen offenen, noch in einer gleich langen gedeckten Pfeife überein. Die Tonreihe nähert sich aber um so mehr derjenigen in der offenen Pfeife gleicher Länge, je kleiner das Stück ist, welches an dem ganzen Kegel fehlt, je näher bei der Spitze also das Rohr geschlossen ist. Ganz dasselbe gilt nun auch für kegelförmige, mit Zungen versehene Röhren.

Bei der Oboe, dem Fagott und den Blechblasinstrumenten sind nun die Röhren stets kegelförmig, und das Mundstück ist möglichst nahe an der Spitze des Kegels, es folgt somit, dass die Reihenfolge der Töne in diesen sehr nahe jener in einer offenen Pfeife gleich ist. In der That ist das der Fall, und die Töne der Blechblasinstrumente, die in der Orchestermusik gebraucht werden, sind nichts anders als die Reihe der harmonischen

Töne, welche der Länge der Röhre, dieselbe als offene Pfeife genommen, entsprechen. Die so bei diesen Instrumenten gebrauchten Töne entsprechen um so genauer der harmonischen Reihe, als nur die höhern Töne vom dritten oder vierten an in so langen und engen Röhren hervorgebracht werden können. Die Töne eines kegelförmigen Rohres, auch wenn es nicht ganz ein vollständiger Kegel ist, nähern sich nämlich um so mehr der harmonischen Reihe einer offenen Pfeife bestimmter Länge, je höher sie in der Reihe liegen.

Bei den Blechblasinstrumenten wie Trompete, Horn etc. werden eigentlich nur diese Töne benutzt, die Erzeugung derselben geschieht durch verschieden starkes Anblasen; je stärker geblasen wird, um so rascher geschieht beim Beginne das abwechselnde Oeffnen und Schliessen der Lippen und somit folgen sich die einzelnen Stösse des intermittirenden Luftstromes um so rascher, der entstehende Ton wird um so höher. Die Kunst des Bläsers ist es, den Luftdruck im Munde so zu reguliren, dass der betreffende Ton entsteht.

Bei den Holzblasinstrumenten wird zur Hervorbringung der verschiedenen Töne das Mittel benutzt, welches wir bei Besprechung der Flöte erwähnt haben, man verkürzt das Rohr durch seitlich eingebohrte Löcher, und kann dadurch innerhalb des Umfangs, in dem diese Instrumente gebraucht werden, eine ganze Reihe von Tönen hervorbringen.

In neuerer Zeit hat man auch an den Blechblasinstrumenten Klappen zur Veränderung der Tonhöhe angebracht, der Klang solcher Instrumente hat indess eine viel geringere Fülle.

Die Klänge der Zungeninstrumente, und besonders diejenigen mit harten Zungen, sind viel schärfer als diejenigen der Lippenpfeifen oder Streichinstrumente. In Folge der scharfen Discontinuitäten, welche bei den einzeln durch den Schluss der Zungen hervorgebrachten Stössen entstehen, entwickeln sich eben viel mehr und höhere Obertöne. Am deutlichsten tritt das hervor, wenn man die harten Zungen ohne Pfeifen tönen lässt, der Ton ist dann wegen der Stärke der höhern Obertöne äusserst leer, durch das Ansetzen von Pfeifen passender Länge werden dann die tiefern Töne verstärkt und der Ton wird voller. Von den durch weiche Zungen angeblasenen Instrumenten haben die Blechinstrumente die schärfsten Klänge, da in ihnen die höhern Obertöne kräftiger sind, während sie in den ähnlich gebauten Holzinstrumenten, wie Oboe und Fagott, rascher verschwinden. Der Unterschied der Klangfarbe von Clarinette und Oboe beruht in der Verschiedenheit der Obertöne, die Clarinette hat nur die ungeradzahligen.

§. 109.

Die menschliche Stimme. Das menschliche Stimmorgan ist als eine Zungenpfeife anzusehen, da der Vorgang der Tonbildung wesentlich mit dem der Zungenpfeife zusammenfällt. Das Stimmorgan des Menschen befindet sich in dem Kehlkopfe *k* an dem obern Ende der die Lungen mit der Mundhöhle *M* und der Nasenhöhle *N* in Verbindung setzenden Luftröhre *L* Fig. 136 und 137.

Der Kehlkopf ist aus einer Anzahl fester Knorpel gebildet, zwischen denen die Stimmbänder ausgespannt sind. Die feste Basis des Kehlkopfes ist der Ringknorpel, cartilago cricoides, ein fester Ring, der das obere

Ende der Luftröhre umschliesst, *a* Fig. 136 im Durchschnitt, Fig. 137 von der Seite, welcher hinten höher ist als vorn. Auf diesem ruht der Schildknorpel, cartilago thyreoides *b* Fig. 136 und 137; derselbe besteht

Fig. 136.

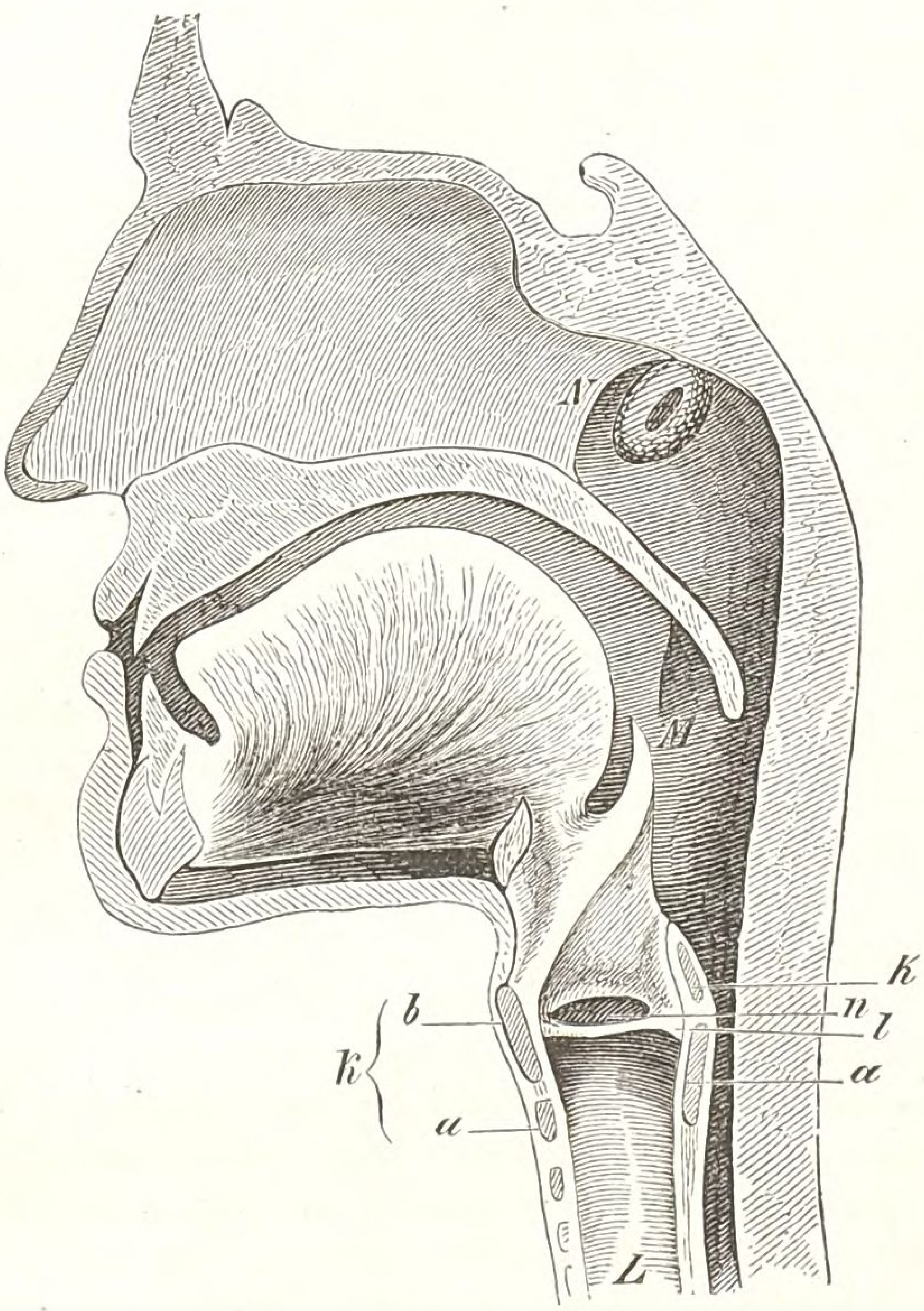
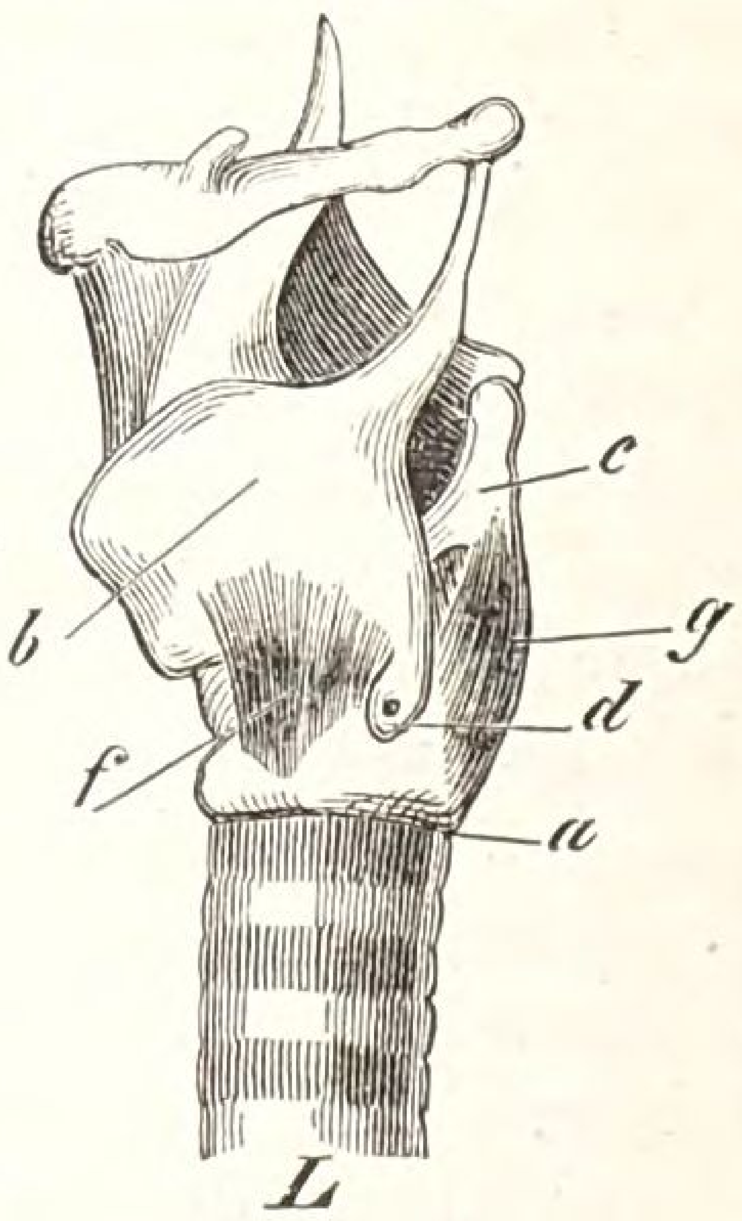


Fig. 137.



aus zwei Platten, die mit ihren vordern Rändern in einer nach vorn am Halse vorspringenden Kante fest verwachsen zusammenstossen, wie Fig. 136 bei *b* im Durchschnitt, 137 bei *b* von der Seite und Fig. 138 von oben

Fig. 138.

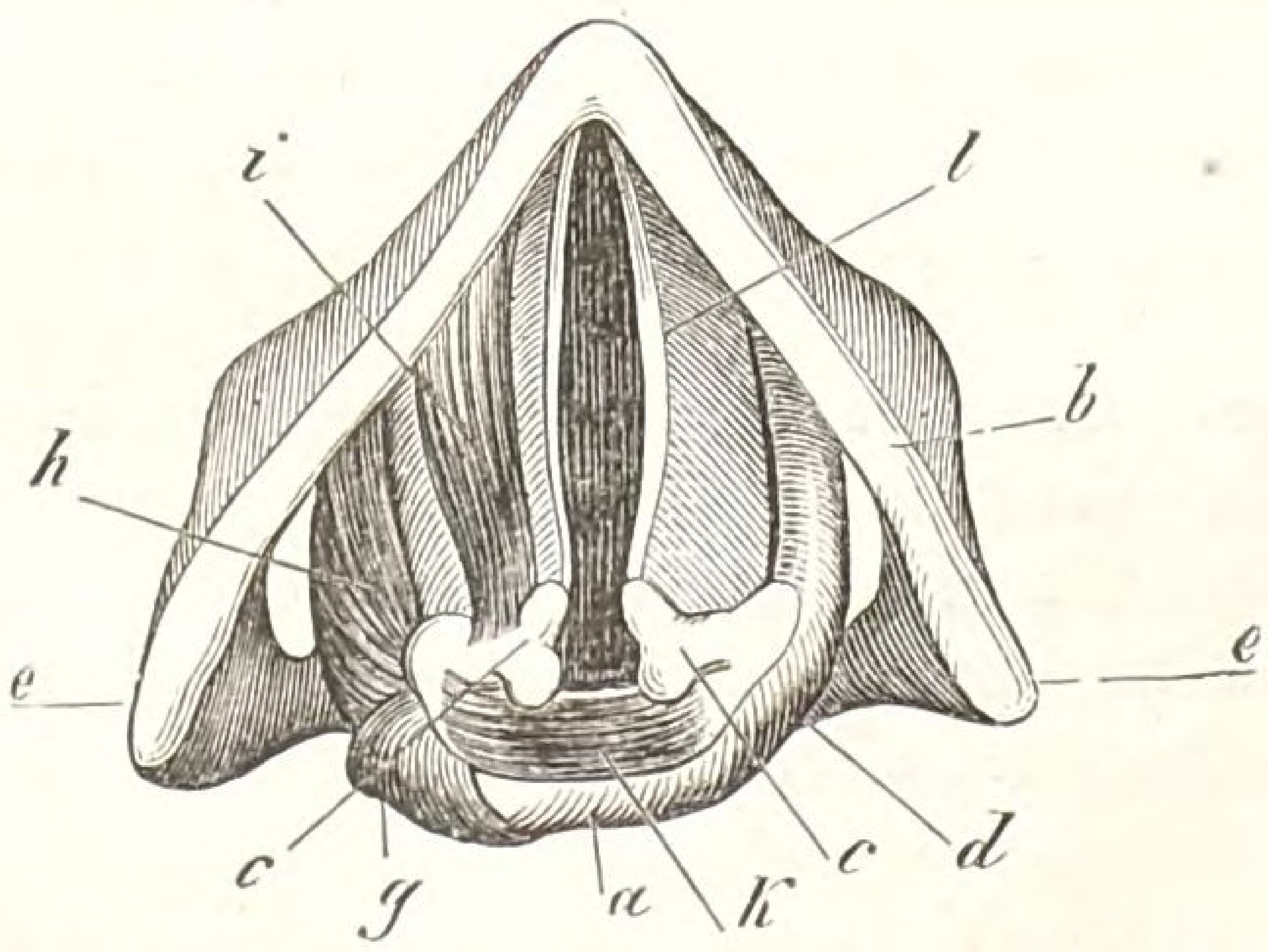
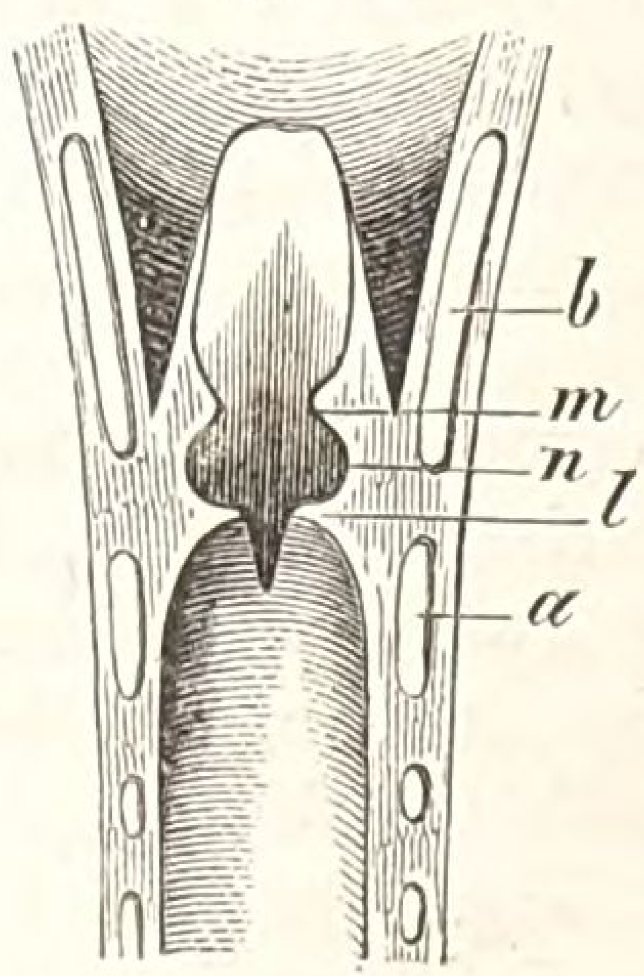


Fig. 139.



gesehen zeigt. Nach hinten gehen die beiden Platten auseinander und stehen dort in keiner Verbindung, Fig. 138.

Der Schildknorpel ist um eine Axe *d* Fig. 137 und 138 drehbar, die sich an einem Fortsatze befindet, welcher von der untern Ecke des hintern freien Randes der Schildknorpelplatte an jeder Seite ausgeht, und welcher andrerseits im Ringknorpel befestigt ist. Die Richtung der Axe, um welche sich der Schildknorpel drehen kann, ist Fig. 138 durch die Linie *ee* angedeutet, die Bewegung, welche er annehmen kann, ist nach vorn und unten, sowie nach hinten und oben gerichtet. Der Kante, in welcher die beiden Platten des Schildknorpels zusammenstossen, gegenüber stehen auf dem erhöhten hintern Rande des Ringknorpels die beiden Giesskannenknorpel, cartilagines arytaenoides, dicht neben einander *c* Fig. 137 von der Seite, Fig. 138 von oben gesehen. Ihre Basis steht mit dem Ringknorpel durch ein Gelenk in Verbindung, das ihnen gestattet sich vor- und rückwärts zu bewegen, also sich dem Schildknorpel zu nähern und von ihm zu entfernen, gleichzeitig aber sich nach rechts und links zu bewegen, also sich einander zu nähern oder von einander zu entfernen.

Von der Basis jedes der Giesskannenknorpel springt eine Ecke nach vorn vor, der processus vocalis. Zwischen diesen beiden Ecken und der einspringenden Kante, in welcher die beiden Platten des Schildknorpels zusammenstossen, sind die Stimmbänder *l* Fig. 136, 138, 139 ausgespannt. Dieselben sperren die Luftröhre bis auf eine schmale Ritze, die Stimmritze, welche in der Ansicht von oben Fig. 138 dunkel gehalten ist, vollständig ab. Nur befindet sich noch eine kleine Oeffnung als Verlängerung der Stimmritze zwischen den Rändern der Giessbeckenknorpel, die sogenannte Athemritze. Für gewöhnlich ist wahrscheinlich die Stimmritze vollständig geschlossen, so dass der Luftweg nur durch die Athemritze geöffnet ist.

Die Stimmbänder sind die Zungen des als Zungenpfeife betrachteten Stimmorgans, über denselben befinden sich als Ansatzrohr die weitern Theile des Luftwegs. Zunächst über den Stimmbändern befindet sich der ventriculus Morgagni, eine kleine Höhlung, welche nach oben von zwei Schleimhautfalten, den falschen Stimmbändern *m* Fig. 139 begrenzt ist; dieser Raum ist Fig. 139 im Durchschnitt, Fig. 136 von der Seite gesehen mit *n* bezeichnet. Die falschen Stimmbänder verbinden die Giessbeckenknorpel mit dem Kehldeckel, der epiglottis, und über ihnen endet der Luftweg in der Mund- und Nasenhöhle.

Die Bewegungen des Schildknorpels und der Giesbeckenknorpel, durch welche die Stimmbänder verschieden gestellt und verschieden stark gespannt werden können, werden durch die verschiedenen Muskeln bewirkt, die die Knorpel mit dem Ringknorpel verbinden. Durch den musculus cricothyreoideus *f* (Fig. 137) wird der Schildknorpel nach vorn, den cricoarythenoideus posterior *g* (Fig. 137 und 138) wird der Giessbeckenknorpel nach hinten gezogen, das Zusammenwirken beider gibt den Stimmbändern eine stärkere Spannung. Eine Verminderung der Spannung wird bewirkt durch die Muskeln, welche die Giessbeckenknorpel mit dem Schildknorpel verbinden, *i* Fig. 138, der Schild- und Giessbeckenknorpel zusammenzieht, und den musculus cricoarythenoideus anterior *h* (Fig. 138), der die Giessbeckenknorpel nach vorn zieht. Die Stimmritze wird geschlossen durch den die beiden Giessbeckenknorpel gegen einander ziehenden Muskel *k* (Fig. 138), sie wird geöffnet durch das Zusammenwirken der Muskeln *g*

und h, welche, wenn sie gemeinschaftlich wirken, die Giessbeckenknorpel nur zur Seite ziehen.

Die Versuche von Joh. Müller haben nun ergeben, dass zur Tonbildung die Athemritze vollständig geschlossen ist und ebenso die Stimmbänder fast vollständig aneinandergelegt und durch die Muskeln in einem gewissen, je nach der Tonhöhe verschiedenen Grade gespannt werden. Der aus den Lungen dringende kräftige Luftstrom öffnet dann die Stimmritze und versetzt die Stimmbänder in Schwingungen. Dadurch wird dann der Luftstrom ein intermittirender, gerade wie bei der Zungenpfeife, und die einzelnen Stösse der austretenden Luft entsprechen den einzelnen Schwingungen des Tones. Auf die Höhe des Klanges der menschlichen Stimme haben die weitern Theile des Luftweges keinen Einfluss, sie sind, wie wir im nächsten §. zeigen werden, nur von Einfluss auf die Klangfarbe und Fülle des Tones. Die Tonhöhe hängt nur von der Länge und Spannung der Stimmbänder ab, wie Johannes Müller an ausgeschnittenen von unten angeblasenen Kehlköpfen zeigte.

Die menschliche Stimme hat überhaupt den Umfang von etwa vier Octaven, die sich indess niemals in einem und demselben Individuum vereinigt finden, sie reicht etwa vom grossen $E = e_{-1}$ bis zum dreigestrichenen c. Man unterscheidet Männer und Frauenstimmen, bei erstern Bass und Tenor, bei letztern Sopran und Alt.

Die Bassstimmen reichen etwa von e_{-1} bis f_1, die Tenorstimmen von a_{-1} bis h_1 oder c_2, die Altstimmen von f bis f_2 und die Sopranstimmen von c_1 bis c_3.

Die verschiedenen Stimmorgane unterscheiden sich hauptsächlich durch die Länge der Stimmbänder, bei den Männern springt die Kante des Schildknorpels viel weiter vor als bei den Frauen und unter den Männern bei den Bassisten mehr als bei den Tenoristen. Einige Messungen von Johannes Müller ergaben als mittlere Länge der männlichen Stimmbänder etwa 18 Mm., der weiblichen etwas über 12 Mm., also ein Verhältniss von nahezu 3 : 2.

Bei einem und demselben Individuum werden die verschieden hohen Töne wesentlich durch verschiedene Spannung der Stimmbänder hervorgebracht. Johannes Müller hat an ausgeschnittenen männlichen Kehlköpfen durch Steigerung der Spannung von 7,3 Gr. auf 540 Gr. den Ton um mehr als zwei Octaven erhöht. Ausser der Stärke der Spannung hat indess auch die Stärke des Luftstroms Einfluss auf die Tonhöhe, wie sich schon daraus ergibt, dass wir die tiefsten Töne nur im Piano singen können. Beobachtungen von Garcia haben ferner gezeigt, dass bei den verschieden hohen Tönen auch die Ausdehnung der schwingenden Theile sich ändert. Bei einem Tenoristen fand er, dass bei den Tönen der kleinen Octave auch die Band- und Knorpelränder der Glottis ihrer ganzen Länge nach schwingen, während in den höhern Tönen der eingestrichenen Octave die Stimmbänder allein schwingen. Die sogenannten Fisteltöne kommen dadurch zu Stande, dass bei nicht ganz geschlossener Stimmritze nur die Ränder der Stimmbänder schwingen. Wir sehen also bei der menschlichen Stimme die bekannten Gesetze wiederkehren, dass verstärkte Spannung die Schwingungszahl vergrössert, Vermehrung der schwingenden Masse sie verkleinert.

§. 110.

Die menschliche Sprache. Die menschliche Sprache entsteht dadurch, dass das menschliche Stimmorgan die von ihm gebildeten Töne als die verschiedenen Vocale hervortreten lässt, welche dann durch die sogenannten Consonanten in bestimmter Weise begonnen und beendet werden. Vocale und Consonanten setzen sich zu articulirten Lauten, zu Silben, den Bestandtheilen der Wörter zusammen.

Die Vocale sind, wie schon Willis und Wheatstone ausgesprochen haben, verschiedene Klänge, das heisst es sind Accorde aus einem Grundtone und Obertönen, welche für die verschiedenen Vocale verschieden zusammengesetzt sind. Helmholtz hat diesen Satz auf zwei Wegen bewiesen, indem er die einzelnen Bestandtheile der Vocalklänge mit Hülfe der Resonatoren nachwies, und dann, indem er den gesungenen Vocalen sehr ähnliche Klänge aus einfachen Tönen zusammensetzte. Zu dieser Zusammensetzung benutzte er Stimmgabeln mit Resonatoren, welche durch Deckel verschliessbar waren; die Stimmgabeln waren so aufgestellt, dass die von ihnen gelieferten Töne nur hörbar waren, wenn die Deckel der Resonatoren geöffnet waren. Dadurch konnte man gleichzeitig die Stärke des von jeder einzelnen Stimmgabel gehörten Tones variiren, indem man den Deckel des zu ihr gehörigen Resonators mehr oder weniger öffnete. Die Stimmgabeln wurden dadurch in Schwingungen versetzt, dass ihre Zinkenenden sich vor den Polen eines Magnets befanden, der durch einen intermittirenden elektrischen Strom in rascher Folge abwechselnd magnetisirt und entmagnetisirt wurde, so zwar, dass er entweder für jede oder je zwei oder drei Schwingungen der Gabel einmal auf einen kurzen Moment magnetisch wurde.

Helmholtz benutzte so bei seinen letzten Versuchen 12 Stimmgabeln, die harmonische Reihe vom b_{-1} an bis zum 8. und dann die geradzahligen bis zum 16. Ton, also

$$b_{-1},\ b,\ f_1,\ b_1,\ d_2,\ f_2,\ as_2,\ b_2,\ d_3,\ f_3,\ as_3,\ b_3.$$

Auf diese Weise hatte er zwei Reihen von acht Tönen, einmal von b_{-1}, dann von b an.

Mit der tiefern Reihe erhielt er *U*, wenn er nur den Ton b_{-1} angab, wie denn überhaupt die einfachen Töne bis in die eingestrichene Octave hinein entschieden einen äusserst dumpfen *U*klang haben. Der Klang wurde ein helleres *U*, wenn zu dem b_{-1} schwach der zweite und dritte Ton, b und f_1 hinzukam.

Der Vokal *O* entstand, wenn bei etwas gedämpftem b_{-1} der erste Oberton b sehr stark und schwächer f_1, b_1 und d_2 angegeben wurden. Ein nach *O* gezogenes *A*, das schwedische *A*, entstand durch möglichste Verstärkung der Töne fünf bis acht, also d_2, f_2, as_2, b_2, wobei die tiefern Töne etwas geschwächt wurden.

Die Vocale *A*, *Ä* und *E* gelang es durch Anwendung der höhern Reihe von b an darzustellen, auch in dieser klingt b allein als *U*, kräftig von b_1 begleitet, schwächer von f_1, als *O*. *A* erhält man, wenn b mässig stark von b_1 und f_2, dagegen kräftig von b_2 und d_3 begleitet ist. Verstärkt man b_1 und f_2, schwächt dagegen b_2 und lässt d_3 und f_3 möglichst stark hervortreten, so geht *A* in *Ä* über. Für *E* muss man die beiden

tiefsten Töne der Reihe *b* und b_1 mässig stark halten und die höchsten f_3, as_3, b_3 möglichst heraustreten lassen. Die Vocalklänge *I* und *Ü* gelang es nicht, künstlich darzustellen.

Aus dieser künstlichen Bildung von Vocalklängen ist zu folgern, dass die von der menschlichen Stimme beim Sprechen und Singen hervorgebrachten Vocale ebenfalls nur Klänge sind, zusammengesetzt aus dem Grundtone, der die Höhe des gesprochenen oder gesungenen Tones bedingt, und gewissen charakteristischen Obertönen. Die Möglichkeit einer so reichhaltigen Klangbildung liegt in der Construction des menschlichen Sprachorgans, Kehlkopf, Schlund und Mundhöhle. Die Klänge der menschlichen Stimme werden durch die intermittirenden Luftstösse, die durch die Schwingungen der Stimmbänder entstehen, erzeugt. Diese Art der Klangerzeugung lässt, wie wir wissen, zu dem Grundtone die ganze Reihe der Obertöne kräftig entwickeln. Schlund und Mundhöhle dienen nun für die erzeugten Klänge als Pfeife, und wie wir sahen, werden durch die Pfeifen gerade diejenigen Bestandtheile des Klanges verstärkt, welche den Eigentönen der Pfeife gleich sind oder doch sehr nahe kommen, alle übrigen werden geschwächt. Bei dem menschlichen Sprachorgan ist nun das Schallrohr, das die Klänge passiren müssen, um nach aussen zu gelangen, nicht von fester Form, sondern wir können ihm, sowohl der Mundhöhle als dem Schlunde, die verschiedensten Formen geben, wir erkennen auch sofort, dass die Form bei den verschiedenen Vocalen eine sehr verschiedene und für jeden Vocal eine bestimmte ist. Es folgt daraus, dass für jede Vocalstellung die Mundhöhle, als Resonator betrachtet, einen bestimmten Eigenton hat, welcher von der Form der Mundhöhle und von der Grösse der Mundöffnung, die wir ihr in den verschiedenen Stellungen geben, abhängt. Man kann diese Eigentöne der Mundhöhle erkennen, indem man vor die Mundhöhle Stimmgabeln hält und denjenigen Ton aufsucht, bei dem die Mundhöhle die stärkste Resonanz gibt, oder auch, was bei der Ustellung und Ostellung leicht geht, die Mundhöhle wie einen Resonator direkt anbläst.

Nach Helmholtz ist nun der Eigenton der Mundhöhle, wenn man ihr die Form für *U* gibt, *f*, die Mundöffnung ist dann am kleinsten, und die Mundhöhle wird durch Herabziehen der Zunge in der Mitte möglichst erweitert; für ein etwas nach *O* hingezogenes *U*, wie Helmholtz es nennt, offenes *U*, steigt der Eigenton um eine ganze Octave bis f_1. Bei der Stellung für *O* wird die Oeffnung des Mundes grösser und die Tonhöhe steigt auf b_1; geht man vom *O* durch *Oa* zum *A*, so wird der Mund immer weiter geöffnet, bis er beim *A* fast trichterförmig wird, der Eigenton steigt dann um eine ganze Octave bis b_2.

Bei den Vocalen *Ae*, *E*, *I* wird die Gestalt der Mundhöhle eine wesentlich andere. Die Lippen werden bei Bildung dieser Vocale zurückgezogen und geöffnet, die Zunge wird gehoben, so dass zwischen der Zunge und dem harten Gaumen nur ein enger Kanal bleibt, während der Raum unmittelbar über dem Kehlkopf durch Herabdrücken der Zungenwurzel erweitert wird. Die Mundhöhle bekommt also die Gestalt einer Flasche mit engem Halse, den Bauch der Flasche bildet der Schlund, den Hals der enge Kanal zwischen Zunge und Gaumen; der Hals ist bei *I* am engsten, bei *Ae* am weitesten.

Derartige Flaschen haben zwei Grundtöne, den des Bauches für sich und den des Halses, den man, besonders wenn er gegen den Bauch sehr enge ist, als eine beiderseits offene Röhre ansehen kann; dem entsprechend hat die Mundhöhle bei *Ae*, *E*, *I* zwei Eigentöne, bei *Ae* die Töne d_2 und g_3 bis as_3, bei *E* die Töne f_1 und b_3, bei *I* als tiefsten Ton etwa *f*, wie bei *U*, und den des Halses d_4.

Oe und *Ue* unterscheiden sich von *E* und *I* dadurch, dass bei beiden auch die Lippen röhrenähnlich geformt werden, während im Uebrigen die Mundstellung wie bei *E* und *I* bleibt. Die Töne des Halses werden dadurch tiefer, er wird cis_3 bei *Oe* und gis_3 bis as_3 bei *Ue*, die Töne des Schlundes bleiben wie bei *E* und *I*.

Als das Charakteristische der Vocalklänge sieht nun Helmholtz das an, dass aus der ganzen Reihe der Obertöne in Folge der für einen Vocal charakteristischen Mundstellung nur diejenigen eine Verstärkung erhalten, welche mit den Eigentönen des Mundes zusammenfallen, oder doch ihnen sehr nahe liegen. Wir werden nämlich bei Besprechung der Resonanz sehen, dass bei Resonatoren mit so weichen Wandungen, als die Mundhöhle ist, auch solche Töne verstärkt werden können, welche von dem Eigenton des Resonators um eine grosse Terz, ja noch mehr verschieden sind, besonders bei dem ersten starken Ansprechen.

Die Charakterisirung der Vocale ist beim Sprechen eine viel schärfere als beim Singen, denn der Grundton wird beim Sprechen nie so klangvoll gebildet als beim Singen. Die Tonlage des gesprochenen Tones ist nun für Männerstimmen im Durchschnitt die obere Partie der grossen Octave etwa bis zum kleinen *c*, die der Frauenstimmen die obern Töne der kleinen Octave etwa bis zum eingestrichenen c_1. Mit Ausnahme des Eigentones für *U* sind demnach beim Sprechen stets Obertöne vorhanden, welche den Eigentönen so nahe liegen, dass durch das Mitklingen dieser Töne der Vocal charakterisirt ist. Liegt wie bei *U* der Eigenton tiefer als der gesprochene, so ist eben *U* durch das Fehlen aller Obertöne charakterisirt. Bei *O* würde für die Männerstimmen der charakteristische Ton nahe der dritte Oberton, für die Frauenstimmen der erste Oberton sein. Man sieht, die Vocalklänge sind dadurch vor den übrigen Klängen charakterisirt, dass die Stärke der in ihnen vorhandenen Obertöne nicht von ihrer Ordnungszahl, ob es der erste oder zweite ist, sondern von ihrer absoluten Höhe abhängt.

Für die in den verschiedenen Lagen gesungenen Vocale bietet diese Theorie der Vocalklänge indess noch Schwierigkeiten, die noch nicht ganz gelöst sind, besonders für die Charakterisirung des *O* und *A*; darnach wären oberhalb des zweigestrichenen *c* etwa *A* nicht mehr von *O* und beide nur durch einen hellern Klang von *U* zu unterscheiden, da wegen der weitern Oeffnung des Mundes die Obertöne nicht so stark gedämpft werden als bei *U*. Helmholtz glaubt nun allerdings, dass in den höhern Lagen der Frauenstimmen die Vocale nicht mehr scharf charakterisirt seien und macht darauf aufmerksam, dass sich deshalb die Nothwendigkeit ergeben habe, für Opern und Oratorien den Zuhörern Textbücher zu liefern. Indess ist doch wohl kaum anzunehmen, dass man im Ohre auf Grund des aus dem Texte bekannten Wortes den Vocalklang supplire. Es bedarf noch weiterer Untersuchungen, um die Erklärung der Vocale vollständig zu machen.

Die Consonanten sind, wie erwähnt wurde, die Anfänge und Endigungen der Vocale, in akustisch-physikalischer Beziehung haben wir nichts darüber zu bemerken.

Zweites Kapitel.
Ausbreitung und Wahrnehmung des Schalles.

§. 111.

Ausbreitung des Schalles in der Luft. Damit wir den Schall wahrnehmen können, muss die an einer Stelle erregte schwingende Bewegung sich bis zu unserm Ohre fortpflanzen; in den meisten Fällen ist die Luft das Mittel, durch welches sich der Schall zu uns fortpflanzt. Da nun in der Luft als einer elastischen Flüssigkeit alle Schwingungen sich nur als longitudinale ausbreiten können, überhaupt in der Luft nur longitudinale Schwingungen entstehen können, so müssen die Gesetze der Ausbreitung des Schalles in der Luft mit denen der longitudinalen Wellen zusammenfallen.

Der Schall muss sich demnach gleichmässig nach allen Richtungen in kugelförmigen Wellen ausbreiten, und deshalb muss die Intensität des Schalles mit der Entfernung vom Orte der Erregung abnehmen. Die an einer Stelle erregte schwingende Bewegung ist nach einer gewissen Zeit t bis zu einer Kugel vom Radius r vorgeschritten. Nennen wir nun die Masse der in der Flächeneinheit der Kugelfläche vorhandenen Luft m, so ist, wenn v die Geschwindigkeit der Lufttheilchen ist, mit der sie die Gleichgewichtslage passiren, $\frac{1}{2}\, m\, 4\, \pi\, r^2 \,.\, v^2$ die in der Welle in dem Momente, in welchem die Theilchen die Gleichgewichtslage passiren, vorhandene lebendige Kraft, somit auch gleich dem in der Welle vorhandenen Arbeitsvorrath.

Nach einer grössern Zeit t' hat sich die Welle bis zu einer Kugel mit dem Radius r' fortgepflanzt, somit ist dort derselbe Arbeitsvorrath $\frac{1}{2}\, m\, 4\, \pi\, r'^2\, v'^2$, wenn wir die Geschwindigkeit, mit der die Lufttheilchen dort die Gleichgewichtslage passiren, v' nennen.

Da die Bewegung in der zweiten Welle einfach die dorthin übertragene der ersten Welle ist, so müssen diese beiden Arbeitsvorräthe einander gleich sein, oder es muss

$$\frac{1}{2}\, 4\, \pi\, r^2\, v^2 = \frac{1}{2}\, 4\, \pi\, r'^2\, v'^2; \qquad r\, v = r'\, v';$$

$$v : v' = r' : r;$$

es müssen also die Geschwindigkeiten der bewegten Lufttheilchen sich umgekehrt verhalten wie die Radien der Wellen, also umgekehrt wie die Entfernungen von der Schallquelle. Im §. 97 bemerkten wir nun, dass wir die Stärke des Schalles nach der Stärke des die immer gleiche Fläche unseres Trommelfelles im Ohre treffenden Stosses, somit nach der lebendigen Kraft der in unser Ohr eintretenden Schwingungen messen müssen. Da nun nach dem Vorigen die auf die Flächeneinheit, somit auch überhaupt auf jede Fläche von bestimmter Grösse gerechnete lebendige Kraft der Schwingungen abnimmt, wie die Quadrate der Entfernungen von der Schall-

quelle wachsen, so würde im freien Raume die Schallstärke abnehmen müssen, wie die Quadrate der Entfernung von der Schallquelle wachsen.

Dass in der That die Stärke des Schalles mit der Entfernung von der Quelle abnimmt, das ist eine bekannte Thatsache, auch wohl, dass die Stärke rascher abnimmt, als die Entfernung wächst. Genaue Messungen über die Schallstärke können wir nicht anstellen, weil der Schall eben nur eine subjective Wahrnehmung ist, und wir in unserm Ohre nicht zwei gleichzeitig wahrgenommene Klänge vergleichen können, da diese sich zu einem Gesammteindrucke summiren. Von zwei nach einander wahrgenommenen Klängen können wir wohl ein Mehr oder Minder, aber nicht ein Verhältniss ihrer Stärke erkennen.

Die Geschwindigkeit, mit der sich longitudinale Schwingungen in den Gasen ausbreiten, erhielten wir in §. 88

$$c = \sqrt{\frac{P \cdot g \cdot k}{s_0}(1 + 0{,}00367\,t)},$$

wenn s_0 die Dichtigkeit des Gases unter dem Drucke P der Atmosphäre bei der Temperatur $t = 0^0$ ist. Für Luft wird jener Ausdruck, wie wir dort ebenfalls sahen,

$$c = 331{,}3\sqrt{(1 + 0{,}00367\,t)}.$$

Darnach muss also die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles von der Qualität des Schalles unabhängig sein. Die Erfahrung bestätigt das, indem wir einen Accord in allen Entfernungen von der Schallquelle, in denen die einzelnen Töne gehört werden, als solchen erkennen. Würden sich die Töne verschiedener Höhe mit verschiedener Geschwindigkeit fortpflanzen, so würde eine harmonische Musik gar nicht möglich sein, indem dann in einiger Entfernung, etwa von einem Orchester die höhern Töne des einen Accordes mit den tiefern der vorhergehenden oder nachfolgenden sich mischen würden.

Um die Geschwindigkeit der Schallausbreitung zu messen, muss man in einer genau gemessenen Entfernung von der Schallquelle die Zeit beobachten, welche zwischen der Erzeugung eines Schalls und seiner Wahrnehmung verstreicht. Am bequemsten geht das mit Hülfe abgefeuerter Geschütze, da sich bei diesen der Moment der Schallerzeugung durch den Lichtblitz des aufflammenden Pulvers zu erkennen gibt, und da ein solcher Lichtblitz in allen irdischen Entfernungen momentan wahrgenommen wird. Man misst deshalb zu Messungen der Schallgeschwindigkeit eine hinreichend lange Linie ab, und stellt an beiden Enden derselben Geschütze auf, um die Geschwindigkeit des Schalles sowohl nach der einen als auch nach der andern Richtung zu beobachten. Letzteres hat den Zweck, den allenfallsigen Einfluss von Luftströmungen auf die beobachtete Geschwindigkeit zu eliminiren. In dieser Weise ist die Geschwindigkeit der Schallausbreitung mehrfach gemessen worden, so besonders von einer Commission der pariser Akademie im Jahre 1822 und von den holländischen Physikern Moll, van Beek und Kuytenbrouwer kurze Zeit darauf. Aus den Beobachtungen ergab sich

$$331{,}2\sqrt{1 + 0{,}00367\,t} \quad \text{und} \quad 332{,}77\sqrt{1 + 0{,}00367\,t}.$$

Eine spätere Messung von Martins und den Brüdern Bravais hatte gleich-

zeitig den Zweck zu constatiren, ob der Theorie gemäss die Geschwindigkeit des Schalles von dem Drucke der Luft unabhängig sei, wie sich daraus ergab, dass die Dichtigkeit der Luft dem Drucke proportional ist. Ist die Theorie richtig, so muss der Schall sich aus den untern in höhere Schichten der Luft und umgekehrt mit derselben Geschwindigkeit fortpflanzen wie an der Erdoberfläche. Bravais und Martins beobachteten deshalb zwischen der Spitze des Faulhorn und dem Ufer des Brienzer Sees, bei einer Niveaudifferenz von 2079 Meter, sowohl die Geschwindigkeit von oben nach unten als umgekehrt. Es ergab sich für beide Geschwindigkeiten derselbe Werth und zwar

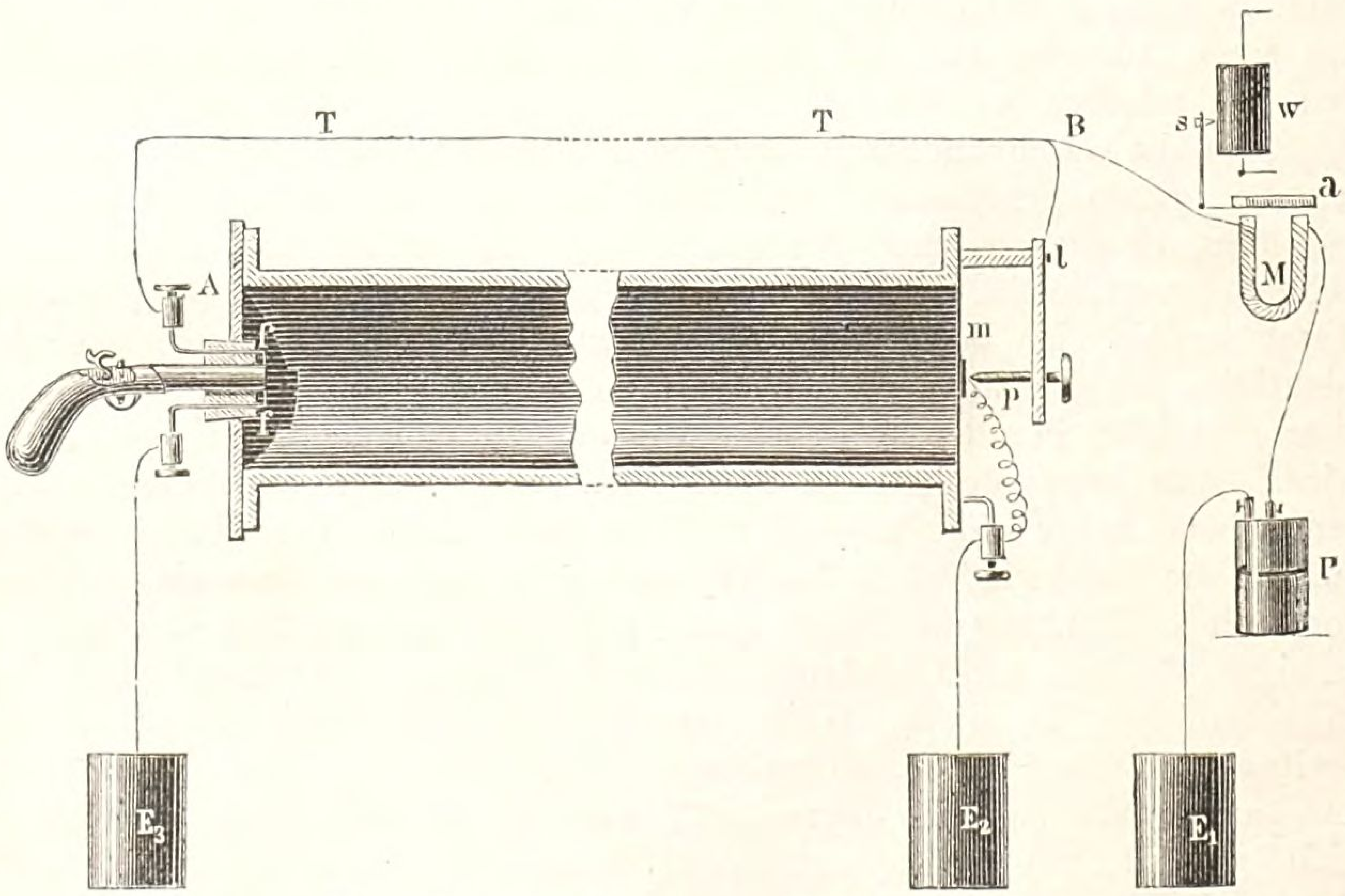
$$332{,}37\sqrt{1 + 0{,}00367\,t},$$

eine Zahl, welche genau mit derjenigen der holländischen Physiker übereinstimmt.

Später hat Regnault die Geschwindigkeit des Schalls in einer andern Weise gemessen, indem er nicht die Zeit maass, welche zwischen der Wahrnehmung eines Lichtblitzes und des Gehörseindrucks verfloss, sondern indem er auf mechanischem Wege den Moment der Schallerzeugung sowohl als den der Ankunft des Schalls an einem entfernten Ort auf einer mit gleichförmiger Geschwindigkeit gedrehten berussten Walze sich markiren liess. Regnault beobachtete die Geschwindigkeit des Schalles theils in Röhren, indem er die in den Jahren 1862 und 1863 in Paris neugelegten Wasserleitungsröhren benutzte, theils in freier Luft.

Um die Erzeugung und die Ankunft des Schalles an dem entfernten Ort sich selbst aufzeichnen zu lassen, benutzte Regnault die elektrische

Fig. 140.



Telegraphie. Das Wesentliche seiner Versuchsanordnung zeigt das Schema Fig. 140. Der Schall wurde erzeugt bei den Versuchen in den Röhren durch eine Pistole, bei den Versuchen in freier Luft durch eine Kanone.

Von dem Orte A, wo der Schuss abgegeben wurde, war eine Telegraphenleitung zur Station B geführt. Von der Leitung ging bei B ein Draht zu dem Elektromagnet M und von diesem zu dem einen Pol der galvanischen Batterie P; der andere Pol der Batterie war durch die Platte E_1 mit der Erde in leitender Verbindung. Wurde nun noch ein anderer Punkt der Leitung mit der Erde in leitende Verbindung gebracht, so wurde der Strom geschlossen, der Magnet magnetisch und der über dem Magnet schwebende und durch eine Feder in der schwebenden Lage erhaltene Anker a angezogen; wurde diese Leitung wieder unterbrochen, so wurde der Anker a durch die Feder sofort wieder emporgehoben. War der Anker angezogen, so wurde der durch einen Winkelhebel mit dem Anker verbundene Stift s gegen die berusste Walze w gedrückt und zog auf derselben, da sie mit gleichmässiger Geschwindigkeit sich drehte und bei der Drehung gleichzeitig gehoben wurde, eine Spirallinie.

Diese zweite leitende Verbindung mit der Erde wurde nun vor Beginn der Versuche dadurch hergestellt, dass an der Station A in der Lücke ff, der Leitung, welche den Telegraphen TT mit der in die Erde versenkten Platte E_3 verband, unmittelbar vor der Mündung der Feuerwaffe ein feiner Metalldraht ausgespannt wurde. Dieser Draht wurde dann in dem Momente, in welchem der Schuss abgefeuert wurde, durch einen festen vor die Ladung gesetzten Filzpfropf zerrissen. So lange der Draht vorhanden ist, schreibt der Stift s auf der rotirenden Walze, so wie er zerrissen ist, wird der Stift von der Walze entfernt. Der Augenblick der Erzeugung des Schalles wird also durch das Aufhören des auf der Walze geschriebenen Striches angegeben. In dem Augenblick, in welchem der Schall bei B ankommt, wird der elektrische Strom wieder momentan geschlossen und der Stift gibt wieder ein Zeichen. Dieser Stromschluss an der Ankunftstation wird durch eine feine Membran bewirkt, welche durch den ankommenden Schall in Schwingung versetzt wird. Diese Membran m, welche bei Anwendung der Röhren dieselben bei der Station B verschliesst, trägt zu dem Ende in der Mitte ein sehr feines Plättchen von Platin, das durch einen dünnen spiralförmigen Draht mit der zur Platte E_2 führenden Leitung verbunden ist. Vor derselben ist ein Stift angebracht, der mit der Telegraphenleitung bei B verbunden ist und der mit einer Schraube versehen ist, so dass die Spitze des Stiftes dem Platinplättchen so nahe gestellt werden kann, dass sie nur eben das Plättchen nicht berührt. Der Stoss der ankommenden Welle treibt dann die Membran vorwärts, Spitze und Plättchen kommen zur Berührung, der Strom wird geschlossen, und der Stift zieht auf der Walze eine Marke.

Der Abstand des Beginns dieser Marke und des Endes der vor dem Abfeuern des Schusses gezogenen Linie auf der Walze maass dann die Zeit, die der Schall gebraucht hatte, um den Abstand AB zu durchlaufen. Um daraus die Zeit zu erhalten, zog ein schwingendes Pendel jede Secunde eine Marke auf der Walze und ausserdem liess man die Schwingungen einer Stimmgabel sich aufzeichnen, in deren Wellenlinien man selbst die Tausendstel Secunden beobachten konnte.

Die Versuche ergaben zunächst, dass die Geschwindigkeit der Schallfortpflanzung etwas von der Intensität abhängt, ein Umstand, auf den wir in der Wärmelehre zurückkommen werden. In den Röhren wurde näm-

lich der Schall an beiden Enden reflectirt, es konnte demnach der Schall, nachdem er das erste Mal bei *B* angekommen war, nochmals beobachtet werden, wenn er von *B* nach *A* zurückgegangen, bei *A* wieder reflectirt und so zu *B* zurückgekehrt war. In den Röhren liess sich das Hin- und Hergehen des Schalls um so öfter beobachten, je weiter die Röhre war, in einer Röhre, deren Durchmesser 1,1 Meter betrug, bis zu 14 Mal. Da die Schwingungen der Luft zum Theil an die Wände der Röhre übergehen, verliert der Schall auf jedem Hin- und Hergange an Stärke, so dass die Schwingungen schliesslich nicht mehr im Stande sind, die Membran zu bewegen.

Es ergab sich weiter, dass in den Röhren die Geschwindigkeit des Schalls von der Röhrenweite abhängig ist, dass sie in engern Röhren kleiner ist als in weitern. So erhielt Regnault z. B. bei einer Röhre von 0,108 M. Durchmesser als grösste Geschwindigkeit des Schalls bei dem ersten Durchlaufen der Röhre den Werth $330,^{m}99$ aus einem dreimaligen Durchlaufen ergab sich 328,21, aus einem fünfmaligen 327,52 und aus einem siebenmaligen 326,66. Bei einer Röhre von 0,3 M. Durchmesser nahm die Geschwindigkeit von 332,18 bis 328,96 und bei der weitesten Röhre von 1,1 M. Durchmesser von 334,16 bis 330,52 ab.

Es folgt somit, dass durch die Wände der Röhren der Schall verzögert wird, um so mehr, je enger die Röhren sind. Man müsste deshalb, um den Einfluss der Röhrenwände zu eliminiren, das Gesetz kennen, nach welchem sich der Einfluss der Röhrenwände mit deren Durchmesser ändert. Dahin gerichtete Versuche werden wir gleich kennen lernen. Regnault glaubt, dass in der weitesten der von ihm angewandten Röhren der Einfluss der Wände nicht mehr merklich gewesen sei. Dann würde jene Geschwindigkeit, der sich die Fortpflanzung des Schalls bei abnehmender Intensität in dieser Röhre immer mehr nähert, diejenige Fortpflanzungsgeschwindigkeit sein, welche durch unsere theoretische Gleichung gegeben wird, da diese uns die Geschwindigkeit als unabhängig von der Intensität liefert. Für diese Geschwindigkeit erhielt Regnault, immer auf 0^0 bezogen,

330,3 Meter,

damit müsste dann auch die Geschwindigkeit in freier Luft übereinstimmen, da in dieser selbst bei den intensivsten Schallquellen schon in geringer Entfernung von der Schallquelle die Intensität so schwach ist, dass sie von keinem Einfluss mehr sein kann. Für diese erhält Regnault in der That

330,7 Meter.

Der von Regnault gefundene Werth ist somit um fast 1,5 M. kleiner als der von den andern Experimentatoren gefundene, wir werden auf diesen Unterschied zurückkommen, wenn wir in der Wärmelehre die Bedeutung des Coefficienten k kennen lernen.

Indem Regnault in seinen Röhren der Luft eine verschiedene Dichtigkeit gab, bestätigte er das schon von Bravais und Martins erhaltene Resultat, dass die Geschwindigkeit des Schalls vom Drucke der Luft unabhängig ist.

Regnault hat ebenfalls versucht die Geschwindigkeit des Schalles in andern Gasen zu bestimmen, indem er die Röhren mit diesen Gasen füllte;

bei der Schwierigkeit, so ausgedehnte Röhren mit reinen Gasen zu füllen, können die dafür erhaltenen Zahlen nur annähernd richtig sein.

Für diese lässt sich die Geschwindigkeit sicherer auf einem andern Wege bestimmen, nämlich durch Messung der Wellenlänge eines Tones von bekannter Schwingungszahl. Denn zwischen Wellenlänge und Schwingungsdauer besteht bekanntlich die Beziehung

$$\lambda = c \,.\, T,$$

somit ist die Geschwindigkeit der Fortpflanzung

$$c = \frac{\lambda}{T} = N\lambda,$$

wenn N die Schwingungszahl bedeutet.

Zur Messung der Wellenlänge können wir sehr bequem die Orgelpfeifen benutzen. Nehmen wir eine gedeckte Orgelpfeife, so ist für den Grundton, wie wir sahen, die Schwingungszahl gegeben durch

$$N = \frac{c}{4\,(l + x)},$$

wenn l die Länge der Pfeife und x die von der Beschaffenheit des Mundstückes und dem Querschnitt der Pfeife abhängige Correction bedeutet. Bestimmt man nun die Schwingungszahl des gehörten Tones etwa mit der Sirene, so hat man nur mehr den Werth von x zu bestimmen, um c aus der Gleichung

$$c = 4\,N\,(l + x)$$

zu erhalten. Wir haben bereits ein Mittel zur Bestimmung von x kennen gelernt; geben wir in einer Pfeife mit beweglichem Stempel einen der Obertöne an, etwa den dritten, so haben wir nur den Stempel so weit in die Pfeife hineinzuschieben, bis die verkürzte Pfeife denselben Ton als zweiten Ton liefert, diese Länge ist $^2/_5\;(l + x)$, die Länge der stehenden Welle des dritten Tones, aus der sich also x berechnen lässt. Ein etwas anderes Verfahren wandte Wertheim an, welches auf dem Satze beruht, dass x von der Länge der Pfeife unabhängig ist. Er wandte Pfeifen an, welche er durch ein oben angeschraubtes Stück nach Fortnahme des Deckels verlängern konnte, und die dann durch Aufschrauben des Deckels auf die Verlängerung wieder oben geschlossen wurden. Ist die Länge der Pfeife vor und nach der Verlängerung l_1 und l_2, und sind die beobachteten Schwingungszahlen N_1 und N_2, so ist

$$N_1 = \frac{c}{4(l_1 + x)} \qquad N_2 = \frac{c}{4(l_2 + x)}$$

$$x = \frac{l_2\,N_2 - l_1\,N_1}{N_1 - N_2}.$$

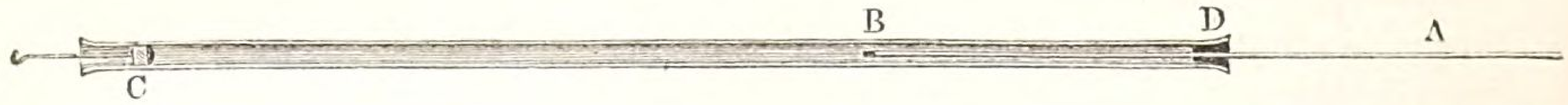
Mit dem so gefundenen x ergibt sich dann bei allen Versuchen mit der Pfeife von der Länge l_1 oder l_2 die Geschwindigkeit c aus der beobachteten Schwingungszahl.

Die Benutzung der Pfeifentöne zur Bestimmung von c beruht darauf, dass das Vierfache der corrigirten Pfeifenlänge gleich der Wellenlänge λ ist, es wird also die Wellenlänge λ bestimmt. Ein anderes Mittel zur Messung der Wellenlängen ist von Kundt angegeben worden.

Wenn man eine an beiden Seiten offene Glasröhre in longitudinale Schwingungen versetzt, so nimmt die in der Röhre enthaltene Luft nicht an den Schwingungen der Röhre Theil; anders jedoch, wenn man die Röhre an den Enden schliesst, sei es, dass man sie zustöpselt oder zuschmilzt. Da die freien Enden eines longitudinal schwingenden Stabes immer ein Schwingungsmaximum haben, so stossen die Endflächen des geschlossenen Rohrs regelmässig periodisch auf die eingeschlossene Luft, und versetzen dieselbe in Schwingungen von der gleichen Dauer mit denen der Röhre. Da nun diese Schwingungen von den beiden Enden der Röhre sich gegen einander fortpflanzen, so erzeugen sie stehende Wellen, in deren Knoten die Luft in Ruhe ist. Hat man nun in die Röhre vor dem Schliessen etwas Lykopodium oder fein gepulverte Kieselsäure gebracht, so wird das Pulver von den Stellen, an denen die Luft in Bewegung ist, zu jenen geführt, wo die Luft in Ruhe ist, also zu den Knotenlinien. Der Abstand dieser Knotenlinien gibt dann die Länge der stehenden Wellen des gehörten Longitudinaltones des Stabes in dem die Röhren ausfüllenden Gase an.

Eine zu Messungen noch geeignetere Anordnung des Versuches zeigt Fig. 141. Anstatt die Röhre selbst zur Erzeugung des Longitudinaltones

Fig. 141.



zu benutzen, führt man in dieselbe einen Stab AB ein, so dass derselbe in seiner Mitte bei D getragen wird. Man klemmt dann die Röhre bei D fest ein, und bringt den Stab dadurch, dass man ihn in der Richtung DA streicht, zum Tönen. Das andere Ende der Röhre wird durch Einschieben eines Stopfens verschlossen, wodurch man es gleichzeitig in der Hand hat, die Länge der Luftsäule etwas zu variiren. In dieser Anordnung sind es die Stösse des freien Stabendes B, welche die Schwingungen der Luft in der Röhre erzeugen, diese werden dann bei C reflectirt und die nach entgegengesetzten Richtungen sich fortpflanzenden Schwingungen erzeugen die dem Longitudinalton des Stabes entsprechenden stehenden Wellen. Da in diesem Falle die Röhrenwände selbst in Ruhe bleiben, legt sich das in die Röhre gebrachte Pulver noch schärfer in die Knotenstellen der Luftwellen, so dass bei dieser Anordnung die Messung eine noch zuverlässigere ist als bei der ersten.

Die Versuche von Wertheim sowohl als von Kundt, Schneebeli, der nach dem Kundt'schen Verfahren und Ad. Seebeck, der nach einem ähnlichen Verfahren beobachtete, haben das von Regnault erhaltene Resultat bestätigt, dass die Fortpflanzung des Schalles in Röhren von den Dimensionen der Röhre, und wie Kundt gezeigt hat, auch von der Beschaffenheit der Röhrenwände abhängig ist. Bei rauhen Wänden ist die Länge der Wellen für dieselben Töne stets eine kleinere als für glatte, ein Umstand, der beweist, dass die Reibung der Luft an den Wänden bei dieser Verminderung der Geschwindigkeit eine grosse Rolle spielt.

Nach den theoretischen Entwicklungen von Helmholtz und Kirchhoff soll bei engen Röhren die Fortpflanzungsgeschwindigkeitsverminderung dem Durchmesser der Röhre bei gleicher Tonhöhe umgekehrt proportional sein,

mit steigender Tonhöhe, also wachsender Schwingungszahl soll sie bei gleichem Röhrendurchmesser kleiner werden. Dass letzteres der Fall ist, zeigen die Versuche von Wertheim und Kundt; ersterer findet aus Pfeifentönen schon bei einem Durchmesser von 40 Mm. die Geschwindigkeit des Schalls in der Luft gleich 332,1 M. und Kundt erhielt für einen Ton von etwa 2770 Schwingungen schon die gleiche Wellenlänge von 1,2 Decim. in Röhren von 26 Mm. und 55 Mm. Durchmesser.

Die Versuche von Seebeck und Schneebeli bestätigten, dass bei gleicher Tonhöhe in engen Röhren die Verminderung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit dem Durchmesser der Röhre umgekehrt proportional sei und Schneebeli benutzte deshalb gleichzeitig seine Versuche, um die Geschwindigkeit des Schalls in freier Luft zu berechnen. Wie das möglich ist, ergibt sich leicht. Ist c die Geschwindigkeit des Schalles in freier Luft, c_1 in einer Röhre vom Durchmesser d_1, ferner c_2 in einer Röhre vom Durchmesser d_2 und a eine Constante, welche bei Benutzung derselben Tonhöhe für alle Röhren denselben Werth hat, so ist

$$c_1 = c - \frac{a}{d_1} \qquad c_2 = c - \frac{a}{d_2} \qquad c = \frac{c_1 d_1 - c_2 d_2}{d_2 - d_1}.$$

In dieser Weise erhielt Schneebeli als Mittel aus allen seinen Versuchen für c den Werth 332,06.

Wenn nun auch die Bestimmung des absoluten Werthes der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalls in Pfeifen und Röhren durch den Einfluss der Röhrenwände etwas unsicher ist, so hat das auf die Bestimmung des Verhältnisses der Fortpflanzungsgeschwindigkeit in den verschiedenen Gasen keinen Einfluss. Da man nun Röhren von kleinern Dimensionen viel leichter mit reinen Gasen füllen kann, auch Pfeifen, indem man sie in passende Behälter legt, mit reinen Gasen anblasen kann, so sind die Verhältnisse der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in verschiedenen Gasen durch eines der zuletzt beschriebenen Verfahren viel sicherer zu erhalten.

Im Folgenden sind die von Regnault aus den vorhin erwähnten Versuchen und von Dulong aus der Beobachtung von Pfeifentönen abgeleiteten Verhältnisse der Geschwindigkeiten mitgetheilt und gleichzeitig die Dichtigkeiten der Gase und die aus den Versuchen von Dulong sich ergebenden Werthe von k.

Nach der Gleichung für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in Gasen ist nämlich

$$c = \sqrt{\frac{p g k}{s}(1 + 0{,}00367\, t)}.$$

Ist nun die Dichtigkeit eines Gases bezogen auf Luft gleich δ und k' der Werth, den k für dieses Gas annimmt, so wird, wenn wir die Geschwindigkeit des Schalles in Luft mit C bezeichnen,

$$c = C\sqrt{\frac{k'}{\delta k}}; \quad k' = \left(\frac{c}{C}\right)^2 \delta k.$$

Durch Multiplication der Geschwindigkeitsverhältnisse mit dem für Luft gefundenen Werthe erhält man die Geschwindigkeiten in den andern Gasen.

Name des Gases	Geschwindigkeit des Schalles nach		δ	k
	Regnault	Dulong		
Luft	1	1	1	1,401
Sauerstoff	—	0,9524	1,1026	1,398
Wasserstoff	3,801	3,8123	0,0692	1,409
Kohlensäure	0,8009	0,7856	1,5290	1,324
Stickoxydul	0,8007	0,7865	1,5241	1,321
Ammoniak	1,2279	—	0,5894	—
Kohlenoxyd	—	1,0132	0,9740	1,405

Die letzte Columne zeigt, dass die Werthe von k keineswegs für alle Gase dieselben sind.

§. 112.

Geschwindigkeit des Schalles in festen Körpern. Wenn der Schall auf seinem Wege feste Körper trifft, so breitet er sich in denselben in Form von logitudinalen Schwingungen fort, da er in solchen in den festen Körper eintritt. Für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit longitudinaler Wellen erhielten wir den Ausdruck

$$c = \sqrt{\frac{Eg}{s}},$$

worin E den Elasticitätscoefficienten und s das specifische Gewicht des festen Körpers bedeutet.

Direkte Messungen der Schallgeschwindigkeit in festen Körpern sind nur einmal von Biot für Gusseisen durchgeführt, und zwar an zusammengesetzten Röhren von 951,25 Meter Länge. An das eine Ende der Röhren war eine Glocke angebracht und metallisch mit der Röhre verbunden. Wurde durch Schlagen auf die Glocke ein Klang erzeugt, so pflanzte sich derselbe in der Röhrenleitung bis zum andern Ende fort. Ein Beobachter an dem andern Ende der Röhrenleitung hörte dann den Klang der Glocke zweimal, einmal den durch die Röhren fortgeleiteten und dann den durch die Luft zu dem Beobachtungsort fortgepflanzten. Bestimmt man nun die Zeitdifferenz zwischen der Wahrnehmung dieser beiden Klänge, so ergibt sich daraus unmittelbar die Geschwindigkeit im Eisen, wenn die in Luft bekannt ist. Die Beobachtung ergab diese Differenz zu 2,6 Secunden. Ist nun die Geschwindigkeit in Luft c, im Eisen c_1, so wird

$$\frac{951{,}25}{c} - \frac{951{,}25}{c_1} = 2{,}6; \quad c_1 = \frac{951{,}25 \,.\, c}{951{,}25 - 2{,}6\, c} = 10{,}8 \,.\, c$$

oder 3585 M., wenn c rund gleich 332 gesetzt wird.

Sehr viel leichter lässt sich die Fortpflanzungsgeschwindigkeit aus dem Longitudinalton von Stäben bekannter Länge bestimmen. Für den Grundton erhielten wir die Schwingungszahl N ausgedrückt durch die Geschwindigkeit c und Stablänge l eines an beiden Enden freien Stabes

$$N = \frac{c}{2l}; \quad c = 2lN.$$

Eine Vergleichung der Geschwindigkeit des Schalls in den Stäben und der Luft gibt direkt die Methode von Kundt. Ist dort l die Länge

des Stabes, welcher zur Tonerzeugung gebraucht wird und N die Schwingungszahl des gehörten Tones, so ist wie eben

$$c = 2\,l N.$$

Ist nun l_1 die Länge der in der Luft des Rohrs gebildeten stehenden Wellen und c_1 die Geschwindigkeit des Schalles in Luft, so ist

$$c_1 = 2\,l_1 N; \quad \frac{c}{c_1} = \frac{l}{l_1}.$$

Das Verhältniss zwischen den Fortpflanzungsgeschwindigkeiten des Schalls im Stabe und in der Luft ist gleich dem Quotienten aus der Stablänge und der Länge der stehenden Wellen in der Luft.

Die Beobachtungen von Wertheim aus den Longitudinaltönen der Stäbe und ebenso die Beobachtungen von Kundt ergeben für die Schallgeschwindigkeit Werthe, welche mit der Theorie sehr gut übereinstimmen, wie unter andern folgende von Wertheim erhaltene Zahlen zeigen. Die als berechnet angegebenen Zahlen sind mit den von Wertheim aus Verlängerungsversuchen gefundenen unter E angegebenen Elasticitätscoefficienten berechnet.

Metall-gezogene Drähte	Geschwindigkeit in Luft = 1			
	beob.	ber.	E	s
Blei	4,257	3,787	1803	11,16
Gold	6,424	6,247	8131,5	18,51
Silber	8,057	7,940	7357,7	10,36
Kupfer	11,167	11,128	12449	8,93
Gussstahl	15,108	15,003	19549	7,71.

Obige Versuche sowohl, wie die bisher entwickelte Gleichung liefern uns, wenn wir in dieselbe den Elasticitätscoefficienten einsetzen, wie er durch Ausdehnungsversuche an Stäben erhalten ist, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in Stäben. Wertheim hat nun darauf aufmerksam gemacht, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in einem räumlich ausgedehnten festen Körper eine grössere sein müsse. Bei einem Stabe ist die einer Verkürzung δ entsprechende elastische Kraft p

$$p = E\,\delta;$$

bei dieser Verkürzung tritt aber, wie wir wissen, gleichzeitig eine Vergrösserung der Querdimensionen ein. Würde nun durch einen Druck auf die Seitenwände des Stabes die Vergrösserung der Querdimensionen verhindert, so würde derselbe Druck p nicht dieselbe Verkürzung δ hervorbringen können, da das bei freien Seitenwandungen stattfindende seitliche Ausweichen der Moleküle nicht eintreten kann. Zu der gleichen Verkürzung δ müsste somit eine grössere Kraft p' angewandt werden, oder die einer Verkürzung δ entsprechende in der Richtung der Verkürzung wirkende elastische Kraft wäre

$$p' = E_1\,\delta,$$

worin der jetzt eintretende Elasticitätscoefficient $E_1 > E$ sein muss. Der so definirte Elasticitätscoefficient E_1 muss nun als Maass der Elasticität bei longitudinalen Schwingungen in einem räumlich ausgedehnten festen

Körper eingesetzt werden. Denn da ein im Innern des festen Körpers gedachter Cylinder rings von derselben Masse umgeben ist, so kann bei Verkürzungen oder Verlängerungen parallel der Cylinderaxe keine seitliche Ausweichung der Moleküle stattfinden. Die bei den longitudinalen Schwingungen stattfindenden Verkürzungen und Verlängerungen geschehen also unter den eben betrachteten Umständen, somit ist das Maass der bei diesen Schwingungen geweckten elastischen Kraft die Grösse E_1.

Das Verhältniss dieses Elasticitätscoefficienten zu demjenigen von E können wir ganz in derselben Weise erhalten, wie wir §. 31 das Verhältniss des cubischen Compressionscoefficienten zum linearen bestimmten; wir haben nur den Compressionscoefficienten unter diesen Umständen zu bestimmen. Wir denken uns zu dem Zwecke ein Parallelepiped von der Länge L, Breite B und Dicke D. Parallel der Längsrichtung wirke auf die Flächeneinheit die Einheit des Druckes und parallel jeder der beiden andern Richtungen ein solcher Bruchtheil a der Druckeinheit, dass diese beiden Dimensionen nicht geändert werden. Ist dann C der lineare Compressionscoefficient in der bisher immer gebrauchten Bedeutung, so dass

$$C = \frac{1}{E}$$

und ist μ der Coefficient der Quercontraction in der §. 31 angegebenen Bedeutung, so werden durch den Druck parallel L

die Länge L	die Breite B	die Dicke D
$L(1 - C)$	$B(1 + \mu C)$	$D(1 + \mu C)$

durch den Druck a pro Flächeneinheit nach B und D wird

die Länge L	die Breite B	die Dicke D
$L(1 + a\mu C)$	$B(1 - aC)$	$D(1 + a\mu C)$
$L(1 + a\mu C)$	$B(1 + a\mu C)$	$D(1 - aC)$.

Damit wird durch das gleichzeitige Wirken der Drucke

$$L\left(1 - (1 - 2a\mu)\, C\right)$$

und Breite und Dicke werden

$$B\left(1 - (a - \mu - a\mu)\, C\right) \qquad D\left(1 - (a - \mu - a\mu)\, C\right).$$

Hierin ist a so zu bestimmen, dass Breite und Dicke ungeändert bleiben, somit muss

$$a - \mu - a\mu = 0 \qquad a = \frac{\mu}{1 - \mu}.$$

Damit wird die Länge

$$L_1 = L\left(1 - \frac{1 - \mu - 2\mu^2}{1 - \mu}\, C\right),$$

somit der Compressionscoefficient

$$\frac{L - L_1}{L} = C_1 = \frac{1 - \mu - 2\mu^2}{1 - \mu}\, C$$

oder

$$\frac{1}{C_1} = E_1 = \frac{1 - \mu}{1 - \mu - 2\mu^2}\, E.$$

Da nun in der Gleichung für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in räumlich ausgedehnten Körpern an Stelle von E der Werth E_1 tritt, so wird

$$c_1 = \sqrt{\frac{g E_1}{s}} = \sqrt{\frac{g E}{s} \cdot \frac{1 - \mu}{1 - \mu - 2\mu^2}}.$$

Wir sahen, dass μ annähernd $\frac{1}{3}$ ist; setzen wir den Werth, welchen nach §. 31 Wertheim als allgemein gültig ansieht, ein, so wird

$$c_1 = \sqrt{\frac{g E}{s} \cdot \frac{3}{2}} = c \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}$$

oder in räumlich ausgedehnten festen Körpern würde die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\sqrt{\frac{3}{2}}$ mal grösser sein als in Stäben. Eine experimentelle Prüfung dieses theoretischen Resultates ist mit grossen Schwierigkeiten verknüpft; bisher ist eine solche nicht versucht worden.

§. 113.

Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in Flüssigkeiten. Auch in den Flüssigkeiten muss die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles mit jener der longitudinalen Wellen übereinstimmen. Wir erhielten für dieselbe §. 88, wenn $\varkappa$ der dem Drucke p entsprechende Compressionscoefficient ist,

$$c = \sqrt{\frac{p g}{\varkappa s}},$$

und mit den §. 39 für den Druck p einer Atmosphäre bestimmten Compressionscoefficienten für Wasser von 4^0

$$c = \sqrt{205 \frac{g}{s}} = \sqrt{205 \frac{9{,}81}{0{,}001}} = 1425 \text{ Meter}.$$

Dieses Resultat ist durch direkte Messung der Schallgeschwindigkeit im Genfer See von Colladon und Sturm bestätigt worden. Zwei Schiffe wurden in einer gemessenen Entfernung von einander festgelegt. Das eine trug eine in das Wasser hinabgelassene Glocke, welche durch einen Hammer angeschlagen werden konnte, der durch einen im Schiff angebrachten Hebel bewegt wurde. Der Hebel trug gleichzeitig eine Lunte, die in dem Momente des Anschlags eine Quantität Pulver entzündete. Von dem andern Schiff war ein Hörrohr ins Wasser gesenkt, an dessen aus dem Wasser hervorragendes Ende der Beobachter sein Ohr legte. Aus der gemessenen Entfernung der beiden Schiffe und der Zeit, die zwischen der Wahrnehmung des Lichtblitzes und des Glockenklanges verstrich, ergab sich bei der Temperatur $8{,}^01$ C. der Werth

$$c = 1435 \text{ M}.$$

Setzt man für 8^0 nach Versuchen von Grassi den dem Druck einer Atmosphäre entsprechenden Compressionscoefficienten $\varkappa = 0{,}0000490$ und das specifische Gewicht des Wassers 0,999886, so wird der theoretische Werth von $c = 1431{,}2$, eine Zahl, die von der beobachteten nur etwa 0,25 Procent abweicht.

Andere direkte Beobachtungen über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in Flüssigkeiten sind nicht vorhanden; dagegen hat

Wertheim versucht, durch die Töne von offenen Pfeifen, die mit Flüssigkeiten gefüllt und durch Flüssigkeiten angeblasen wurden, die Geschwindigkeit des Schalles zu messen. Die Pfeifen waren von Metall und wurden in einen mit der betreffenden Flüssigkeit gefüllten Kasten gelegt. Durch eine continuirlich wirkende Pumpe wurde dann die Flüssigkeit gerade wie bei dem Anblasen mit Luft an dem Mundstücke der Pfeife, das zu dem Zwecke sehr sorgfältig construirt, und dessen obere Lippe eine bestimmte durch Versuche aufgefundene Stellung haben muss, vorübergeführt. Die Pfeifen sprachen dann gut an und gaben die von der Theorie verlangte Reihe der harmonischen Töne. Um die den gehörten Pfeifentönen entsprechende Länge der Welle, welche für den Grundton nach der einfachen Theorie gleich der doppelten Länge der Pfeife ist, abzuleiten, musste die an der Pfeifenlänge anzubringende Correction bestimmt werden. Das geschah wie bei den im §. 112 erwähnten Versuchen auf Grund der Erfahrung, dass die Correction von der Länge der Pfeife unabhängig ist, indem man die Pfeife durch Ansatzstücke verlängerte und die Töne dann in verschieden langen Pfeifen beobachtete. Die Versuche in der §. 112 besprochenen Weise combinirt geben dann die Correction. Ist die so corrigirte Pfeifenlänge l, die Schwingungszahl des gehörten Tones N, so ist

$$c_1 = 2\, l\, N.$$

Die aus diesen Versuchen sich ergebenden Werthe von c_1 waren aber stets viel kleiner als die theoretisch berechneten; so ergab sich für Wasser als Mittel aus vielen Versuchen für c_1 der Werth 1173,4 M. bei 15^0 C., während die Theorie gibt 1457,8 M. Die aus den Versuchen sich ergebende Geschwindigkeit ist somit nur 0,805 der theoretischen. Da nun das Quadrat von 0,805 gleich 0,648, also sehr nahe gleich $^2/_3$ ist, so nimmt Wertheim an, dass in der That die aus den Pfeifentönen sich ergebende Geschwindigkeit

$$c_1 = c\sqrt{^2/_3}$$

sei, dass also zwischen dieser und der Geschwindigkeit in einer ausgedehnten Flüssigkeit dieselbe Beziehung bestehe, wie zwischen der Geschwindigkeit des Schalls in einem festen Stabe und in einer ausgedehnten Masse eines festen Körpers. Eine Bestätigung dieser Annahme erhielt Wertheim bei der Untersuchung der mit andern Flüssigkeiten erhaltenen Töne, aus welcher er unter dieser Voraussetzung die Compressionscoefficienten $\varkappa$ für den Druck einer Atmosphäre berechnete. Es wird nämlich aus

$$c_1 = \sqrt{^2/_3 \cdot \frac{p g}{\varkappa s}} \qquad \varkappa = \frac{1}{c_1^{\,2}} \cdot \frac{2 p g}{3 s}.$$

Eine Vergleichung der so gefundenen Zahlen mit den von Grassi direkt beobachteten zeigt eine gute Uebereinstimmung, wie unter andern folgende Zahlen zeigen.

	Temp.	$\varkappa$ beob. nach Grassi	$\varkappa$ ber. nach Wertheim
Wasser	15^0	0,0000472	0,0000491
Aethyläther	0^0	0,0001110	0,0001002
Aethylalkohol	23^0	0,0000991	0,0000947

Wie man sieht, sind die Unterschiede nicht sehr gross.

Wertheim macht zur Erklärung dieser Erscheinung die Annahme, dass gegenüber den longitudinalen Schallschwingungen sich die Flüssigkeiten wie die festen Körper verhalten, die in den Pfeifen schwingende Säule also wie ein schwingender Stab. Diese Erklärung ist aber abgesehen von innern Gründen, die sie als unzulässig erscheinen lassen, schon deshalb unhaltbar, weil die in festen Wänden eingeschlossene Flüssigkeitssäule nicht mit einem festen Stabe zu vergleichen ist. Man wird eher annehmen müssen, dass bei den Flüssigkeiten die einfache Theorie der Pfeifentöne noch weniger ausreicht als bei Gasen. Weitere Versuche müssen diese Frage noch aufklären.

§. 114.

Reflexion des Schalles. Eine an der Grenze zweier Punktsysteme ankommende Wellenbewegung wird, wie wir sahen, so reflectirt, als befände sich der Ausgangspunkt der reflectirten Welle ebenso weit normal hinter der Grenze, wie der Ausgangspunkt der ankommenden Welle sich vor derselben befindet; oder nach der andern Form des damals abgeleiteten Gesetzes, dass der Strahl der zurückgeworfenen Welle mit dem Einfallslothe in der Einfallsebene denselben Winkel bildet, wie der Strahl der einfallenden Welle.

Dass der Schall diesen Reflexionsgesetzen folgt, zeigt die bekannte Erscheinung des Echo. Steht man in einiger Entfernung vor einer festen Wand und ruft gegen dieselbe, so hört man den Ton als Echo zurückkehren, nur wenn eine von dem Rufenden auf die Ebene der Wand gezogene Senkrechte die feste Wand trifft. Ist letzteres nicht der Fall, so kehrt der Schall nach andern Richtungen zurück, und jeder, der so steht, dass eine von ihm zu irgend einem Punkte der Wand gezogene Linie mit dem Einfallslothe denselben Winkel bildet, wie die von dem Rufenden zu demselben Punkte gezogene Linie, hört das Echo.

Damit man das Echo deutlich hört, muss man so weit von der Wand entfernt sein, dass man den rückkehrenden Schall von dem hingesandten unterscheiden kann. Man kann das, wenn zwischen beiden mindestens ein Zwischenraum von 0,1 Secunde. Da nun der Schall in der Luft bei gewöhnlicher Temperatur in der Secunde etwa 340 Meter durchläuft, so ist zur Wahrnehmung des Echos mindestens ein Abstand von 17 Metern erforderlich. In grössern Abständen wird es noch deutlicher unterschieden, und man kann je nach dem Abstande eine grössere Zahl nach einander erzeugter Schalle, etwa mehrere Silben zurückkommen hören.

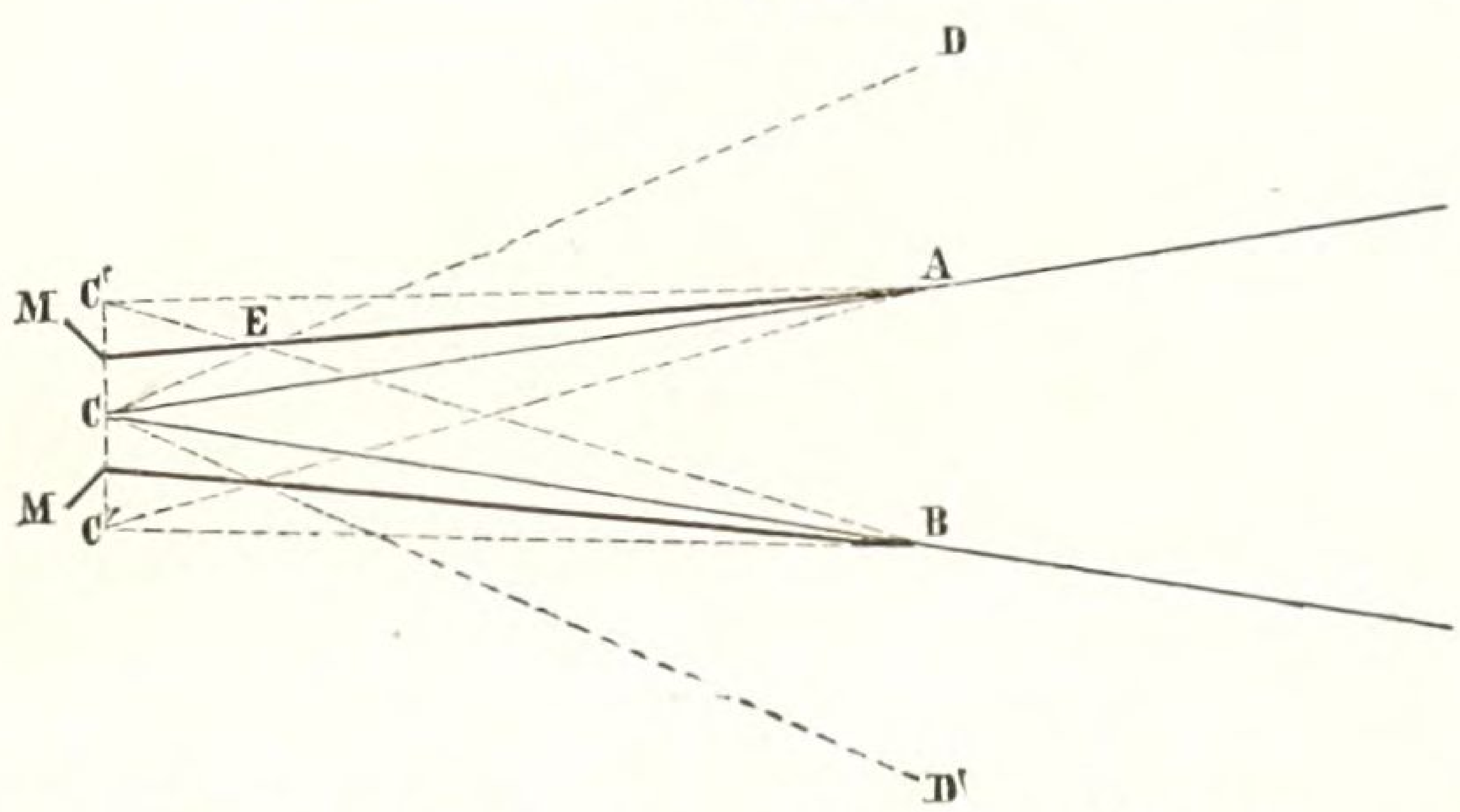
Dass die Gesetze der Reflexion auch für krumme Flächen gelten, zeigt die bekannte Erscheinung in einem elliptischen Gewölbe, dass der in dem einen Brennpunkte erregte Schall in dem andern Brennpunkte fast ungeschwächt wahrgenommen wird.

Eine Folge der Reflexion des Schalles ist das Verhallen der Töne in grossen rings begrenzten Räumen und die daraus folgende Undeutlichkeit einer geordneten Reihe von Tönen, z. B. einer Rede. Das gesprochene Wort wird von den entfernten Wänden zurückgeworfen, so dass der reflectirte Schall zum Theil noch mit dem direkten, zum Theil mit dem folgenden Worte zusammenfällt und dadurch dieses undeutlich macht. Alles

was den reflectirten Schall stört, vermindert das Hallen, so das Füllen des Raumes mit Menschen, an denen der reflectirte Schall vielfach getheilt und hin und her reflectirt wird, so eine vielfache Durchbrechung der Wandflächen wie durch die Logen eines Theaters. Eine Verminderung des Hallens, aber gleichzeitig eine Schwächung des Klanges tritt auch ein, wenn man die Wände des Raumes mit weichen Stoffen bekleidet, welche die Schallschwingungen aufnehmen.

Eine vielfach gebrauchte Anwendung des Reflexionsgesetzes ist das Sprachrohr, das den Zweck hat, Rufe in Entfernungen noch wahrnehmbar zu machen, in denen bei ungehinderter Verbreitung des Schalles die menschliche Stimme nicht mehr wahrnehmbar ist. Die einfachste Form desselben ist ein konisches Rohr von Holz oder Metall, welches mit einem Mundstücke *MM* Fig. 142 versehen ist. Man legt den Mund in die Mundöffnung und ruft in das Rohr hinein, während dessen Axe dorthin gerichtet ist, wohin man den Ruf senden will. Die Wirkung des Rohres ist an der Figur zu erkennen. Die bei *C* in der Mundöffnung ausgehenden Schwingungen, welche sich innerhalb des Kegels *DCD* verbreiten würden, werden durch einmalige Reflexion in den Raum *BCA* concentrirt, Schwingungen, welche noch näher bei *M* die Wand treffen, können durch mehrmalige Reflexion in dieselbe Richtung gesandt werden. Nach der Richtung der Rohraxe pflanzt sich somit eine viel grössere Menge von Schwingungen fort als ohne Rohr.

Fig. 142.



§. 115.

Uebergang des Schalles in andere Mittel; Resonanz. Kommt eine schwingende Bewegung an der Grenze zweier Punktsysteme an, so geht ein Theil derselben in das zweite System über, und die Bewegung pflanzt sich, wenn die Richtung des Ankommens nicht normal zur Grenzfläche war, im zweiten Mittel nach einer andern Richtung fort als im ersten. Wir sahen im §. 84, dass die Fortpflanzungsrichtung im zweiten Medium mit derjenigen im ersten Medium und dem Einfallslothe in derselben Ebene liegt, und dass der Sinus des Brechungswinkels zu demjenigen des Einfallswinkels sich verhält wie die Fortpflanzungsgeschwindigkeit im zweiten Mittel zu derjenigen im ersten Mittel.

Einige Versuche von Hajech haben gezeigt, dass beim Uebergange des Schalls aus einem in ein zweites Medium diese Gesetze sich bestätigen. Es wurde eine Röhre von 77 Mm. Durchmesser durch die zwei Räume trennende Wand geführt, deren Enden durch Membranen geschlossen waren. In dem einen Raume konnte die Röhre durch ein Ansatzstück verlängert werden, das in einer Büchse endigte, in welcher ein tönender Körper, etwa eine kleine Glocke mit Schlagwerk eingeschlossen war. Der Beobachter

war in dem zweiten Raume, auf dessen Fussboden ein Kreis gezogen war, dessen Mittelpunkt sich vertical unter dem Ende der Röhre befand. Die Röhre konnte mit Luft oder einem andern Gase gefüllt werden.

So lange nun beide die Röhre abschliessenden Membranen senkrecht zur Röhrenaxe standen, so dass also der der Axe parallel in der Röhre sich fortpflanzende Schall auch die Membran, durch welche er in den zweiten Raum austrat, normal traf, wurde der Schall nicht abgelenkt, einerlei, ob die Röhre mit Luft oder einem andern Gase gefüllt war. Man hörte immer den Schall am stärksten, wenn man das Ohr in die Verlängerung der Röhrenaxe hielt.

Wurde aber die Membran an dem Röhrenende, welches dem Beobachter zugewandt war, gegen die Röhrenaxe geneigt, so dass der in der Röhre sich parallel der Axe fortpflanzende Schall nicht mehr in normaler Richtung auf diese Membran traf, so trat eine Ablenkung des Schalls beim Austritt aus der Röhre ein, sobald sich in der Röhre ein anderes Gas als Luft befand. Die Austrittsrichtung wurde dadurch bestimmt, dass der Beobachter auf dem Kreisbogen gehend die Stelle aufsuchte, wo das Ohr den Klang am deutlichsten hörte, und dann vom Ohre ein Loth auf den Boden herabliess. Man erhielt so unmittelbar den Winkel, den die Austrittsrichtung mit der Röhrenaxe bildete, und da man den Winkel kannte, den die Normale der Membran mit der Röhrenaxe bildete, auch den Winkel, den die Austrittsrichtung mit der Normalen bildete, somit den Brechungswinkel, während der Einfallswinkel immer gleich dem ist, welchen die Röhrenaxe mit der Normalen der Membran bildet. Ist nun c die Geschwindigkeit des Schalles in dem Gase, das die Röhre füllte, c' die Geschwindigkeit in der Luft, i der Einfallswinkel, i' der Brechungswinkel, so ist letzterer gegeben durch

$$\sin i' = \frac{c'}{c} \sin i.$$

Dass in der That die Beobachtungen mit der Theorie gut übereinstimmen, zeigen unter andern folgende Zahlen

Substanz in der Röhre	Einfallswinkel	Brechungswinkel beob.	Brechungswinkel ber.
Wasserstoff	$35^0\ 50'$	8^0	$8^0\ 50'$
„	25	7^0	$6^0\ 22$
Kohlensäure	$35^0\ 50'$	$49^0\ 50'$	$48^0\ 19'$
„	25^0	$33^0\ 20$	$32^0\ 33'$
Wasser	$35^0\ 50'$	$7^0\ 40$	$7^0\ 58$
„	25^0	$5^0\ 40$	$5^0\ 37.$

Wenn eine schwingende Bewegung nach dem Eintritt in ein zweites Medium an der Grenze desselben ankommt, so wird sie zum Theil reflectirt; die so reflectirte setzt sich dann mit der im zweiten Mittel direkt sich fortpflanzenden zu stehenden Schwingungen zusammen, von der gleichen Schwingungsdauer wie die eintretenden Wellen. Es entsteht so die Erscheinung des Mittönens oder der Resonanz.

Von diesem Mittönen kann man sich durch die mannigfachsten Versuche überzeugen, von denen wir schon mehrere bei Besprechung der Analyse des Klanges kennen gelernt haben; wir sahen, wie Membranen

und Resonatoren durch diejenigen Töne, für welche sie abgestimmt sind, zum Tönen kommen. Ebenso kommen gespannte Saiten durch gleichgestimmte Stimmgabeln oder andere Klänge zum Mitschwingen.

Ein kräftiges Mitschwingen oder Mittönen kann nur eintreten, wenn der ankommende Ton ein Ton ist, den auch der mitschwingende Körper, für sich zum Tönen gebracht, geben kann, denn nur dann können sich in demselben stehende Wellen entwickeln. In der Beziehung besteht nun aber ein grosser Unterschied, je nachdem der mittönende Körper die durch einmaligen Anstoss erregten Schwingungen lange behält oder nicht. Ein schwingender Körper, der seine Bewegungen lange beibehält, wie etwa eine Stimmgabel oder überhaupt ein tönender starrer elastischer Körper, wird nur dann zum Mittönen kommen, wenn der ankommende Ton genau der Eigenton des Körpers ist, denn schon bei einer kleinen Verstimmung des ankommenden Tones müssen die ankommenden Schwingungen und die Eigenschwingungen sich stören, da sie immer anderer Phase werden. Wenn dagegen der mittönende Körper die ihm durch einen einmaligen Anstoss ertheilte Bewegung sehr rasch verliert, so kann auch ein von dem Eigenton verschiedener den Körper in kräftige Schwingungen versetzen. Denn in dem Falle wird jeder neue Anstoss dem Körper eine Bewegung ertheilen, wenn auch die ankommende in anderer Phase ist als jene, die durch den vorigen Anstoss dem Körper gegeben war, weil von der letztern bei Ankunft des zweiten Stosses in dem Körper nur mehr ein sehr geringer Rest vorhanden ist.

Man kann diese Schlüsse leicht experimentell bestätigen. Das Extrem nach der einen Seite bilden gut gearbeitete lange tönende Stimmgabeln; nimmt man zwei gleich gestimmte Gabeln, so wird dadurch, dass man die eine tönen lässt, die andere sehr kräftig zum Tönen gebracht. Verstimmt man die eine durch Aufkleben von wenig Wachs, so dass sie vielleicht zwei Schwingungen in der Secunde weniger macht, so kommt die zweite schon nicht mehr zum Tönen. Das andere Extrem zeigen etwa die feinen Membranen der König'schen Flammenkapseln, welche kaum einen Eigenton haben, bei denen jeder Stoss nur eine Schwingung erzeugt. Eine solche Membran nimmt deshalb, wie wir sahen, jede an sie herankommende Schwingung an.

Zwischen diesen Extremen gibt es alle möglichen Mittelstufen; Helmholtz hat diese Frage genauer studirt und gelangte dabei zu folgenden Resultaten. Nennen wir die Stärke des Tones eins, welche durch genauen Einklang in einem mittönenden Körper erregt wird, so wird durch einen um $\frac{1}{8}$ höhern oder tiefern Ton die Stärke 0,1 erregt, wenn der Eigenton des Körpers nach 38 Schwingungen auf 0,1 seiner Stärke herabgeht. Ganz die gleiche Stärke des Mitschwingens tritt ein durch Töne, welche verschieden sind um

$\frac{1}{4}$ Ton,	wenn die Intensität des Eigentons nach	19	Schwingungen
$\frac{1}{2}$ „	„ „ „ „ „ „	9,5	„
1 „	„ „ „ „ „ „	4,75	„
kleine Terz	„ „ „ „ „ „	3,17	„
grosse Terz	„ „ „ „ „ „	2,37	„

auf 0,1 der etwa durch einen Anstoss erregten anfänglichen Tonstärke

herabgesunken ist. Diese Resultate bestätigen die bei Besprechung der Vocale gemachte Bemerkung, dass auch die den Eigentönen der Mundhöhle nahen Obertöne der Vocalklänge verstärkt werden können, denn die Luft der Mundhöhle verliert wegen der weichen Wände sehr schnell die in ihr erregten Schwingungen.

Die Resonanz in starren elastischen Körpern, welche bei Angabe eines Tones, der mit einem in dem Körper als Eigenton vorhandenen übereinstimmt, eine sehr kräftige ist, wird in der Musik benutzt, um an sich schwachen Tönen eine grosse Stärke zu verleihen. Eine Saite einfach in einen Schraubstock von Blei eingespannt, oder eine Stimmgabel mit der Hand in der Luft gehalten, gibt einen kaum hörbaren Ton. Spannt man die Saite auf eine Platte oder einen Kasten von elastischem Holz, verbindet sie ausserdem durch elastische Stege mit demselben, so wird durch die Resonanz der Ton kräftig.

Deshalb hängt bei allen Saiteninstrumenten, der Geige, dem Cello, dem Klavier, die Kraft und Fülle des Tones so wesentlich von der Güte des Resonanzbodens ab. Nur dann, wenn der Resonanzboden alle in der gestrichenen oder geschlagenen Saite vorhandenen Töne gleichmässig verstärkt, können die Klänge dieser Instrumente voll ausgebildet werden.

Diese tonverstärkende Wirkung der mitschwingenden Platten erklärt sich einfach aus den Gesetzen der Mechanik; die schwingenden Saiten oder Gabeln setzen direkt nur wenige Lufttheilchen in Bewegung und nur die lebendige Kraft dieser wenigen Theilchen ist es, die sich verbreitet. Werden dagegen die ausgedehnten Flächen des Resonanzbodens mit in isochrone Schwingungen versetzt, so wird eine viel grössere Luftmasse direkt in Bewegung versetzt, es ist also ein weit grösserer Vorrath von Bewegung vorhanden, der sich ausbreitet. Da indessen der schwingenden Saite nur eine gewisse lebendige Kraft ertheilt ist, die durch Anbringen des Resonanzbodens nicht vermehrt werden kann, so ist die Verstärkung des Tones nur eine andere Verwerthung dieser lebendigen Kraft; was der Ton an Stärke gewinnt, verliert er an Dauer.

§. 116.

Das Ohr. Durch die Mittheilung der schwingenden Bewegung der Luft an die Gehirnnerven mittels der elastischen Theile unseres Ohres kommt uns der Schall zur Wahrnehmung.

Das Gehörorgan des Menschen umfasst drei Hohlräume, welche zum grössten Theil in dem festen Knochen des Schläfenbeines eingeschlossen sind, das äussere, mittlere und innere Ohr; die beiden ersten Hohlräume sind mit Luft, das innere Ohr ist mit Wasser gefüllt.

Zum äussern Ohr gehört die Ohrmuschel und der Gehörgang, zum mittlern die Paukenhöhle und die Ohrtrompete oder tuba Eustachii, zum Innern die Schnecke, der Vorhof und das Labyrinth.

Der äussere Gehörgang *a* Fig. 143 ist durch das Trommelfell *b*, welches in seinem ganzen Umfange am Knochen angeheftet ist, von der Paukenhöhle *c* getrennt; diese verengert sich weiterhin zur Ohrtrompete *d*, welche in der Nasenhöhle mündet. Die Höhlung des innern Ohrs, von der Fig. 144 einen Abguss in natürlicher Grösse darstellt, liegt in dem Knochen, der die hintere Wand der Paukenhöhle bildet. Zwischen dem innern Ohr und

dem Trommelfell befindet sich in der Paukenhöhle die Reihe der Gehörknöchelchen. Der Hammer, malleus, *c* ist mit seinem langen Fortsatz, dem Stiel im Centrum des Trommelfells, ferner in einer Linie von da zu dem

Fig. 143.

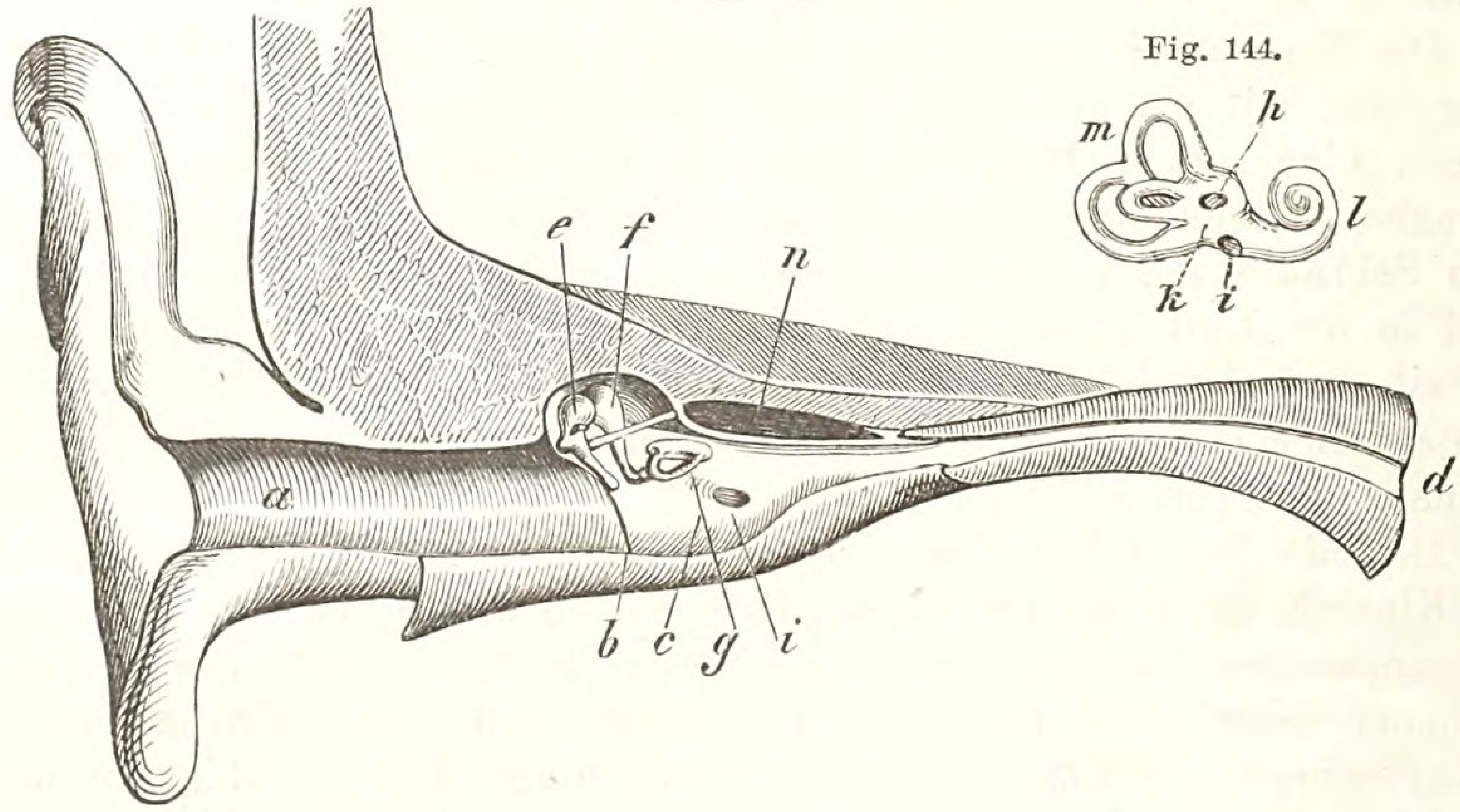


Fig. 144.

obern Ansatzrande hinauf und nahe dem letztern noch einmal mit seinem kurzen Fortsatze an dem Trommelfell angeheftet. Ausserdem ist er noch durch einen kurzen Ansatz, der gerade nach vorn über dem Rande des Trommelfells hin liegt (und deshalb in der Figur abgeschnitten ist), an der Knochenwand der Paukenhöhle angeheftet.

Sein Kopf, der den obern Rand des Trommelfells überragt, steht durch ein Gelenk mit dem zweiten Knochen, dem Ambos (incus), *f*, in Verbindung. Der Ambos ist ausserdem mit einem kurzen (in der Figur hinter dem Hammer liegenden) Fortsatz an der hintern Wand der Paukenhöhle angestützt.

Vom Ambos geht ein langer Fortsatz parallel dem Stiele des Hammers nach unten; an seinem Ende ist der dritte Knochen, der Steigbügel *g* befestigt, der horizontal nach hinten liegt. Die Platte, in der seine beiden Leisten zusammenstossen, der Fusstritt, ist an ihrem Rande herum häutig mit dem Rande des ovalen Fensters *h* (Fig. 144) verbunden, welches in der Mitte der hintern Wand der Paukenhöhle in die Höhle des innern Ohres führt.

Das innere Ohr steht durch dieses ovale, von der Steigbügelplatte bedeckte Fenster und durch das unterhalb desselben liegende, mit einer feinen Membran geschlossene runde Fenster *i* mit der Paukenhöhle in Verbindung. Das ovale Fenster führt zu dem mittlern Theile des innern Ohres, dem Vorhof (vestibulum) *k* Fig. 144, in welchem dem Fenster gerade gegenüber ein Zweig des Gehörnerven einmündet. Vom Vorhof geht nach der einen Seite der spiralig gewundene Gang der Schnecke (cochlea) *l* aus, in welchem sich ebenfalls ein Zweig des Gehörnerven befindet, der dort in einer eigenthümlichen, gleich noch näher zu besprechenden Weise vertheilt ist. Zur Schnecke führt ausserdem von der Paukenhöhle direkt das runde Fenster. Nach der andern Seite gehen von dem Vorhofe die drei halbzirkelförmigen Kanäle *m*, das Labyrinth, in drei

zu einander senkrechten Ebenen gebogen in je zwei Mündungen aus. Auch diese erhalten durch eine Mündung Aeste des Gehörnerven.

In welcher Weise die im Ohre ankommenden Schwingungen dem Gehörnerv übermittelt werden, ist hiernach leicht zu übersehen. Die in das Ohr eindringenden Luftschwingungen theilen sich dem Trommelfelle mit, und durch dieses wird der Stiel des Hammers mit hin und her bewegt. Damit wird auch der Kopf des Hammers, da sich der Hammer um den an den Knochen angehefteten Ansatz drehen kann, ebenfalls hin und her bewegt, und so die Bewegung durch Ambos und Steigbügel zu dem ovalen Fenster und in das, das innere Ohr ausfüllende Wasser fortgeleitet. Andererseits werden die Schwingungen des Trommelfells auch durch die Luft der Paukenhöhle an das runde Fenster und durch dieses direkt der Flüssigkeit der Schnecke mitgetheilt. Die Schwingungen der Flüssigkeit afficiren dann direkt die Endigungen des Gehörnerven.

Auch in den halbzirkelförmigen Kanälen des Labyrinths endigen Zweige des Gehörnerven, auch diese müssen demnach zum Hören beitragen. Es ist nun eine wahrscheinliche Hypothese, dass die durch den Ton erregten Schwingungen der Kopfknochen sich der Flüssigkeit dieser Kanäle mittheilen und dass die dort befindlichen Nervenenden diese Schwingungen aufnehmen.

Durch die von Max Schultze und dem Marchese Corti entdeckte eigenthümliche Einrichtung der Schnecke hat Helmholtz die Fähigkeit des menschlichen Ohres erklären können, die Klänge zu unterscheiden, das heisst in einem Klange die einzelnen Partialtöne zu erkennen. Diese Zerlegung eines Klanges in die einzelnen Töne findet sehr wahrscheinlich in der Schnecke statt. Die Schnecke ist nämlich ihrer ganzen Länge nach durch eine theils knöcherne, theils membranöse Scheidewand in zwei Hälften getheilt, eine obere und eine untere; die eine mündet im Vorhof, die andere läuft gegen die Paukenhöhle aus und ist durch das runde Fenster geschlossen. Der knöcherne Theil der Scheidewand befindet sich an der innern Seite der Windungen, und durch diesen treten die Nervenfasern in die häutige Membran über. Sie endigen dort an den Corti'schen Fasern, membranösen Streifen, welche an jener häutigen Membran, der membrana basilaris, angewachsen und zwischen derselben und einer an der gegenüber liegenden Schneckenwand befindlichen Membran, der Corti'schen Membran, ausgespannt sind. Jeder Corti'schen Faser entspricht ein Nervenende. Die Breite der membrana basilaris ist in ihrem Beginne eine geringe, sie wächst, je mehr sie sich der Kuppel der Schnecke nähert, bis mehr als zum 12fachen. Die Membran selbst besteht aus radialen, sie der Breite nach durchsetzenden Fasern, welche einander parallel und in der angegebenen Weise an Länge wachsend neben einander gelagert sind. Diese einzelnen Fasern sind mit einander durch viel weniger feste Häutchen verbunden. Durch diese eigenthümliche Structur, in Folge deren die Membran in der Richtung der Breite sehr viel stärker gespannt ist als in der Länge, verhält sich dieselbe annähernd so, als wären die Radialfasern ein System gespannter, durch dünne Membranen verbundener Saiten. Die membranöse Verbindung dieser Saiten dient dazu, die schwingende Flüssigkeit der Schnecke an dem freien Durchtritt durch die Saiten zu hindern, und so zu bewirken, dass die Schwingungen der Flüssigkeit sich auf die Membran übertragen.

Die Bewegungen der einzelnen Fasern der Membran mit den an jeder angewachsenen Corti'schen Faser werden deshalb so sein, als wäre jede einzelne unabhängig von der andern; jede folgt für sich den Schwingungen der Flüssigkeit in der Schnecke.

Für diese Fasern nimmt Helmholtz nun an, dass jede für eine bestimmte Schwingungszahl abgestimmt ist. Darnach wird ein in das Ohr eindringender Ton diejenige Stelle der Membran in Schwingung versetzen, an welcher der Eigenton der gespannten und mit den verschiedenen Anhangsgebilden belasteten Radialfaser dem erregenden Tone am nächsten kommt; von da werden sich die Schwingungen in rasch abnehmender Stärke auf die benachbarten Fasern ausbreiten. Die Möglichkeit, dass so kurze Fasern auf die tiefen Töne der Skala abgestimmt sein können, liegt in der Belastung durch die Anhangsgebilde. Durch die Schwingungen werden dann direkt die mit den einzelnen Radialfasern fest verbundenen Corti'schen Fasern und damit die in denselben mündenden Nervenenden bewegt. Es würde somit jeder Ton durch eine bestimmte Nervenfaser zur Empfindung gebracht. Wird nun dem Ohre eine Klangmasse oder ein Accord zugeführt, so werden in demselben alle Nervenfasern erregt, deren Eigenton in der Klangmasse vorhanden ist; da so die Empfindungen der einzelnen Töne örtlich getrennte sind, so muss bei gehöriger Aufmerksamkeit und Uebung das Ohr die einzelnen Töne auch getrennt auffassen können.

Diese Annahme von Helmholtz erklärt auch die grosse Empfindlichkeit des Ohres für geringe Höhenunterschiede, welche bei gehöriger Uebung so weit geht, dass man Töne als verschieden erkennt, deren Schwingungszahlen im Verhältniss 1000 : 1001 stehen. Die Zahl der im Ohre für die einzelnen Töne vorhandenen Fasern beträgt nämlich über 4000, so dass für jede der in der Musik gebrauchten sieben Octaven etwa 600 Fasern vorhanden wären. Damit können innerhalb der Octave noch mehr als 600 Tonstufen unterschieden werden, da ein Ton, der zwischen der Schwingungszahl zweier Corti'scher Fasern liegt, gleichzeitig beide und diejenige stärker erregt, deren Schwingungszahl er am nächsten liegt. Die Empfindlichkeit des Ohres für die Verschiedenheit der Tonhöhe hängt dann nur von der Feinheit ab, mit welcher der Unterschied in der Erregungsstärke zweier benachbarter Fasern wahrgenommen werden kann.

§. 117.

Interferenz des Schalles; Stösse. Wenn sich zwei Schallwellen nach einer und derselben Richtung fortpflanzen, so muss die an einer Stelle, wo die Wellen zusammentreffen, resultirende Bewegung von der Phasendifferenz der Wellen abhängen.

Treffen zwei Schallwellen, von denen wir zunächst annehmen wollen, dass sie gleiche Schwingungsdauer und Wellenlänge haben, ohne Phasendifferenz zusammen, so muss die resultirende Bewegung die Summe der einzelnen Bewegungen sein, der Schall muss verstärkt werden; treffen sie mit der Phasendifferenz einer halben Wellenlänge zusammen, so muss die resultirende Bewegung die Differenz der Theilbewegungen sein, der Schall muss geschwächt werden. Waren beide Bewegungen von gleicher Stärke, so muss dieselbe aufgehoben werden, der eine Schall muss den andern auslöschen.

Dass letzteres in der That der Fall ist, kann man auf die verschiedenste Weise zeigen. Streicht man eine quadratische Klangscheibe an, so dass etwa das diagonale Kreuz entsteht, so sind die durch eine Knotenlinie getrennten Quadranten immer in entgegengesetzter Phase, die in einer Spitze in der Mitte zusammenstossenden gleicher Phase. Führt man eine solche schwingende Scheibe am Ohr vorüber, so verschwindet der Ton jedesmal, wenn das Ohr vor einer Knotenlinie ist, da dann von den neben einander liegenden Quadranten entgegengesetzte Impulse in das Ohr kommen. Hopkins hat diese Interferenz direkt sichtbar gemacht. Man stellt eine Röhre von Pappe oder Holz her, welche unten gabelförmig in zwei Röhren auseinander geht, und welche oben mit einer feinen gespannten Membran geschlossen ist. Bestreut man die Membran mit Sand und hält dann die offenen untern Enden über zwei Quadranten der Scheibe, die in gleicher Phase schwingen, so geräth der Sand in eine lebhafte hüpfende Bewegung, hält man dieselben über zwei in entgegengesetzter Phase schwingende Quadranten, so bleibt der Sand in Ruhe.

Eine andere Methode zum Nachweise dieser Interferenz hat Nörrenberg angegeben, die Quincke in folgende sehr bequeme Form gebracht hat. Zwei *T*förmige Glasröhren CAC_1 und CBC_1 Fig. 145 sind an ihren Enden rechtwinklig umgebogen und bei C durch einen kurzen, bei C_1

Fig. 145.

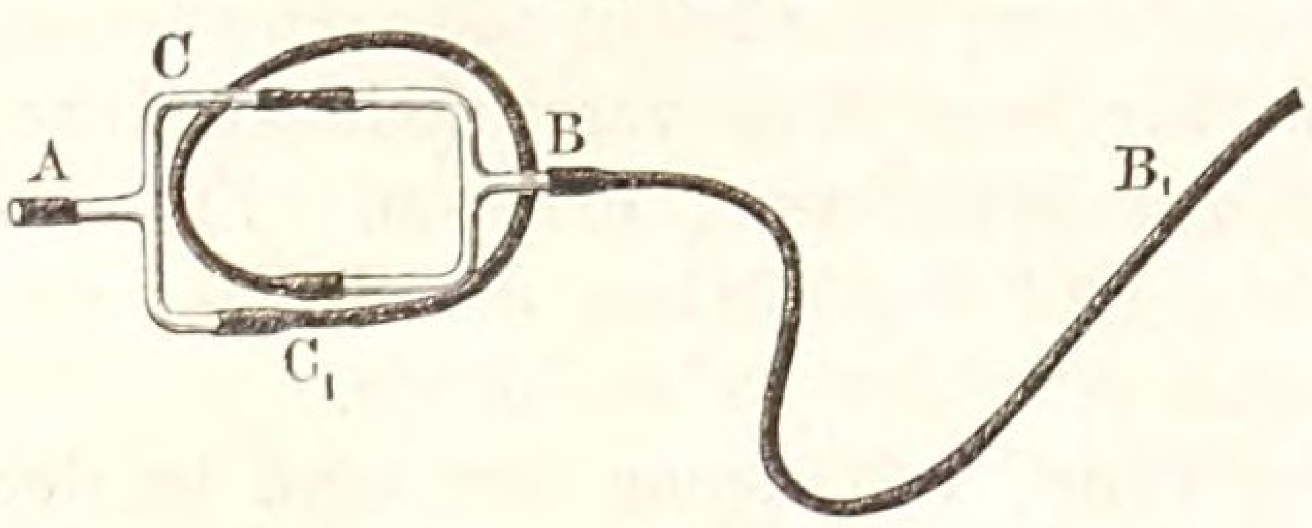
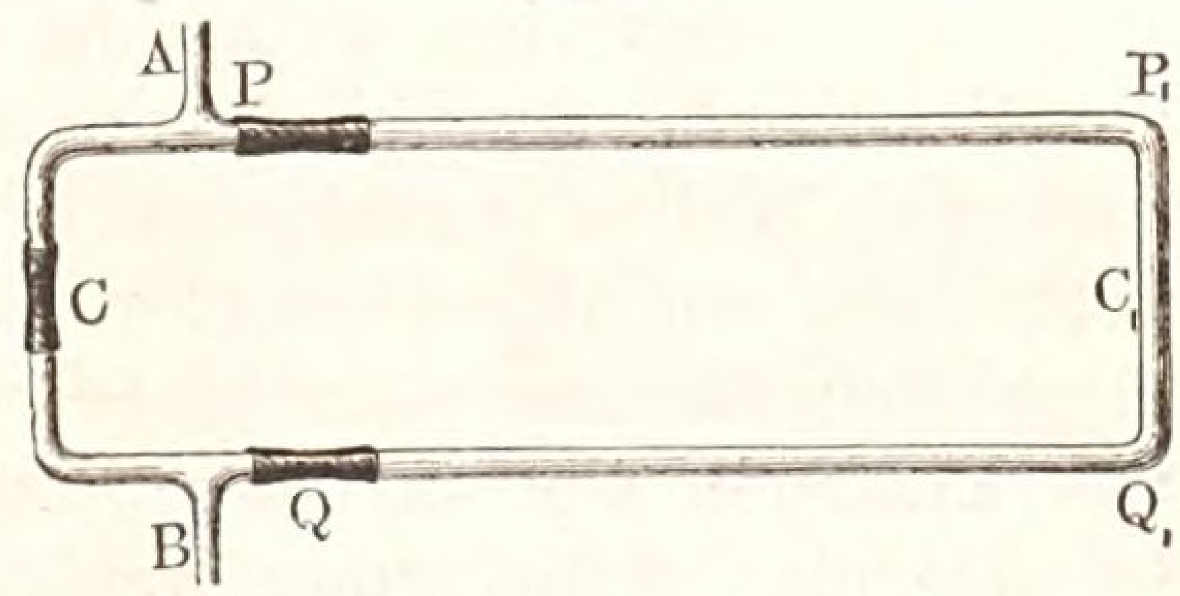


Fig. 146.



durch einen längern Kautschukschlauch verbunden. Gibt man dem letztern etwa eine Länge von 390 Mm., so entspricht er der halben Wellenlänge eines Tones von 440 Schwingungen in einer Secunde. Das mit dem kurzen Kautschukschlauch versehene Ende setzt man in den äussern Gehörgang des einen Ohrs, verstopft das andere Ohr und lässt dann den Klang einer Stimmgabel von der angegebenen Tonhöhe durch den langen Kautschukschlauch BB_1 und die verzweigte Röhrenleitung in das Ohr gelangen, indem man die Zinken der Gabel vor das offene Ende B_1 des Schlauches hält, oder auch den Stiel der Gabel in den Schlauch steckt und die Gabel dann anschlägt. Da der Weg, den die Schwingungen bis zum Ohr zu durchlaufen haben, in der Leitung B_1BC_1A um eine halbe Wellenlänge grösser ist als in der andern Leitung, treffen das Ohr jedesmal zwei Schwingungen entgegengesetzter Phase, der Ton löscht sich bei A aus. Drückt man aber bei C oder C_1 das eine der Kautschukrohre zu, so kommt der Ton wieder kräftig in das Ohr hinein, da die Schwingungen dann nur auf dem einen Wege zum Ohr gelangen können.

Der Apparat Fig. 146 hat anstatt des die Enden der beiden Röhren verbindenden Kautschukschlauches ein Glasrohr PC_1Q; indem man eine Reihe solcher Röhren verschiedener Länge herstellt, die mit dem Stücke BCA verbunden werden, kann man die Interferenzröhre für verschiedene Töne stimmen.

Derartige Interferenzröhren löschen nicht nur die Töne aus, für die sie abgestimmt sind, sondern auch deren ungeradzahlige Obertöne, da alle diese in der Röhre eine Wegedifferenz von einer ungeraden Anzahl halber Wellenlängen finden. Man kann deshalb mit derselben auch sofort erkennen, ob ein Klang nur ungeradzahlige Obertöne oder auch geradzahlige hat. Denn im ersten Falle werden die Klänge ganz ausgelöscht, im letztern bleiben die geradzahligen Obertöne bestehen.

König hat diese Interferenzröhren benutzt, um mit Hülfe der Flammenkapseln die Interferenz des Schalles sichtbar zu machen; die von ihm verfertigten Röhren haben an der einen Seite entsprechend dem Stücke PC_1Q einen posaunenartigen Auszug. Ist die Röhre ganz zusammengeschoben, so sind beide Wege, auf denen der Schall zur Membran der Flammenkapsel dringen kann, gleich lang; durch Ausziehen der einen Röhre kann man nun für einen gegebenen Ton die Verlängerung ausfindig machen, bei welcher die Schallschwingungen an der Membran sich aufheben, die Flamme also nicht mehr schwingt. Man kann auf diese Weise sogar ziemlich genau die Wellenlänge des betreffenden Tones, welche gleich dem Doppelten der Verlängerung der Röhre ist, und damit die Geschwindigkeit des Schalles in der Röhre messen.

Während bei der gleichzeitigen Ausbreitung zweier Töne gleicher Höhe oder zweier Wellen gleicher Länge durch Interferenz die Töne sich immer in der gleichen Weise, je nach der Phasendifferenz verstärken oder schwächen, wird die Erscheinung eine andere, wenn wir zwei Töne verschiedener Höhe, also zwei Wellen verschiedener Länge zur Interferenz bringen. Es entsteht dann ein abwechselndes Schwächen und Verstärken des Tones, wodurch sich die sogenannten Schwebungen oder Stösse ausbilden.

Erzeugen wir an einer Stelle zwei Töne, von denen der eine in der Secunde eine Schwingung weniger hat als der andere, und nehmen an, dass beide Tonquellen in demselben Momente ihre Bewegung beginnen, so wird von beiden die erste Schwingung in gleicher Phase ausgehen und diese erste Schwingung wird sich als solche gleicher Phase ausbreiten und das Ohr des Beobachters treffen. Die folgenden Schwingungen werden aber verschiedener Phase und die Phasendifferenz wächst, bis sie nach einer halben Secunde eine halbe Schwingung wird. Die von beiden Tonquellen ausgehenden Bewegungen werden dann das Ohr des Beobachters in entgegengesetzter Phase treffen. Mit wachsender Zeit wächst die Phasendifferenz und bei dem Beginne der zweiten Secunde beträgt dieselbe eine ganze Schwingung, das Ohr des Beobachters wird also wieder von beiden in gleicher Phase getroffen. Da nun bei dem Zusammentreffen der Schwingungen gleicher Phase die resultirende Bewegung die Summe, bei dem in entgegengesetzter Phase die Differenz der Theilbewegungen ist, so muss das Ohr bei dem gleichzeitigen Wahrnehmen beider Töne abwechselnd Verstärkungen und Schwächungen des Klanges hören. In dem angenommenen Falle muss in jeder Secunde ein Maximum der Tonstärke gehört werden. In der That ist das der Fall, man hört deutlich die Schwebungen des Tones und in dem sogenannten Stosse das Maximum der Tonstärke.

Ist die Differenz der Schwingungszahlen gleich zwei in der Secunde, so muss der eben beschriebene Vorgang in jeder halben Secunde eintreten, wir erhalten in der Secunde zwei Stösse; überhaupt ist die Differenz der

Schwingungszahl gleich n, so muss sich der Vorgang in $\frac{1}{n}$ Secunde wiederholen, es müssen also in der Secunde n Stösse entstehen. Man findet diese Folgerung durch Versuche genau bestätigt.

Man kann das Auftreten der Stösse vortrefflich benutzen, um zwei Töne genau gleich zu stimmen, da dieselben immer mit grosser Deutlichkeit auftreten, so wie die Töne etwas verschieden sind. Verstimmt man den einen Ton, so erkennt man die Annäherung an den Gleichklang, indem die Stösse sich dann langsamer folgen. Noch in anderer Weise kann man die Stösse zur Herstellung genau gleicher Stimmung benutzen, indem man die beiden gleich zu stimmenden Töne gegen einen dritten so stellt, dass sie mit demselben die gleiche Anzahl von Stössen geben.

Man kann die Stösse ebenfalls benutzen, um die absolute Schwingungszahl der Töne zu bestimmen, sobald uns das Intervall der Töne bekannt ist. Setzen wir z. B. voraus, dass wir zwei Töne haben, die genau im Verhältniss der grossen Terz zu einander stehen, deren Schwingungsverhältniss also 4 : 5 ist. Wir werden dann allerdings nicht direkt die Stösse, welche durch das gleichzeitige Anklingen der beiden Töne entstehen, zählen können, da ihre Zahl zu gross ist; man wendet zur Zählung der Stösse Zwischentöne an, z. B. mit Hülfe eines mit zwei Saiten bespannten Monochords. Man stimmt die eine Saite zunächst so, dass sie mit dem tiefern Tone vier Stösse gibt, dann die zweite, dass sie mit der ersten vier Stösse gibt, dann wird die erste hinaufgestimmt, dass sie mit der zweiten wieder vier Stösse macht u. s. f. bis man die Stösse zwischen dem höhern Tone und dem auf einer der Saiten so erreichten zählen kann. Die Summe aller so entstandenen Stösse ist die Differenz der Schwingungszahlen; aus dieser Differenz und dem bekannten Verhältnisse erhält man dann die Schwingungszahlen beider Töne. Das Verfahren ist besonders dann von grossem Nutzen, wenn man kein Mittel zur direkten Zählung der Schwingungen, wie etwa die Sirene, zu Gebote hat.

§. 118.

Combinationstöne. Wenn man zwei Klänge, deren Schwingungszahl sehr verschieden ist, gleichzeitig und kräftig ansprechen lässt, so nimmt man im Allgemeinen keine Schwebungen wahr, sondern durch das Zusammenwirken der Töne entsteht ein neuer Ton, der Combinationston. Die Schwingungszahl dieses Combinationstones ist gleich der Differenz der Schwingungszahl der beiden ihn erzeugenden Töne. So gibt der Zusammenklang eines Tones mit seiner Quinte, zwei und drei, als Combinationston die tiefere Octave des Grundtones, dessen Schwingungszahl eins ist; Grundton und Terz, vier und fünf, gibt die zweittiefere Octave u. s. f.

Lässt man statt einfacher Töne zwei zusammengesetzte Klänge gleichzeitig kräftig ertönen, so liefern nicht nur die Grundtöne, sondern auch die Obertöne unter einander und mit den Grundtönen Combinationstöne. Ist die Schwingungszahl der Grundtöne r und s, so sind die harmonischen Töne $2r$, $2s$, $3r$, $3s \ldots$, und das Schema der sich bildenden Combinationstöne ist

$$s - r;\quad 2r - s;\quad 2s - r;\quad 2s - 2r \ldots.$$

So geben Grundton und Terz mit ihren Obertönen die Combinationstöne 1, 3, 6, 2 etc., von denen der Ton 3 oft sehr deutlich zu hören ist.

Auch bei einfachen Tönen können mehrfache Combinationstöne auftreten, deren Schwingungszahl gerade so ist, als könnten die Combinationstöne mit den sie erzeugenden Tönen und unter einander wieder Combinationstöne liefern. Folgendes Schema zeigt die möglichen Töne.

Combinirende Töne	Combinationstöne
s und r	$s - r$ erster
$s - r$ „ r	$2r - s$ zweiter
$2r - s$ „ s	$2s - 2r$ dritter
$2r - s$ „ $s - r$	$3r - 2s$ vierter u. s. f.

$s - r$ und s, sowie $2r - s$ und r geben keine neuen Töne, sondern r und $s - r$.

Die Combinationstöne treten am stärksten auf, wenn die combinirenden Töne eine und dieselbe Luftmasse in heftige Erschütterung versetzen. Sie sind deshalb besonders stark, wenn man eine Sirene mit mehreren Löcherreihen zu ihrer Erzeugung benutzt. Der erste Combinationston ist dann ebenso stark, ja oft stärker als jeder der erzeugenden Töne. Auch Zungenpfeifen, auf einer und derselben Windlade angeblasen, geben sie stark; sie sind ferner auf der Violine deutlich zu hören.

Ausser den bisher erwähnten hat Helmholtz noch eine zweite Klasse von Combinationstönen entdeckt, die er Summationstöne nennt, deren Schwingungszahl gleich der Summe der Schwingungszahlen der combinirenden Töne ist. Grundton und Quint 2 und 3 liefern so die Terz der höhern Octave 5, Grundton und grosse Terz $4 + 5 = 9$ die Secunde der höhern Octave. Die Summationstöne sind immer viel schwächer als die erste Klasse, die Differenztöne, sie treten am deutlichsten hervor ebenfalls wenn beide Töne durch dieselbe Luftmasse erzeugt werden, also etwa bei der Sirene mit mehreren Löcherreihen. Am besten sind sie wahrzunehmen, wenn man ein solches Intervall zu ihrer Erzeugung benutzt, dass sie ausserhalb der harmonischen Reihe der erzeugenden Töne liegen, wie Grundton und Terz, wo die Secunde der höhern Octave erscheint.

Man hat lange geglaubt, dass die Combinationstöne rein subjectiver Natur seien, das heisst, dass sie erst im Ohre sich entwickeln, und zwar aus den Stössen. Wenn die Stösse, deren Zahl ja immer gleich der Differenz der Schwingungszahlen der sie bildenden Töne ist, sich hinreichend schnell folgen, sollten sie im Ohre als Ton wahrnehmbar werden. Durch Helmholtz's Entdeckung der Summationstöne wurde diese Erklärung unhaltbar und ausserdem zeigte Helmholtz, dass den Combinationstönen objective Existenz zukommt. Man kann das sehr leicht für die Combinationstöne etwa zweier Zungenpfeifen mit einer Quincke'schen Interferenzröhre zeigen. Stimmt man dieselbe auf einen der beiden Töne ab, so kann dieser Ton gar nicht zum Ohre dringen, trotzdem hört man den Differenzton deutlich.

Helmholtz hat deshalb eine neue Theorie der Combinationstöne entwickelt, die von der Annahme ausgeht, dass bei dem Zusammenwirken zweier Töne die Amplituden der Schwingungen so gross werden, dass die Kraft, welche die verschobenen Theilchen gegen die Gleichgewichtslage zurücktreibt, nicht mehr einfach der Verschiebung proportional zu setzen sei, dass wir also nicht mehr, wie wir bisher stets annahmen,

$$\varphi = \frac{dv}{dt} = -k^2 y$$

setzen dürfen, sondern dass noch ein quadratisches Glied hinzuzufügen, somit

$$\frac{dv}{dt} = -k^2 y - b y^2$$

zu setzen sei. Berechnet man unter dieser Voraussetzung die aus dem Zusammenwirken zweier Töne resultirende Bewegung, so ergibt sich, dass neue Systeme einfacher Schwingungen entstehen müssen, deren Schwingungsdauer derjenigen der Combinationstöne, sowohl der Differenz- als Summationstöne, genau entspricht.

Diese Theorie erklärt auch unmittelbar, weshalb die Combinationstöne gerade bei der Sirene so stark werden, da dort, wenn die Luft gleichzeitig durch zwei Löcherreihen entweicht, die Schwingungsamplitude wegen des Hervortretens einer grossen Luftmasse sehr gross werden muss. In andern Fällen, etwa bei dem Erklingenlassen zweier Stimmgabeln, ist es möglich, dass sich diese Schwingungen erst am Trommelfelle bilden.

§. 119.

Ursache der Consonanz und Dissonanz. Die in den beiden letzten Paragraphen mitgetheilten Erfahrungen über Stösse und Combinationstöne in Verbindung mit der genauern Kenntniss der Einrichtung des menschlichen Ohres haben es Helmholtz möglich gemacht, den physikalisch-physiologischen Grund anzugeben, weshalb wir Accorde, deren Klänge im Verhältniss der ersten Zahlen der natürlichen Zahlenreihe stehen, als Consonanzen empfinden, während Zusammenklänge, deren Schwingungsverhältnisse der Einheit näher kommen, dem Ohr als dissonirend erscheinen.

Die Grundlage der Helmholtz'schen Erklärung ist der Satz, dass eine Klangmasse nur dann auf unser Ohr einen angenehmen Eindruck machen kann, wenn sie gleichmässig abfliesst, wenn die Töne neben einander bestehen können, ohne sich zu stören; dass dagegen eine Klangmasse einen unangenehmen oder doch einen unruhigen Eindruck macht, wenn sie ein durch Schwebungen intermittirender Klang ist, selbst wenn die Schwebungen so rasch erfolgen, dass wir sie nicht einzeln auffassen und zählen können. Helmholtz macht zur Begründung dieses Satzes darauf aufmerksam, dass es mit den Lichtempfindungen sich ebenso verhält. Keine Beleuchtung macht auf unser Auge einen so unangenehmen Eindruck, als eine flackernde, bei welcher in rascher Folge der Lichtreiz stärker und schwächer wird. Ein knarrender, intermittirender Ton ist nun für das Ohr dasselbe, was ein flackerndes Licht für das Auge ist, es wird dadurch eine unangenehme Reizung der Gehörnerven bewirkt.

Dass man in der That die Schwebungen als solche empfindet, wenn ihre Zahl auch eine grosse geworden, davon kann man sich, wie Helmholtz gezeigt hat, auf folgendem Wege überzeugen. Man nehme etwa zwei Stimmgabeln, die auf a_1 abgestimmt sind, und verstimme nun die eine allmählich mehr und mehr. Anfänglich erfolgen die Stösse langsam und so lange es nicht mehr als etwa sechs in der Secunde sind, kann man sie leicht zählen, wird die Zahl grösser, so gelingt das nicht mehr; aber wenn man eine allmähliche Steigerung der Stosszahl hervorbringt durch

Vergrösserung der Verstimmung auf einen Halbton und weiter, so erkennt man deutlich, dass der sinnliche Eindruck derjenige einzelner Stösse ist, und dass eben dieses Intermittirende es ist, was den Eindruck der Dissonanz bewirkt.

Wenn man die Zahl der Stösse durch eine Erweiterung des Intervalls vergrössert, also bei a_1 zu einem ganzen Ton übergeht, wobei die Zahl derselben 60, oder auf eine kleine Terz a_1 c_2, wobei die Zahl 88 wird, so wird der Eindruck des Intermittirens immer schwächer, schon bei der kleinen Terz ist derselbe fast ganz verschwunden, sie macht schon den Eindruck eines gleichmässig abfliessenden Klanges. Man könnte deshalb vermuthen, dass wie bei dem Auge ein sich rasch wiederholendes Aufblitzen eines Lichtes den Eindruck einer continuirlichen Beleuchtung macht, so auch beim Ohr ein etwa 90 mal in der Secunde sich wiederholender Tonstoss den Eindruck eines continuirlichen Tones macht. Dass indessen dem nicht so ist, davon überzeugt man sich leicht, wenn man die Zahl der Stösse anstatt durch Erweiterung des Intervalls durch Verlegung desselben Intervalls in höhere Tonlagen vergrössert. Der Halbton h_1 c_2 gibt 33 Schwebungen in der Secunde, die in der vorhin angegebenen Weise noch deutlich als solche erkannt werden; gibt man unmittelbar nachher h_2 c_3 mit 66 Schwebungen und h_3 c_4 mit 132 Stössen an, so erkennt man, dass der sinnliche Eindruck derselbe ist. Die Wahrnehmbarkeit der Schwebungen hängt also nicht allein von ihrer Anzahl, sondern auch wesentlich davon ab, dass die sie erzeugenden Intervalle sich hinreichend nahe liegen. Den Grund für den letztern Umstand sieht Helmholtz darin, dass die Schwebungen im Ohre nur dann bestehen können, wenn die Töne sich nahe genug liegen, um dieselben Corti'schen Fasern zum Schwingen zu bringen, nur in dem Falle gelangen dieselben in Schwingungen mit wechselnder Amplitude. Wenn die beiden Töne zu weit auseinanderliegen, werden die Schwingungen der von beiden gemeinsam erregten Fasern überhaupt zu schwach, als dass man bei ihnen noch den Wechsel der Amplitude empfinden kann.

Die Wahrnehmbarkeit der Stösse hängt somit von ihrer Zahl und der Weite des Intervalls ab; ist das Intervall enge, so empfindet man noch eine grosse Zahl, bei weitern Intervallen nur eine kleinere, und ist das Intervall etwa auf eine Quarte gewachsen, nimmt man gar keine mehr wahr.

Aus diesen Sätzen ergibt sich zunächst, dass alle engen Intervalle bis zur grossen Secunde innerhalb des in der Musik gebrauchten Tonsystems dissonirend sein müssen, dass die Dissonanzen in den mittlern Tonlagen am schärfsten sein müssen und dass in tiefern Lagen selbst die kleine Terz schon rauh klingen muss, da sie in der grossen Octave zwischen 13 und 26 Schwebungen gibt.

Aus der Helmholtz'schen Theorie des Klanges ergibt sich dann weiter, dass auch die einer Octave nahe kommenden Intervalle, kleine und grosse Septime dissonirend sein müssen. Die Klänge bestehen aus dem Grundtone und ihren harmonischen Obertönen. Ebenso wie die Grundtöne geben auch die Obertöne unter sich und mit den Grundtönen Schwebungen. Der Grundton hat nun in den Septimen als ersten Oberton die Octave, die mit der Septime oder auch mit der None dieselben Schwebungen erzeugt

wie der Grundton mit der grossen und kleinen Secunde. Darnach dürfen zwei wirklich einfache Töne in diesen grossen Intervallen keine Dissonanz geben, und wirklich ist auch z. B. bei in der Septime gestimmten Stimmgabeln die Dissonanz kaum markirt.

Die Octave dagegen muss eine vollkommene Consonanz sein, da die Obertöne der Octave alle auch solche des Grundtones sind, und erst sehr hohe und deshalb sehr schwache Obertöne Schwebungen liefern.

Die Quinte ist schon weniger vollkommen. Es sind nämlich die Töne des

Grundtones	2	4	6	8	10	. . .
Quinte		3	6	9	12.	

Der dritte Ton der Quinte bildet Schwebungen mit dem vierten und fünften des Grundtones. Bei der Quarte bildet der zweite Ton schon mit dem dritten des Grundtones Schwebungen.

Die vollkommenen Consonanzen sind gleichzeitig dadurch charakterisirt, dass man kleine Unreinheiten bei ihnen am deutlichsten wahrnimmt. Es liegt das daran, dass die Consonanz um so vollkommner ist, je tiefere und deshalb kräftigere Obertöne zusammenfallen, bei der Quinte der zweite mit dem dritten, bei der Quarte der dritte mit dem vierten des Grundtones, eine kleine Verstimmung bringt deshalb deutliche Schwebungen hervor.

Es genüge an diesen Beispielen, an denen man sieht, dass die Theorie von Helmholtz im Wesentlichen die Consonanzen und Dissonanzen abzuleiten im Stande ist.

Zweiter Theil.

Die Lehre vom Licht.

Erster Abschnitt.

Ausbreitung und Wahrnehmung des Lichtes.

Erstes Kapitel.

Die ungestörte Ausbreitung des Lichtes.

§. 120.

Ausstrahlung und geradlinige Fortpflanzung des Lichtes. Damit wir die uns umgebenden Körper mit unserm Auge wahrnehmen können, bedarf es ausser der Anwesenheit der Körper selbst noch der Anwesenheit des Lichtes; ohne Licht können wir nicht sehen. In der Beziehung unterscheiden wir die Körper sofort in zwei Klassen, die zu der einen gehörigen liefern selbst das zu ihrem Sichtbarwerden erforderliche Licht, durch welches nicht nur sie selbst sichtbar werden, sondern auch andere Körper sichtbar gemacht werden. Diese Körper, wie Sonne, Mond, die Gestirne glühende und brennende Körper an der Erde sind selbstleuchtende Körper.

An diesen leuchtenden Körpern unterscheiden wir verschiedene Helligkeit und ausserdem eine Verschiedenheit des ausgesandten Lichtes, die wir als verschiedene Farbe bezeichnen. Die Körper der zweiten Klasse, die nichtleuchtenden, werden sichtbar oder leuchtend, wenn sie von einem selbstleuchtenden Körper Licht erhalten. Auch an diesen unterscheiden wir dann verschiedene Helligkeit und Farbe. Dass die an sich dunkeln Körper durch Beleuchtung ebenfalls leuchtend werden, zeigt ein einfacher Versuch; lässt man auf ein weisses Blatt Papier in einem dunkeln Zimmer ein Bündel Sonnenstrahlen fallen, so macht das von dem Papier ausgehende Licht auch die andern Gegenstände des Zimmers sichtbar. Die Astronomie lehrt uns weiter, dass der Mond und die Planeten an sich dunkle Körper sind, dass sie nur durch das auf sie fallende Licht der Sonne leuchtend werden.

Das Licht geht von den leuchtenden Körpern aus oder wird von denselben ausgestrahlt; denn hält man zwischen die Lichtquelle und das Auge einen Schirm, so wird dieselbe unsichtbar, das Licht kann nicht mehr zu unserm Auge kommen; oder hält man zwischen einem Licht und einem Blatt weissen Papiers einen Schirm, so wird dem Papier das Licht entzogen, es wird beschattet.

Die in dem letzten Falle sich zeigende Gestalt des Schattens liefert uns dann weiter den Beweis, dass das Licht in geraden Linien ausgestrahlt wird oder sich fortpflanzt. Denn wir finden, wenn wir eine Lichtquelle von sehr kleiner Ausdehnung nehmen, dass die Grenze des Schattens dann bestimmt wird durch gerade Linien, welche wir von dem Lichtpunkte aus an der Grenze des schattengebenden Körpers vorüber zu dem weissen Blatt hinziehen. Ist z. B. der schattengebende Körper ein Kreis, den wir so halten, dass die Verbindungslinie des Lichtpunktes mit dem Mittelpunkte des Kreises normal zur Kreisebene ist, so wird der ganze kegelförmige Raum beschattet, den wir erhalten, wenn wir von dem leuchtenden Punkte aus Linien über jeden Punkt des Kreisrandes ziehen. Es folgt das mit aller Strenge daraus, dass bei constantem Abstande des Schirmes von der Lichtquelle sich die Durchmesser der Schattenkreise direkt verhalten wie die Abstände des die Schatten aufnehmenden weissen Blattes von der Lichtquelle, und weiter dass bei einer bestimmten Entfernung des weissen Blattes von der Lichtquelle der Durchmesser des Schattenkreises zu demjenigen des schattenwerfenden Schirmes sich ebenfalls verhält wie die Abstände beider von der Lichtquelle. Denn ist A Fig. 147 die Lichtquelle, CB der Durchmesser des schattenwerfenden Kreises und sind $D'E'$, $D''E''$. . Schattenkreise in verschiedenen Entfernungen, so folgt sowohl aus der Proportion

$$E'D' : E''D'' = O'A : O''A,$$

als aus derjenigen

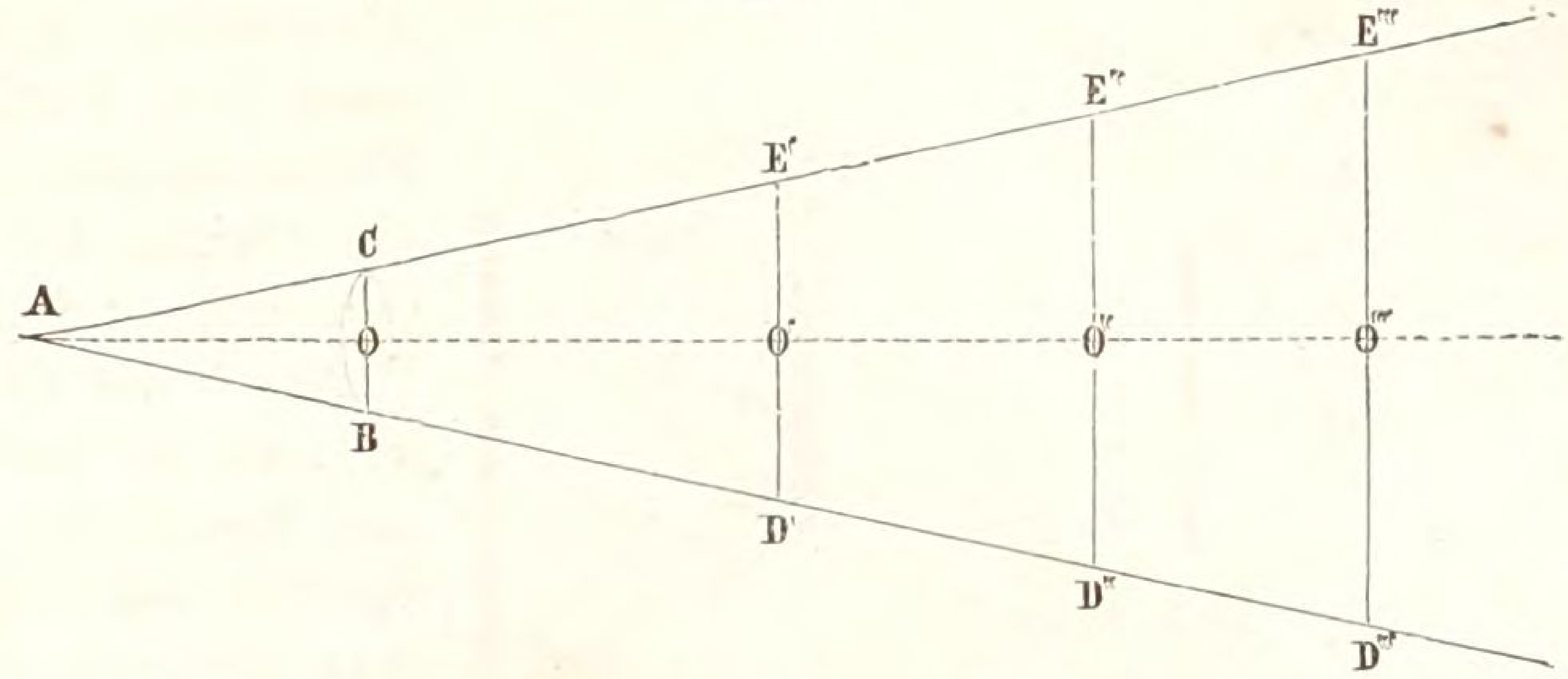
$$E'D' : CB = O'A : OA,$$

dass alle die Punkte $C, E', E'' \ldots B, D', D'' \ldots$ auf geraden Linien liegen. Da somit das Licht zu keinem Punkte kommt, der so liegt, dass eine von ihm zur Lichtquelle gezogene Gerade den Schirm trifft, so folgt, dass das Licht sich von der Lichtquelle nur nach geraden Linien ausbreitet.

Ganz dasselbe folgt aus den Schatten, welche ausgedehnte Licht-

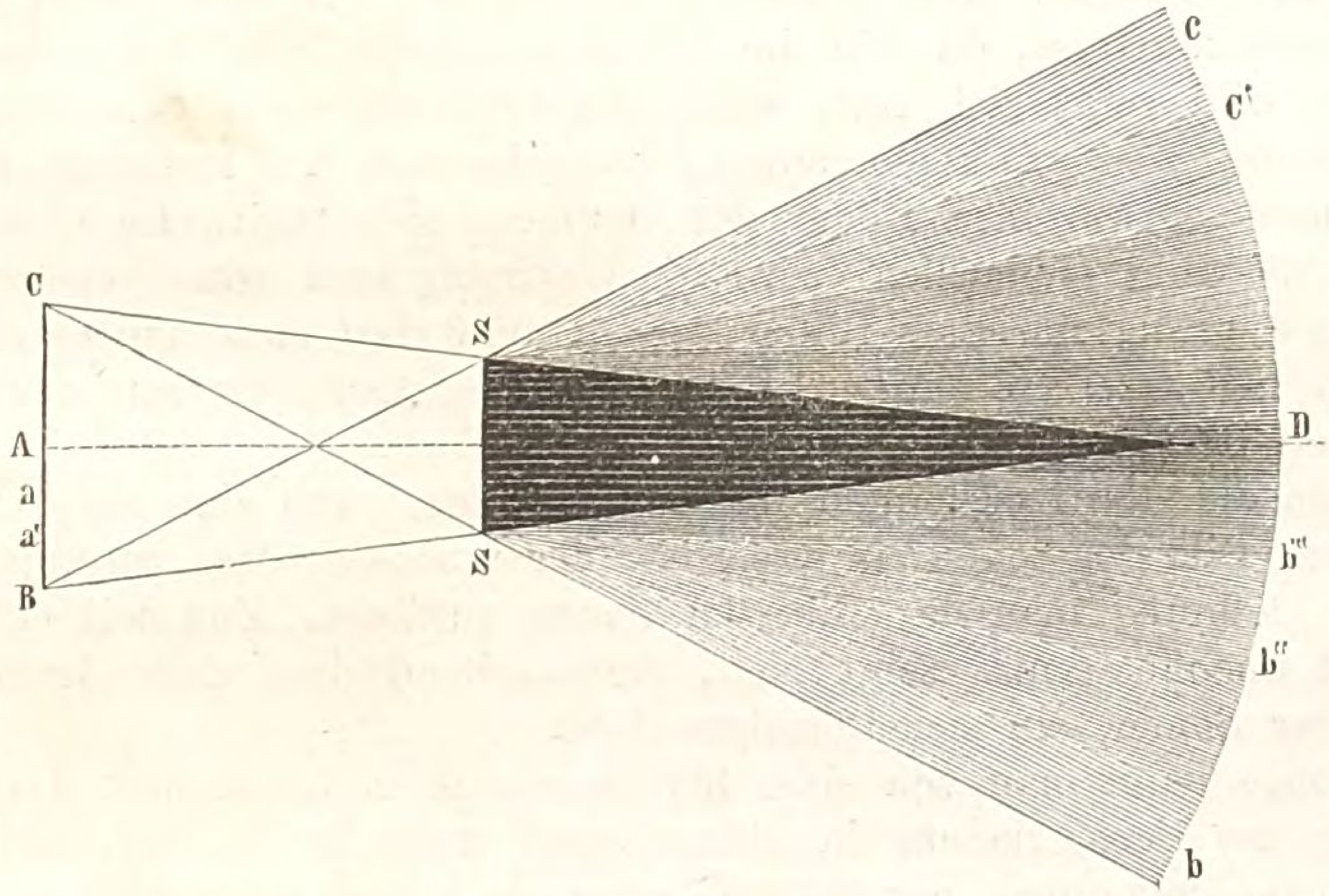
quellen entwerfen. Haben wir z. B. als Lichtquelle eine ausgedehnte glühende Kreisscheibe und als schattenwerfenden Schirm einen der ersten

Fig. 147.



parallel gehaltenen Schirm, so zeigt ein den Schatten auffangendes Blatt zunächst in der Mitte einen ganz dunkeln Fleck, dessen Durchmesser durch den Kegel *CSDSB* Fig. 148 gegeben ist, dessen Seiten somit von den

Fig. 148.

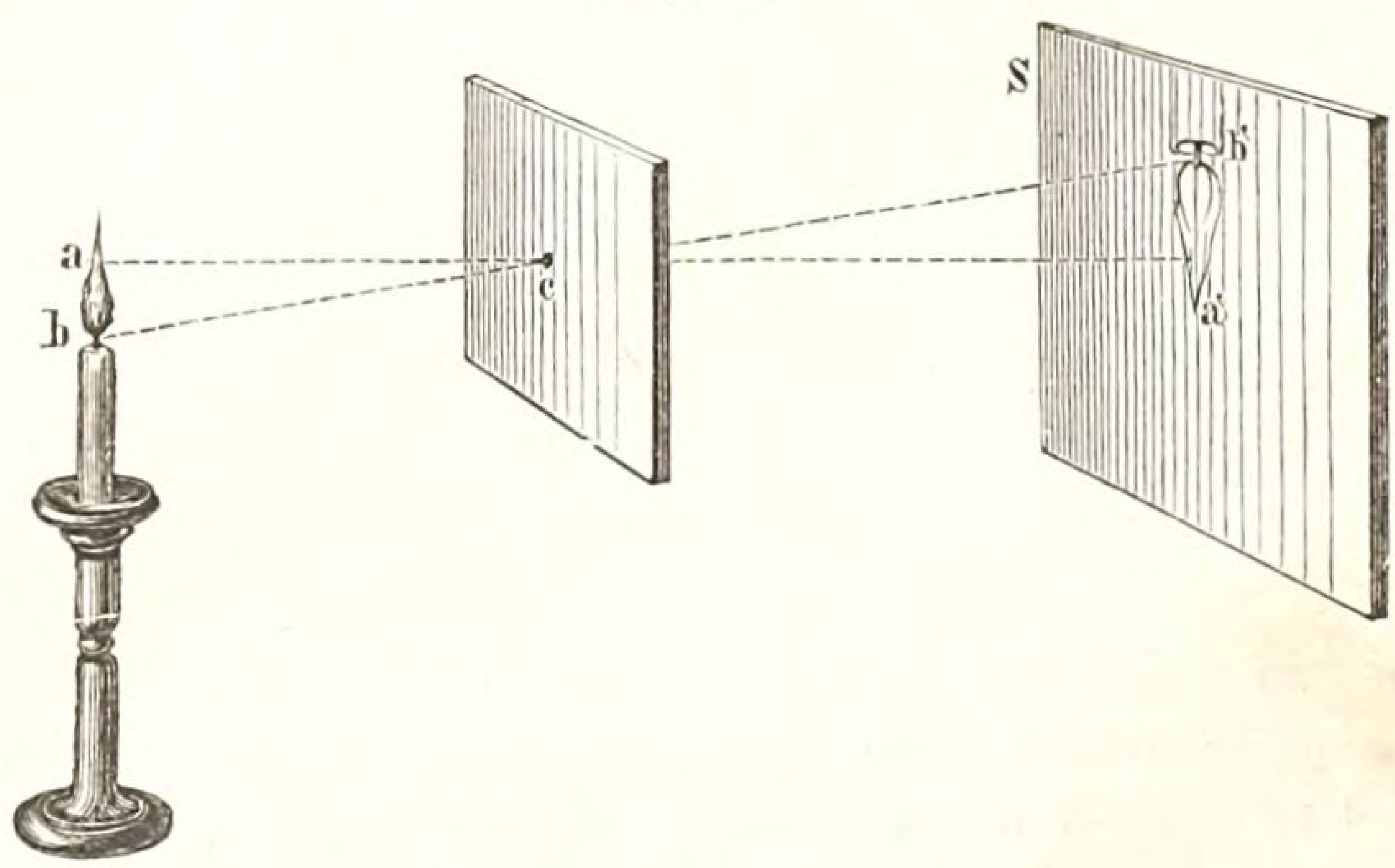


Geraden gebildet werden, die wir von dem Umfange des leuchtenden Kreises durch den Umfang des schattenwerfenden Schirmes ziehen, wie *CS*, *BS*. Dieser Kegel ist der Kernschatten, in den gar kein Licht fällt. Der Kernschatten ist umgeben von dem Halbschatten, dessen Grenzen durch die Linien *BSC*, *CSb* gebildet werden, und der von innen nach aussen ganz stetig heller wird. Alle Punkte ausserhalb dieses Raumes erhalten Licht von der ganzen leuchtenden Scheibe, alle Punkte innerhalb desselben nur von einem Theil der Scheibe und von einem um so grössern, je näher sie an der Grenze des Halbschattens liegen. Innerhalb des Raumes $b'''SD$ fällt Licht von den Punkten des leuchtenden Körpers zwischen a' und B, innerhalb $b'''Sb''$ tritt dazu nach und nach das Licht der zwischen a' und a liegenden Punkte, woraus die nach dem Rande zu wachsende Helligkeit des Schattens sich ergibt.

Einen weitern Beweis für die geradlinige Ausbreitung des Lichtes liefert uns die Abbildung leuchtender Körper, wenn wir das Licht derselben

durch eine enge Oeffnung auf eine Wand fallen lassen. So erhält man bei der Anordnung Fig. 149 ein umgekehrtes Bild der Lichtflamme *a b* auf dem Schirme *SS*. Von jedem Punkte der Flamme geht Licht durch die Oeffnung *c* des Schirmes; der Punkt *a* der Flammenspitze erzeugt ein kleines Bildchen der Oeffnung *c* bei *a'*, der Punkt *b* der Flamme bei *b'* und so jeder Punkt am Ende der Geraden, die wir von ihm durch *c* zum Schirme *S S* ziehen. Da diese kleinen leuchtenden Bildchen der Oeffnung gerade so gruppirt sind als die leuchtenden Punkte der Flamme, müssen sie ein Abbild der Flamme geben, welches indess umgekehrt ist, da alle die Geraden sich im Punkte *c* schneiden.

Fig. 149.



Das Bild zeigt sich nur, wenn die Oeffnung klein genug ist, wird die Oeffnung *c* so gross genommen, dass die von den einzelnen Punkten der Flamme entworfenen Bilder der Oeffnung sich theilweise überdecken, so wird das Bild undeutlich, wird die Oeffnung sehr gross genommen, so bedecken sich die einzelnen Bilder der Oeffnung fast ganz und es erscheint auf dem Schirme *S S* nur mehr ein Bild der Oeffnung mit etwas verwaschenen Rändern.

Ganz dieselbe Erscheinung ist es, dass das durch eine enge Oeffnung entworfene Bild der Sonne ein Kreis ist, der um so grösser wird, je weiter von der Oeffnung man das Bild der Sonne auffängt. Zur Zeit einer partiellen Sonnenfinsterniss zeigt sich, entsprechend dem dann leuchtenden Theile der Sonne, ein sichelförmiges Bild.

Ebenso kann man von einer hell beleuchteten Landschaft durch eine Oeffnung des Fensterladens in einem sonst dunkeln Zimmer, auf einem dem Fenster gegenüber gestellten Schirme ein umgekehrtes Bild entwerfen.

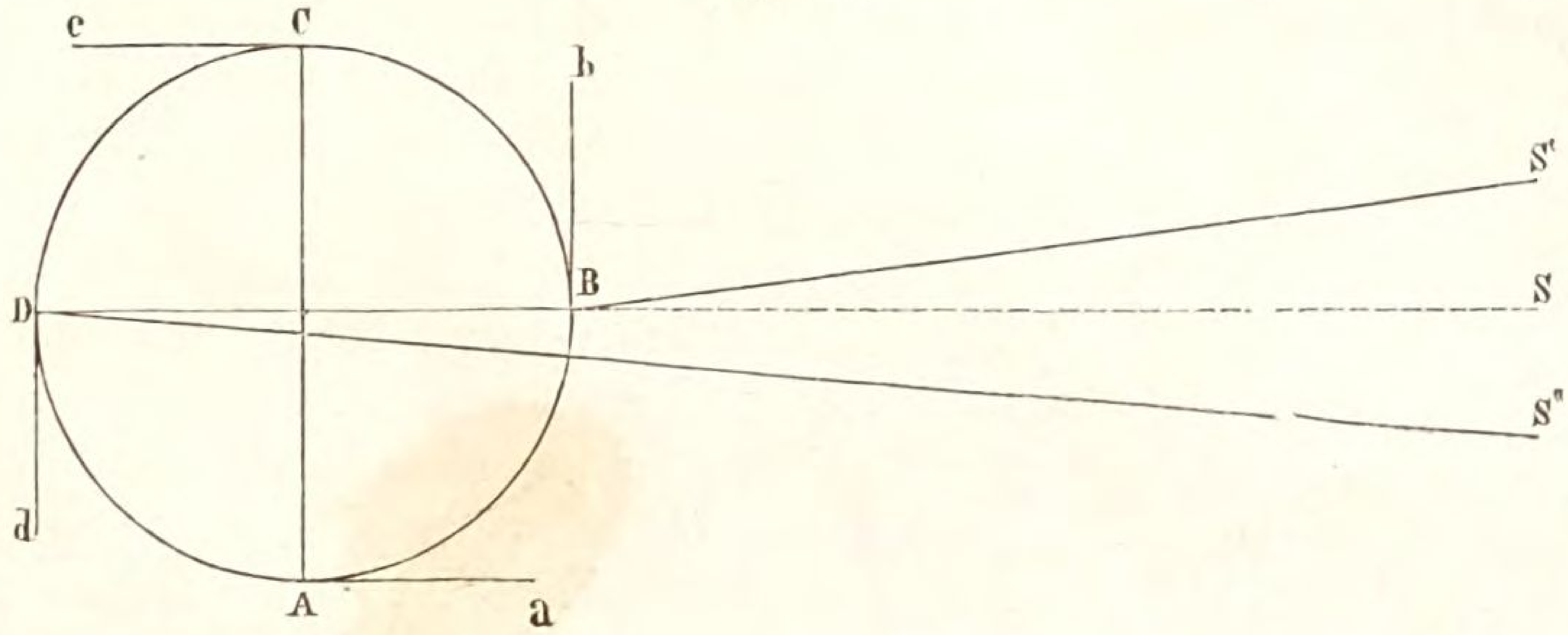
Alle diese Erfahrungen, die sich sehr leicht noch vervielfältigen liessen, beweisen, dass das Licht von den leuchtenden Körpern aus sich nur nach geraden Linien fortpflanzt.

§. 121.

Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Fixsternlichtes. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes ist eine so grosse, dass, wie wir schon bei Messung der Schallgeschwindigkeit erwähnten, sie unter gewöhnlichen Umständen in irdischen Dimensionen als unmessbar gross erscheint. Astronomische Beobachtungen waren es deshalb zuerst, durch welche man ein Verhältniss der Geschwindigkeit des Lichtes zu derjenigen der Erde in ihrer Bahn um die Sonne auffand. Die Geschwindigkeit des von den selbstleuchtenden Fixsternen zu uns kommenden Lichtes gelang es Bradley durch das von ihm im Jahre 1727 entdeckte Phänomen der Aberration zu messen. Dasselbe besteht darin, dass die Fixsterne eine

von der Bewegung der Erde abhängige Bewegung zu haben scheinen. Stellt der Kreis $ABCD$ Fig. 150 die Erdbahn dar und BS die Richtung, nach welcher sich ein in der Ebene der Erdbahn liegender Fixstern befindet, so wird der Stern in der Richtung BS gesehen, wenn sich die

Fig. 150.

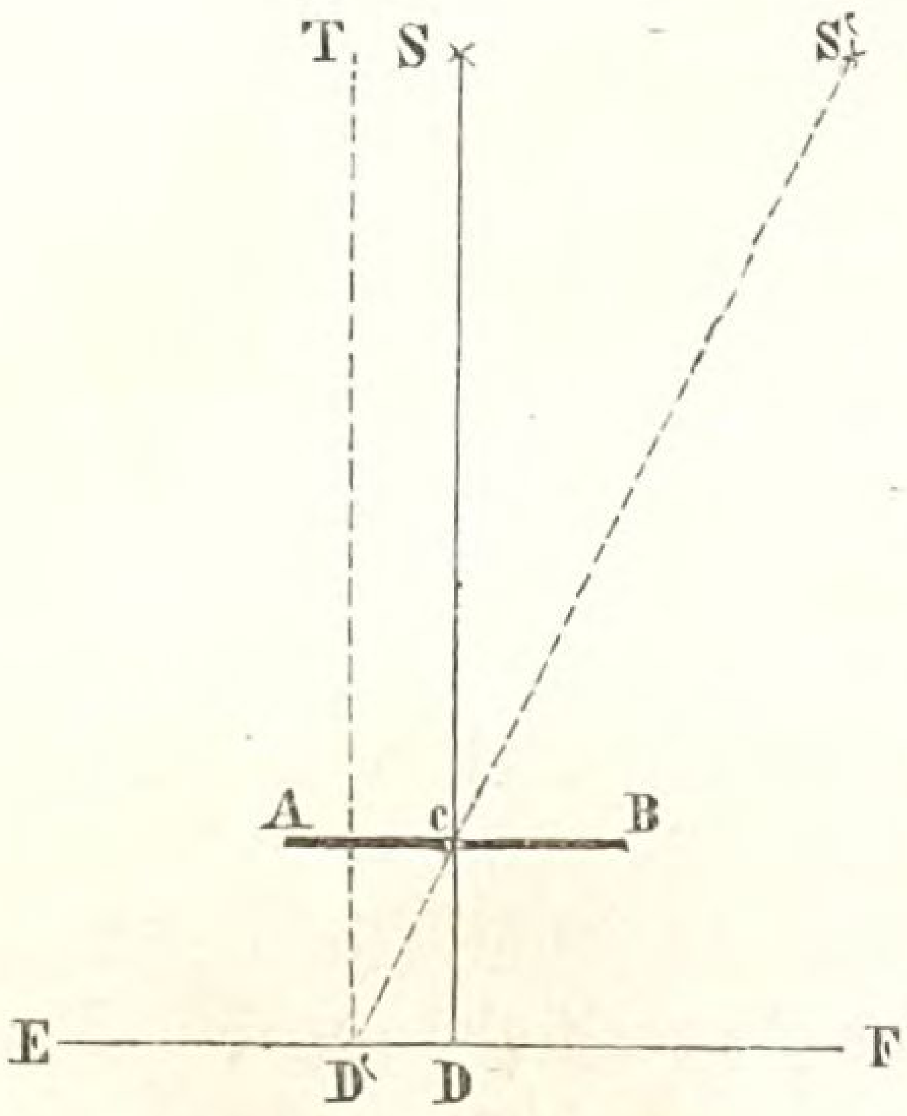


Erde in ihrer Bahn bei C oder A befindet, wenn sie sich also in der Richtung Cc oder Aa parallel BS bewegt. Gegenüber der Entfernung der meisten Fixsterne von der Erde ist nämlich der Durchmesser der Erdbahn zu klein, als dass sich eine parallaktische Verschiebung der Fixsterne erkennen lässt, die Verbindungslinien aller Punkte der Erdbahn mit dem Fixstern erscheinen uns als parallel, als eine Richtung, wie wenn die ganze Erdbahn ein Punkt wäre. Der Stern S erscheint uns dagegen aus seiner Stellung verschoben, wenn die Erde sich in B befindet, und zwar wird er nach BS' gesehen, nach der Richtung, nach welcher die Erde sich bewegt, so weit, dass der Winkel $S'BS$ gleich $20'',449$ ist; befindet sich die Erde bei D, wo sie sich nach Dd senkrecht zu DS bewegt, so scheint der Stern nach S'' verschoben, so dass SDS'' ebenfalls gleich $20'',449$ ist. Während nun die Erde sich allmählich von B nach C bewegt, rückt der Stern scheinbar von S' nach S in dem Maasse, als die zu BS senkrechte Componente der Erdbewegung kleiner wird; bewegt sich die Erde über C hinaus, so wird der Stern in dem Maasse von S nach S'' verschoben, wie die zu BS senkrechte Componente der Erdbewegung wieder wächst. Kurz der Stern oscillirt im Laufe eines Jahres zwischen $S'S''$, indem jedesmal seine Verschiebung proportional ist der zur Richtung BS senkrechten Componente der Bewegung der Erde in ihrer Bahn. Was von dem angenommenen Sterne S gilt, das gilt von allen in der Ekliptik liegenden Fixsternen, dieselben erscheinen an ihrem wirklichen Platze, wenn die Richtung der Erdbewegung in die Verbindungslinie von Erde und Stern fällt, sie erscheinen von ihrem Orte verschoben, wenn eine zu dieser Verbindungslinie senkrechte Componente vorhanden ist, und zwar ist diese Verschiebung der Componente stets proportional; ist die Bewegung der Erde senkrecht zur Verbindungslinie, so beträgt die Verschiebung $20'',449$. Die ausserhalb der Ekliptik stehenden Sterne beschreiben um ihren wirklichen Ort kleine geschlossene Bahnen, welche für einen im Pole der Ekliptik stehenden Stern, da für diesen die Bewegung der Erde in jedem Momente senkrecht zur Verbindungslinie des Sternes mit der Erde ist, ein Kreis von $40'',898$ Durchmesser ist, das heisst der Stern erscheint uns stets nach der Richtung der Erdbewegung um $20'',449$ verschoben.

Bradley erkannte bald, dass diese scheinbare Verschiebung der Fixsterne ihren Grund darin habe, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes eine mit der Geschwindigkeit der Erde in ihrer Bahn vergleichbare Grösse besitzt.

Wir sehen einen leuchtenden Punkt immer nach der Richtung hin, nach welcher das Licht in unser Auge eindringt. Ist nun AB Fig. 151 eine Ebene, in welcher bei c eine kleine Oeffnung ist, durch welche das von einem Sterne S herkommende Licht hindurchstrahlt, so wird, wenn die Ebenen AB und EF sich nicht bewegen, das bei c durchtretende Licht, das sich in der Richtung Sc fortpflanzt, den gerade unter c in der Richtung Sc liegenden Punkt D treffen. Ein Beobachter bei D wird also den Stern in der Richtung DcS senkrecht über D sehen. Das Gleiche ist der Fall, wenn sich die beiden Ebenen in der Richtung Sc gerade gegen S hin oder von S fort bewegen. Wenn sich nun aber die beiden Ebenen AB und EF gleichzeitig und mit gleicher Geschwindigkeit in der Richtung gegen B resp. F hinbewegen, so wird für einen auf EF befindlichen Beobachter diese Bewegung nicht wahrnehmbar sein, und derselbe sich in Ruhe zu befinden glauben. Ist nun die Bewegung eine derartige, dass in der Zeit, in welcher das Licht den Zwischenraum zwischen beiden Ebenen durchläuft, der Punkt D' an die Stelle von D gerückt ist, so trifft das durch c hindurchtretende Licht nicht mehr D, sondern D'. Dadurch also, dass die Combination $ABFE$ sich nach rechts hin bewegte, das Licht aber an dieser Bewegung nicht Theil nahm, befand sich das Licht nach und nach auf der Linie cD' oder in Folge der beiden Bewegungen der Ebenen und des Lichtes ist die Bahn des letztern in Bezug auf die Ebene AB die Linie cD'. Der in D' befindliche Beobachter, für den die Eigenbewegung unmerklich ist, überträgt diese auf das Licht und sieht demzufolge den Stern in der Richtung $D'C$ bei S'.

Fig. 151.



Es macht natürlich keinen Unterschied, ob ein solcher Schirm EF vorhanden ist oder nicht; wenn in der Zeit, in welcher das Licht die Strecke CD durchläuft, der Punkt D' an die Stelle von D tritt, ist immer in Bezug auf AB die Bahn des Lichtes cD', es muss also immer der Stern nach S' verschoben erscheinen. Die Verschiebung oder der Winkel $TD'S'$ hängt nur ab von dem Verhältniss der Geschwindigkeiten des Lichtes und dem der Bewegung des Punktes D'. Denn nennen wir t die Zeit, welche das Licht gebraucht, um die Strecke cD zu durchlaufen, und c die Geschwindigkeit des Lichtes, c' die Geschwindigkeit des Punktes D, so ist

$$cD = c \, . \, t \qquad D'D = c' t,$$

somit ist der Winkel $TD'S' = \alpha$ gegeben durch

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{Ac}{AD'} = \frac{D'D}{cD} = \frac{c' t}{c t} = \frac{c'}{c} \, .$$

Die Tangente des Ablenkungswinkels ist somit gleich dem Quotienten der beiden zu einander senkrechten Geschwindigkeiten.

Dass die vorhin beschriebenen Aberrationserscheinungen sich hiernach unmittelbar ergeben, bedarf wohl keiner weitern Ableitung. Da der Aberrationswinkel, wenn die Bewegung der Erde senkrecht zur Verbindungslinie der Erde mit dem Sterne ist, sich gleich 20″,449 ergibt, so folgt, wenn jetzt c' die Geschwindigkeit der Erde in ihrer Bahn ist, für die Geschwindigkeit c des Lichtes

$$c = \frac{c'}{\mathrm{tang}\, 20,''449} = \frac{c'}{0,0001} = 10000\, c'.$$

Die Geschwindigkeit der Erde in ihrer Bahn ergibt sich aus dem Durchmesser der Erdbahn, resp. dem Abstande der Erde von der Sonne. Letzterer wird bekanntlich aus der Parallaxe der Sonne abgeleitet. Für diese berechnete Enke aus dem Venusdurchgange des Jahres 1769 den Werth 8″,571. Daraus ergibt sich die mittlere Entfernung der Sonne von der Erde zu 24066 Erdhalbmesser, und da der Erdhalbmesser gleich 6366,2 Kilometer ist, ergibt sich für die Strecke, welche die Erde in der Secunde zurücklegt, 30,504 Kilometer. Die Geschwindigkeit des Lichtes wäre demnach

$$c = 305040 \text{ Kilometer}.$$

Der von Enke aus dem Venusdurchgange abgeleitete Werth der Sonnenparallaxe ist indess später vielfach angezweifelt, Leverrier, Faye, Powalky leiteten ihn zu 8″,9 ab. Daraus würde sich die Geschwindigkeit des Lichtes

$$c = 294070 \text{ Kilometer}$$

ergeben. Die Unsicherheit des Werthes beträgt somit ungefähr $^1/_{30}$ des ganzen. Aus der Berechnung des im December 1874 beobachteten Venusdurchganges, deren Resultate bisher noch nicht vorliegen, wird sich wohl ergeben, welcher von beiden Werthen der Sonnenparallaxe und damit auch der Geschwindigkeit des Lichtes der richtigere ist.

§. 122.

Geschwindigkeit des von den Planeten zurückgeworfenen Lichtes. Schon 50 Jahre ehe Bradley aus der Aberration des Lichtes die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des von den Fixsternen ausgesandten Lichtes ableitete, hatte Olaf Römer aus den Verfinsterungen der Jupitertrabanten die Geschwindigkeit abgeleitet, mit welcher das von den Planeten zurückgeworfene Licht sich fortpflanzt.

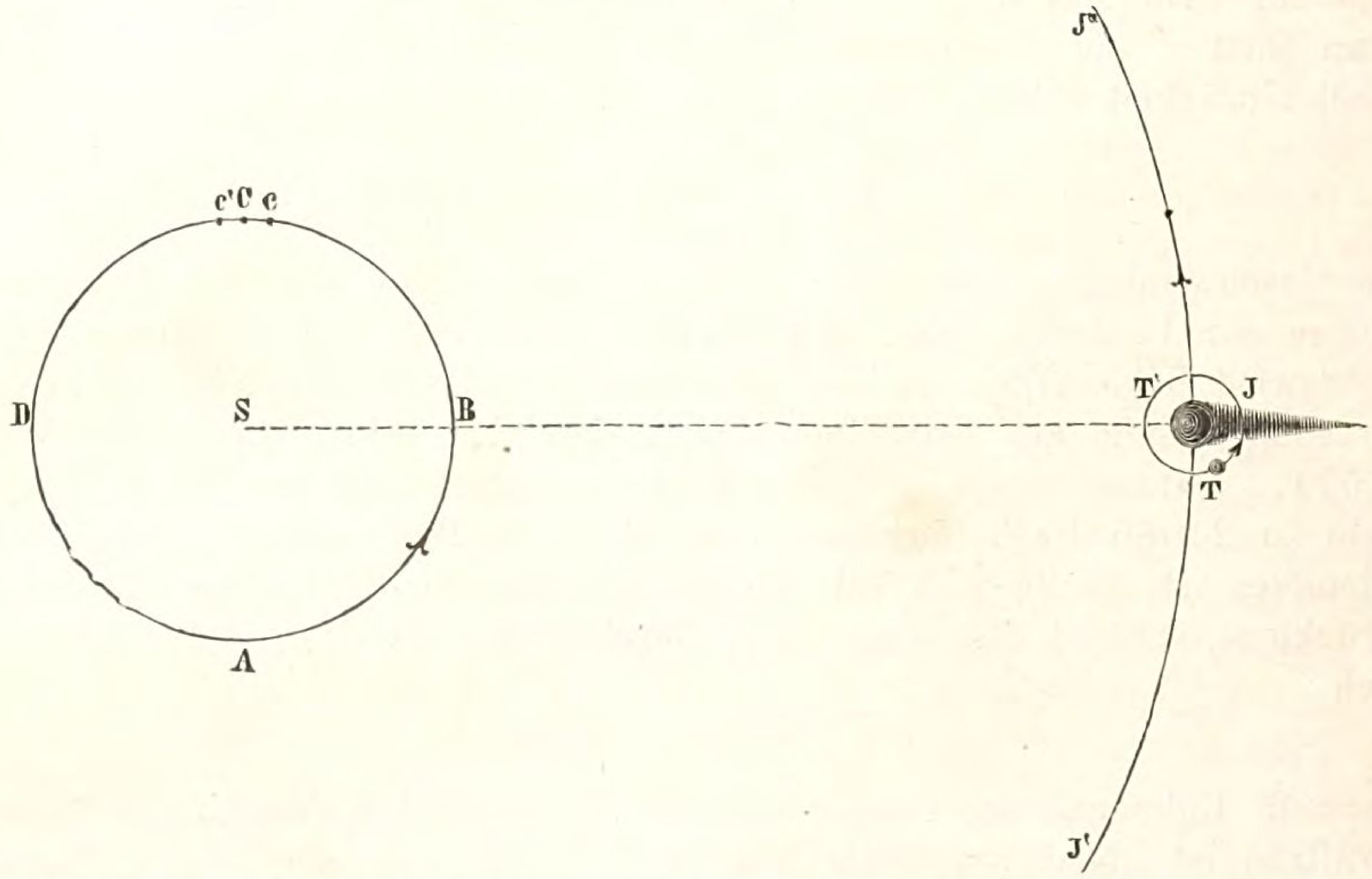
Der Jupiter ist von 4 Monden umkreist, deren Bahn nahezu mit der Aequatorebene des Jupiter zusammenfällt; bei jedem Umlaufe werden sie einmal verfinstert, da sie ausser dem am weitesten vom Jupiter entfernten, jedesmal in den Kernschatten des Jupiter eintreten.

Indem man nun zwei auf einander folgende Eintritte der Trabanten in den Schatten, oder zwei auf einander folgende Austritte aus demselben beobachtet, erhält man in der Zwischenzeit zwischen den Eintritten oder den Austritten die Umlaufsdauer der Trabanten um den Jupiter.

Stellt nun $ABCD$ Fig. 152 die Erdbahn, S die Sonne und $J'J''$ ein Stück der Jupitersbahn dar, auf welcher bei J der Planet sich befindet und sei TT' die Bahn etwa des ersten Trabanten, so kann man, wenn die Erde zwischen B und C und C und D sich befindet, zwei auf einander

folgende Austritte, wenn sie sich unterhalb B auf der Hälfte DAB befindet, zwei auf einander folgende Eintritte beobachten. Fortgesetzte Be-

Fig. 152.



obachtungen ergaben nun, dass wenn man die Umlaufszeiten ableitete aus Beobachtungen, die in der Nähe von B oder D gemacht wurden, sich dieselben merklich als gleich ergaben, dass sie aber nach in der Nähe von C oder A gemachten Beobachtungen ganz andere wurden. Die Umlaufszeit nahm zu, wenn sich die Erde dem Punkte C näherte, dann nahm sie bis zu dem bei B gefundenen Werthe ab, wenn die Erde in die Nähe von D kam, sie nahm weiter ab und wurde so viel kleiner als die bei D gefundene, wie sie bei C grösser war, wenn die Erde in die Nähe von A kam. Mit der Annäherung an B nahm dann der Werth wieder zu.

Römer erkannte aus dem Zusammenhange der Schwankungen der Umlaufszeit mit der Bewegung der Erde in ihrer Bahn, dass die Schwankungen daher rührten, dass das Licht eine nicht unmessbar grosse Geschwindigkeit hat. Die Umlaufszeit des Trabanten ist nahezu 42,5 Stunden, eine Zeit, innerhalb deren die Erde sich um eine ziemliche Strecke in ihrer Bahn fortbewegt. Beobachtet man nun einen Austritt in der Nähe von B, so wird das Licht erst nach einer gewissen Zeit von t Secunden an der Erde sichtbar sein; ist nun die Umlaufszeit des Trabanten T, so findet T Secunden nach dem ersten Austritte ein zweiter statt. Ist nun zur Zeit des zweiten Austrittes die Erde ebensoweit vom Jupiter entfernt als zur Zeit des ersten, so wird auch jetzt wieder nach t Secunden das Licht des Trabanten sichtbar, der Trabant war also im ganzen T Secunden unsichtbar, oder die Zeit zwischen zwei Wiedererscheinungen des Trabanten ist seine Umlaufszeit. Das ist sehr nahe der Fall, wenn sich die Erde bei B oder D befindet. Ist aber die Erde in der Nähe von C, so ist es anders. Sei der erste Austritt des Trabanten beobachtet, als sich die Erde bei c befand und werde das Licht t Secunden nach dem Austritte des Trabanten an der Erde gesehen. Während der Umlaufsdauer T bewegt sich nun die Erde nach c' und sei t' die Zeit, welche

das Licht braucht, um die Strecke cc' zu durchlaufen, so wird das Licht des Trabanten erst $t + t'$ Secunden nach dem Austritt bei c' gesehen. Seit der Wahrnehmung des ersten Austrittes ist also die Zeit $T + t'$ verstrichen, oder die Umlaufszeit scheint hier um t' grösser zu sein. Das Umgekehrte tritt ein, wenn sich die Erde bei A befindet. Während des Umlaufes nähert sich die Erde dem Jupiter, der Trabant wird also um die Zeit t' früher wieder sichtbar, welche das Licht gebraucht haben würde, um die Strecke zu durchlaufen, durch welche sich die Erde dem Jupiter genähert hat; die scheinbare Umlaufszeit des Trabanten muss also an dieser Stelle $T - t'$ werden.

Da die Zeit t' jene ist, welche das Licht braucht, um die Strecke cc' zu durchlaufen, kann man aus der bekannten Geschwindigkeit der Erde in ihrer Bahn jene des Lichtes berechnen, sie ist gleich dem Quotienten aus der Strecke cc' dividirt durch t'. Römer berechnete indess die Geschwindigkeit des Lichtes nicht aus einer solchen einzelnen Beobachtung, er verfuhr vielmehr folgendermassen. Aus den Beobachtungen in der Nähe von B und zwar an zwei symmetrisch zu B oberhalb und unterhalb gelegenen Punkten lässt sich die Umlaufsdauer des Trabanten genau bestimmen. Geht man nun von einem bei B beobachteten Austritt aus, so lässt sich daraus berechnen, in welchem Momente etwa $^1/_2$ Jahr später, wenn die Erde sich bei D befindet, wieder ein Austritt stattfinden muss. Da zu dieser Zeit die Erde um den Durchmesser der Erdbahn weiter vom Jupiter entfernt ist als bei B, so muss man den Austritt um so viel Secunden später beobachten, als das Licht braucht, um den Durchmesser der Erdbahn zu durchlaufen. Die Beobachtung hat in dieser Weise ergeben, dass das Licht den Durchmesser der Erdbahn in 986,38 Secunden durchläuft. Daraus ergibt sich mit dem Enke'schen Werth der Sonnenparallaxe

$$c = 310650 \text{ Kilometer}$$

mit dem grössern, später von den Astronomen angenommenen Werthe

$$c = 299470 \text{ Kilometer.}$$

Die Zahlen unterscheiden sich von den aus der Aberration sich ergebenden um wenig mehr als ein Hundertstel, ein Beweis, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des von den Planeten zurückgeworfenen Lichtes dieselbe ist, wie die des von den Fixsternen kommenden.

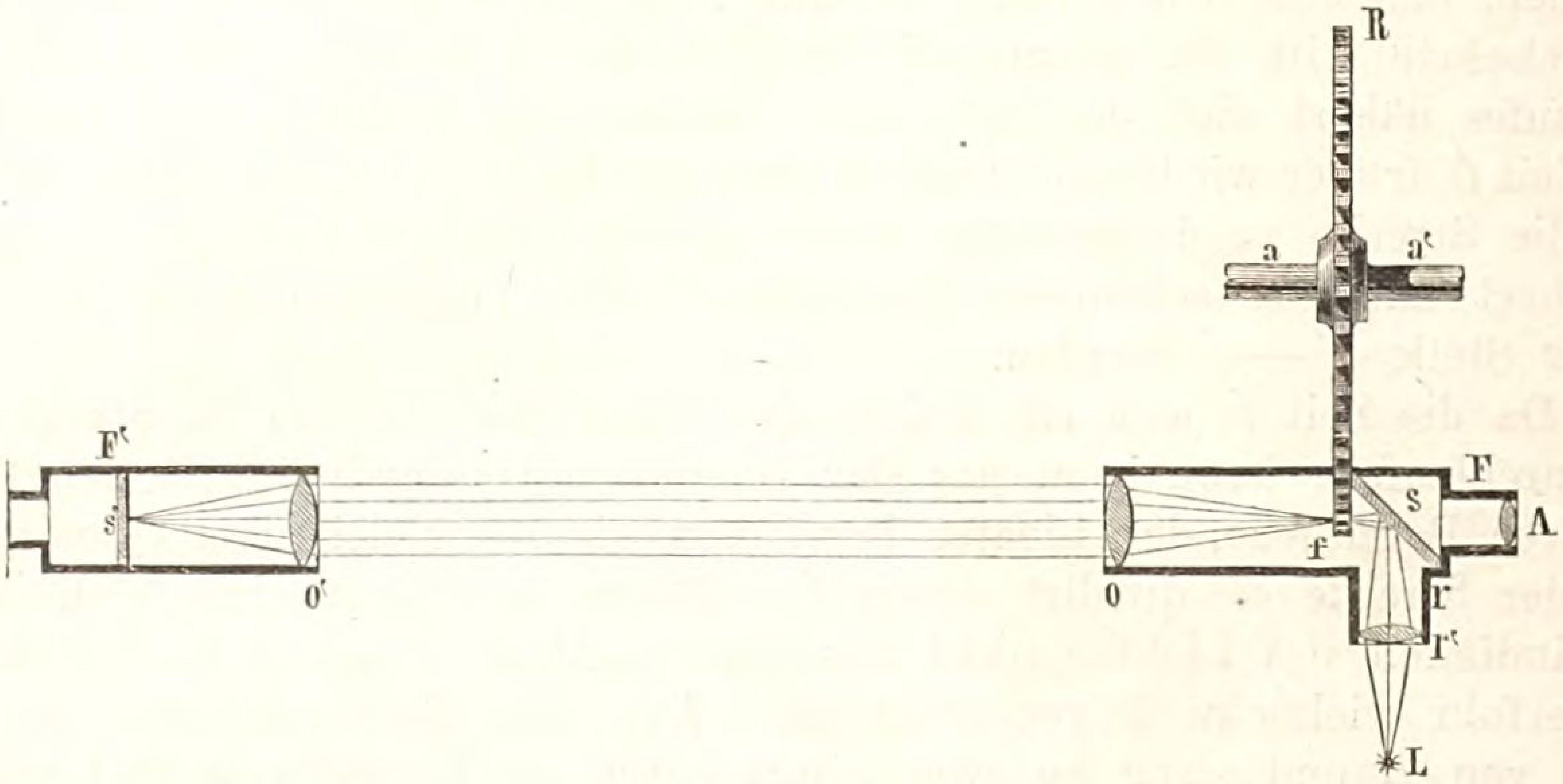
§. 123.

Geschwindigkeit des Lichtes irdischer Lichtquellen. Dass auch das von irdischen Lichtquellen ausgesandte Licht sich mit derselben Geschwindigkeit ausbreitet, ist in neuerer Zeit durch die Messungen von Fizeau, Cornu und Foucault nachgewiesen worden. Wir begnügen uns hier die von Fizeau angewandte Methode, nach der auch Cornu seine Messungen ausführte, zu beschreiben, da wir die Foucault'sche noch an einer andern Stelle zu besprechen haben.

Die von Fizeau gewählte Anordnung zeigt Fig. 153. In einer Entfernung von 8633 Meter wurden zwei Fernrohre F und F' so aufgestellt, dass ihre optischen Axen genau eine gerade Linie bildeten, so dass man also durch F das Objectiv o' des zweiten Fernrohrs F' sehen konnte.

Ein im Brennpunkte f des Fernrohrobjectivs o angebrachter leuchtender Punkt sendet dann durch das Objectiv ein Bündel paralleler Strahlen auf

Fig. 153.



das Objectiv o'. In diesem werden dann die Strahlen so gebrochen, dass sie alle in dem Brennpunkte von o' vereinigt werden. Um einen solchen leuchtenden Punkt f im Fernrohr F herzustellen, brachte Fizeau an dem Fernrohr die seitliche Röhre rr' an, die vorn durch eine Linse kurzer Brennweite geschlossen war; vor die Linse bei L wurde die Flamme einer hellbrennenden Lampe aufgestellt. Im Innern des Fernrohrs befand sich bei s ein kleiner, nur zur Hälfte belegter Spiegel unter 45^0 gegen die Axe des Fernrohrs geneigt. Die von der Lampenflamme L ausgehenden in der Linse, wie es die Figur andeutet, gebrochenen Strahlen wurden dann an dem Spiegel nach f hin reflectirt und dort zu einem Bilde der Flamme vereinigt. Da dieses Bild aus den von s nach f reflectirten Strahlen entsteht, sendet es nur Licht nach o und weiter zum Fernrohr F_1, ein bei A in das Fernrohr hineinsehendes Auge kann dieses Bild nicht sehen.

Die nun aber durch o von f aus nach o' sich fortpflanzenden Strahlen werden, wie vorher erwähnt, in dem Brennpunkte des Objectivs o' vereinigt. Dort ist genau senkrecht zur Axe des Fernrohrs ein kleiner ebener Spiegel aufgestellt, an welchem dann die ankommenden Strahlen wieder zu dem Objective o' zurückgeworfen werden. Von dort aus gehen sie dann auf demselben Wege, auf dem sie von o zu o' kamen, wieder zu dem Objective o zurück, werden dort gebrochen und im Punkte f wieder vereinigt, wo sie wieder ein kleines Bildchen der Lampenflamme bilden. Dieses Bildchen, da es aus von o nach f sich fortpflanzenden Strahlen entsteht, sendet Licht durch die unbelegte Spiegelhälfte nach A hin, es ist somit dem bei A in das Fernrohr schauenden Auge sichtbar. Das so sichtbare Bild rührt somit von Strahlen her, welche von f aus den Weg nach F' hin und zurück durchlaufen hatten, und die Aufgabe, die Fizeau sich gestellt hatte, war, die Zeit zu messen, welche das Licht zum Durchlaufen dieses Weges brauchte.

Zu dem Zwecke ragte durch die obere Fernrohrwand in das Innere des Fernrohrs ein gezahntes Rad, welches um eine Axe aa' in Rotation versetzt werden konnte, die genau parallel der Fernrohraxe war. Das Rad hatte 720 ganz genau gleiche Zähne, und die Zahnlücken hatten genau

die gleiche Form und besonders die gleiche Breite wie die Zähne. Das Rad war so gestellt, dass wenn ein Zahn unten war, derselbe genau vor dem Punkte f stand, so dass das von dem Spiegel nach f reflectirte Licht den Zahn nicht passiren konnte. Ein bei A in das Fernrohr blickendes Auge sah dann kein Bild der Flamme L. War dagegen eine Lücke unten, so konnte das Licht sowohl auf dem Wege nach F' als auf dem Rückwege die Lücke passiren, und das Auge bei A sah das Bildchen der Lampenflamme. Das Bildchen bestand also aus Strahlen, welche die Lücke zweimal passirt hatten, das zweite Mal, nachdem sie den Weg zum Fernrohr F' hin und zurück, also einen Weg von 17266 Meter, durchlaufen hatten.

Wie man nun mit Hülfe des rotirenden Rades die Geschwindigkeit des Lichtes messen kann, ist ersichtlich. Rotirt das Rad hinlänglich schnell, so muss es sich erreichen lassen, dass das Licht, welches nach F' austritt, wenn eine Lücke unten ist, jedesmal bei seiner Rückkehr den auf die Lücke folgenden Zahn findet, es kann also nicht nach f und weiter nach A zurückkehren. Bei dieser Rotationsgeschwindigkeit muss also das Bild der Flamme unsichtbar werden; verdoppelt man dann die Rotationsgeschwindigkeit, so trifft das zurückkehrende Licht die nächstfolgende Lücke, es kann sich zu f und A fortpflanzen, und das Bild der Flamme ist wieder sichtbar. Bei verdreifachter Rotationsgeschwindigkeit tritt an die Stelle der Lücke der zweite Zahn, das Licht muss wieder verschwunden sein; bei vervierfachter muss es wieder sichtbar sein u. s. f.

Kennt man die Rotationsgeschwindigkeit des Rades, so erhält man daraus die Zeit, in welcher eine Lücke durch den nächstfolgenden Zahn etc. ersetzt wird, somit die Zeit, welche das Licht gebraucht hat, um die Strecke von 17266 Meter zu durchlaufen. Die Rotationsgeschwindigkeit des Rades bestimmte Fizeau aus dem Ton, der nach §. 98 entstand, indem er die Zähne des Rades gegen eine dem Rade genäherte Karte schlagen liess.

Die Versuche von Fizeau ergaben, dass die Erscheinung dieser Entwicklung entsprechend verlief. Als Mittel aus allen Versuchen ergab sich, dass bei einer Geschwindigkeit des gezahnten Rades von 12,6 Umdrehungen in der Secunde das Licht zum ersten Male verschwand, dass es bei der doppelten wieder sichtbar war, bei der dreifachen wieder verschwand. Die Zeit t, in welcher bei der Rotationsgeschwindigkeit 12,6 an die Stelle einer Lücke der folgende Zahn trat, ist

$$t = \frac{1}{12{,}6 \,.\, 1440}.$$

Da in dieser Zeit das Licht einmal hin und her ging, also die Strecke von 17266 Metern zurücklegte, ergibt sich als Geschwindigkeit des Lichtes

$$c = \frac{17266}{t} = 17266 \,.\, 12{,}6 \,.\, 1440 = 313274304 \text{ Meter},$$

eine Zahl, die äusserst nahe mit der aus der Verfinsterung der Jupitertrabanten und der Enke'schen Sonnenparallaxe abgeleiteten übereinstimmt.

Der von Foucault einige Jahre später aus seinen Messungen abgeleitete Werth stimmte dagegen fast genau mit dem aus den Beobachtungen Römers und dem grössern Werthe der Sonnenparallaxe sich ergebenden Werthe überein, Foucault erhielt nämlich

$$c = 298500 \text{ Kilometer}.$$

Deshalb hat vor Kurzem Cornu die Messung nach der Fizeau'schen Methode wiederholt unter Verwendung mehrerer mit der grössten Sorgfalt hergestellter gezahnter Räder und einzelner Verbesserungen an dem Bewegungsmechanismus derselben, so dass die Bewegung genau constant erhalten werden und die Rotationsgeschwindigkeit genauer bestimmt werden konnte. Die beiden Fernrohre hatten eine Entfernung von 10310 Meter, das eine war in der école polytechnique zu Paris, das andere auf dem bei Paris liegenden Fort Mont Valerien aufgestellt. Cornu konnte eine solche Rotationsgeschwindigkeit seiner Räder herstellen, dass er zum siebenten Mal die Verdunklung beobachten konnte. Aus mehr als 1000 Beobachtungen erhielt Cornu folgende Werthe in Kilometern

2. Verd.	3. Verd.	4. Verd.	5. Verd.	6. Verd.	7. Verd.
302600	297300	298500	298800	297500	300400
(17)	(236)	(376)	(480)	(91)	(97)

Als erste Verdunklung ist diejenige bezeichnet, welche bei der kleinsten Rotationsgeschwindigkeit der Räder eintrat, die zweite entspricht der dreifachen, die dritte der fünffachen Rotationsgeschwindigkeit Die eingeklammerten Zahlen geben das Gewicht jedes Resultates an, welches von der Anzahl der einzelnen Beobachtungen, dem Zustande der Atmosphäre etc. abhängig ist. Als Generalmittel gibt Cornu

$$c = 298400 \text{ Kilom.}$$

oder wie wir später sehen werden für den leeren Raum

$$c = 298500 \text{ Kilom.}$$

Die Unsicherheit schätzt Cornu auf $^1/_3$ Procent, also auf etwa 900 Kilometer. Die Zahl ist nur um diese Unsicherheit von der Roemer'schen mit dem grössern Werthe der Sonnenparallaxe verschieden.

Alle diese Messungen beweisen, dass das Licht, aus welcher Quelle es auch entstammt, sich mit derselben Geschwindigkeit ausbreitet; die Messungen von Foucault und Cornu führen dann auf $8'',86$ als Werth der Sonnenparallaxe.

§. 124.

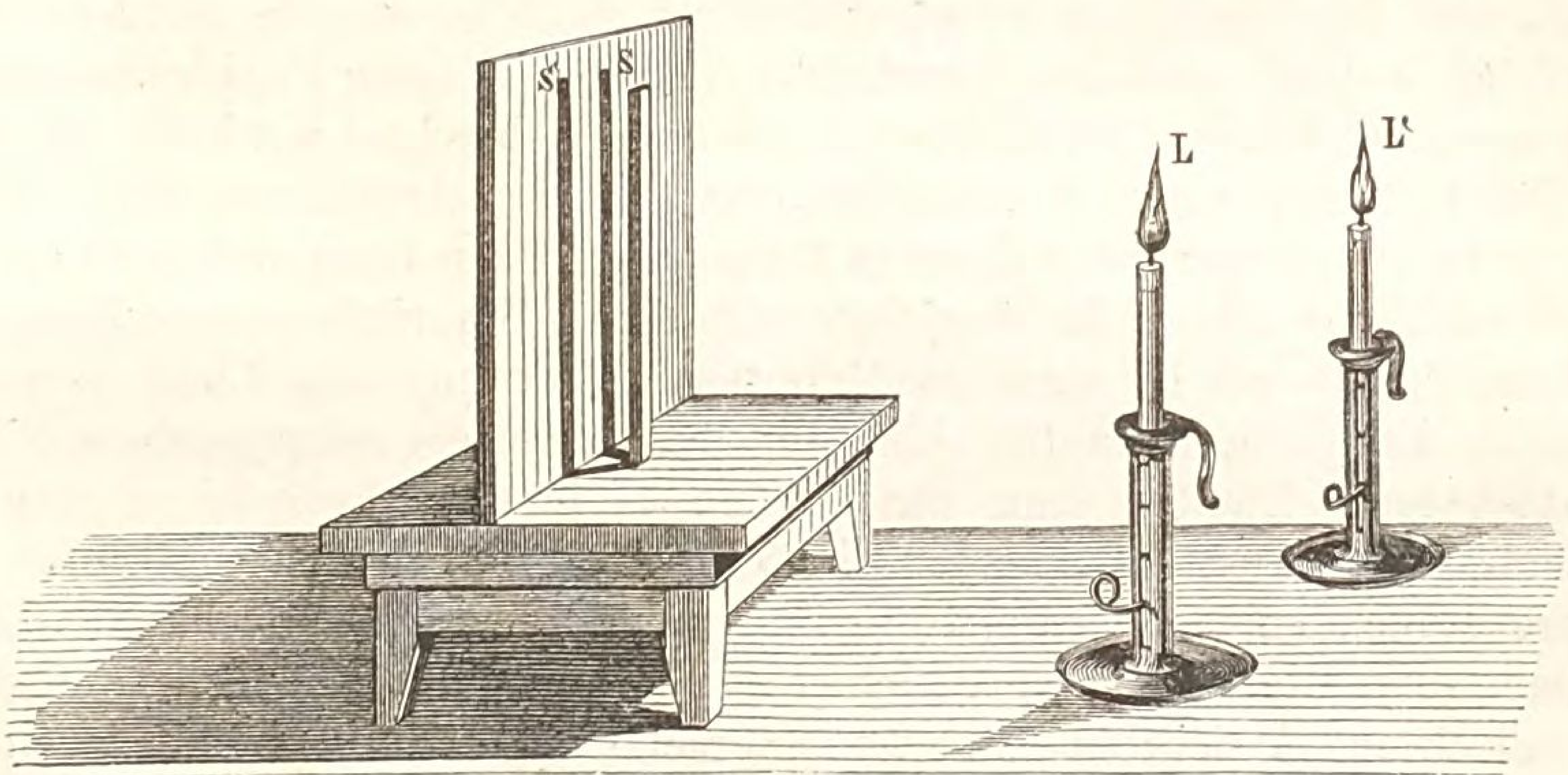
Abnahme der Lichtstärke bei der Ausbreitung. Messung der Lichtstärke. Wenn das Licht von einer Lichtquelle sich nach allen Seiten ausbreitet, so tritt eine Abnahme seiner Stärke ein, das heisst, ein und dieselbe Fläche wird in grösserer Entfernung von der Lichtquelle weniger hell beleuchtet als in kleinerer. Es fragt sich, nach welchem Gesetze nimmt die Helligkeit der Beleuchtung mit zunehmender Entfernung ab.

Zur Auffindung des Gesetzes ist eine Messung der Lichtstärken erforderlich; eine solche ist mit grossen Schwierigkeiten verknüpft, ähnlich wie eine Messung der Schallstärken, denn das Licht wird für uns erst zum Licht, wenn es in unser Auge eindringt. Besteht auch die Ursache des Lichtes fort, für ein geschlossenes Auge existirt das Licht als solches nicht. Eine Messung von Lichtstärken kann deshalb nur die Vergleichung zweier Beleuchtungen nach subjectiver Schätzung sein. Darauf beruhen auch alle Photometer oder Lichtmesser. Das dabei angewandte Princip

ist folgendes. Zwei an einander grenzende Stücke einer Fläche werden von verschiedenen Lichtquellen beleuchtet, die Wirkung der stärker leuchtenden Lichtquelle wird dann, bei den zunächst zu besprechenden Photometern durch Vergrösserung der Entfernung von der von ihr beleuchteten Fläche geschwächt, so weit bis beide beleuchteten Flächen auf das Auge den Eindruck gleich heller Beleuchtung machen. Kennt man dann aus anderweiter Erfahrung das Verhältniss der von beiden Quellen ausgesandten Lichtmengen, so kann man auf diese Weise das Gesetz ableiten, nach welchem mit der Entfernung die Lichtstärke abnimmt; kennt man letzteres, so kann man rückwärts mit Hülfe desselben das Verhältniss der von beiden Quellen ausgesandten Lichtmengen erhalten.

Das einfachste Photometer ist das von Rumford; dasselbe besteht (Fig. 154) aus einem verticalen weissen Schirme, vor welchem in geringer

Fig. 154.



Entfernung ein verticaler Stab von Holz oder nicht glänzendem Metall aufgestellt ist. Bringt man nun in einiger Entfernung von dem Photometer zwei Lichtquellen L und L' an, so entstehen auf dem Schirme zwei Schatten S von L und S' von L' an den Stellen, denen die Säule die Lichter verdeckt; durch passendes Schieben der Lichter kann man die Schatten zur Berührung bringen. Jeder dieser Schatten erhält Licht von der ihn nicht veranlassenden Lichtquelle, es wird also S von L' und S' von L beleuchtet. Wenn nun beide Schatten dem Auge gleich hell erscheinen, so schliesst man daraus, dass die Helligkeit des sie beleuchtenden Lichtes die gleiche ist. Denn welches auch sonst die Beleuchtung des Schirmes ist, ob er ausser von L und L' noch anderes Licht erhält oder nicht, die beiden Schatten unterscheiden sich nur dadurch, dass der eine von der einen, der andre von der andern Lichtquelle Licht erhält; ein Unterschied ihrer Helligkeit kann deshalb nur daher rühren, dass von der einen Lichtquelle mehr Licht auf den Schirm kommt als von der andern. Sind beide Schatten gleich hell und ist gleichzeitig $S'L = SL'$, so folgt, dass die beiden Lichter gleiche Stärke haben, sind die Abstände verschieden, so ist das entferntere Licht das stärkere.

Die rein subjective Vergleichung zweier Flächen, bei diesem und ähnlichen Photometern, wird in etwas durch eine begleitende Erscheinung unter-

stützt bei dem Photometer von Bunsen, mit dem jedenfalls genauere Resultate zu erhalten sind.

Weisses Papier ist nicht durchsichtig, aber durchscheinend, das heisst beleuchtet man einen Bogen weissen Papiers von hinten, so nimmt man durch das Papier einiges Licht wahr. Tränkt man das Papier mit Fett, mit Oel oder Stearin, so wird es mehr durchscheinend; ein Stearinfleck in einem sonst nicht befetteten von hinten beleuchteten Bogen weissen Papiers erscheint hell auf dunklem Grunde. Wenn man dagegen das weisse mit einem Stearinfleck versehene Papier von vorn beleuchtet, so erscheint der Stearinfleck dunkel auf hellem Grunde, und zwar deshalb, weil das mit Stearin getränkte Papier in demselben Verhältniss weniger Licht zurückwirft, als es mehr durchlässt wie das weisse Papier. Denn sowohl an dem befetteten als nicht befetteten Papier theilt sich das ankommende Licht in zurückgeworfenes und durchgehendes, wenn wir von der geringen Menge im Papier festgehaltenen Lichtes absehen, dort wo mehr Licht durchgeht, muss also weniger zurückgeworfen werden. Daraus folgt weiter, dass der Stearinfleck in dem weissen Papier unsichtbar wird, wenn das Papier von hinten ebenso stark beleuchtet wird als von vorn.

Diese Erscheinung benutzt Bunsen zur Construction seines Photometers. In einem vertical stehenden Rahmen wird ein Blatt weissen Papieres ausgespannt und dieses in der Mitte mit einem Stearinfleck versehen; hinter demselben wird in einer bestimmten Entfernung ein Licht von constanter Helligkeit aufgestellt. Um nun die vorhin erwähnte geringe Menge des absorbirten Lichtes ganz unschädlich zu machen, vergleicht man die Lichtstärke des zu untersuchenden Lichtes nicht direkt mit diesem hinter dem Papiere stehenden, sondern man bringt vor den Schirm zunächst das Licht, mit dem man die andern vergleichen will, und stellt dasselbe so, dass der Stearinfleck nicht sichtbar ist. Dann ersetzt man dieses Licht durch das zu untersuchende und bestimmt den Abstand desselben vom Schirme, bei welchem der Stearinfleck wieder verschwindet. Da in beiden Fällen die Beleuchtung des Papieres auf der Rückseite genau dieselbe war, so ist auch die Beleuchtung der Vorderseite durch beide Lichtquellen jetzt genau dieselbe.

Vergleicht man nun mit einem Photometer, etwa dem Bunsen'schen, die Abnahme der Beleuchtung mit Entfernung der Lichtquelle, so erkennt man zunächst, dass bei Vergrösserung des Abstandes um die gleiche Grösse die Abnahme der Helligkeit der Beleuchtung eine sehr verschiedene ist je nach dem ursprünglichen Abstande. Das heisst, verschwand bei Anwendung eines bestimmten Lichtes der Fleck, wenn sich das Licht in der Entfernung eines Meters befand, so erscheint bei Vergrösserung der Entfernung auf zwei Meter der Fleck sehr hell auf dunkelm Grunde; verschwand dagegen bei Anwendung eines andern Lichtes der Fleck, wenn das Licht zehn Meter von dem Schirm entfernt war, so ist er nur eben sichtbar, wenn wir dieses Licht um einen Meter weiter entfernen, es also in die Entfernung elf Meter bringen. Daraus folgt, dass die Abnahme der Lichtstärke nicht daher rühren kann, dass das Licht bei seiner Ausbreitung vernichtet oder verschluckt wird, denn in dem Falle müsste eine Schicht der gleichen Dicke auch immer dieselbe Lichtmenge in sich festhalten. Würde also in dem ersten Falle die weiter zwischen der Licht-

quelle und dem Photometer eingeschaltete Schicht von einem Meter Dicke die Hälfte des an ihrer Vorderfläche ankommenden Lichtes verschluckt haben, so hätte das auch in dem zweiten Falle geschehen müssen, es hätte also in dem zweiten Falle die Abnahme der Beleuchtung des Photometers dieselbe sein müssen wie in dem ersten Falle.

Man kann sich dagegen leicht überzeugen, dass die gleiche Abnahme der Beleuchtung dann eintritt, wenn die Entfernung der Lichtquelle in demselben Verhältnisse zu dem ursprünglichen Abstande vergrössert wird. Stellen wir uns zwei Lichtquellen her, etwa durch passend regulirte Gasflammen, von denen die eine den Stearinfleck des Photometers in ein Meter Abstand, die andere in zwei Meter verschwinden lässt. Wir bringen dann die erste Lichtquelle in zwei Meter Entfernung und reguliren nun das hinter dem Schirm stehende Licht entweder durch Vergrösserung der Entfernung oder Verkleinerung der Flamme so, dass jetzt der Fleck verschwindet, wenn das erste Licht zwei Meter vom Photometer entfernt ist. Wir finden dann, dass das zweite Licht auch in der doppelten Entfernung, also in vier Meter den Fleck zum Verschwinden bringt.

Da somit die Lichtwirkung in gleicher Weise geschwächt wird, wenn die Entfernungen in gleichem Verhältnisse wachsen, so muss die Ursache der Schwächung eben in der Ausbreitung des Lichtes liegen, und es lässt sich leicht erkennen, dass die Lichtmenge, welche gleiche Flächen von einer und derselben Lichtquelle erhalten, in dem Verhältnisse kleiner wird, als die Quadrate der Entfernungen von der Lichtquelle wachsen. Eine Lichtquelle sendet Licht gleichmässig nach allen Richtungen des Raumes; das in einem bestimmten Momente die Lichtquelle verlassende Licht ist in einem spätern Momente auf einer Kugelfläche vom Radius r vertheilt. Nennen wir die gesammte Lichtmenge, welche in dem betrachteten Momente die Lichtquelle verliess J, so ist die Lichtmenge, welche auf die Flächeneinheit der Kugel kommt,

$$i = \frac{J}{4 \pi r^2}.$$

Diese selbe Lichtmenge J ist es nun, welche sich weiter ausbreitet, welche also in einem noch spätern Momente eine Kugel vom Radius r_1 beleuchtet. Die Flächeneinheit dieser Kugelfläche erhält somit

$$i_1 = \frac{J}{4 \pi r_1^2}.$$

Das Verhältniss der die Flächeneinheit, somit auch gleiche Flächen beider Kugeln treffenden Lichtmengen ist darnach

$$i : i_1 = \frac{1}{r^2} : \frac{1}{r_1^2},$$

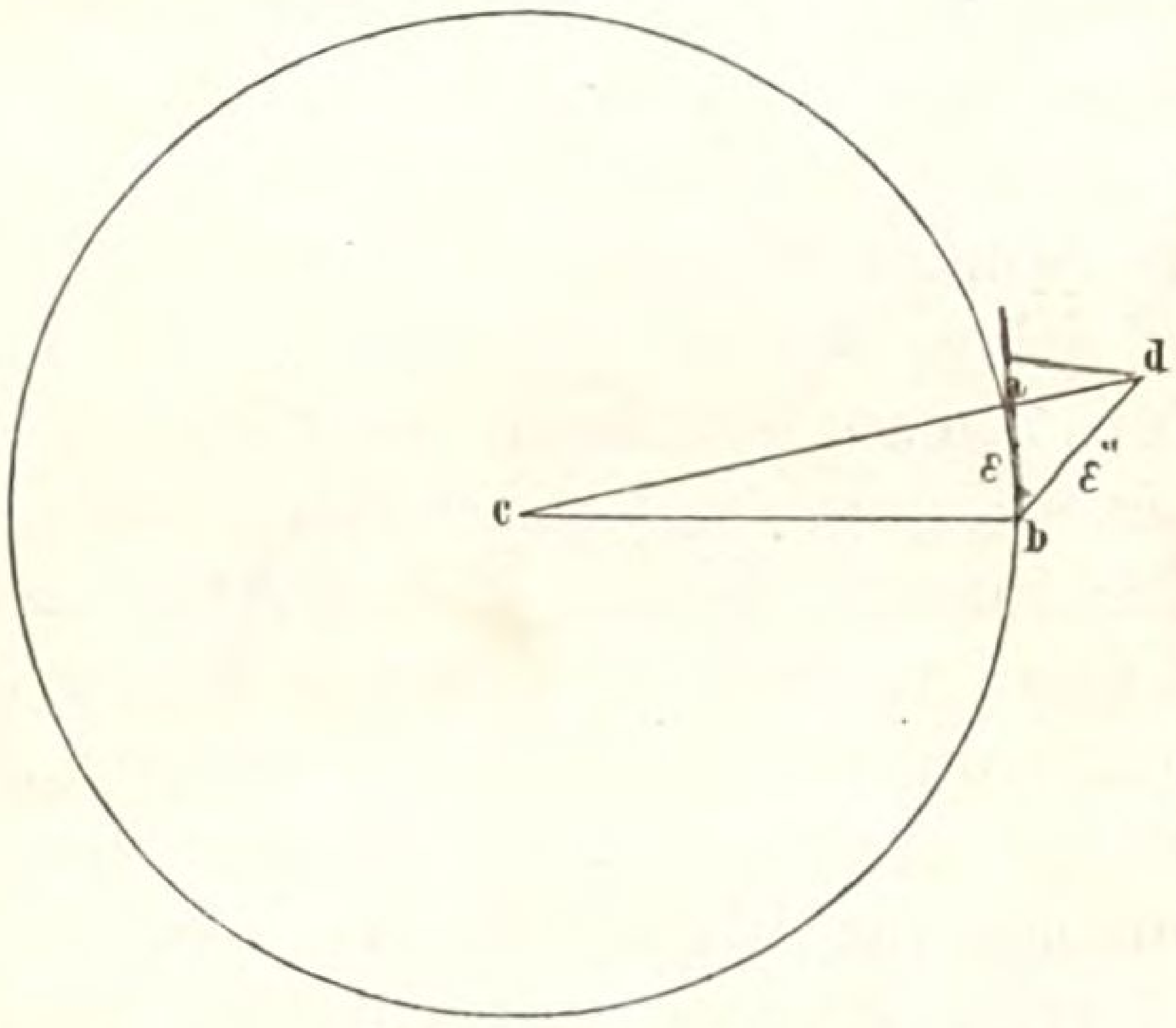
sie verhalten sich umgekehrt wie die Quadrate der Abstände von der Lichtquelle.

Die Richtigkeit dieses Satzes lässt sich wenigstens annähernd mit dem Photometer nachweisen. Denn nach dem Grundsatze, dass eine Fläche in demselben Maasse stärker beleuchtet wird, als sie mehr Licht erhält und nach dem nicht anzuzweifelnden Satze, dass n gleiche Lichtquellen n mal so viel Licht aussenden als jede einzelne, wird eine Fläche im

Abstande 1 von n Lichtern n mal so hell beleuchtet als von einem Lichte. Wenn wir nun bei einem Bunsen'schen Photometer die Entfernung für eine Kerzenflamme aufsuchen, für die der Fleck unsichtbar wird, so ist die Entfernung für 4 parallel der Schirmfläche möglichst nahe zusammen aufgestellte gleiche Kerzenflammen die doppelte, für 9 sehr nahe die dreifache etc.

Man wird indess das Gesetz nur annähernd bestätigt finden, weil die bei seiner Ableitung gemachte Voraussetzung, dass alle Strahlen, welche die Fläche treffen, auch senkrecht zu der Fläche einfallen, nicht erfüllt ist, und weil die Beleuchtung einer Fläche von dem Winkel, unter welchem die Strahlen einfallen, abhängig ist. Bei der Ableitung des Gesetzes betrachteten wir nämlich ein Stück ab Fig. 155 der Kugelflächen, bis zu denen sich das Licht ausgebreitet hat, in verschiedenen Entfernungen von der Lichtquelle als Mittelpunkt dieser Kugelflächen; da die Strahlen dann Radien dieser Kugelflächen waren, fiel alles Licht normal zur Fläche ein. Nehmen wir nun aber statt der Flächen ab Fig. 155 die zwischen denselben Radien eingeschlossene Fläche bd, so erhält diese genau dieselbe Menge Licht, wie das Stück $ab = \varepsilon'$ der Kugelfläche. Gleich grosse Stücke auf den beiden Flächen ε' und $bd = \varepsilon''$ erhalten also Lichtmengen, welche sich umgekehrt verhalten wie die Grösse der Flächen, auf welche sich die gleichen Lichtmengen vertheilen. Ist also m die Lichtmenge, welche die ganzen Flächen erhalten, so bekommen die Flächeneinheiten in beiden Flächen

Fig. 155.



$$i_1 = \frac{m}{\varepsilon'}; \qquad i_2 = \frac{m}{\varepsilon''}; \qquad i_2 = i_1 \frac{\varepsilon'}{\varepsilon''};$$

der Quotient $\frac{\varepsilon'}{\varepsilon''}$, das Verhältniss der Grösse der beiden Flächen, ist nun gleich dem Cosinus des Winkels, den die beiden Flächen mit einander bilden, und dieser Winkel ist gleich dem, welchen die Richtung cb, also die Richtung der einfallenden Lichtstrahlen mit der zur Fläche ε'' normalen Richtung bildet. Letztere Richtung nennt man das Einfallsloth, und den Winkel, welchen die einfallenden Strahlen mit dem Einfallsloth bilden, den Einfallswinkel. Es folgt also, dass wenn Flächen nicht senkrecht von Strahlen getroffen werden, die Lichtmengen, welche gleich grosse Flächenstücke erhalten, sich verhalten wie die Cosinus der Einfallswinkel.

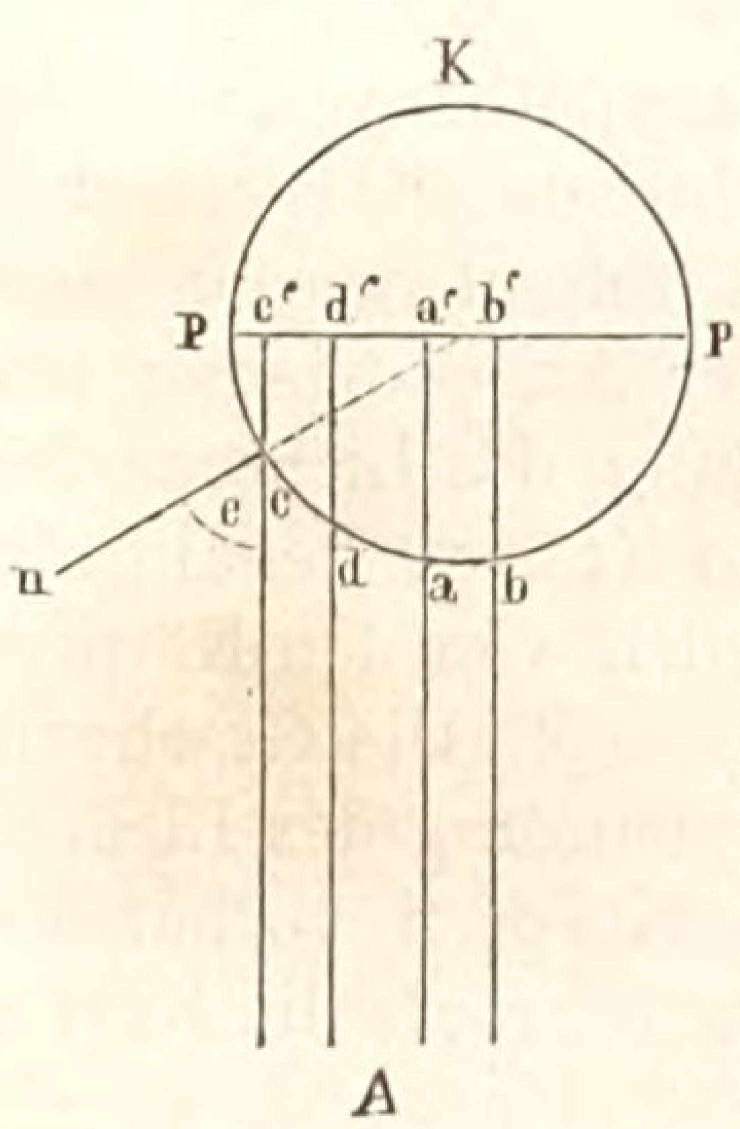
Von diesem Einfluss des Einfallswinkels kann man sich leicht mit dem Bunsen'schen Photometer überzeugen. Man stellt ein Licht so auf, dass der Fleck verschwunden ist, wenn die Verbindungslinie des Fleckes mit dem Licht senkrecht zur Schirmebene ist. Man dreht dann den Schirm, während man dafür sorgt, dass das hinter dem Schirm stehende Licht immer so steht, dass die Verbindungslinie des Fleckes mit demselben senkrecht zur Schirmebene bleibt. Sofort sieht man, wie der Fleck hell auf

dunkelm Grunde wird, und dass es einer Annäherung des vor dem Schirme aufgestellten Lichtes bedarf, um ihn wieder zum Verschwinden zu bringen.

Dass dieser Umstand auf das Resultat der Versuche zur Prüfung des Gesetzes über die Abnahme der Lichtstärke von Einfluss sein muss, ist ersichtlich. Denn stellen wir statt eines vier oder neun Lichter auf, so sind die Verbindungslinien der äussersten Flammen mit dem Flecke nicht mehr senkrecht zur Schirmebene; da somit der Einfallswinkel der von diesen kommenden Strahlen von 0^0 verschieden ist, ist die Beleuchtung von den äusseren Flammen eine schwächere.

Bei breiten leuchtenden Flächen ist auch der Winkel, unter dem die Strahlen die Fläche verlassen, auf die Beleuchtung von Einfluss. Nennen wir den Winkel, den die ausgehenden Strahlen mit der Normale der Fläche bilden, den Ausstrahlungswinkel, so ist die Lichtmenge, welche ein und dieselbe Fläche von einer und derselben leuchtenden Fläche erhält, dem Cosinus des Ausstrahlungswinkels proportional. Es folgt das aus der bekannten Erfahrung, dass eine leuchtende Kugel, wie die Sonne oder der Mond, uns als eine gleichmässig leuchtende Fläche erscheint. Ist *K* Fig. 156 eine solche Kugel, welche gegen das Auge *A*, das wir uns so weit entfernt denken, dass alle von der Kugel das Auge treffenden Strahlen als parallel angesehen werden können, ihr Licht sendet, so folgt aus der gleichmässigen Helligkeit, dass Flächenstücke der Kugel, deren Projectionen auf den Durchschnitt *pp* der Kugel von gleicher Grösse sind, unserm Auge die gleiche Menge Licht senden. Die Flächen *ab* und *cd*, deren Projectionen *a'b'* und *c'd'* einander gleich sind, haben eine sehr verschiedene Grösse. Nehmen wir an, *ab* entspreche dem Mittelpunkte der gesehenen Scheibe, so ist $ab = a'b'$, da das Flächenelement *ab* dann dem Durchschnitte *pp* parallel ist. Dagegen ist, wenn wir den Winkel, den die Richtung *cA* mit der zu *cd* senkrechten Richtung *cn* bildet, mit *e* bezeichnen, da das Flächenstück *cd* unter demselben Winkel *e* gegen *pp* geneigt ist,

Fig. 156.



$$cd = \frac{c'd'}{\cos e} = \frac{a'b'}{\cos e}.$$

Da somit die Fläche, von der die Strahlen unter dem Winkel *e* ausstrahlen, uns ebensoviel Licht sendet, als eine andere, welche im Verhältniss $\cos e : 1$ kleiner ist und von der das Licht normal ausstrahlt, so folgt, dass bei gleicher Grösse eine Fläche, von der die Strahlen unter dem Winkel *e* ausstrahlen, im Verhältniss von $\cos e : 1$ weniger Licht ausstrahlt oder die Menge des von einer Fläche nach irgend einer Richtung ausgestrahlten Lichtes ist dem Cosinus des Ausstrahlungswinkels proportional. Wenn wir breite leuchtende Flächen, etwa breite Flammen haben, ist also bei Prüfung des Gesetzes über die Abnahme der Lichtstärke auch auf diesen Umstand Rücksicht zu nehmen.

§. 125.

Hypothesen über die Natur des Lichtes. Nach der Kenntnissnahme der Gesetze, nach welchen die ungestörte Ausbreitung des Lichtes

stattfindet, suchen wir sofort die Frage zu beantworten, ob uns dieselben irgend einen Aufschluss über die Natur des Lichtes geben.

Wir können überhaupt zwei Hypothesen über die Natur des Lichtes bilden. Da wir gesehen haben, dass das Licht von den Lichtquellen aus nach allen Richtungen sich ausbreitet, so kann das sich ausbreitende entweder ein Stoff sein, der von den Lichtquellen nach allen Richtungen ausgeschleudert wird, oder es kann ein Zustand sein, der in dem die Lichtquellen umgebenden Medium erregt wird und in demselben sich nach allen Richtungen fortpflanzt; ein solcher Zustand kann nur in einer Bewegung des Mittels bestehen, und zwar nur in einer schwingenden, bei der die einzelnen Theile des Mittels sich um eine Gleichgewichtslage hin und her bewegen. Denn bei Annahme einer fortschreitenden Bewegung würde die zweite mit der ersten Hypothese zusammenfallen. Die zweite Hypothese würde demnach das Licht als eine dem Schalle analoge Erscheinung auffassen.

Beide Hypothesen sind aufgestellt und im Laufe der Zeit vervollständigt und zur Erklärung der Lichterscheinungen benutzt worden, bis sich in unserm Jahrhundert die Unhaltbarkeit der ersten Hypothese herausstellte.

Diese erste von Newton ausgeführte Emissionshypothese sieht das Licht an als materielle Theile, welche von den leuchtenden Körpern ausgeschleudert werden, und dann denselben Gesetzen folgen wie die geworfenen Körper. Wenn diese Lichttheilchen in unser Auge dringen und zur Netzhaut gelangen, so erhalten wir die Empfindung des Lichtes. Die Lichttheilchen sind mit anziehenden und abstossenden Kräften begabt, die indess nur auf molekulare Distanzen wirken, sie werden von den Körpern unter Umständen angezogen, unter Umständen abgestossen. Die Geschwindigkeit, mit der sie sich bewegen, ist diejenige der Fortpflanzung des Lichtes.

Solche Theilchen sind nur in den leuchtenden Körpern vorhanden, die von diesen ausgesandte Menge ist in dem Maasse grösser, als die Körper heller leuchten.

Um die verschiedene Farbe des Lichtes zu erklären, nimmt die Hypothese an, dass es verschiedene Arten von Lichttheilchen gebe, und zwar soviele Arten, als es verschiedene Farben gibt, es gibt gewisse Theilchen, die wir als rothe, andere, die wir als grüne empfinden u. s. f. Was das Unterscheidende der Lichttheilchen eigentlich ist, lässt sich nicht näher angeben, nur werden wir später aus den Brechungserscheinungen erkennen, dass den verschiedenen Lichttheilchen jedenfalls eine verschiedene Masse zukommt.

Die zweite von Huyghens aufgestellte Hypothese nimmt an, dass der ganze Weltraum mit einer äusserst feinen Materie, dem Aether angefüllt sei, der also sich in dem sogenannten leeren Raume zwischen den Gestirnen und ebenso in dem Raume zwischen den Molekülen der Körper befindet. Dieser Aether ist von einer solchen Feinheit, dass er der Bewegung der Gestirne keinen merkbaren Widerstand entgegensetzt, ja dass die Gestirne durch ihn hindurchgehen, ohne ihn mit fortzuführen; er durchdringt die Körper nach dem Bilde von Thomas Young so frei, wie der Wind durch das Laub eines Baumes hindurchgeht. Wie etwa ein vielfach durchlöcherter Körper die Luft nicht mitnimmt, sondern wie die festen

Theile des Körpers die Luft nur etwas zur Seite drängen, so dass sie frei durch die Löcher streichen kann, so drängen die Moleküle der im Aether bewegten Körper denselben nur etwas zur Seite, so dass er, ohne mitgenommen zu werden, die Poren des Körpers durchstreicht.

Die Lichtquellen erzeugen in diesem Aether eine schwingende Bewegung und diese nach den Gesetzen der Wellenbewegung sich ausbreitenden Schwingungen des Aethers sind die Ursache des Lichtes, wie die Schwingungen der Luft den Schall ausmachen. Dringen die Schwingungen des Aethers in unser Auge und treffen die Stösse des in unserm Auge bewegten Aethers die Netzhaut, so empfinden wir Licht, wie die Stösse der am Trommelfell bewegten Luft uns den Schall übermitteln.

Die Intensität des Lichtes wird durch die Amplitude der Schwingungen bedingt; und gerade wie wir beim Schall die Stärke desselben dem Quadrate der Amplitude proportional setzen, müssen wir dasselbe beim Licht thun. Die verschiedene Zahl der in der Zeiteinheit unser Ohr treffenden Schwingungen der Luft bestimmt die Höhe des Tones; die Undulationstheorie des Lichtes nimmt an, dass beim Licht durch die verschiedene Anzahl der Schwingungen die Verschiedenheit der Farbe bedingt sei. Die geringste Zahl der Stösse gibt die rothe Farbe, eine grössere die gelbe, dann die grüne, die grösste Zahl die violette Farbe.

Die bisher erkannten Erscheinungen der ungestörten Ausbreitung werden durch beide Theorien nahezu gleich gut erklärt, so dass aus diesen keine Entscheidung über dieselben getroffen werden kann, wenn sich auch schon hier in einem Punkte eine gewisse Ueberlegenheit der Undulationstheorie zeigt.

Beide Theorien verlangen die geradlinige Ausbreitung des Lichtes, die Undulationstheorie nach den Entwicklungen des §. 82, die Emissionstheorie nach dem Princip der Trägheit, nach welchem ein Körper in seiner Bahn verharrt, bis äussere Kräfte ihn aus derselben entfernen. So lange die Lichttheilchen daher nicht andern Körpern bis auf molekulare Distanzen nahe kommen, müssen sie in der Richtung sich fortbewegen, die ihnen einmal ertheilt ist.

Wir sahen, dass das Licht sich mit derselben Geschwindigkeit fortpflanzt, aus welcher Quelle es auch entstammt. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer Wellenbewegung ist nach §. 76 nur abhängig von der Beschaffenheit des Mediums, in welchem sie sich ausbreitet, sie ist der Quadratwurzel aus dem Quotienten von Elasticität und Dichtigkeit proportional. Die Annahme, dass das Licht eine schwingende Bewegung des Aethers sei, muss also nothwendig folgern, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit unabhängig von der Quelle des Lichtes und ebenso von der Farbe sei.

Diese Unabhängigkeit der Ausbreitungsgeschwindigkeit von der Natur der Lichtquelle ist keine nothwendige Folgerung der andern Hypothese, vielmehr muss dieselbe zu ihrer Erklärung eine neue Hypothese zu Hülfe nehmen, die nämlich, dass bei allen leuchtenden Körpern durch den Process des Ausschleuderns den Lichttheilchen dieselbe lebendige Kraft ertheilt werde, oder sie muss annehmen, dass nur solche Theilchen von uns als Licht empfunden werden, welche mit einer ganz bestimmten Geschwindigkeit in unser Auge dringen. Dass aber letztere Annahme die ganze Hypo-

these wesentlich ändert, leuchtet ein, denn dann genügt zur Empfindung des Lichtes nicht mehr die Anwesenheit der Lichttheilchen allein, sondern es wird für dieselben eine gewisse bestimmte Bewegung verlangt. Man sieht, dass hier die Undulationstheorie eine gewisse Ueberlegenheit zeigt.

Das Gesetz der Abnahme der Lichtstärke mit wachsender Entfernung von der Lichtquelle ist wieder eine nothwendige Folge beider Theorien. Für die Emissionstheorie gibt es die Ableitung des vorigen §. ganz direkt, die zeigte, dass die Lichtmenge, wir haben sie jetzt nur als die Menge der Lichttheilchen zu bezeichnen, welche eine Fläche gegebener Grösse erhält, dem Quadrate des Abstandes von der Lichtquelle umgekehrt proportional ist. Für die Undulationstheorie folgt es aus der im §. 111 gegebenen Entwicklung, nach welcher die Geschwindigkeit der in einer Kugelwelle schwingenden Lufttheilchen dem Radius der Welle umgekehrt proportional sein muss. Ganz dasselbe muss für die Geschwindigkeit oder Amplitude der Aetherschwingungen gelten. Da wir nun die Intensität des Lichtes dem Quadrate der Amplitude des schwingenden Aethers proportional setzen, so folgt, dass die Lichtintensität abnehmen muss, wie die Quadrate der Entfernung von der Lichtquelle wachsen.

Den Einfluss des Einfallswinkels auf die Beleuchtung einer Fläche erklärt die Emissionstheorie ebenfalls unmittelbar, wir haben wiederum nur in den Entwicklungen des vorigen §. für Lichtmenge Menge der Lichttheilchen zu setzen. Auch die Undulationstheorie verlangt diesen Einfluss, indem dieselbe lebendige Kraft, welche bei senkrechter Incidenz auf die Aethertheilchen übertragen wird, welche einer Fläche von der Grösse 1 entsprechen, bei einem Einfallswinkel i auf diejenigen Aethertheilchen übergeht, welche einer Fläche $\frac{1}{\cos i}$ entsprechen. Da somit die Masse der bewegten Aethertheilchen im letzteren Falle in Verhältniss $\frac{1}{\cos i} : 1$ grösser ist, muss das Quadrat der Geschwindigkeit der schwingenden Bewegung oder dasjenige der Amplitude im Verhältniss $\cos i : 1$ kleiner sein.

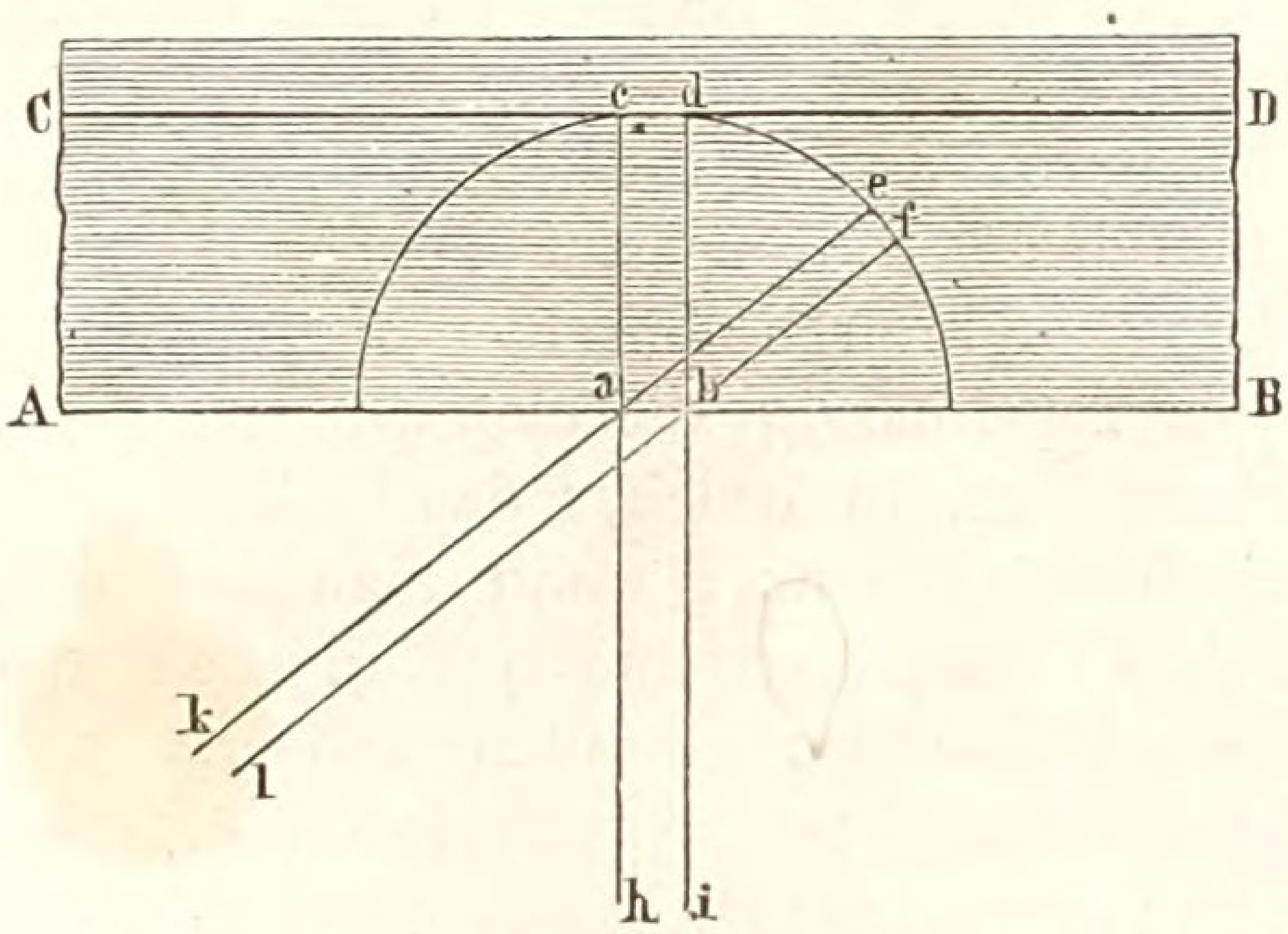
Anders verhält es sich mit dem Einfluss des Ausstrahlungswinkels, dieser ist aus keiner der beiden Theorien als Folgerung abzuleiten; man kann das indess nicht als einen Mangel derselben bezeichnen, da die Menge des nach einer bestimmten Richtung ausgesandten Lichtes jedenfalls von dem Process des Leuchtens abhängig ist, das heisst von der Art, wie das Licht von den Körpern ausgeht, über diese aber keine der beiden Hypothesen etwas aussagt.

Wir wollen indess gleich hier erwähnen, wie sich auch dieses Gesetz unmittelbar aus der von Fourier aufgestellten Hypothese ergibt, dass das Licht nicht nur aus der Grenzfläche der Körper, sondern auch aus einer gewissen Tiefe hervortritt, einerlei, ob wir das Licht als ausgesandte Theile oder als schwingende Bewegung ansehen.

Sei AB Fig. 157 die Oberfläche eines leuchtenden Körpers und ab ein Flächenelement, dessen Strahlung untersucht wird. Nach Fourier's Hypothese gehen nun von ab nicht nur die Strahlen aus, welche von ab selbst ausgesandt werden, sondern auch die, welche aus einer gewissen Tiefe kommen. Ist CD die am weitesten von der Oberfläche entfernte Schicht, aus welcher noch Strahlen nach auswärts gelangen können, so

werden alle Körperelemente, welche innerhalb einer um den Mittelpunkt von *ab* beschriebenen Halbkugel liegen, deren Radius gleich ist dem senkrechten Abstande von *AB* und *CD*, durch das Element *ab* Strahlen aussenden. Um dann die Intensität der von *ab* nach den verschiedenen Richtungen ausgehenden Strahlung zu erhalten, muss man die Strahlenbündel vergleichen, deren gerade oder schiefe Basis *ab* ist, also z. B. *hiab* und *klab*. Die einzelnen Strahlen in jedem Bündel haben gleiche Intensität, indem jeder Strahl alle von den einzelnen auf dem entsprechenden Radius der Halbkugel liegenden Körperelementen ausgesandten Lichttheilchen oder erregten Schwingungen enthält. Daraus folgt, dass die Intensitäten der von dem Element *ab* nach den verschiedenen Richtungen ausgesandten Strahlenbündel sich verhalten wie die Querschnitte der betreffenden Bündel. Diese verhalten sich aber wie die Cosinus der Ausstrahlungswinkel.

Fig. 157.



Die Fourier'sche Hypothese gibt also über diesen Satz Rechenschaft unabhängig von der Natur des Lichtes.

Man sieht somit, dass wenn sich auch zur Erklärung der ungestörten Ausbreitung des Lichtes schon eine gewisse Ueberlegenheit der Undulationstheorie zeigt, eine definitive Entscheidung, welche der beiden Theorien wir zu wählen haben, noch nicht möglich ist. Wir werden beide Hypothesen noch an weitern Erscheinungen zu prüfen haben.

Zweites Kapitel.

Die gestörte Ausbreitung des Lichtes; Reflexion und Brechung.

§. 126.

Zurückwerfung des Lichtes an ebenen Flächen. Ein bei seiner Ausbreitung auf einen nicht leuchtenden Körper treffender Lichtstrahl wird im Allgemeinen an seiner geradlinigen Fortpflanzung gehindert. Zunächst wissen wir, dass diese Körper durch das sie treffende Licht sichtbar werden, dass somit die Körper das auf sie auffallende Licht so zurückwerfen, als ginge es von ihnen aus, wobei in den meisten Fällen auch eine Aenderung der Farbe sich zeigt, indem die Körper uns, wenn sie vom Tages- oder Sonnenlicht beleuchtet werden, in den ihnen eigenthümlichen Farben erscheinen. Wir werden das so zurückgeworfene Licht an einer andern Stelle betrachten.

Ist die Oberfläche des getroffenen Körpers glatt und polirt, so sehen wir, dass das Licht nach einer Richtung, welche abhängig ist von der Richtung des den Körper treffenden Lichtes, stets stärker zurückgeworfen wird als nach den andern. Bringen wir das Auge in die Richtung dieses

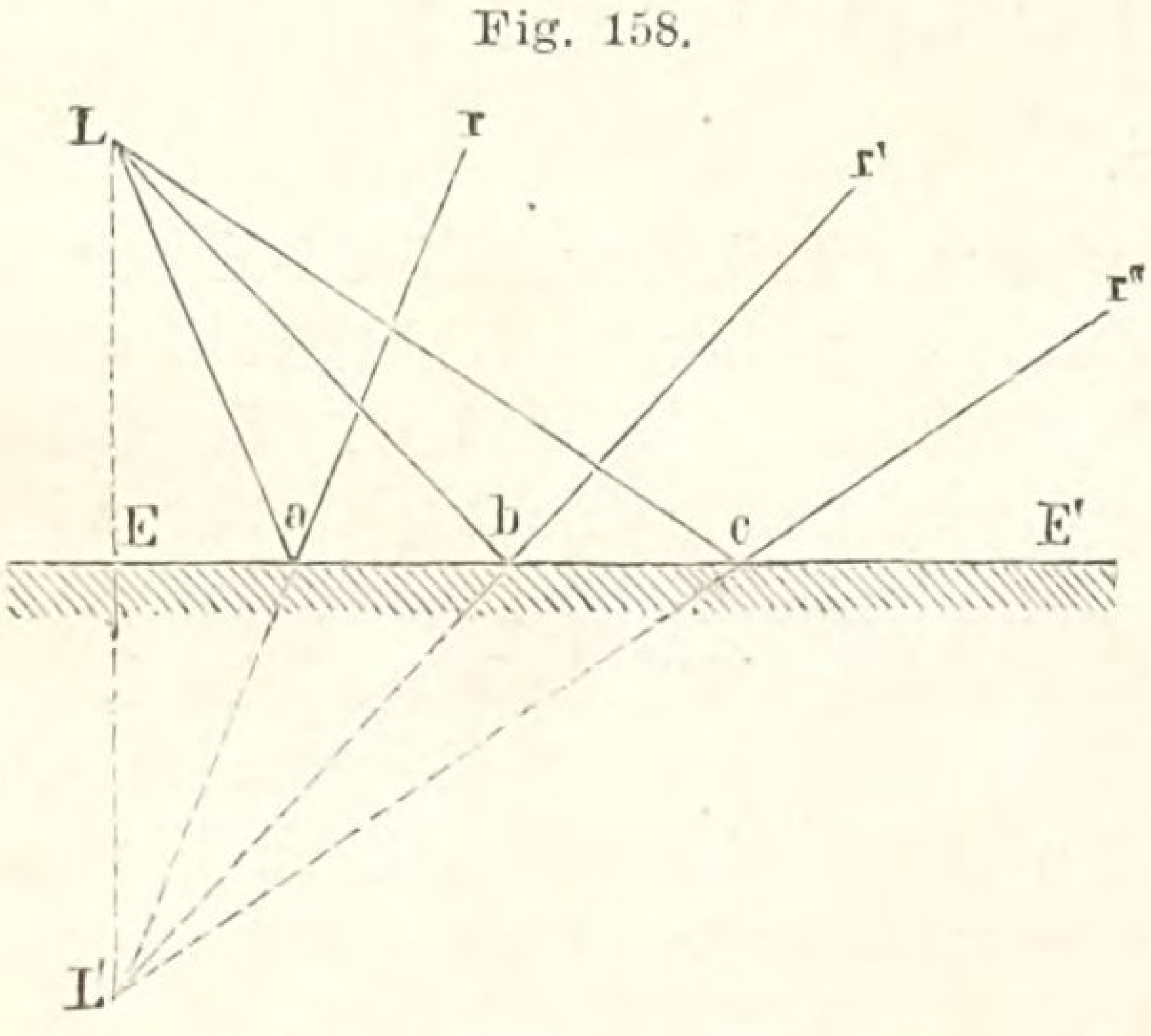
Lichtes, so dass das Auge von demselben getroffen wird, so erkennen wir, dass dieses Licht uns nicht den Körper selbst sichtbar macht, sondern ein Spiegelbild der Lichtquelle liefert. Man nennt deshalb dieses Licht, im Gegensatze zu dem zuerst erwähnten zerstreuten Lichte, das regelmässig zurückgeworfene Licht.

An einer grossen Zahl von Körpern, den durchsichtigen, erkennen wir dann noch eine weitere Theilung des den Körper treffenden Lichtes, indem ein Theil in den Körper eindringt und durch denselben hindurchgeht.

Die Richtung, nach welcher das regelmässig zurückgeworfene Licht sich fortpflanzt, hängt von der Richtung ab, in welcher das Licht auf die spiegelnde Fläche auftraf, wie man sofort erkennt, wenn man auf eine ebene spiegelnde Fläche Sonnenstrahlen fallen lässt und nun die Lage der Ebene gegenüber der Richtung der einfallenden Strahlen ändert. Man findet dann zunächst, dass die Richtung der zurückgeworfenen Strahlen immer ganz in die Ebene fällt, welche durch die Richtung der die Fläche treffenden Strahlen und die, an der Stelle, wo die Strahlen die Fläche treffen, zur Fläche gezogene Senkrechte, das sogenannte Einfallsloth bestimmt wird. Man nennt die durch die Richtung der einfallenden Strahlen und das Einfallsloth bestimmte Ebene die Einfallsebene, so dass wir den eben angeführten Satz kurz dahin aussprechen können, dass der reflectirte Strahl ganz in der Einfallsebene bleibt. Derselbe liegt in dieser an der andern Seite des Einfallslothes; misst man die Winkel, welche die einfallenden Strahlen und reflectirten Strahlen mit dem Einfallslothe bilden, so ergibt sich, dass diese Winkel einander gleich sind; diese beiden Sätze geben zusammen das Gesetz der Reflexion des Lichtes.

Man kann dieses Gesetz leicht durch direkte Messung der Einfallswinkel und Reflexionswinkel nachweisen, aber ebenso direkt ergibt es sich aus der bekannten Erfahrung, dass ein ebener Spiegel von einem vor ihm befindlichen leuchtenden Punkte ein Bild entwirft, welches genau ebensoweit senkrecht hinter dem Spiegel liegt, wie der leuchtende Punkt vor demselben. Dass wir überhaupt ein Bild des leuchtenden Punktes sehen, beweist uns, dass die von dem Punkte L Fig. 158 auf den Spiegel hingehenden Strahlen La, Lb ... so zurückgeworfen werden, als kämen sie von dem Punkte L' her. Denn auf Grund der Erfahrung, dass das Licht sich in geraden Linien ausbreitet, versetzen wir die Quelle des in unser Auge eindringenden Lichtes immer in den Punkt, in welchem sich die das Auge treffenden Strahlen entweder wirklich oder passend verlängert schneiden. Aus der Erfahrung nun, dass der Bildpunkt L' hinter dem Spiegel in der verlängerten Senkrechten LE so liegt, dass

Fig. 158.

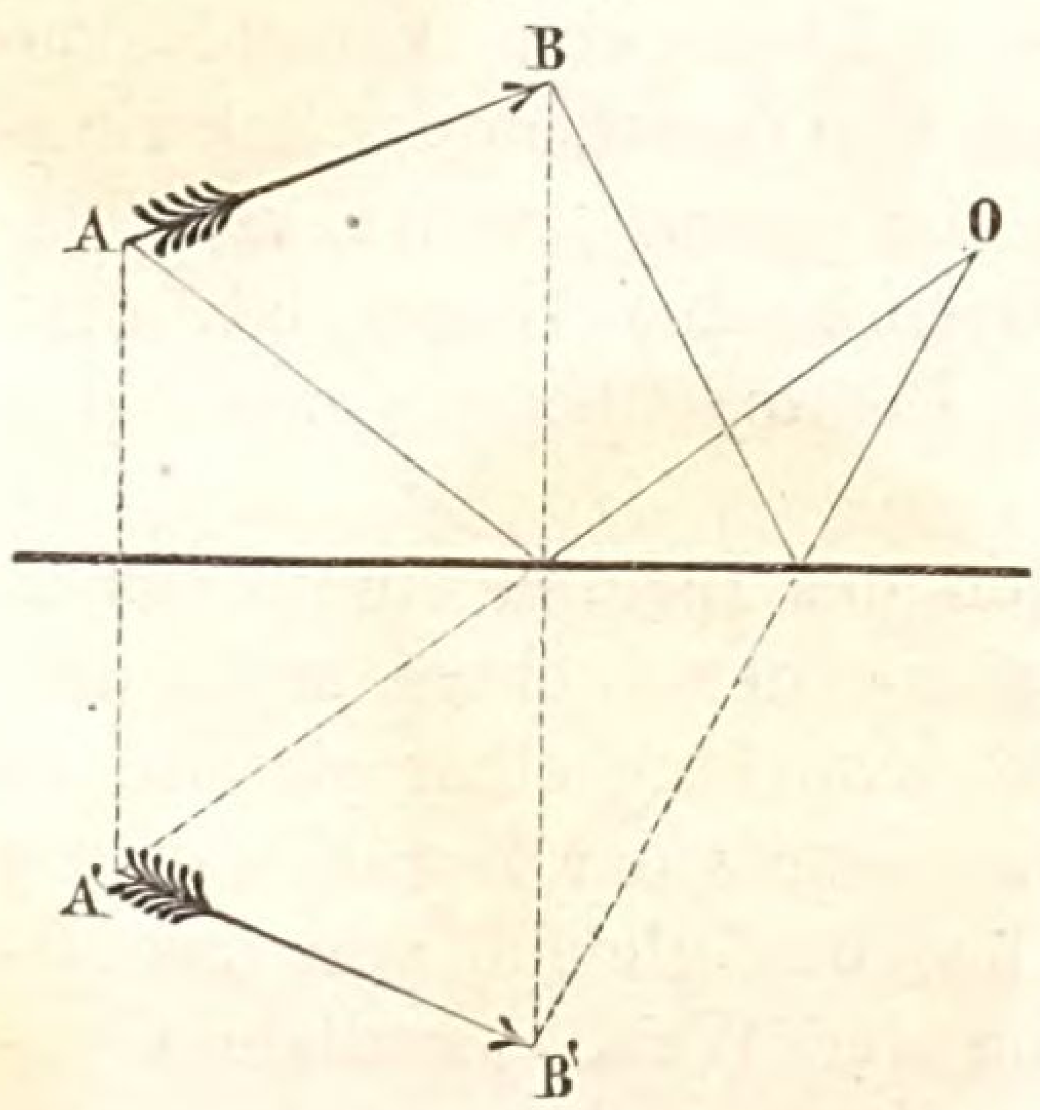


$L'E = LE$, folgt unmittelbar, dass die Dreiecke LaE und $L'aE$ oder LbE und $L'bE$... deckend sind und daraus, dass die Winkel $LaE = raE'$, $LbE = r'bE'$... somit auch, dass die Winkel, welche die einfallenden und reflectirten Strahlen mit dem Einfallslothe bilden, einander gleich sind.

Ebenso wie wir die Gleichheit des Einfallswinkels und Reflexionswinkels aus der als bekannt angenommenen Erfahrung über die Lage des Spiegelbildes ableiteten, können wir umgekehrt, wenn wir die Gleichheit von Einfallswinkel und Reflexionswinkel als durch Messungen bewiesen ansehen, die Lage des Spiegelbildes eines leuchtenden Punktes ableiten.

Aus diesem Reflexionsgesetze in der einen oder andern Form ergibt sich sofort, dass ein ebener Spiegel von einer ausgedehnten leuchtenden Linie oder leuchtenden Fläche ein Bild entwirft, welches genau symmetrisch zur Spiegelebene liegt. Ist AB Fig. 159 eine leuchtende Linie, so erscheint dieselbe im Spiegel als $A'B'$; der Punkt A befindet sich dem Spiegel am nächsten, ebenso der Punkt A' des Bildes, B und B' sind am weitesten vom Spiegel entfernt, die Spitze des Pfeiles zeigt also auch im Spiegelbild von der Spiegelebene fort. Man erhält die Lage des Bildes sofort, indem man von den betreffenden Punkten des Gegenstandes Normalen zur Spiegelebene zieht und diese um den Abstand der betreffenden Punkte von der Spiegelebene verlängert. Dabei ist es gleichgültig, ob die auf die Spiegelebene gezogene Normale die spiegelnde Fläche selbst trifft oder nicht; damit ein etwa bei O befindliches Auge das Spiegelbild sieht, ist nur nothwendig, dass von dem Gegenstande zum Spiegel gelangende Strahlen nach dem Auge hin reflectirt werden. Bei der in Fig. 159 angedeuteten Lage würde das bei O befindliche Auge das Spiegelbild sehen, wenn auch der Spiegel durch die Linie BB' begrenzt wäre, wenn also die ganze zwischen BB' und AA' liegende Fläche nicht spiegelnd wäre.

Fig. 159.



§. 127.

Physikalische Erklärung des Reflexionsgesetzes. Die beiden am Schlusse des vorigen Kapitels mitgetheilten Theorieen lassen unter gewissen Voraussetzungen das Gesetz der Reflexion als in der Natur des Lichtes begründet erscheinen.

Die Voraussetzung, welche die Undulationstheorie zu machen hat, ist nur die, dass der Aether im Innern der Körper, an deren Grenze die Reflexion stattfindet, eine andere Dichtigkeit oder eine andere Elasticität habe als ausserhalb, oder dass beide in verschiedenem Verhältnisse geändert seien. Denn in dem Falle ist die spiegelnde Fläche die Grenzfläche zweier verschiedener homogener Punktsysteme; wie wir aber sahen, wird jede an einer solchen Grenze ankommende schwingende Bewegung reflectirt und zwar so, dass der Mittelpunkt der reflectirten Welle genau so weit senkrecht hinter der Grenzfläche liegt, wie der Mittelpunkt der ankommenden Welle vor derselben liegt. Dieses Gesetz ist aber identisch mit dem Satze, dass das Bild des leuchtenden Punktes genau so weit hinter der Spiegelebene liegt, wie der Punkt selbst vor derselben. Denn der leuchtende Punkt ist der Mittelpunkt der ankommenden, sein Spiegelbild der Mittelpunkt der reflectirten Welle. Dass aber im Innern eines

reflectirenden Körpers die Dichte oder Elasticität des Aethers eine andere sein muss, das ist nach unserer Kenntniss der molekularen Wirkungen von vorn herein zu erwarten. Denn ebenso wie zwischen den Aethertheilchen selbst anziehende und abstossende Kräfte thätig sind, so müssen auch solche zwischen den Aethertheilchen und den Molekülen der Körper thätig sein, und daraus folgt dann, dass je nach der Natur und Dichte der Körper auch der in den Zwischenräumen zwischen den Molekülen vorhandene Aether eine verschiedene Dichtigkeit haben muss. Ja wir können sogar annehmen, dass im Innern der Körper auch die körperlichen Moleküle an der Bewegung Theil nehmen, so dass jedenfalls in den verschiedenen Körpern das schwingende System eine verschiedene Dichtigkeit hat. Es muss dann nothwendig nach den Gesetzen der schwingenden Bewegung jedesmal eine Reflexion an der Grenze zweier verschiedener Körper eintreten, welche, wenn die Grenze eine Ebene ist, dem §. 83 abgeleiteten, mit dem der Reflexion des Lichtes übereinstimmenden Gesetze folgen muss.

Die Emissionstheorie sieht in der Reflexion des Lichtes eine Erscheinung des Stosses, das Gesetz der Zurückwerfung des Lichtes muss deshalb übereinstimmen mit dem Gesetze der Zurückwerfung einer elastischen gegen eine feste Wand geworfenen Kugel. Das Gesetz der Zurückwerfung einer solchen Kugel ist nach §. 35 in der That das gleiche wie das Reflexionsgesetz des Lichtes; denn wir sahen, die der Wand parallele Componente der Geschwindigkeit wird durch den Stoss nicht geändert, die zur Wand normale wird in die entgegengesetzte verwandelt. Die Richtung, in welcher die Kugel von der Wand zurückkehrt, bildet deshalb mit dem Einfallslothe denselben Winkel wie die ankommende, jedoch an der andern Seite des Einfallslothes. Da wir indess die Lichttheilchen der Emissionstheorie nicht als elastische Kugeln ansehen können, fragt es sich, wodurch ihre zur Wand senkrechte Geschwindigkeit in die entgegengesetzte verwandelt wird.

Um dieses zu erklären, nahm die Emissionstheorie an, dass die Moleküle der Körper auf die Lichttheilchen sowohl eine anziehende, als auch eine abstossende Wirkung ausüben können. Ist die Entfernung kleiner als eine gewisse, so ist nach Newton's Annahme die Wirkung stets eine anziehende bis zur Berührung; jenseits dieser Anziehungssphäre ist nun aber immer eine solche, in der die Kraft eine abstossende ist. Die Grösse der anziehenden und abstossenden Kräfte kann eine sehr verschiedene sein, die Entfernungen aber, in der die Kräfte abstossende oder anziehende sind, sind für alle Körper dieselben.

Kommt nun eine Reihe von Lichttheilchen in irgend einer Richtung gegen die ebene Grenzfläche eines Körpers, so können wir die gegen den Körper hin gerichtete Geschwindigkeit in eine zur Grenzfläche normale und eine zu ihr parallele zerlegen. Letztere kann, da die von den Molekülen der Körper auf die Lichttheilchen ausgeübten Wirkungen nach allen zur Grenzfläche parallelen Richtungen genau dieselbe ist, gar nicht geändert werden, die zur Grenzebene senkrechte Componente muss dagegen geändert werden. Ehe die Lichttheilchen in die Anziehungssphäre kommen, müssen sie jene der Abstossung passiren, in welcher die senkrecht gegen die Fläche gerichtete Geschwindigkeit vermindert wird. Nun ist es möglich,

dass in dieser Sphäre diese Componente der Geschwindigkeit ganz vernichtet wird; dann können die Lichttheilchen dieselbe nicht durchlaufen, und in die Anziehungssphäre übertreten, sie werden vielmehr, da die Abstossung fortdauert, so lange sie in der betreffenden Sphäre sind, also auch nach Vernichtung jener Geschwindigkeit, von der Fläche zurückgestossen. Da nun auf dem Rückwege aus dieser Sphäre die Lichttheilchen ebenso lange und eben denselben abstossenden Kräften ausgesetzt sind, welche die gegen die Fläche gerichtete Geschwindigkeit ihnen nahmen, so müssen sie von denselben eine gegen die Fläche senkrechte und von ihr fortgerichtete Geschwindigkeit erhalten, welche derjenigen genau gleich ist, mit der sie sich gegen die Wand hin bewegten.

Die von der Emissionshypothese eingeführte Annahme von den anziehenden und abstossenden Kräften vermag somit eine Erklärung des Reflexionsgesetzes, soweit es die Richtung des zurückgeworfenen Lichtes betrifft, zu geben. Indess bietet die Erscheinung der Reflexion für diese Hypothese noch eine weitere Schwierigkeit. Wir erwähnten vorhin schon, dass, einen demnächst zu besprechenden Fall ausgenommen, niemals das gesammte eine Fläche treffende Licht zurückgeworfen wird, sondern dass immer ein Theil in das zweite Medium übergeht. Die von der Emissionshypothese gegebene Erklärung der Reflexion lässt eine solche Theilung des Lichtes nicht als möglich erkennen, da gar kein Grund vorhanden ist, dass von den unter genau gleichen Umständen an der Grenze eines Körpers ankommenden Lichttheilchen ein Theil die Abstossungszone durchdringen kann, ein anderer nicht. Um diese Schwierigkeit zu heben, nahm Newton an, dass der Grund dieses verschiedenen Verhaltens in den Lichttheilchen selbst liege, dass bei ihnen nämlich periodisch wechselnd ein Zustand eintrete, in dem sie leichter in einen Körper eindringen und ein solcher, in dem sie leichter zurückgeworfen werden; Zustände, die er Anwandlungen des leichtern Durchgehens und des leichtern Zurückgeworfenwerdens nannte. Von den an der Grenze eines Körpers in den Strahlen ankommenden Lichttheilchen ist nun immer ein Theil in dem einen, ein anderer Theil in dem andern Zustande, deshalb tritt die Theilung des Lichtes ein.

Diese von der Emissionshypothese gegebene Erklärung der Reflexionserscheinungen ist, wie man sieht, eine wenig befriedigende, sie muss den Lichttheilchen eine neue Eigenschaft beilegen, die keineswegs aus der hypothetischen Natur der Lichttheilchen folgt, die vielmehr nur zum Zwecke der Erklärung der Theilung des Lichtes bei der Reflexion ersonnen ist. Die Ueberlegenheit der Auffassung des Lichtes als einer schwingenden Bewegung zeigt sich demnach auch hier wieder, so dass, wenn wir uns auch hier noch nicht definitiv für die eine der Theorieen entscheiden können, die Undulationstheorie doch schon als die wahrscheinlichere erscheint.

§. 128.

Anwendung der Spiegelung an ebenen Flächen. Von der Spiegelung an ebenen Flächen wird zu physikalischen und astronomischen Zwecken in der mannigfachsten Weise Anwendung gemacht. Wir begnügen uns hier damit, auf die wichtigsten physikalischen Anwendungen hinzuweisen.

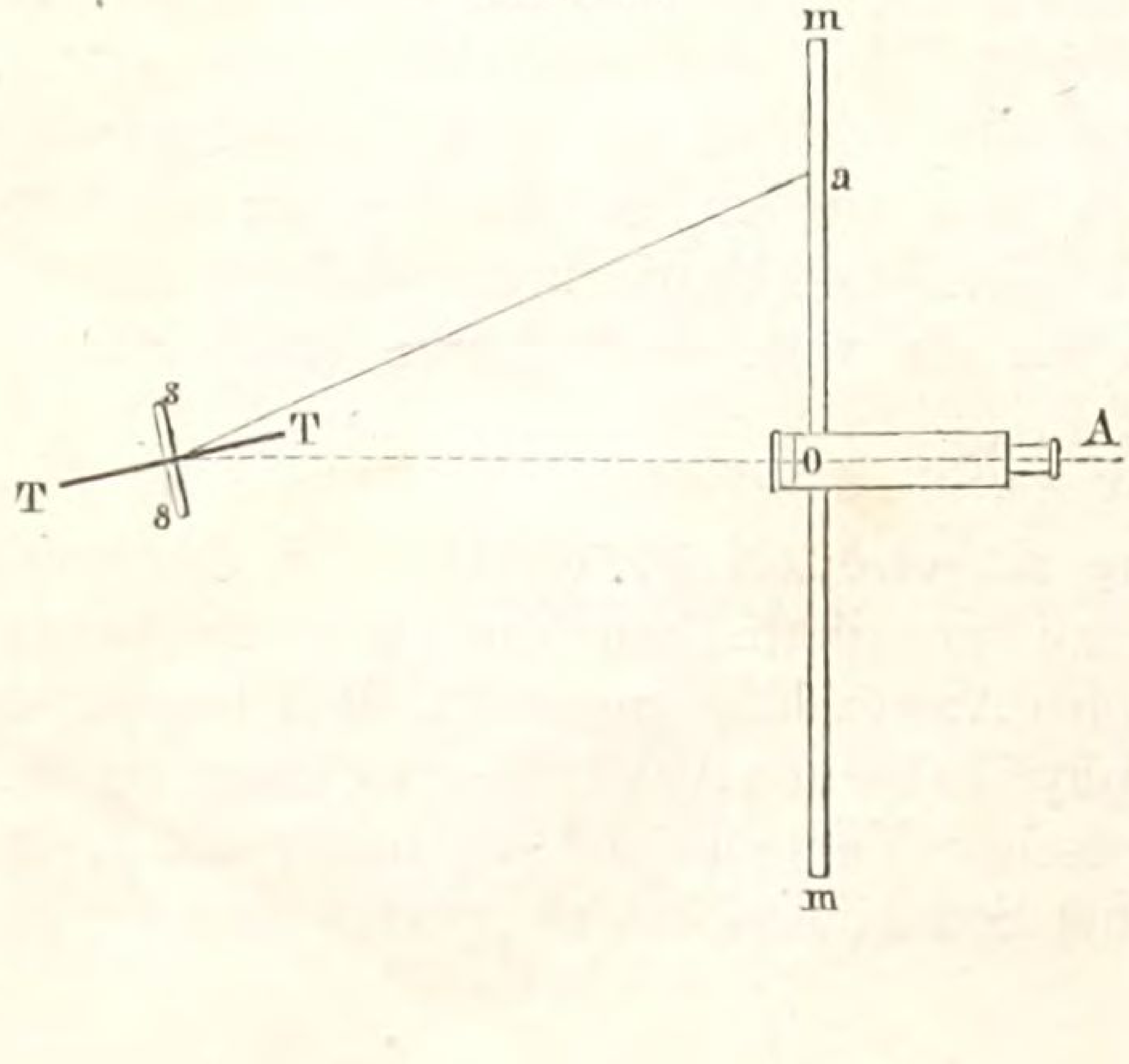
Zu einer grossen Anzahl optischer Versuche ist es nothwendig, in einen verdunkelten Raum ein Bündel Sonnenstrahlen zu werfen und dieses

in einer bestimmten Richtung festzuhalten. Es geschieht das mit Hülfe des Heliostaten, den man vor einer Oeffnung des Fensterladens befestigt. Derselbe besteht aus einem ebenen Spiegel, der um zwei zu einander senkrechte Axen, deren eine horizontal und parallel der Richtung ist, nach welcher hin das Licht geworfen werden soll, drehbar ist. Mit Hülfe dieser Drehungen wird dann der Spiegel so gestellt, dass die Richtung der den Spiegel treffenden Sonnenstrahlen in die durch die Spiegelnormale und die Richtung, nach welcher die Sonnenstrahlen geworfen werden sollen, bestimmte Ebene fällt, und dass dann die Spiegelnormale den Winkel, den die Richtung der einfallenden Strahlen mit der verlangten Reflexionsrichtung bildet, halbirt. Dann ist die Bedingung erfüllt, unter welcher die Strahlen nach der verlangten Richtung zurückgeworfen werden. Da die Erde sich in 24 Stunden einmal um ihre Axe dreht, so ist die relative Bewegung der Sonne zu dem Beobachtungsort dieselbe, als wenn die Sonne in 24 Stunden am Himmel einen Kreis um die Erdaxe beschreibt. Diese Drehung der Sonne können wir uns nach dem Gesetze der Zerlegung der drehenden Bewegung in zwei zu einander senkrechte Componenten zerlegen, und zwar um eine horizontale, der Richtung, nach welcher die Strahlen zurückgeworfen werden sollen, parallele Axe und in eine Componente um eine zur horizontalen senkrechte Axe. Man kann deshalb durch eine Drehung des Heliostatenspiegels um die beiden erwähnten Axen der Bewegung der Sonne folgen und so bewirken, dass die einfallenden Sonnenstrahlen immer den Spiegel in einer solchen Stellung treffen, dass sie nach der verlangten Richtung zurückgeworfen werden.

Bei den einfachsten Heliostaten geschieht diese Drehung mit der Hand, bei andern durch ein Uhrwerk; dass bei den durch ein Uhrwerk bewegten Heliostaten der Spiegel ausser der täglichen Drehung noch weiter verstellbar sein muss, um den Spiegel dem im Laufe des Jahres veränderlichen Stande der Sonne entsprechend zu stellen, ist selbstverständlich.

Eine andere Anwendung der Spiegelungsgesetze ist die zuerst von Poggendorff gemachte Anwendung der Spiegelablesung zur Messung kleiner Winkel, um welche ein Körper aus seiner Gleichgewichtslage gedreht ist. Man befestigt zu dem Zwecke an der Drehungsaxe des drehbaren Körpers *TT* Fig. 160, welche wir uns senkrecht zur Ebene der Zeichnung denken, einen kleinen Spiegel *ss*. In einiger Entfernung vom Spiegel ist demselben gegenüber ein Fernrohr *Ao* so aufgestellt, dass die Axe des Fernrohrs in der Verticalebene liegt, welche die Normale des in seiner Ruhelage befindlichen Spiegels aufnimmt, und in dieser ganz wenig gegen die Spiegelaxe geneigt ist. Je nach der Neigung des Fernrohrs ist über oder unter demselben ein Maassstab *mm* senkrecht zur Fernrohraxe aufgestellt, und dann das Fernrohr so eingestellt, dass man in demselben

Fig. 160.



das Spiegelbild des Maassstabes im Spiegel scharf sieht. Der Maassstab wird dann so gestellt, dass man wenn der Körper in seiner Gleichgewichtslage ist, am Fadenkreuz des Fernrohrs den Nullpunkt der Theilung sieht. Dreht sich dann der Spiegel um irgend einen kleinen Winkel, so sieht man am Fadenkreuz des Fernrohrs das Spiegelbild eines andern Theilstriches der Scala erscheinen, den Theilstrich a, der so liegt, dass die Spiegelnormale den Winkel asA halbirt. Aus dem Abstande des Maassstabes vom Spiegel und dem des Theilstriches a vom Nullpunkt erhält man dann den Winkel, um den der Spiegel und mit ihm der Körper TT sich gedreht hat. Der Spiegel hat sich um den Winkel gedreht, welchen die Spiegelnormale in der abgelenkten Lage mit der Richtung As bildet. Der gedrehte Spiegel reflectirt dann in die Richtung sA, also in das Fernrohr das Bild des Theilstriches a, dessen Verbindungslinie mit dem Spiegel denselben Winkel mit der Spiegelnormalen bildet, den die Richtung sA mit demselben bildet. Der Winkel asA ist also gleich dem Doppelten des Winkels, um den sich der Spiegel gedreht hat. Die Tangente dieses Winkels 2α ist aber

$$\operatorname{tang} 2\alpha = \frac{ao}{os};$$

da man auf diese Weise stets nur kleine Winkel misst, kann man die halbe Tangente als die Tangente des halben Winkels, somit als die Tangente des gesuchten Winkels annehmen.

Auf dem gleichen Princip beruht die Verwendung des rotirenden Spiegels zur Beobachtung der vibrirenden Flammen zur Analyse des Klanges, die wir in der Lehre vom Schall erwähnten, sowie zu ähnlichen Beobachtungen. Denn ebenso wie das in der Richtung AO Fig. 160 in den Spiegel blickende Auge bei einer Drehung des Spiegels nach und nach immer andere Theilstriche der Scala sieht, so wird das von dem Nullpunkt der Scala auf den Spiegel treffende Licht nach immer andern Richtungen zurückgeworfen. Das Bild des Nullpunktes erscheint deshalb einem Auge, welches aus hinreichend kleiner und deshalb ein grosses Gesichtsfeld bietender Entfernung in den Spiegel blickt, auf einem Kreise mit dem Radius os um den Winkel 2α verschoben, wenn der Spiegel um den Winkel α gedreht ist. Verändert nun ein etwa bei O angebrachtes Licht seine Grösse oder Farbe, so sieht man diese Veränderungen neben einander, und wenn die Veränderungen rasch genug erfolgen, gleichzeitig. Der rotirende Spiegel zeigt uns also den zeitlichen Verlauf einer Lichterscheinung räumlich neben einander gelegt und ist deshalb ein ganz ausgezeichnetes Mittel zur Untersuchung solcher Lichterscheinungen, welche einen so raschen Verlauf haben, dass wir die nach einander stattfindenden Veränderungen nicht auffassen können.

Ebenso ist der rotirende Spiegel ein ausgezeichnetes Mittel zur Messung der Dauer sehr rasch vorübergehender Lichterscheinungen, wenn man die Rotationsgeschwindigkeit des Spiegels kennt. Eine bei o kurz aufblitzende Lichterscheinung, die so lange dauert, dass während derselben der Spiegel den Winkel α beschreibt, erscheint im Spiegelbild als Bogen von der Länge 2α. Eine Messung der Länge dieses Bogens gibt uns daher das Mittel, die Grösse der Drehung des Spiegels während der Dauer der Lichterschei-

nung zu bestimmen; die Dauer der Lichterscheinung ist dann ein ebenso grosser Bruchtheil der Umdrehungszeit des Spiegels, als der gefundene Drehungsbogen ein Bruchtheil des Kreisumfanges ist.

Schliesslich erwähnen wir noch die zuerst von Wollaston in seinem Reflexionsgoniometer gegebene Verwendung der Spiegelung zur Messung des Winkels, den zwei spiegelnde Flächen eines Krystalls oder eines Prismas mit einander bilden. Vor der Axe eines Rohres, etwa eines Fernrohres und um eine die Axe des Rohres schneidende, zu derselben senkrechte, mit der Kante, in welcher sich die beiden Flächen schneiden, parallelen Axe drehbar wird das Prisma so aufgestellt, dass das in das Rohr blickende Auge das von einer der beiden Flächen entworfene Spiegelbild eines fernen Gegenstandes am Fadenkreuz sieht. Darauf wird das Prisma um die Axe so weit gedreht, dass man denselben Gegenstand von der zweiten Fläche reflectirt am Fadenkreuz sieht. Dann hat die zweite Fläche genau dieselbe Stellung wie vorher die erste, und der Winkel, um den man das Prisma gedreht hat, ergänzt denjenigen, welchen die beiden Flächen mit einander bilden, zu zweien Rechten.

§. 129.

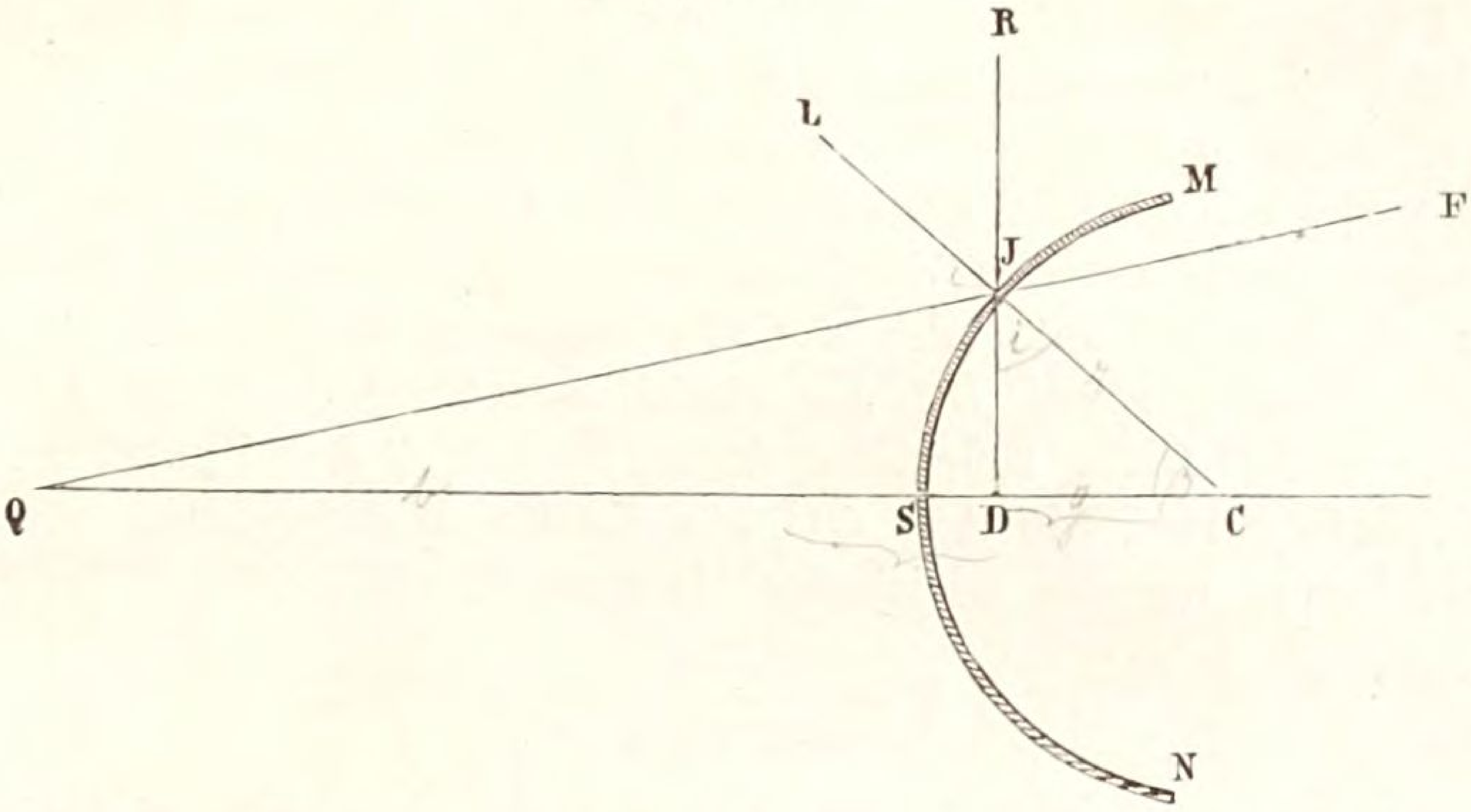
Reflexion an krummen Flächen. Das Gesetz der Reflexion des Lichtes gilt ganz ebenso für krumme Flächen wie für ebene, da wir eine jede krumme Fläche als eine Reihenfolge gegen einander geneigter Ebenen betrachten können, weil an jedem Punkte der Fläche ein unendlich kleines Stück derselben mit der in diesem Punkte an die Fläche gelegten Berührungsebene zusammenfällt.

Die Erscheinungen der Reflexion an krummen Flächen unterscheiden sich daher von denen an ebenen Flächen nur dadurch, dass bei denselben die Einfallslothe für die verschiedenen Punkte der spiegelnden Flächen nicht, wie bei den ebenen, einander parallel, sondern gegen einander geneigt sind. Dadurch muss das Resultat der Reflexion in soweit ein anderes werden, dass die von einem leuchtenden Punkte aus auf den Spiegel treffenden Strahlen nicht so zurückgeworfen werden, als kämen sie von einem Punkte, der ebenso weit hinter dem Spiegel liegt, wie der leuchtende Punkt vor demselben. Kennt man aber das Gesetz der Krümmung der Fläche, also auch das Gesetz, nach welchem die Einfallslothe der verschiedenen Punkte gegen einander geneigt sind, so lässt sich auch bei krummen Flächen das Resultat der Reflexion ableiten. Wir wollen die Untersuchung für die wichtigste Form der krummen Flächen, die Kugelflächen, durchführen. Bei den Kugelflächen fällt in jedem Punkte die Richtung des Einfallslothes mit derjenigen des an den Punkt gezogenen Radius zusammen.

Sei MN Fig. 161 ein Stück einer Kugelfläche, deren Mittelpunkt in C liege, welches auf beiden Seiten spiegelnd sei, und befinde sich in Q auf der convexen Seite ein leuchtender Punkt. Sei QJ ein Strahl des von Q auf die Fläche gesandten Strahlenkegels. Die Richtung des zu diesem gehörenden reflectirten Strahles erhalten wir, indem wir in der durch den Radius CJ und den einfallenden Strahl bestimmten Ebene die Richtung JR so bestimmen, dass der Winkel $RJL = QJL$. Um nun diese Richtung darstellen zu können, verfahren wir am besten so, dass wir auf ihr ausser dem gegebenen Punkte J noch einen zweiten Punkt bestimmen;

wir wählen als solchen den Punkt D, in welchem dieselbe die Verbindungslinie QC des leuchtenden Punktes mit dem Mittelpunkte der Kugel

Fig. 161.



schneidet, indem wir den Abstand CD dieses Punktes von dem Mittelpunkte der Kugel bestimmen. Zur Bestimmung desselben haben wir folgende Porportionen:

$$CD : CJ = \sin CJD : \sin CDJ \quad . \; . \; . \; (1)$$

$$QC : CJ = \sin CJQ : \sin CQJ \quad . \; . \; . \; (2),$$

somit

$$\frac{CD}{QC} = \frac{\sin CJD \, . \sin CQJ}{\sin CJQ \, . \sin CDJ}.$$

Nun ist

$$CJD = RJL = QJL; \quad CJQ = 180 - QJL$$

$$\sin CJD = \sin CJQ.$$

Setzen wir nun, um bequemere Zeichen einzuführen,

$$QC = b; \quad CD = g; \quad CJ = CS = r; \quad \sphericalangle\, CJD = i; \quad \sphericalangle\, DCJ = \beta,$$

so ist

$$CQJ = LJQ - \beta = i - \beta$$

$$CDJ = 180 - (i + \beta),$$

somit

$$\frac{CD}{QC} = \frac{g}{b} = \frac{\sin (i - \beta)}{\sin (i + \beta)}$$

$$\frac{g}{b} + 1 = \frac{g + b}{b} = \frac{\sin (i - \beta) + \sin (i + \beta)}{\sin (i + \beta)} = \frac{2 \sin i \cos \beta}{\sin (i + \beta)}.$$

Nun ist nach Gleichung (1)

$$g : r = \sin i : \sin (i + \beta),$$

somit

$$\frac{g + b}{b} = \frac{2\, g \cos \beta}{r}$$

und

$$g = \frac{b\, r}{2\, b \cos \beta - r} \quad . \; . \; . \; . \; (\mathrm{I}),$$

eine Gleichung, die uns den Abstand g, in welchem vom Mittelpunkte der reflectirte Strahl die Verbindungslinie des leuchtenden Punktes mit dem Mittelpunkt schneidet, in seiner Abhängigkeit vom Abstande des leuchtenden Punktes vom Mittelpunkte, dem Radius der Kugel und der durch den Winkel β gegebenen Lage des Punktes J bestimmt.

Wir haben bei dieser Entwicklung vorausgesetzt, dass die convexe Seite die spiegelnde sei; genau derselbe Ausdruck gibt uns aber auch die Richtung des reflectirten Strahles, wenn die concave Seite die spiegelnde ist, der leuchtende Punkt also auf der concaven Seite liegt. Ist D dieser leuchtende Punkt, somit DJ der einfallende Strahl, so ist JF die Verlängerung von QJ der reflectirte Strahl, somit Q der Punkt, in welchem der reflectirte Strahl die Axe QC schneidet. Wir erhalten somit diesen Abstand, indem wir die Gleichung (I) nach b auflösen

$$b = \frac{g\,r}{2\,g\cos\beta - r}.$$

Bezeichnen wir nun immer den Abstand des leuchtenden Punktes vom Mittelpunkt mit b, den des Punktes, in welchem der reflectirte Strahl die Axe QC schneidet, mit g, so haben wir in der letzten Gleichung die Zeichen g und b zu vertauschen, und erhalten

$$g = \frac{b\,r}{2\,b\cos\beta - r}.$$

Wir erhalten demnach durch identisch dieselbe Gleichung den Abstand vom Mittelpunkte, in welchem der reflectirte Strahl die Verbindungslinie des leuchtenden Punktes mit dem Mittelpunkte schneidet, einerlei ob die convexe oder die concave Seite der Kugel spiegelnd ist.

Der Werth von g hängt ab von dem Abstande C des leuchtenden Punktes, dem Radius r und dem Winkel β, der die Lage des Punktes J bestimmt.

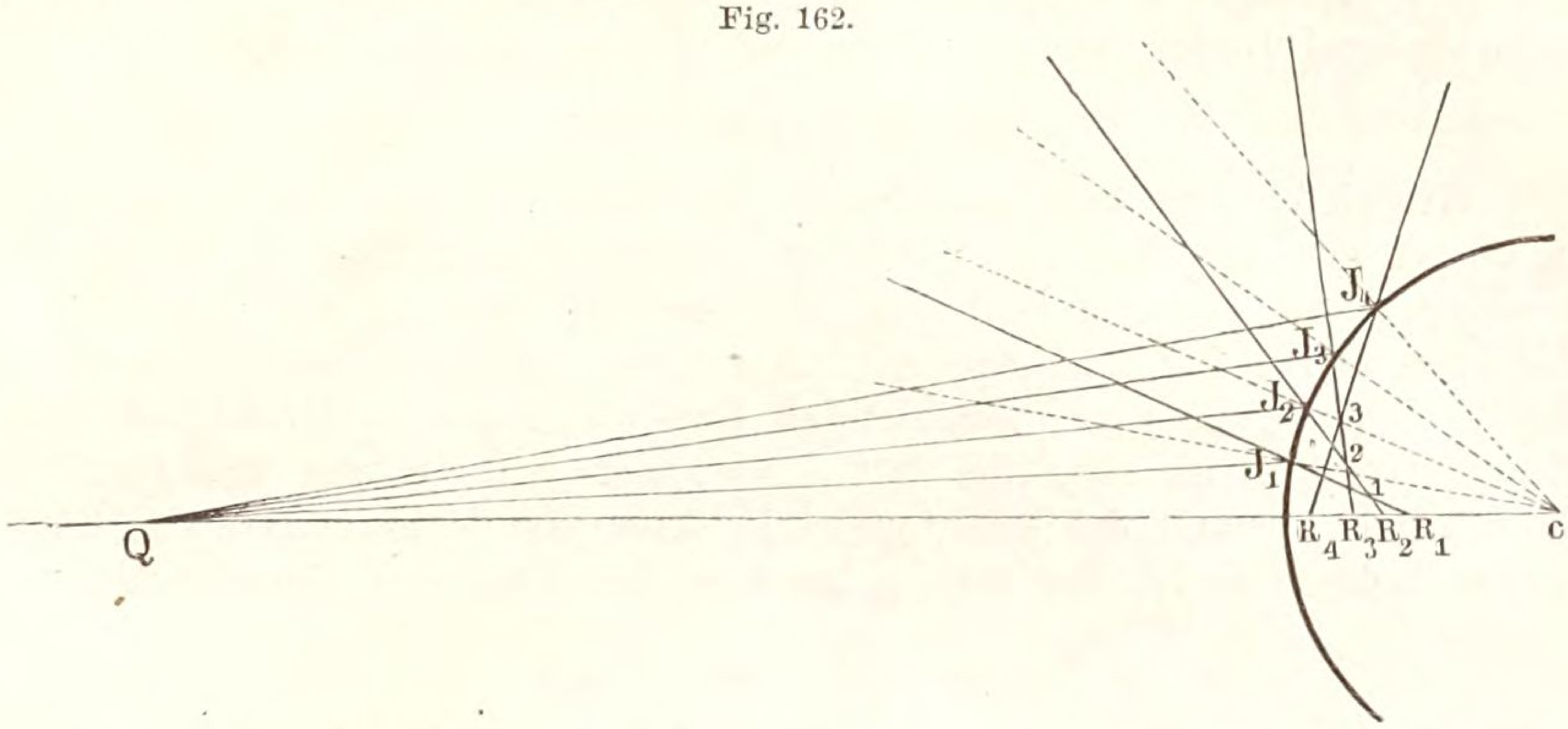
Für einen gegebenen leuchtenden Punkt, also ein constantes b, hat bei einem gegebenen Spiegel, also constantem r, g für alle diejenigen Punkte denselben Werth, für die der Winkel β derselbe ist. Dem gleichen Winkel β entsprechen nun auf der Kugelfläche alle Punkte eines Ringes, den der Punkt J beschreiben würde, wenn wir uns Fig. 161 um QC als Axe gedreht denken. Alle die von diesem Ringe reflectirten Strahlen schneiden sich in dem Punkte D, man nennt deshalb den Punkt D den Brennpunkt des betreffenden Ringes.

Rückt der Punkt J weiter von S weg, so dass β zunimmt, so wird der Werth des Nenners in der Gleichung für g kleiner, die Brennpunkte der grössern Werthen von β entsprechenden Ringe sind demnach weiter vom Mittelpunkte entfernt.

Daraus folgt, dass die von einem leuchtenden Punkte auf eine spiegelnde Kugel fallenden Strahlen sich nach der Reflexion nicht alle in einem und demselben Punkte schneiden; es liefert daher eine spiegelnde Kugelfläche allgemein nicht ein Bild des leuchtenden Punktes, wie ein ebener Spiegel. Die von den verschiedenen Ringen kommenden reflectirten Strahlenkegel schneiden sich zwar, aber in andern Punkten als in dem, in welchem sich die Strahlen eines und desselben Kegels schneiden. Betrachten wir wieder nur einen Durchschnitt durch die spiegelnde Fläche Fig. 162, so

schneiden die von dem Ringe J_1 kommenden Strahlen die Axe in R_1, die von J_2 reflectirten Strahlen schneiden sich und die Axe in R_2, dagegen die

Fig. 162.



Strahlen des ersten Kegels im Punkte 1. Die von dem Ringe J_3 kommenden Strahlen schneiden die Axe in R_3, diejenigen des von J_2 kommenden Kegels im Punkte 2, der dem Punkte 1 nahe liegt, ebenso entspricht der Punkt 3 dem von J_4 kommenden Strahlenkegel und dem von J_3. Diese Schnittpunkte der verschiedenen Strahlenkegel ordnen sich auf bestimmten Flächen, den Brennflächen, welche von zur Axe der reflectirenden Fläche parallelen Ebenen in den sogenannten Brennlinien geschnitten werden. Da nämlich diese Flächen aus einer stetigen Reihe von Punkten gebildet werden, in welchen sich mehrere Strahlen schneiden, so ist die Helligkeit dort grösser als in dem übrigen in der Nähe des Spiegels liegenden Raume, sie treten deshalb hell vor ihrer Umgebung hervor.

Bei Kugelflächen sind die Brennflächen oder ihre Durchschnitte, die Brennlinien, nur sichtbar, wenn man grosse Stücke einer Kugelfläche auf der concaven Seite spiegelnd macht, und dann eine Ebene als Radialschnitt dem Spiegel nähert, etwa ein Blatt weissen Papiers. Leichter sichtbar sind sie, wenn man eine Cylinderfläche auf der concaven Seite spiegelnd macht, und dann eine Ebene senkrecht zum Mantel des Cylinders der Fläche nähert.

Auf eine Untersuchung der Brennlinien gehen wir nicht ein; wir untersuchen nur, unter welchen Umständen uns kugelförmige Spiegel Bilder liefern können. Die Gleichung für g zeigt uns, dass das der Fall ist, wenn wir Spiegel von kleiner Oeffnung nehmen, bei denen also der Werth von β immer nur sehr klein ist. Da nämlich der Cosinus kleiner Bögen nur sehr wenig von 1 verschieden ist, derjenige eines Bogens von 8^0 ist noch grösser als 0,99, so folgt, dass wenn wir Oeffnungen wählen, bei denen β kleiner ist als 8^0, selbst für die nahe vom Rande reflectirten Strahlen, der Werth von g so wenig von dem Werthe

$$g = \frac{b\,r}{2\,b - r}$$

verschieden ist, dass wir den durch diesen Werth gegebenen Punkt der Verbindungslinie des leuchtenden Punktes mit dem Mittelpunkte als denjenigen ansehen können, von welchem alle von einem leuchtenden Punkte

ausgehenden und den Spiegel treffenden Strahlen nach der Reflexion auszugehen scheinen. Der so bestimmte Punkt ist also das Bild des leuchtenden Punktes. Unter dieser Voraussetzung liefern folglich auch kugelförmige Spiegel Bilder der vor ihnen befindlichen Gegenstände.

§. 130.

Kugelförmige Convexspiegel. Bilder. Um die Lage der Bilder in einem auf der convexen Seite spiegelnden kugelförmigen Spiegel der vorausgesetzten kleinen Oeffnung zu erhalten, nehmen wir zunächst an, die leuchtenden Punkte befänden sich auf der Axe des Spiegels, das heisst, die Verbindungslinie des leuchtenden Punktes mit dem Mittelpunkte der Kugel treffe gleichzeitig die Mitte oder den Scheitel des Spiegels. Ist dann b der Abstand des leuchtenden Punktes vom Mittelpunkte der Kugel, r der Radius, so ist der Abstand des Bildpunktes vom Mittelpunkte

$$g = \frac{b\,r}{2\,b - r} = \frac{r}{2 - \frac{r}{b}}.$$

Dieser Werth von g ist, so lange $b > r$, so lange also der leuchtende Punkt wirklich vor dem Spiegel liegt, kleiner als r; es folgt somit, dass ein convexer kugelförmiger Spiegel von allen vor ihm liegenden leuchtenden Punkten ein hinter dem Spiegel liegendes, also ein virtuelles Bild liefert, das heisst, das Bild kommt nicht wirklich zu Stande, sondern die Strahlen pflanzen sich nach der Reflexion so fort, als kämen sie von einem Bildpunkte.

Der Abstand des Bildpunktes vom Spiegel ist stets kleiner als der Abstand des leuchtenden Punktes, mit Ausnahme wenn $b = r$ ist, der leuchtende Punkt also in der spiegelnden Fläche selbst liegt, dann ist auch $g = r$, also der Gegenstand und sein Bild fallen zusammen. Für alle andern Werthe von b, die grösser als r sind, ist g zwischen $\frac{r}{2}$ und r gelegen, die Entfernung des Bildes von der spiegelnden Fläche wird also nie grösser als der halbe Radius, es liegt in dem Halbirungspunkte des Radius, wenn b unendlich gross wird, somit parallele Strahlen den Spiegel treffen. Man nennt den Punkt, in welchem sich die der Axe parallelen Strahlen nach der Reflexion schneiden, den Brennpunkt oder Hauptbrennpunkt des Spiegels.

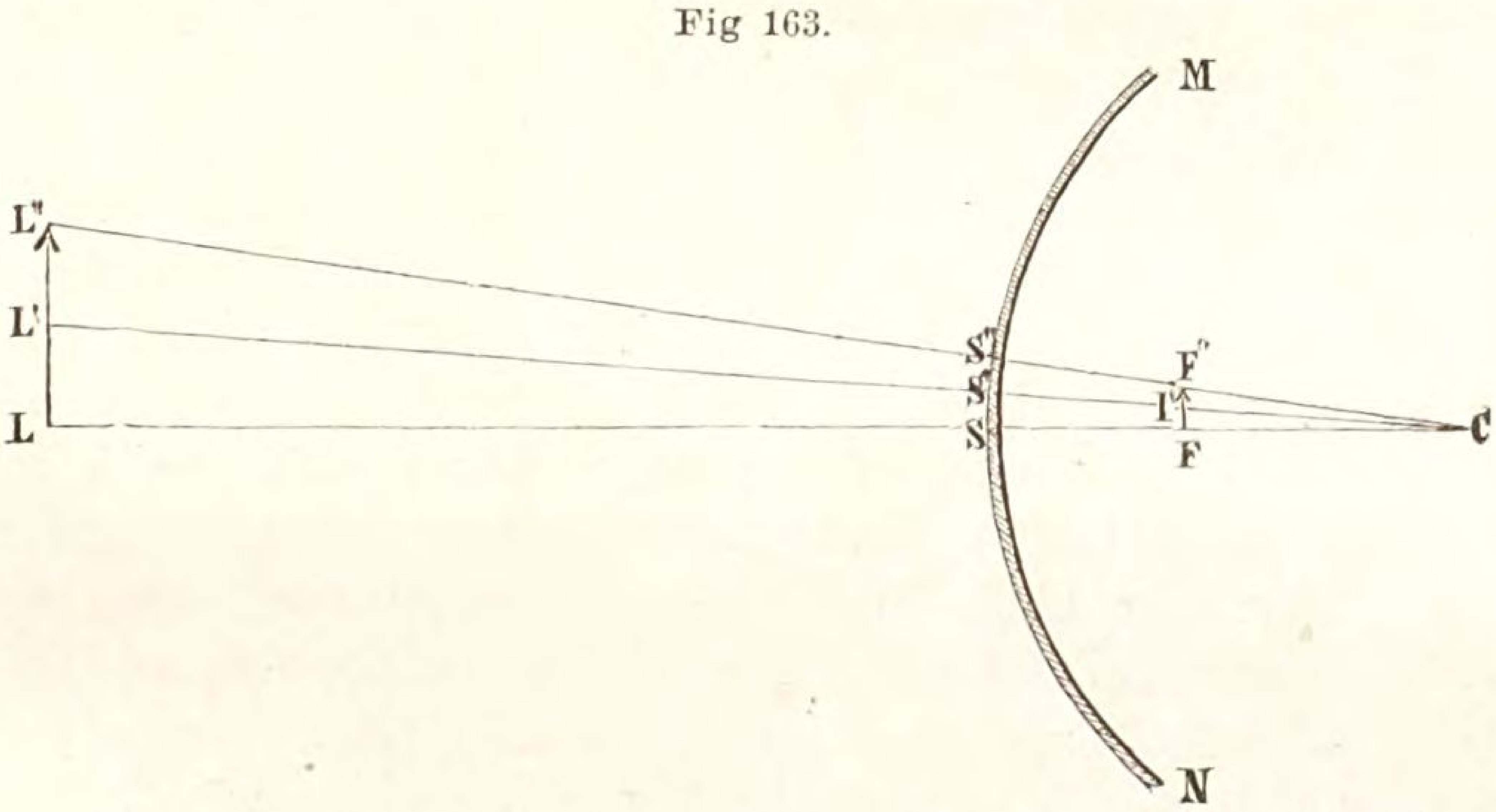
Ein convexer Kugelspiegel kann indess auch reelle Bilder liefern, also die auf den Spiegel gesandten Strahlen können sich nach der Reflexion in Wirklichkeit vor dem Spiegel schneiden. Das ist dann der Fall, wenn der leuchtende Punkt ein virtueller wird, wenn $b < r$. Lässt man also ein convergentes Strahlenbündel auf den Spiegel fallen, so dass die Strahlen sich erst hinter dem Spiegel in einem Punkte schneiden würden, der zwischen $b = r$ und $b = \frac{r}{2}$ liegt, so liefert der Spiegel ein reelles, vor dem Spiegel liegendes Bild; dasselbe rückt, wenn b von r bis $\frac{r}{2}$ abnimmt, von dem Spiegel bis in unendliche Entfernung.

Wird b noch kleiner als $\frac{r}{2}$, lässt man also ein Strahlenbündel auf den Spiegel fallen, welches sich in einem Punkte schneidet, der um mehr

als den halben Radius hinter dem Spiegel liegt, so ist dessen Bild wieder ein virtuelles; denn ist $b < \frac{r}{2}$, so wird g negativ. Da wir nun den Abstand g positiv gerechnet haben, wenn das Bild zwischen dem Mittelpunkte und dem Spiegel liegt, so bedeutet ein negativer Werth von g, dass das Bild auf der andern Seite des Mittelpunktes liegt, also weiter vom Spiegel entfernt ist, als der Mittelpunkt des Spiegels. Die Untersuchung der einzelnen Bildlagen in diesem Falle bietet kein weiteres Interesse.

Für leuchtende Punkte, die ausserhalb der Hauptaxe des Spiegels liegen, gelten ganz dieselben Sätze, nur müssen wir die Entfernung g dann nicht auf die Hauptaxe des Spiegels, sondern auf die betreffenden Nebenaxen, d. h. auf die Verbindungslinien dieser leuchtenden Punkte mit dem Mittelpunkte beziehen. Ist demnach $LL'L''$ Fig. 163 eine leuchtende

Fig 163.



Linie, von der wir voraussetzen wollen, sie sei senkrecht zur Hauptaxe LSC, so werden die von L'' auf den Spiegel gesandten Strahlen so reflectirt, dass das Bild von L'' auf der Axe $L''C$ liegt, und zwar so, dass

$$CF'' = \frac{CL''.r}{2\,CL'' - r},$$

während der Bildpunkt F des auf der Axe liegenden Punktes L so reflectirt wird, dass

$$CF = \frac{CL.r}{2\,CL - r}.$$

Bezeichnen wir nun den Winkel $L''CL$ mit α, so können wir die erste Gleichung schreiben

$$CF'' = \frac{1}{\cos\alpha}\,\frac{CL.r}{2\,\frac{CL}{\cos\alpha} - r};\quad CF''.\cos\alpha = \frac{CL.r}{2\,\frac{CL}{\cos\alpha} - r}.$$

Da nun $\cos\alpha$, weil α bei vor dem Spiegel liegenden Gegenständen immer kleiner ist als die Oeffnung des Spiegels, stets kaum von 1 verschieden ist, so können wir in dem Nenner der rechten Seite $\cos\alpha = 1$ setzen, und erhalten dann

$$CF''\cos\alpha = \frac{CL.r}{2\,CL - r} = CF,$$

oder der Bildpunkt von L'', welches senkrecht über L liegt, F'', liegt senkrecht über dem Bildpunkte F von L. Gleiches gilt von allen Bild-

punkten der Punkte der Linie LL'', ihre Bildpunkte liegen auf der Linie FF''.

Die einzelnen Bildpunkte folgen sich einander wie die Axen LC, $L'C$, $L''C$, und da diese sich folgen wie die leuchtenden Punkte und erst hinter den Bildpunkten sich schneiden, so folgt, dass die gegenseitige Lage der Bildpunkte ähnlich ist derjenigen der leuchtenden Punkte. Ein kugelförmiger Convexspiegel liefert somit aufrecht stehende Bilder von Linien, oder damit überhaupt von Gegenständen, die sich vor ihm befinden. Die Grösse dieser Bilder verhält sich zur Grösse der Gegenstände, wie der Abstand der Bilder vom Mittelpunkte zu demjenigen der Gegenstände. Da nun der Abstand der Bilder immer kleiner ist als derjenige der Gegenstände, so folgt, dass ein solcher Spiegel aufrecht stehende verkleinerte Bilder liefert; die Bilder werden um so kleiner, je grösser der Abstand des Gegenstandes vom Spiegel ist.

Diese Sätze über die Reflexion an convexen Spiegeln finden sich überall in der Erfahrung bestätigt. Solche Spiegel, wie z. B. die in den Gärten oft aufgestellten Kugeln von dunklem Glase, liefern stets aufrecht stehende verkleinerte Bilder, welche, so lange die Entfernung der gespiegelten Gegenstände gross ist, nicht verzerrt sind, das heisst, in denen die verschiedenen Dimensionen der Bilder in demselben Verhältnisse stehen, wie die Dimensionen der Gegenstände. Denn wenn der Werth von b sehr gross ist, so sind die durch kleine Aenderungen von b hervorgebrachten Aenderungen von g nur sehr klein. Ist dagegen der Abstand der Gegenstände nur klein, so werden die Bilder verzerrt, das heisst, die im Gegenstande dem Spiegel nähern Theile sind im Bilde verhältnissmässig grösser als die fernern, weil wenn b nur wenig von r verschieden ist, kleine Aenderungen von b nahezu gleich grossen von g entsprechen. Wächst z. B. b von r auf $1{,}01\ r$, so nimmt g fast genau von r auf $0{,}99\ r$ ab. Damit ändert sich dann das Grössenverhältniss der Dimensionen eines gespiegelten Gegenstandes, dessen einzelne Theile eine derartig verschiedene Entfernung haben, in derselben Weise.

§. 131.

Reflexion an kugelförmigen Hohlspiegeln. Da die Gleichung, welche uns die Lage der Bildpunkte bei concaven spiegelnden Flächen liefert, identisch dieselbe ist, wie bei convexen, so bedarf es keines besondern Nachweises mehr, dass auch die concaven Spiegel uns Bilder von den vor ihnen befindlichen Gegenständen liefern, deren Grösse sich zu derjenigen der Gegenstände verhält wie der Abstand des Bildes zu demjenigen des Gegenstandes von dem Mittelpunkte der Kugel. Da indess hier die Lage der Gegenstände zum Spiegel eine andere ist, so erhalten wir in den meisten Fällen reelle und deshalb umgekehrt stehende Bilder.

So lange wir nämlich reelle leuchtende Punkte haben, ist in der Gleichung für den Abstand des Bildpunktes

$$g = \frac{b\,r}{2\,b - r} = \frac{r}{2 - \dfrac{r}{b}}$$

b kleiner als r, oder negativ zu setzen. Daraus folgt, dass virtuelle, das heisst hinter dem Spiegel liegende Bilder nur so lange erscheinen, als die

Gegenstände weniger vom Spiegel entfernt sind, als die halbe Länge des Radius beträgt; denn so lange ist $g > r$. Da dann die Bilder und Gegenstände an derselben Seite des Mittelpunktes liegen, so sind die Bilder aufrechte, und da so lange stets $g > b$, sind die Bilder vergrösserte. Man erkennt leicht, dass Bild und Gegenstand sich in dem Falle genau verhalten wie Gegenstand und Bild bei dem convexen Spiegel; an die Stelle des reellen Gegenstandes dort tritt das virtuelle Bild hier, wenn an die Stelle des virtuellen Bildes dort der Gegenstand in diesem Falle tritt. Nimmt b bis auf $\frac{1}{2}\,r$ ab, so wird

$$g = \frac{r}{2 - 2} = \frac{r}{0} = \infty.$$

Das virtuelle Bild rückt in unendliche Entfernung, die Strahlen werden nach der Reflexion der Axe des Spiegels und einander parallel. Da sich parallele Strahlen in unendlicher Entfernung nach beiden Seiten schneiden, kann man ebenso auch sagen, dass die vom Spiegel zurückkehrenden Strahlen ein in unendlicher Entfernung vor dem Spiegel liegendes reelles Bild liefern. Das so entstehende Bild liegt dann auf der entgegengesetzten Seite des Mittelpunktes, sein Abstand von demselben entspricht einem unendlich grossen negativen Werthe von g.

Wenn nun b weiter abnimmt, erhält g wieder einen endlichen Werth, aber bleibt, da wenn $b < \frac{r}{2}$,

$$2 - \frac{r}{b} < 0,$$

negativ. Wir bekommen darnach vor dem Spiegel liegende, also reelle Bilder. Während b von $\frac{r}{2}$ auf 0 abnimmt, nimmt der negative Werth von g von unendlich bis 0 ab, welchen Werth es erreicht, wenn der leuchtende Punkt im Mittelpunkte der Kugel liegt. Die reellen Bilder rücken also aus unendlicher Entfernung bis zum Mittelpunkte, wenn der leuchtende Gegenstand aus der Entfernung des halben Radius sich bis zum Mittelpunkt bewegt. Rückt der leuchtende Punkt in den Mittelpunkt, so fällt sein Bild mit ihm zusammen, oder alle vom Mittelpunkt ausgehende Strahlen kehren nach der Reflexion in denselben zurück. Das folgt auch unmittelbar daraus, dass bei der Kugel die Radien die Einfallslothe sind, somit die in der Richtung der Radien einfallenden Strahlen in sich selbst reflectirt werden.

Rückt der leuchtende Gegenstand über den Mittelpunkt hinaus, so ist in der Gleichung für g der Werth von b negativ zu setzen; schreiben wir deshalb $b' = -b$, so wird

$$g = \frac{r}{2 + \frac{r}{-b}} = \frac{r}{2 + \frac{r}{b'}}.$$

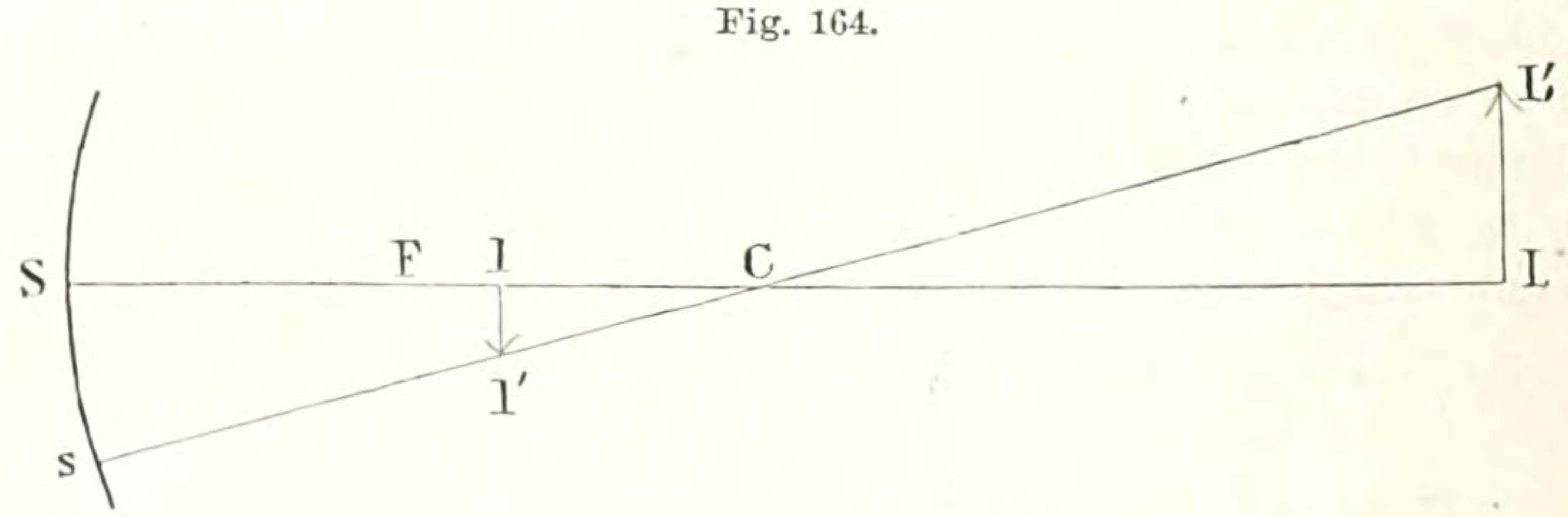
Der Werth von g wird wieder positiv und bleibt positiv, so lange der leuchtende Punkt auf derselben Seite des Mittelpunktes ist, also b negativ ist. Wächst der Abstand des leuchtenden Punktes, so wächst auch g, und zwar nimmt g von 0 bis $\frac{1}{2}\,r$ zu, wenn b' von 0 bis unendlich zunimmt. Rückt der Gegenstand in unendliche Entfernung vom Spiegel oder

Mittelpunkte, fallen also parallele Strahlen auf den Spiegel, so schneiden sich dieselben nach der Reflexion im Halbirungspunkte des Radius. Man nennt deshalb diesen Punkt den Brennpunkt des Spiegels. Der Brennpunkt ist also bei concaven Spiegeln ein reeller, die Strahlen schneiden sich in demselben wirklich.

Wir erhalten ebenfalls reelle Bilder bei den concaven Spiegeln, wenn wir die Strahlen in solcher Weise auf den Spiegel fallen lassen, dass sie erst hinter demselben sich schneiden; die von dem Spiegel entworfenen Bilder liegen dann, wie sich leicht ergibt, an denselben Stellen, an denen die virtuellen Bilder reeller Objecte liegen, wenn die convexe Seite der Kugel spiegelnd ist.

Da die reellen Bilder von wirklichen vor dem Spiegel liegenden Gegenständen stets an der andern Seite des Mittelpunktes liegen als die Gegenstände selbst, so folgt, dass dieselben umgekehrte sind. Man erkennt das unmittelbar in Fig. 164. Ist LL' eine zur Axe des Spiegels senkrechte

Fig. 164.



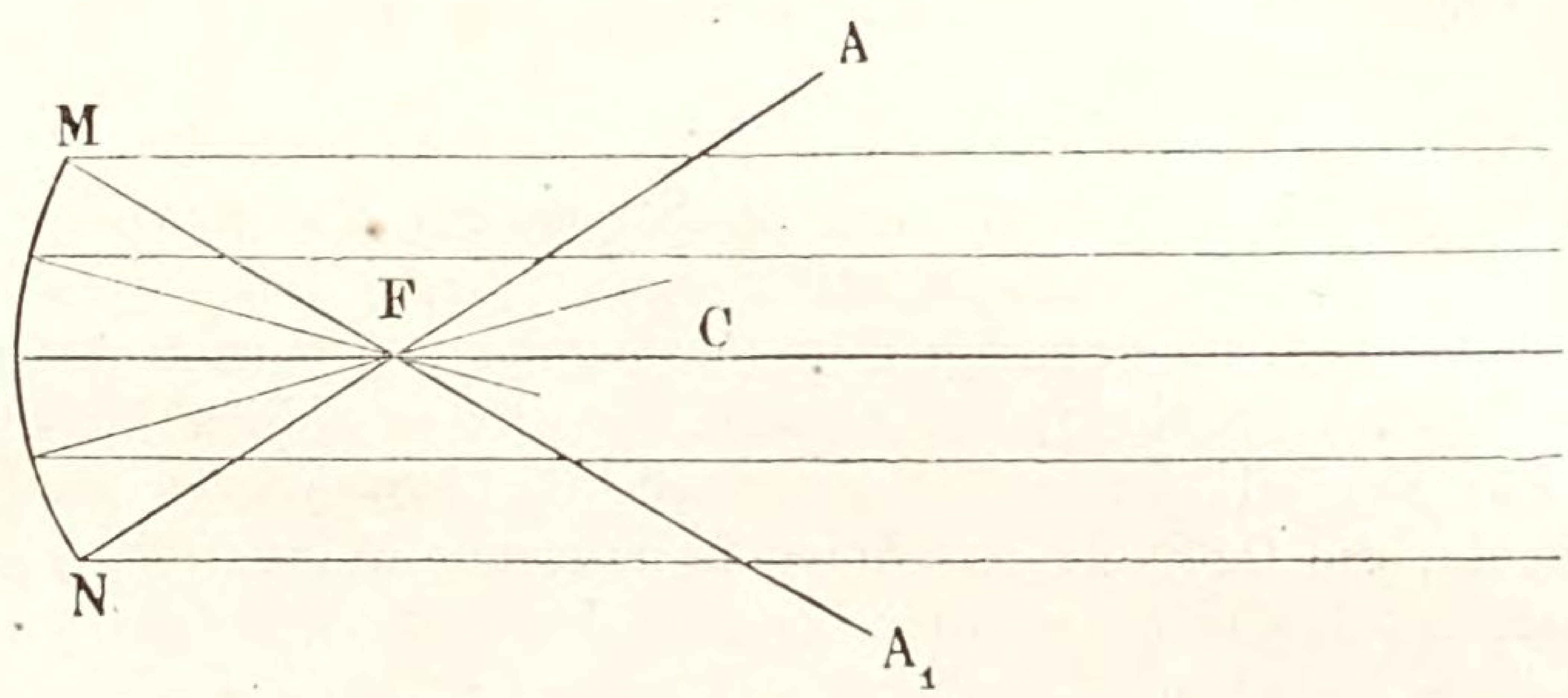
Linie, so liegt das Bild des auf der Axe liegenden Punktes L auf der Axe in l, das Bild des Punktes L' auf der zu L' gehörigen Nebenaxe $L'Cs$ in l'; da sich nun die beiden Axen zwischen LL' und ll' in C schneiden, so liegt das Bild l' des über L liegenden Punktes unterhalb des Bildpunktes l; das also, was in dem abgebildeten Gegenstande oben ist, befindet sich in dem Bilde unten. Ebenso ist LL' das Bild, wenn ll' die leuchtende Linie ist, auch dieses ist gegen den Gegenstand umgekehrt.

Da sich Bild und Gegenstand ihrer Grösse nach verhalten, wie ihre Abstände vom Mittelpunkte, so folgt, die Bilder derjenigen Gegenstände, die weiter vom Spiegel entfernt sind als der Mittelpunkt, sind verkleinerte, die Bilder derjenigen Gegenstände, die zwischen Mittelpunkt und Brennpunkt liegen, sind vergrösserte.

Diese von den Spiegeln entworfenen reellen Bilder kommen dadurch zu Stande, dass in ihnen die von dem Spiegel reflectirten Strahlen sich schneiden; damit man sie direkt sehen kann, muss man deshalb das Auge so stellen, dass es von den im Bilde sich schneidenden Strahlen getroffen wird. So sieht man z. B. das im Brennpunkte F eines Spiegels Fig. 165 liegende Bild der Sonne direkt nur, wenn man das Auge in den Kegel bringt, dessen Durchschnitt AFA' ist. Ausserhalb dieses Kegels sieht man das Sonnenbild nicht direkt, da dorthin keine reflectirten Strahlen gelangen. Will man das Bild auch an andern Stellen sichtbar machen, so muss man es auf einem kleinen, am besten weissen Schirme auffangen, indem durch die unregelmässige Reflexion des Lichtes von der Oberfläche eines solchen Schirmes die Strahlen sich wieder nach allen Richtungen ausbreiten.

Mit Hülfe eines solchen Schirmes kann man leicht die angeführten Sätze über die Lage und Grösse der Bilder experimentell bestätigen. Man stellt eine Flamme vor den Spiegel in irgend einer Entfernung auf und

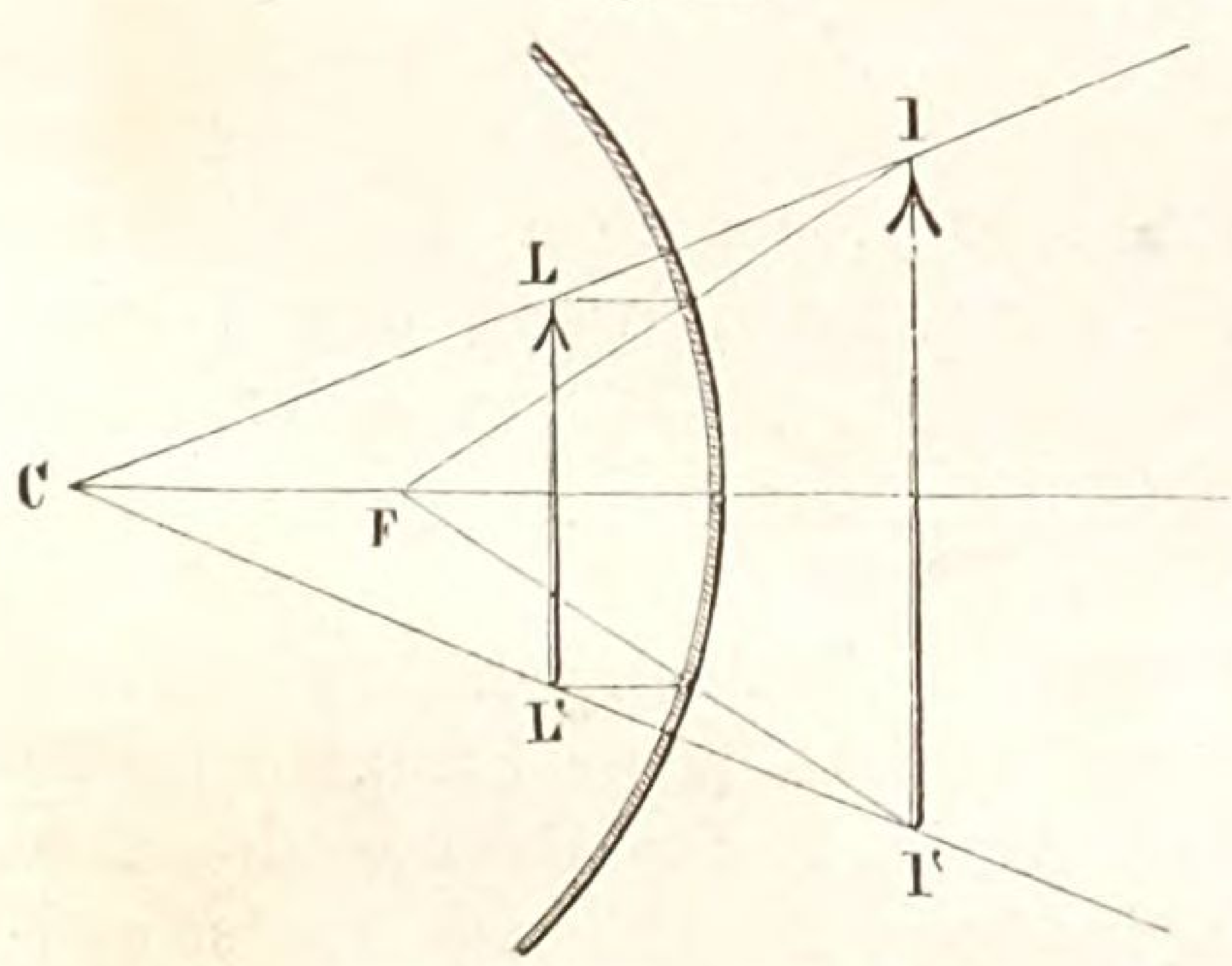
Fig. 165.



sucht mit einem verschiebbaren Schirme die Stelle auf, an der das reelle Bild sich befindet. Es ist dann nur nöthig, die Abstände der Bilder und der Flamme vom Mittelpunkte oder vom Scheitel des Spiegels und die Grösse des Bildes und der Flamme zu messen.

Die virtuellen Bilder von Gegenständen, die vor dem Spiegel zwischen Brennpunkt und Spiegel liegen, sind aufrecht stehende, da Bild und Gegenstand auf derselben Seite des Mittelpunktes liegen, und vergrösserte, da das Bild weiter vom Mittelpunkt entfernt ist als der abgebildete Gegenstand. Man erkennt das unmittelbar in Fig. 166, welche gleichzeitig eine in allen Fällen anwendbare Construction zur Auffindung des Bildes andeutet, welche auf den beiden Sätzen beruht, dass der Axe parallele Strahlen nach der Reflexion die Axe im Hauptbrennpunkt schneiden müssen, und dass das Bild eines leuchtenden Punktes immer auf der zu dem betreffenden Punkte gehörenden Nebenaxe liegen muss. Da nun in dem Bildpunkte sich alle Strahlen schneiden, so liegt derselbe auf der Nebenaxe dort, wo der von dem leuchtenden Punkte ausgehende, vor der Reflexion zur Axe parallele Strahl nach der Reflexion die Nebenaxe schneidet. Wir finden deshalb das Bild l des Punktes L, indem wir die zu L gehörige Nebenaxe CLl ziehen, dann von L aus eine zur Hauptaxe Parallele an den Spiegel ziehen und nun den Hauptbrennpunkt F mit dem Punkte verbinden, wo diese der Axe parallele von L aus gezogene Richtung den Spiegel trifft. Dort wo diese Linie Fl passend verlängert die Nebenaxe trifft, ist der Bildpunkt von L. Wie man sieht, erhält man, wenn LL' näher bei dem Spiegel liegt als F, virtuelle, aufrechtstehende vergrösserte Bilder.

Fig. 166.



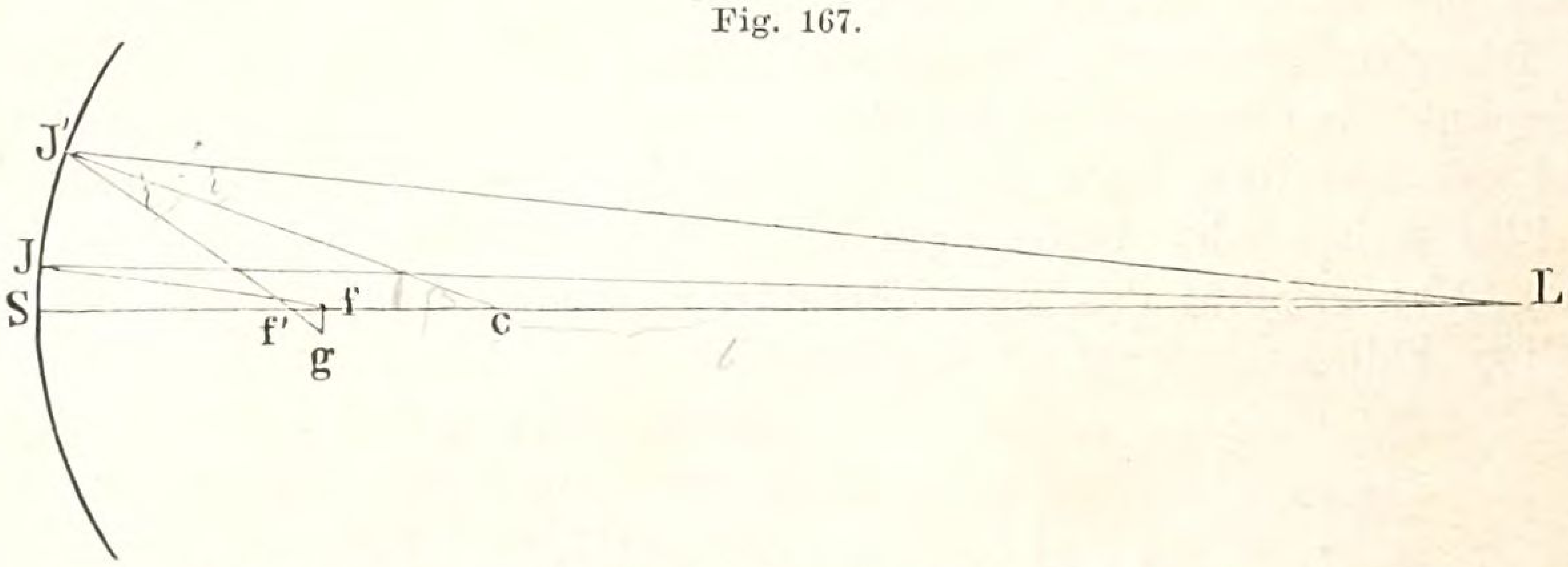
Dieselbe Figur lässt ohne weiteres erkennen, dass auch das reelle Bild eines virtuellen Objectes aufrechtstehend ist und zwischen dem Brennpunkt und dem Spiegel liegt. Würden wir z. B. durch einen passend

aufgestellten Hohlspiegel die von einer leuchtenden Linie ausgehenden Strahlen so reflectiren lassen, dass sie, wenn der Hohlspiegel Fig. 166 nicht vorhanden wäre, das reelle Bild $l\,l'$ geben würden, so werden die Strahlen, welche dieses bilden würden, so reflectirt, dass das reelle Bild $L\,L'$ vor dem Spiegel entsteht, wie man unmittelbar an der Figur erkennt.

§. 132.

Sphärische Aberration. Die in den letzten §§. gemachte Voraussetzung, dass die von einem kugelförmigen Spiegel reflectirten Strahlen, wenn sie von einem leuchtenden Punkte ausgehen, sich nach der Reflexion in einem Punkte schneiden, ist strenge nur für unendlich kleine Spiegel richtig. Für Spiegel von endlicher Grösse, für die also der von uns mit β bezeichnete, die Oeffnung des Spiegels messende Winkel einen endlichen Werth hat, ist das nicht in aller Strenge der Fall; wir erhalten deshalb als Bild eines leuchtenden Punktes nicht einen Punkt, sondern einen sogenannten Brennraum, in welchem sich die von dem Spiegel zurückkommenden Strahlen schneiden. So schneiden die Fig. 167 von dem leuchtenden Punkte L ausgehenden und an dem Spiegel in unendlicher oder sehr grosser

Fig. 167.



Nähe von S reflectirten Strahlen die Axe in f, dagegen die nahe am Rande bei J' reflectirten Strahlen in f', wo dann, wenn der Winkel $SCJ' = \beta$ ist,

$$Cf = \frac{b\,r}{2\,b - r} \qquad Cf' = \frac{b\,r}{2\,b\cos\beta - r}.$$

In dem Abstande ff' schneiden sich diejenigen Strahlen, die zwischen S und J' den Spiegel treffen, so dass diese Strecke mehr Strahlen erhält als alle übrigen Punkte der Axe. Den Abstand der Punkte der Axe ff', in welchem alle von dem Spiegel reflectirten Strahlen die Axe schneiden, nennt man die Länge des Brennraums oder die Längenabweichung des Spiegels. Dieselbe ist

$$ff' = Cf' - Cf = \frac{2\,b\,b\,r\,(1 - \cos\beta)}{4\,b\,b\cos\beta - 2\,b\,r\,(1 + \cos\beta) + r\,r},$$

sie hängt also ab von dem Abstande b des leuchtenden Punktes, dem Radius und der Oeffnung des Spiegels. Für parallele Strahlen ist sie am kleinsten, wir erhalten sie für solche, indem wir Zähler und Nenner durch $2\,b\,b$ dividiren und dann $b = \infty$ setzen, wodurch die Glieder, in deren Nenner b steht, gleich 0 werden,

$$ff' = r\,\frac{1 - \cos\beta}{2\cos\beta}.$$

Setzen wir also wie am Schlusse von §. 129 eine Oeffnung des Spiegels von 8^0 voraus, so wird $ff' = 0{,}0049\ r$, sie würde also bei einem Spiegel von 500 Mm. Radius etwa 2,5 Mm. betragen. Da die reflectirten Strahlen von den Punkten, in denen sie sich und die Axe schneiden, kegelförmig weiter gehen, so umgeben die Strahlen, welche näher dem Rande reflectirt sind, den Brennpunkt f der mittlern Strahlen als leuchtende Kreise; ein im Brennpunkte f senkrecht zur Axe aufgestellter Schirm wird daher als Bild des leuchtenden Punktes nicht einen Punkt, sondern einen kleinen Kreis zeigen. Den Radius dieses Kreises fg, die Strecke, um welche die vom Rande herkommenden Strahlen im Brennpunkte der mittlern Strahlen von der Axe entfernt sind, nennt man die Seitenabweichung des Spiegels. Die Grösse derselben ist, wenn wir den Einfallswinkel der Randstrahlen mit i bezeichnen, gegeben durch die Gleichung

$$\frac{fg}{ff'} = \text{tang}\ gf'f = \text{tang}\ (i + \beta).$$

Man sieht, dieselbe hängt von der Längenabweichung und dem Abstande des leuchtenden Punktes ab, durch den der Winkel i bedingt ist. Für parallele Strahlen wird $i = \beta$

$$fg = ff'\ \text{tang}\ 2\ \beta.$$

Für eine Oeffnung von 8^0 würde $fg = 0{,}287\ ff' = 0{,}0014\ r$, somit bei einem Spiegel von 500 Mm. Radius gleich 0,7 Mm.

Hauptsächlich die Seitenabweichung ist es, welche die Bilder undeutlich macht, denn da das Bild jedes leuchtenden Punktes ein Kreis ist, so fallen die Bilder benachbarter Punkte theilweise über einander und stören sich so gegenseitig.

Um die Abweichung in Folge der Kugelgestalt der Spiegel möglichst klein zu machen, muss man Spiegel von sehr kleiner Oeffnung nehmen; damit dann aber die reflectirende Fläche nicht zu klein wird, somit die Bilder nicht zu lichtschwach werden, muss man Spiegel von sehr grossem Radius, somit grosser Brennweite wählen. Wenn man so auch die Seitenabweichung sehr klein machen kann, so ist es doch von Interesse, die Frage zu stellen, ob man nicht eine Fläche herstellen kann, bei welcher die reflectirten Strahlen gar keine Abweichung zeigen. Die Geometrie gibt in der That eine solche Fläche an, es ist eine parabolische; bei der Schwierigkeit indessen, eine solche Fläche in der Praxis anzuwenden, werden fast stets kugelförmige Spiegel benutzt.

Ganz ebenso wie man die Reflexion von Kugelflächen aus dem Reflexionsgesetz ableiten kann, lässt sich dieselbe auch für andere Flächen erhalten, wenn auch die Rechnungen weniger einfach sind. Wir gehen hier nicht auf diese Untersuchung ein, da sie mehr ein mathematisches als physikalisches Interesse hat.

§. 133.

Brechung des Lichtes in ebenen Flächen. Wenn das Licht an der Grenze zweier Mittel ankommt, wird nicht alles Licht reflectirt, sondern ein Theil geht in das zweite Mittel über. Man sieht diese Fortpflanzung in und durch das zweite Mittel direkt bei den durchsichtigen

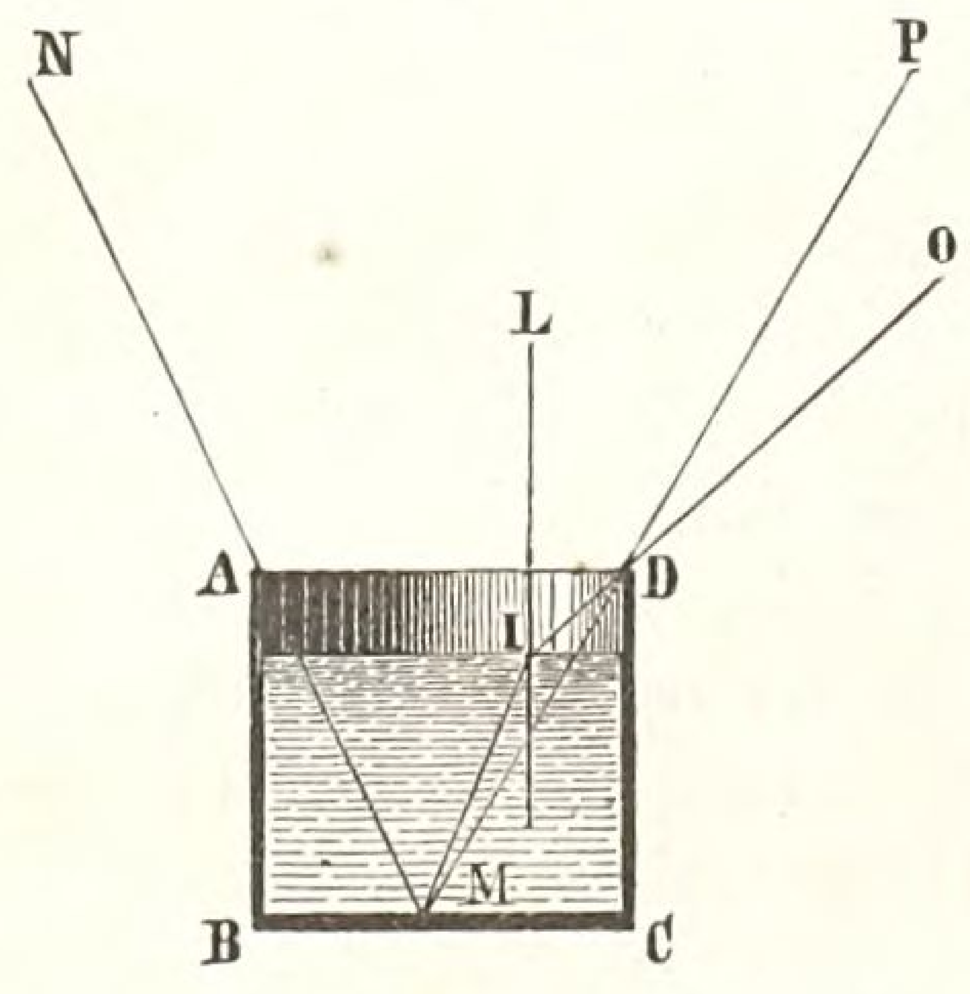
Körpern, indess auch bei den undurchsichtigen Körpern tritt eine solche Theilung ein, auch in diese dringt, wie wir später sehen werden, unter Umständen ebenso viel Licht ein, wie in die durchsichtigen. Es folgt das mit Nothwendigkeit daraus, dass die Menge des durch regelmässige und unregelmässige Reflexion zurückgeworfenen Lichtes stets kleiner ist als diejenige des den Körper treffenden Lichtes. Einen weitern Beleg, dass die Theilung des Lichtes immer stattfindet, wenn das Licht an der Grenze eines Körpers ankommt, erhalten wir dadurch, dass fast alle Körper in hinreichend dünnen Schichten durchsichtig oder doch durchscheinend werden. Gold und Silber z. B. können, wie wir es für Silber schon bei Besprechung der Capillarerscheinungen erwähnten, in so dünnen Schichten erhalten werden, dass sie durchsichtig sind.

Wir betrachten hier zunächst die Theilung des Lichtes an durchsichtigen Körpern und die in diesen sich fortpflanzende Lichtmenge.

Fällt das Licht auf die Grenze eines durchsichtigen Körpers z. B. eine Wasserfläche schief auf, so dass also der Strahl mit dem Einfallslothe einen von 0^0 verschiedenen Winkel bildet, so pflanzt es sich in dem zweiten Mittel stets nach einer andern Richtung fort als in dem ersten, der Strahl wird in der Grenzfläche gebrochen, der Winkel, den er in dem zweiten Mittel mit dem Einfallslothe bildet, ist ein anderer als der im ersten.

Man sieht das direkt, wenn man auf den Boden eines oben offenen, sonst undurchsichtigen Gefässes Fig. 168 eine Marke M macht, und dann das Gefäss bis zu einer gewissen Höhe mit einer durchsichtigen Flüssigkeit etwa Wasser füllt. So lange das Gefäss leer ist, sieht man die Marke nur, wenn man das Auge über MP oder so hält, dass MP das Auge trifft. Sobald man mit dem Auge unter MP hinabgeht, ist die Marke nicht mehr sichtbar. Ist das Gefäss aber bis zur Höhe J mit Wasser gefüllt, so wird für ein unter P bis O hinabgehendes Auge die Marke wieder sichtbar, sie scheint somit in der Verticalebene NMP verschoben. Da wir die Marke in der Richtung OJ sehen, das Licht sich aber in der Luft geradlinig fortpflanzt, so folgt, dass der von der Marke ausgehende Lichtstrahl über J in unser Auge gelangt. Da ferner das Licht auch im Wasser sich geradlinig fortpflanzt, folgt, dass es auf der Geraden MJ zum Punkte J gelangt ist. Es hat demnach bei J eine Brechung des Strahles stattgefunden, der Strahl bildet im Wasser mit dem Einfallsloth einen andern Winkel als in Luft.

Fig. 168.

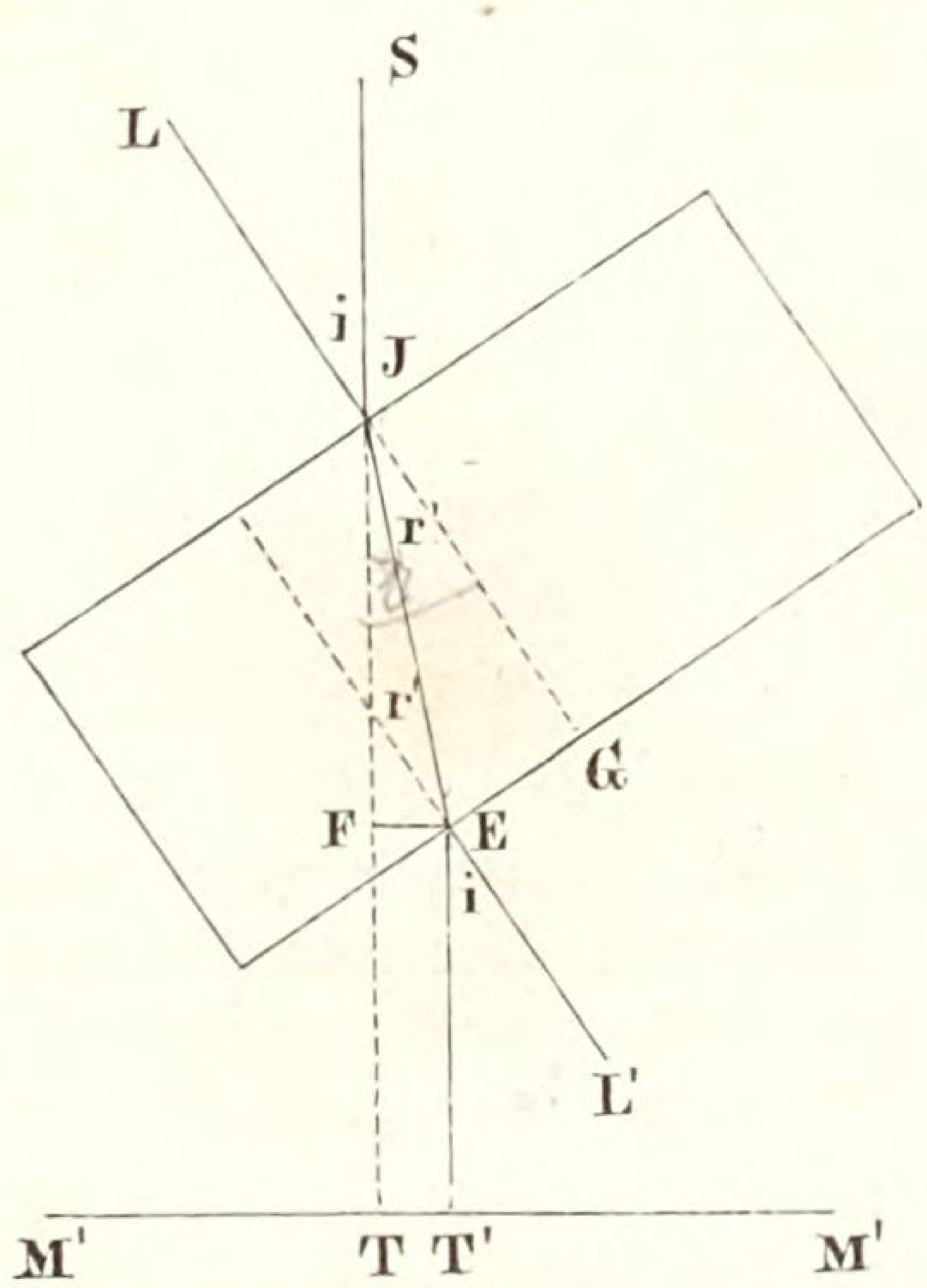


Da nun das Licht auf demselben Wege, auf welchem es von einem Punkte zu einem zweiten gelangt, auch wenn der zweite das Licht aussendet, zu dem ersten sich fortpflanzt, so folgt, dass ebenso das von Luft in Wasser übertretende Licht gebrochen wird, dass ein in der Richtung OJ an der Wasserfläche ankommender Strahl im Wasser in der Richtung JM weiter geht.

Die Richtigkeit dieses Schlusses lässt sich durch einen direkten Versuch beweisen. Wir leiten in ein Zimmer ein horizontales Bündel Sonnen-

strahlen, und schneiden aus demselben durch einen vertical gestellten Spalt ein schmales Lichtbündel aus, so dass es, wenn man dasselbe in T Fig. 169 auf einem horizontal und senkrecht zu dem Strahlenbündel ST gestellten Maassstabe MM auffängt, auf dem Maassstabe als eine feine verticale Lichtlinie erscheint. Man stellt dann in den Weg des Lichtbündels einen etwa 1 Centim. dicken Glasstreifen von solcher Breite, dass etwa die untere Hälfte des Lichtbündels durch das Glas gehen muss. Sorgt man dann dafür, dass die Seitenwände des Glasstreifens, durch welche das Licht in das Glas hinein und aus demselben austritt, genau vertical stehen, und dreht man den Glasstreifen so, dass das ankommende Licht mit dem Einfallslothe einen Winkel i bildet, so erscheint die untere Hälfte der Lichtlinie auf dem Maassstabe zur Seite verschoben bei T'. Misst man nun den Abstand des verschobenen, durch das Glas gegangenen Theiles der Lichtlinie von dem unverschobenen, so findet man diesen Abstand immer gleich, in welcher Entfernung von dem Glasstreifen man auch den Abstand TT' misst. Daraus folgt, dass der aus dem Glasstreifen austretende Strahl ET' dem eintretenden SJ parallel ist, dass er also mit dem Einfallslothe denselben Winkel $L'ET' = i$ bildet wie der eintretende Strahl. Da ferner das Licht im Glase sich in einer geraden Linie von J nach E fortgepflanzt hat, folgt, dass die Winkel, welche der Strahl im Glase an beiden Flächen mit dem Einfallslothe macht, dieselben sind. Es folgt also, dass wenn Licht durch die Grenzfläche zweier Medien geht, es genau so gebrochen wird, wenn es aus dem ersten zum zweiten, als wenn es aus dem zweiten zum ersten Medium übergeht. Ist in dem einen Medium der Winkel, den der Strahl mit dem Einfallslothe bildet, derselbe, so ist er es auch im andern.

Fig. 169.



Der zuletzt angegebene Versuch setzt uns nun auch in den Stand, zu untersuchen, in welcher Abhängigkeit die Fortpflanzungsrichtung des gebrochenen Lichtes von derjenigen des an der Grenze ankommenden Lichtes steht, also das Gesetz der Brechung aufzusuchen, indem man die Stellung des Glasstreifens gegen das Strahlenbündel SJ variirt. Wir nahmen vorhin an, dass die Seitenwand des Glasstreifens vertical, das Einfallsloth LJ also horizontal stehe, so dass die Einfallsebene SJL horizontal ist, und bemerkten dann, dass durch die Brechung das Lichtbündel einfach horizontal zur Seite geschoben werde. Drehen wir den Glasstreifen so, dass die Ebene SJL vertical steht, so findet man, dass die Ebene, in der das Lichtbündel verschoben wird, ebenfalls die verticale ist, kurz, dass stets die Verschiebung des Lichtbündels in der Einfallsebene stattfindet. Wir erhalten daher als ersten Satz des Brechungsgesetzes:

1. Der gebrochene Strahl liegt ganz in der Einfallsebene, oder Brechungs- und Einfalls-Ebene fallen zusammen.

Um dann das Verhältniss zwischen dem Einfallswinkel i und dem Brechungswinkel r aufzusuchen, variirt man bei constant erhaltener Einfallsebene den Einfallswinkel i und misst die Verschiebung des gebrochenen Strahlenbündels $TT' = EF$. Aus dieser, dem gemessenen Winkel i und der gemessenen Dicke der Platte $JG = d$ lässt sich r leicht berechnen. Denn es ist

$$EF = EJ \,.\, \sin EJF = EJ \cdot \sin (FJG - EJG) = EJ \,.\, \sin (i - r)$$

$$EJ = JG \,.\, \frac{1}{\cos r} = \frac{d}{\cos r} \cdot$$

Setzen wir diesen Werth von JG ein, lösen dann die Gleichung für EF nach r auf, so wird, wenn wir gleichzeitig $EF = v$ setzen,

$$\operatorname{tang} r = \operatorname{tang} i - \frac{v}{d \,.\, \cos i} \,.$$

Derartige Messungen ergeben als zweiten Theil des Brechungsgesetzes, dass zwischen den Winkeln i und r bei einer und derselben Substanz stets eine solche Beziehung besteht, dass der Quotient aus dem Sinus der beiden Winkel eine constante Grösse ist. So ergab sich z. B. bei Anwendung eines Glasstreifens von 18 Mm. Dicke

für $i =$	40^0	60^0	80^0
$v =$	5,3 Mm.	9,6 Mm.	15,2 Mm.
$r =$	$24^0\,24'$	$33^0\,38'$	$38^0\,57'$
$\frac{\sin i}{\sin r} =$	1,556	1,563	1,566 $= n$

Wie man sieht, sind diese Quotienten so nahe gleich, dass ihre Unterschiede durch die unvermeidlichen Beobachtungsfehler erklärt sind. Diesen für ein und dasselbe Paar von Substanzen constanten Quotienten nennt man den Brechungsexponenten des Lichtes bei dem Uebergange aus dem ersten in das zweite Medium, oder auch den relativen Brechungsexponenten zwischen den beiden Medien. Obige Zahlen geben also den relativen Brechungsexponenten zwischen Luft und Glas. Der Brechungsexponent zwischen Glas und Luft ist dann

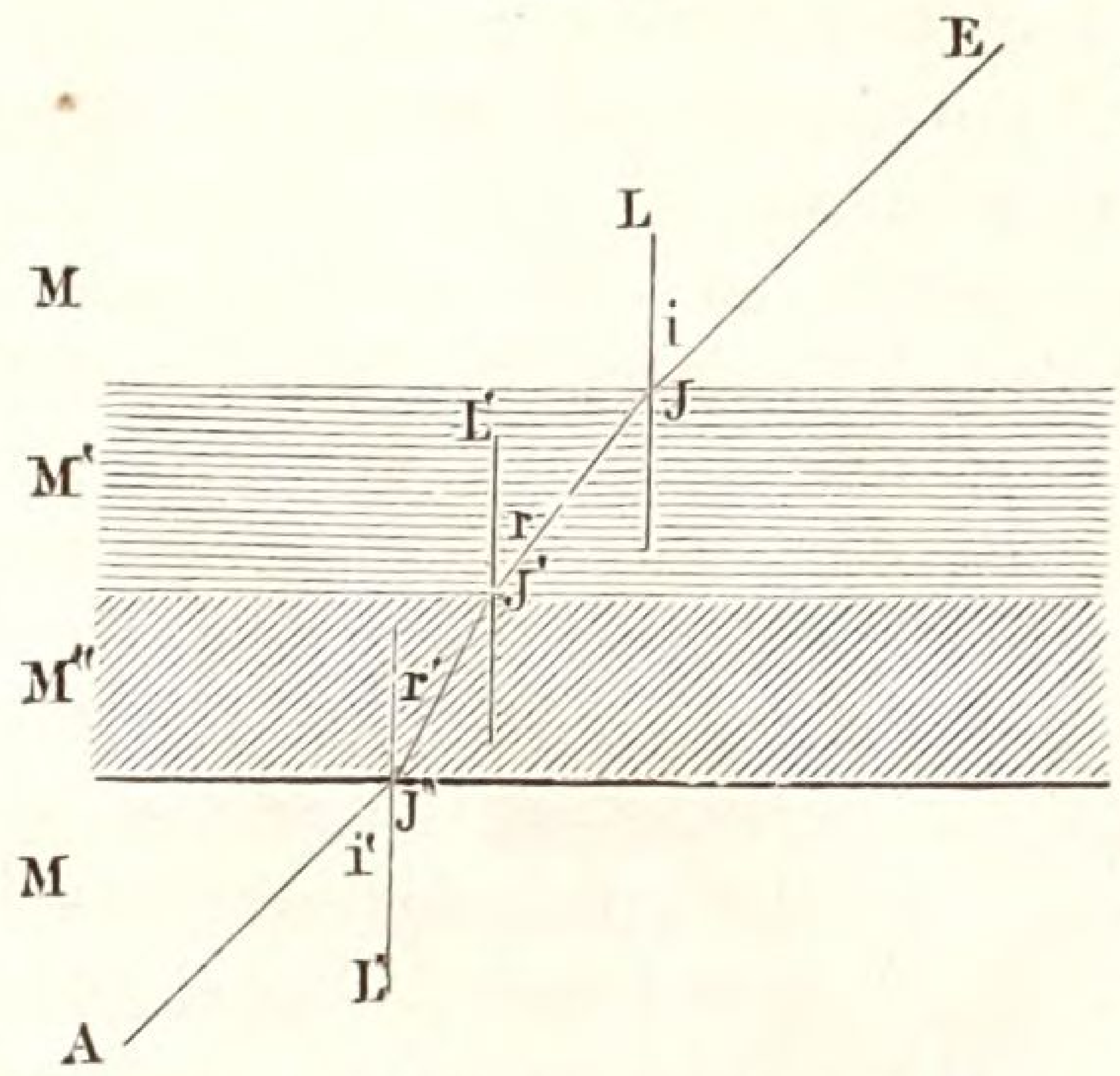
$$\frac{\sin r}{\sin i} = n' = \frac{1}{n},$$

da im Zähler des Brechungsexponenten immer der Sinus des Winkels zu setzen ist, welchen das Licht in dem Mittel mit dem Einfallslothe bildet, aus welchem es austritt. Der relative Brechungsexponent zwischen Glas und Luft ist also gleich dem reciproken Werthe dessen zwischen Luft und Glas.

Als den absoluten Brechungsexponenten einer Substanz, also z. B. des Glases, bezeichnet man den Quotienten aus dem Sinus des Einfalls- und Brechungswinkels, wenn das Licht aus dem leeren Raum in die betreffende Substanz übertritt. Kennt man den Brechungsexponenten zwischen Luft und der brechenden Substanz und den absoluten Brechungsexponenten der Luft, so ist der absolute Brechungsexponent der betreffenden Substanz gleich dem Producte beider.

Es ergibt sich das aus der Erfahrung, dass wenn man eine Reihe von Mitteln hat, die alle von parallelen Flächen begrenzt sind, der austretende Strahl stets dem eintretenden parallel ist, wenn schliesslich der Strahl wieder in dasselbe Mittel austritt. Sind also M, M', M'' Fig. 170 drei Mittel und grenzt an M'' wieder das Mittel M, so sind die eintretenden Strahlen EJ und die austretenden AJ'' einander parallel. Bezeichnen wir nun den relativen Brechungsexponenten zwischen M und M' mit n, zwischen M' und M'' mit n', zwischen M und M'' mit n'', und sind die Winkel, die das Licht mit den Einfallslothen bildet, in M gleich i, in M' gleich r, in M'' gleich r', so ist

Fig. 170.



$$n = \frac{\sin i}{\sin r}; \quad n' = \frac{\sin r}{\sin r'}; \quad n'' = \frac{\sin i'}{\sin r'} = \frac{\sin i}{\sin r'}$$

somit ist

$$n \,.\, n' = \frac{\sin i}{\sin r} \cdot \frac{\sin r}{\sin r'} = \frac{\sin i}{\sin r'} = n''.$$

Der Satz, dass der absolute Brechungsexponent einer Substanz gleich ist dem Producte aus demjenigen der Luft und dem relativen zwischen Luft und der betreffenden Substanz, lässt sich nach dieser Ableitung dahin verallgemeinern, dass das Product aus den relativen Brechungsexponenten zwischen zwei Substanzen I und II und zwischen zwei Substanzen II und III gleich ist dem relativen Brechungsexponenten zwischen I und III. Es ergibt sich weiter, dass die Brechung des Lichtes gerade so erfolgt, wenn es aus einem Mittel in ein Mittel M' unter dem Einfallswinkel i eintritt, als wenn es schon eine Reihe von Mitteln mit parallelen Grenzflächen durchlaufen hat, vorausgesetzt nur, dass der erste Einfallswinkel ebenfalls gleich i war.

Ist der relative Brechungsexponent zwischen einem Mittel und einem zweiten grösser wie eins, so nennt man das zweite Mittel optisch dichter, der Unterschied der optischen Dichtigkeit ist um so grösser, je mehr der Brechungsexponent von eins verschieden ist.

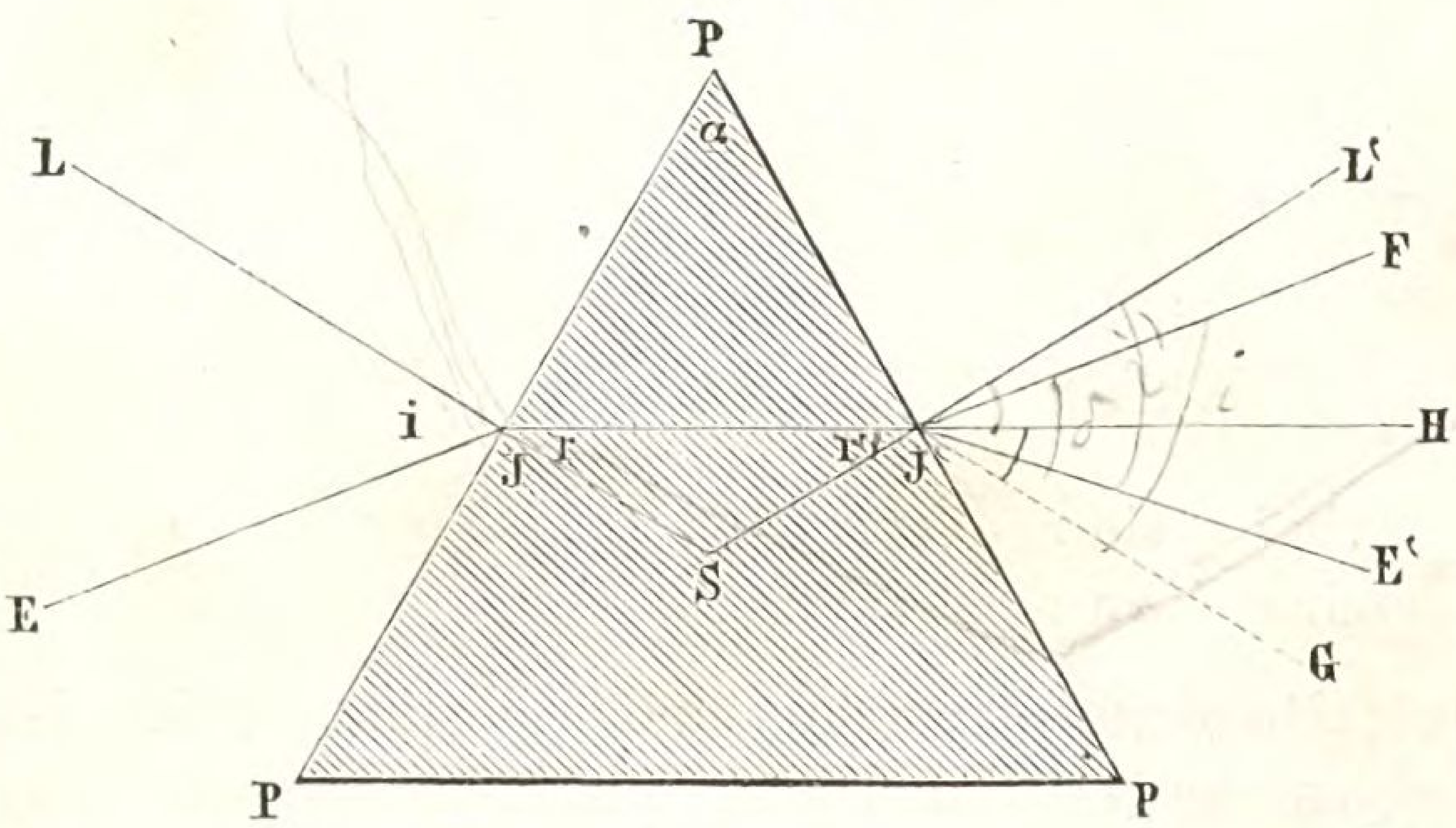
§. 135.

Brechung des Lichtes in Prismen. Aus dem Brechungsgesetze, nach welchem das Verhältniss zwischen dem Sinus des Einfallswinkels und Brechungswinkels für zwei gegebene Substanzen einen constanten Werth hat, folgt, dass das Licht, wenn es durch ein Mittel hindurchgeht, welches nicht von parallelen Flächen begrenzt ist, aus seiner Bahn abgelenkt werden muss. Ein solches von zwei nicht parallelen Flächen begrenztes Mittel nennt man in optischerBeziehung ein Prisma, einerlei, welches auch sonst die Gestalt des Mittels ist. Die Kante, in welcher die beiden Flächen, durch welche das Licht hindurchtritt, entweder wirklich oder passend vergrössert sich schneiden, ist die brechende Kante des Prismas, und der

Winkel, den die beiden Flächen mit einander bilden, der brechende Winkel desselben.

Die Messung des Winkels, welchen der austretende Strahl mit der Richtung des eintretenden bildet, man nennt ihn die Ablenkung des Lichtes, lässt sich mit viel grösserer Genauigkeit messen als die Verschiebung des Strahles bei dem Durchtritt durch ein von parallelen Flächen begrenztes Mittel; deshalb lässt sich durch Messung der Ablenkung in Prismen der relative Brechungsexponent zwischen Luft und der Substanz des Prismas mit viel grösserer Genauigkeit ableiten. Es ist dazu nur erforderlich, die Abhängigkeit der Ablenkung von den verschiedenen sie bedingenden Umständen darzustellen. Sei PPP Fig. 171 ein Prisma und $EJJ'E'$ der Gang eines Lichtstrahles durch dasselbe. Der brechende Winkel des Prismas sei α, der Einfallswinkel des Lichtes EJL sei i, die Winkel, die der Strahl im Innern des Prismas mit den Einfallslothen der beiden Flächen bildet, seien $SJJ' = r$ und $SJ'J = r'$, ferner sei der Austrittswinkel $E'J'L' = i'$.

Fig. 171.



Ziehen wir $J'F$ parallel zu der Richtung des eintretenden Lichtes EJ, so ist der Winkel $E'J'F = \delta$ die gesuchte Ablenkung. Ziehen wir noch $J'G$ parallel dem Einfallsloth LJ an der ersten Fläche, so dass $GJ'L'$, der Winkel, den die beiden Einfallslothe, also auch derjenige, den die beiden Prismenflächen mit einander bilden, der brechende Winkel α ist, so gibt die Figur unmittelbar

$$FJ'G + E'J'L' = GJ'L' + E'J'F$$

oder da $FJ'G = i$, $E'J'L' = i'$, $GJ'L' = \alpha$ und $E'J'F = \delta$,

$$i + i' = \alpha + \delta; \quad \delta = i + i' - \alpha.$$

Die Ablenkung ist gleich der Summe des Eintritts- und Austrittswinkels weniger dem brechenden Winkel des Prismas. Der Winkel α ist aber, da in dem Viereck $SJPP'$ sich der Winkel an S und α zu zwei Rechten ergänzen, und da ebenso die Summe $r + r' + S$ gleich zweien Rechten ist,

$$\alpha = r + r'.$$

Die Ablenkung ist somit auch gleich der Summe der beiden Winkel, die das Licht ausserhalb des Prismas mit den Einfallslothen der beiden Flächen bildet, weniger der Summe der beiden Winkel, die das Licht im Innern mit den beiden Einfallslothen bildet. Letztere Summe ist immer constant und gleich dem brechenden Winkel des Prismas.

Die Ablenkung hängt bei gegebenem i und α wesentlich ab von dem Winkel i', dieser aber wesentlich von dem relativen Brechungsexponenten zwischen Luft und der Prismensubstanz. Denn es ist

$$\sin i' = n \, . \sin r' = n \, . \sin(\alpha - r) = n(\sin \alpha \, . \cos r - \cos \alpha \, . \sin r);$$

nun ist

$$\sin r = \frac{\sin i}{n} \qquad \cos r = \frac{1}{n} \sqrt{n^2 - \sin^2 i},$$

somit

$$\sin i' = \sin \alpha \sqrt{n^2 - \sin^2 i} - \cos \alpha \,.\, \sin i.$$

Diese Gleichung gibt uns, wenn wir α, δ und i messen, somit i' aus der Gleichung

$$i' = \delta + \alpha - i$$

bestimmen, nach n aufgelöst den gesuchten Brechungsexponenten n.

Man kann indess zwei verschiedene Methoden anwenden, bei denen es nur einer Messung der Ablenkung δ und des brechenden Winkels α zur Bestimmung des Brechungsexponenten bedarf. Die erste Methode, bei der im Allgemeinen der brechende Winkel α des Prismas nicht zu gross genommen werden darf, ist die, dass man das Licht so durch das Prisma gehen lässt, dass es aus der zweiten Fläche parallel dem Einfallslothe austritt. Dann ist i' gleich Null, somit

$$\delta = i - \alpha; \qquad i = \delta + \alpha;$$

da ferner dann auch der Winkel r' gleich Null ist, so ist $\alpha = r$ gleich dem zum Einfallswinkel i gehörigen Brechungswinkel, somit ist der Brechungsexponent

$$n = \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{(\sin \delta + \alpha)}{\sin \alpha}.$$

Diese Gleichung für n lässt auch erkennen, welchen Werth der Winkel α nicht überschreiten darf. Da man bei einem Einfallswinkel von 90^0 nicht mehr beobachten kann, somit i bei den Beobachtungen stets kleiner als 90^0 sein muss, so muss $\sin i < 1$ und damit

$$\sin \alpha < \frac{1}{n}$$

sein. Bei Glas z. B., dessen Brechungsexponenten wir im vorigen §. gleich 1,56 fanden, darf $\sin \alpha$ nicht den Werth 0,641, somit α nicht den Werth 40^0 erreichen.

Die zweite Methode ist die, dass man das Licht so durch das Prisma gehen lässt, dass der Eintrittswinkel i gleich dem Austrittswinkel i', somit auch $r = r'$ wird. Dann ist

$$\delta = i + i' - \alpha = 2\,i - \alpha; \quad i = \frac{\delta + \alpha}{2}$$

$$\alpha = r + r' = 2\,r \qquad r = \frac{\alpha}{2}$$

somit

$$n = \frac{\sin \frac{\alpha + \delta}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}.$$

Dass das Licht in dieser Weise durch das Prisma hindurchgeht, erkennt man daran, dass dann die Ablenkung den kleinsten Werth erhält, den sie bei einem gegebenen Prisma erhalten kann. Dreht man nämlich, indem

man von einem ziemlich grossen Einfallswinkel i ausgeht, das Prisma so, dass der Einfallswinkel i kleiner wird, so nimmt die Ablenkung ab, bis der Winkel i einen gewissen Werth erreicht hat; lässt man von da aus i noch weiter abnehmen, so wächst die Ablenkung wieder. Bei der Stellung nun, bei der δ ein Minimum ist, geht das Licht so hindurch, dass $i = i'$ ist. Um das nachzuweisen ist nur erforderlich, zu zeigen, da δ immer gleich $i + i' - \alpha$ ist, dass $i + i'$ den kleinsten Werth annimmt, der bei einem gegebenen Prisma möglich ist, wenn $i = i'$ ist. Es lässt sich das leicht auf folgendem von Friedrich Eisenlohr angegebenen Wege zeigen. Es ist

$$\sin i = n . \sin r; \quad \sin i' = n \sin r'$$

$$\sin i + \sin i' = n (\sin r + \sin r')$$

$$\sin i - \sin i' = n (\sin r - \sin r').$$

Letztere beiden Gleichungen lassen sich bekanntlich schreiben

$$\sin {}^1/_2 (i + i') \cos {}^1/_2 (i - i') = n . \sin {}^1/_2 (r + r') \cos {}^1/_2 (r - r') \dots (1).$$

$$\cos {}^1/_2 (i + i') \sin {}^1/_2 (i - i') = n . \cos {}^1/_2 (r + r') \sin {}^1/_2 (r - r') \dots (2).$$

Durch Division der beiden Gleichungen wird

$$\text{tang } {}^1/_2 (i + i') \cot {}^1/_2 (i - i') = \text{tang } {}^1/_2 (r + r') \cot {}^1/_2 (r - r')$$

oder auch, indem wir die cot. auf die andere Seite bringen,

$$\text{tang } {}^1/_2 (i + i') \text{ tang } {}^1/_2 (r - r') = \text{tang } {}^1/_2 (r + r') \text{ tang } {}^1/_2 (i - i') \dots (3),$$

Da nun i und i' die Winkel in Luft sind, zu denen r und r' als Winkel im Prisma gehören, so ist für alle Prismen, die optisch dichter als Luft sind,

$$i + i' > r + r',$$

somit auch

$$\text{tang } {}^1/_2 (i + i') > \text{tang } {}^1/_2 (r + r');$$

dann folgt aber aus Gleichung (3), dass wenn $i - i'$ und $r - r'$ überhaupt von Null verschieden sind, dass

$$\text{tang } {}^1/_2 (i - i') > \text{tang } {}^1/_2 (r - r'); \quad i - i' > r - r'.$$

Da nun aber, so lange die letzte Ungleichheit besteht,

$$\cos {}^1/_2 (i - i') < \cos {}^1/_2 (r - r')$$

so folgt aus Gleichung (1), dass so lange auch

$$\sin {}^1/_2 (i + i') > n \sin {}^1/_2 (r + r').$$

Werden nun aber $i = i'$ und somit auch $r = r'$, so wird

$$\sin {}^1/_2 (i + i') = n . \sin {}^1/_2 (r + r')$$

und das ist nach dem Vorigen der kleinste Werth, den $\sin {}^1/_2 (i + i')$ annehmen kann; somit ist auch der kleinste Werth, welchen die Summe $i + i'$ annehmen kann, derjenige, wenn $i = i'$ ist. Dann tritt also auch das Minimum der Ablenkung δ ein.

Die Beobachtung des Minimums der Ablenkung ist weitaus das bequemste und auch das genaueste Verfahren zur Bestimmung der Brechungsexponenten, da man nur zwei Winkel δ und α zu messen hat, und da

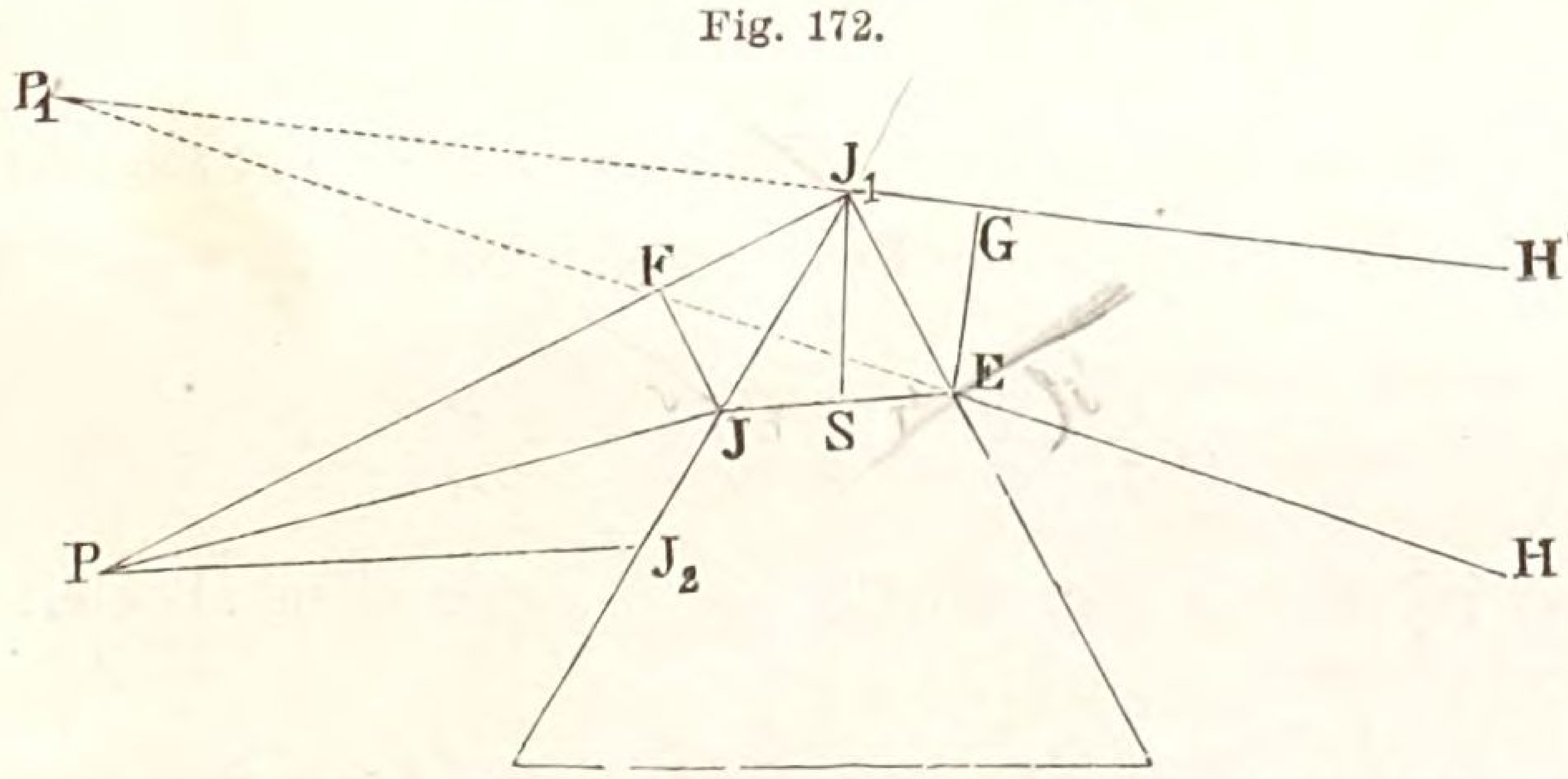
man Prismen mit grösserm brechenden Winkel benutzen kann, als nach der erstern Methode.

§. 136.

Abbildung von Punkten und Linien durch ein Prisma. Aus der Betrachtung des Ganges eines durch ein Prisma gebrochenen Strahles ergibt sich der Gang eines von einem Punkte ausgehenden Strahlenbündels. Wir setzen voraus, es treffe in einer Einfallsebene, welche senkrecht ist zur brechenden Kante des Prismas, auf dasselbe ein schmales von einem Punkte P Fig. 172 ausgehendes Strahlenbündel PJJ_1 und der Strahl PJ_1 möge so nahe an der brechenden Kante das Prisma treffen, dass wir J_1 als einen Punkt der brechenden Kante ansehen können. Der brechende Winkel des Prismas sei α, und sei i der Eintrittswinkel, i' der Austrittswinkel des Strahles PJ, der zu i gehörige Winkel im Innern des Prismas sei r, der zu i' gehörige sei r'. Der Winkel i' ist dann gegeben durch

$$\sin i' = n \sin(\alpha - r).$$

Fig. 172.



Nennen wir die entsprechenden Winkel für den Strahl PJ_1 jetzt $i + \varDelta i$, $i' + \varDelta i'$, $r + \varDelta r$, so ist der Winkel, unter welchem der Strahl PJ_1 das Prisma verlässt,

$$\sin(i' + \varDelta i') = n \cdot \sin(\alpha - (r + \varDelta r)).$$

Setzen wir nun $\varDelta i$ und $\varDelta r$ so klein voraus, dass wir deren cos. gleich 1, deren sin. gleich den Bögen setzen können, so wird

$$\cos i' \varDelta i' = - n \cos(\alpha - r) \varDelta r;$$

da nun

$$\sin(i + \varDelta i) = n \cdot \sin(r + \varDelta r)$$

$$\cos i \varDelta i = n \cos r \varDelta r$$

$$\varDelta r = \frac{\cos i}{n \cos r} \varDelta i,$$

so wird

$$\varDelta i' = - \frac{\cos(\alpha - r) \cos i}{\cos i' \cos r} \varDelta i = - \frac{\cos r' \cos i}{\cos r \cos i'} \varDelta i.$$

Für $\varDelta i'$ ergibt sich somit ein Werth, dessen Vorzeichen dem von $\varDelta i$ entgegengesetzt ist, das heisst, der Winkel, den der austretende Strahl $J_1 H'$ mit dem Einfallslothe der zweiten Fläche bildet, ist kleiner als jener, den der austretende Strahl EH mit demselben bildet, wenn wie in der Figur PJ_1 gegen PJ so liegt, dass der Einfallswinkel von PJ_1 grösser

ist. Der Austrittswinkel, den der Strahl bildet, der in der Richtung PJ_2 auf das Prisma fällt, dessen Einfallswinkel kleiner ist als i, für den also Δi negativ ist, würde dagegen grösser sein als i'. Daraus folgt, dass sich die austretenden Strahlen rückwärts verlängert jedenfalls schneiden. Um zu untersuchen, ob sich alle das Prisma durchsetzenden Strahlen in einem Punkte rückwärts verlängert schneiden, suchen wir den Punkt P_1 auf, in welchem sich die beiden austretenden Strahlen EH und $J_1 H'$ schneiden. Sei der Abstand PJ_1 des gegebenen Punktes von der brechenden Kante des Prismas gleich a, der Abstand des gesuchten $P_1 J_1 = f$. Wir haben dann folgende beiden Proportionen für f und a

$$P_1 J_1 : J_1 E = \sin P_1 E J_1 : \sin E P_1 G$$

$$P J_1 : J_1 J = \sin P J J_1 : \sin J P J'.$$

Nun ist

$$P_1 E J_1 = 90^0 - i'; \; E P_1 G = H' J_1 E - P_1 E J_1 = 90^0 - (i' + \Delta i') - (90^0 - i') = - \Delta i'$$

$$P J J_1 = 90^0 + i; \; J P J_1 = P J J_2 - P J_1 J = 90^0 - i - \big(90^0 - (i + \Delta i)\big) = \Delta i,$$

ferner

$$J_1 E : J_1 J = \sin J_1 J E : \sin J_1 E J = \sin (90^0 - r) : \sin (90^0 - r').$$

Dividiren wir die beiden ersten Proportionen und setzen diese Werthe ein, so wird

$$\frac{f}{a} : \frac{\cos r}{\cos r'} = \frac{\cos i'}{\cos i} : - \frac{\Delta i'}{\Delta i}$$

und daraus, indem wir zugleich für $- \frac{\Delta i'}{\Delta i}$ den oben abgeleiteten Werth einsetzen,

$$\frac{f}{a} = \frac{\cos r \cos i' \,.\, \cos r \cos i'}{\cos r' \cos i \,.\, \cos r' \cos i} = \frac{\cos^2 i' \cos^2 r}{\cos^2 i \cos^2 r'}.$$

Da das Verhältniss von f zu a nur von den Winkeln i, r, r', i' abhängig ist, so folgt, dass alle Strahlen eines schmalen Bündels, deren Einfallswinkel zwischen i und $i + \Delta i$ liegen, sich rückwärts verlängert in einem Punkte schneiden, dass sie also nach allen Brechungen sich so ausbreiten, als kämen sie aus einem Punkte P_1, der an derselben Seite des Prismas liegt als der wirklich leuchtende Punkt, und dessen Abstand von der Prismenkante abhängt von dem Abstande des leuchtenden Punktes und dem Einfallswinkel i des Strahlenbündels.

Der Abstand f ist im Allgemeinen von a verschieden, nur in zwei Fällen werden die Abstände gleich, nämlich erstens wenn $i = i'$, also auch $r = r'$ ist, wenn wir also dem Strahlenbündel das Minimum der Ablenkung geben, und wenn wir a unendlich gross machen, also ein paralleles Strahlenbündel auf das Prisma senden. Denn da dann der Quotient von f durch a einen endlichen Werth hat, muss f eine Grösse derselben Ordnung wie a, also unendlich sein. Ein paralleles Strahlenbündel verlässt also das Prisma ebenfalls als paralleles Strahlenbündel.

Wenn man anstatt eines leuchtenden Punktes eine der brechenden Kante parallele leuchtende Linie nimmt, und dafür sorgt, dass die von einem Punkte ausgehenden Strahlen dem eben betrachteten Falle gemäss nur in einer Ebene einfallen, welche das Einfallsloth und den eben be-

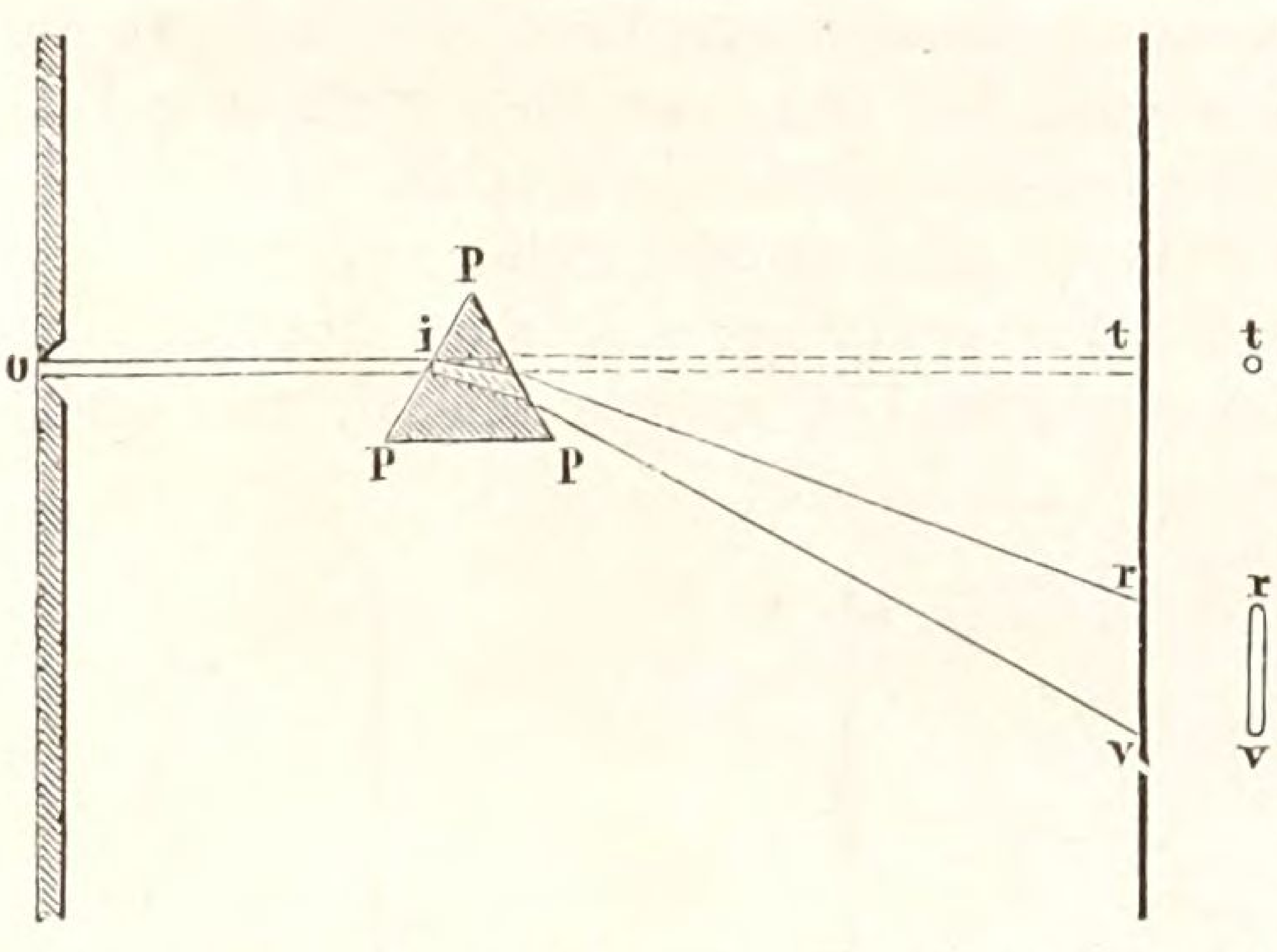
trachteten Punkt aufnimmt, so gilt für jeden Punkt der Linie die eben gemachte Entwicklung, wir bekommen somit als virtuelles Bild der Linie eine gerade Linie, deren Projection auf die Ebene der Zeichnung Fig. 172 P_1 ist, wenn P jene der leuchtenden Linie ist. Man kann diesen Fall sehr angenähert realisiren, wenn man aus einem Bündel Sonnenstrahlen durch einen Spalt, welcher der brechenden Kante parallel gestellt ist, eine schmale Lichtlinie herausschneidet.

Wenn die von den einzelnen Punkten der Lichtlinie ausgehenden Strahlen nicht alle in einer Einfallsebene einfallen, sondern sich über die Vorderfläche des Prismas verbreiten, so sind die virtuellen Bilder einer geraden der brechenden Kante parallelen Linie nicht mehr gerade Linien, sondern gekrümmte Linien, die ihre Concavität der brechenden Kante zuwenden. Im Uebrigen gelten die Sätze über den Abstand f der virtuellen Bilder auch in dem Falle.

§. 137.

Zerstreuung des Lichtes. Lässt man nun auf ein Prisma ein schmales Bündel paralleler Lichtstrahlen auffallen, so zeigt sich das austretende Licht in der Regel ganz anders, als es nach dem letzten §. der Fall sein sollte. Leiten wir, wie in Fig. 173 durch eine enge Oeffnung in dem Fensterladen ein Bündel Sonnenstrahlen in ein sonst dunkles Zimmer, so erscheint auf einem dem Fenster gegenüber gestellten Schirme ein rundes Bildchen t der Sonne. Stellt man dann in den Weg des Lichtes ein Prisma ppp etwa mit horizontaler brechender Kante, so dass die Strahlen das Minimum der Ablenkung erhalten, so müsste nach dem vorigen §. das Licht das Prisma so verlassen, als käme es von einer gegen die brechende Kante hin verschobenen Oeffnung, es müsste also unten etwa bei r ein rundes Sonnenbild erscheinen. Statt dessen sieht man einen Lichtstreifen, dessen Längsausdehnung in die Einfallsebene des Lichtes fällt, die also, wenn die brechende Kante des Prismas horizontal ist, parallel der verticalen ist, während die zur Einfallsebene senkrechte Ausdehnung des Lichtbündels nicht grösser geworden ist. Dieser Lichtstreifen ist ferner nicht weiss wie das einfallende Licht, sondern an den verschiedenen Stellen, wie Fig. 1 Tafel I zeigt, sehr verschieden gefärbt. An dem am wenigsten abgelenkten Ende ist der Streifen tief roth gefärbt, die rothe Färbung wird gegen die Mitte des Streifens hin heller, geht dann in Orange und dieses in reines Gelb über. Auf die gelbe Färbung folgt ein allmählich immer reiner werdendes Grün, auf dieses eine breite Zone, welche verschiedene Nüancen des Blau vom Hell zum Dunkel und bis zum tiefsten Indigo zeigt. Schliesslich tritt zum Blau wieder ein rother Ton, so dass das Ende v des Spectrums, das ist der Name des

Fig. 173.

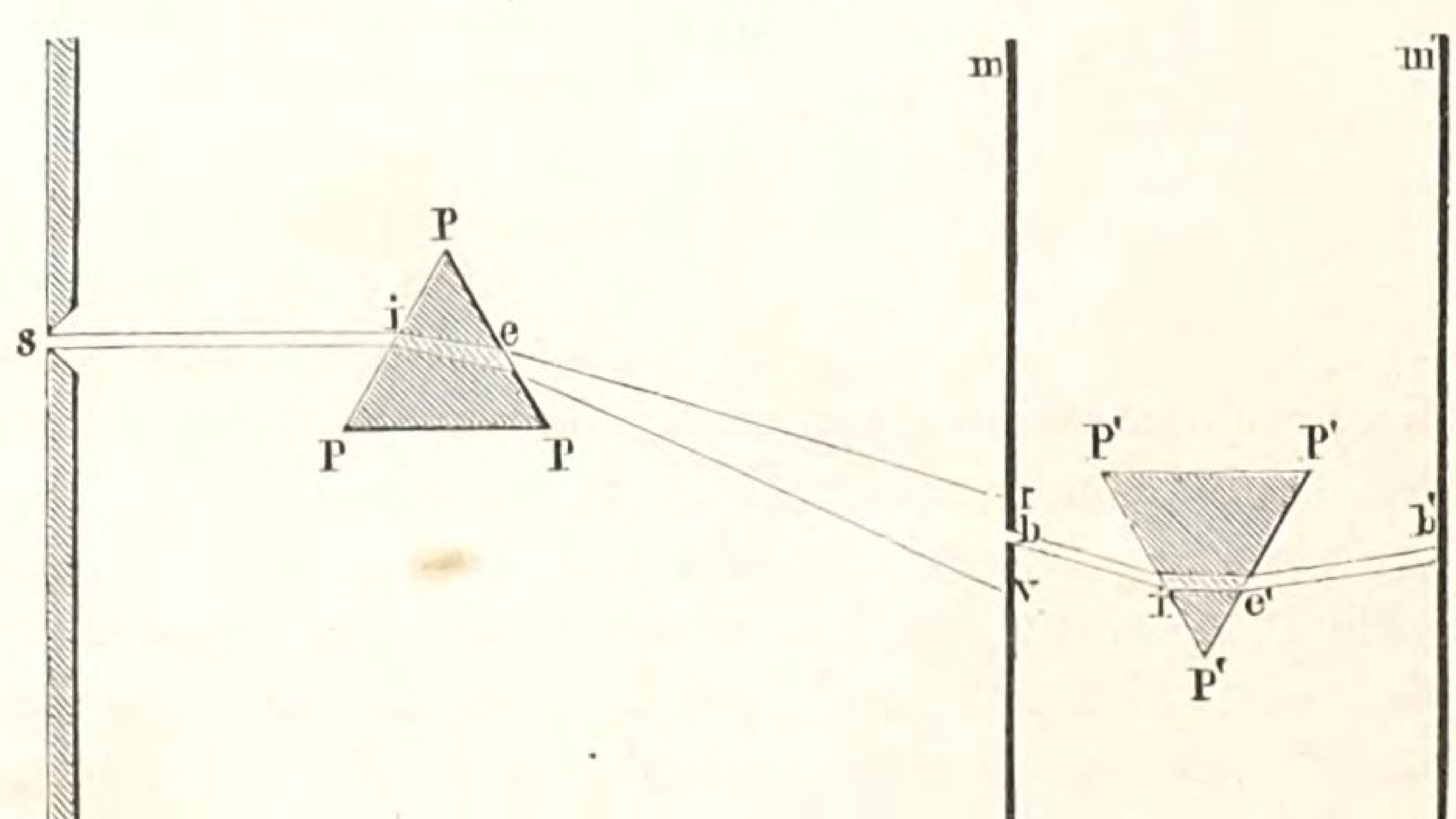


Farbenstreifens violett erscheint. Unsere Sprache unterscheidet in dem Spectrum sechs Farben, roth, orange, gelb, grün, blau und violett, unser Auge unterscheidet indess zugleich die Uebergänge und die verschiedenen Töne dieser Färbungen, für welche unsere Sprache keine besondern Namen hat.

Schon Newton, der die Farbenerscheinungen bei dem Durchgange weissen Lichtes durch ein Prisma eigentlich erst entdeckte, erkannte, dass dieselben ihren Grund darin haben, dass das weisse Licht aus allen diesen farbigen Lichtarten zusammengesetzt ist, und dass die verschiedenen farbigen Lichtarten eine verschiedene Brechbarkeit besitzen, das heisst, dass die Brechungsexponenten des rothen Lichtes am kleinsten, die des violetten Lichtes am grössten sind. Den Nachweis für die Richtigkeit dieser Ansicht führte Newton dadurch, dass er zeigte, erstens, dass ein vollständiges Spectrum nur dann entsteht, wenn man weisses Licht zu dem beschriebenen Versuche anwendet, dass dagegen gar keine Verbreiterung des gebrochenen Bündels eintritt, wenn man aus dem Spectrum ein schmales Lichtbündel einer Farbe herausschneidet und dieses durch ein Prisma gehen lässt; zweitens, dass die verschiedenen Farben in der That eine verschiedene Brechbarkeit besitzen und zwar so weit, dass der Unterschied zwischen der Ablenkung eines rothen und violetten Strahlenbündels gleich ist dem Unterschiede der Ablenkung zwischen roth und violett im Spectrum; und drittens, dass weisses Licht durch Zusammenwirken des farbigen im Spectrum neben einander gelegten entsteht, und zwar nur, wenn alle Farben zusammenwirken, nicht wenn eine oder die andere fehlt.

Die beiden ersten Punkte lassen sich durch vielfach verschiedene Formen des Versuches nachweisen. Wir erwähnen folgende. Man erzeugt ein Spectrum und fängt dasselbe wie Fig. 174 angedeutet ist, mit einem

Fig. 174.



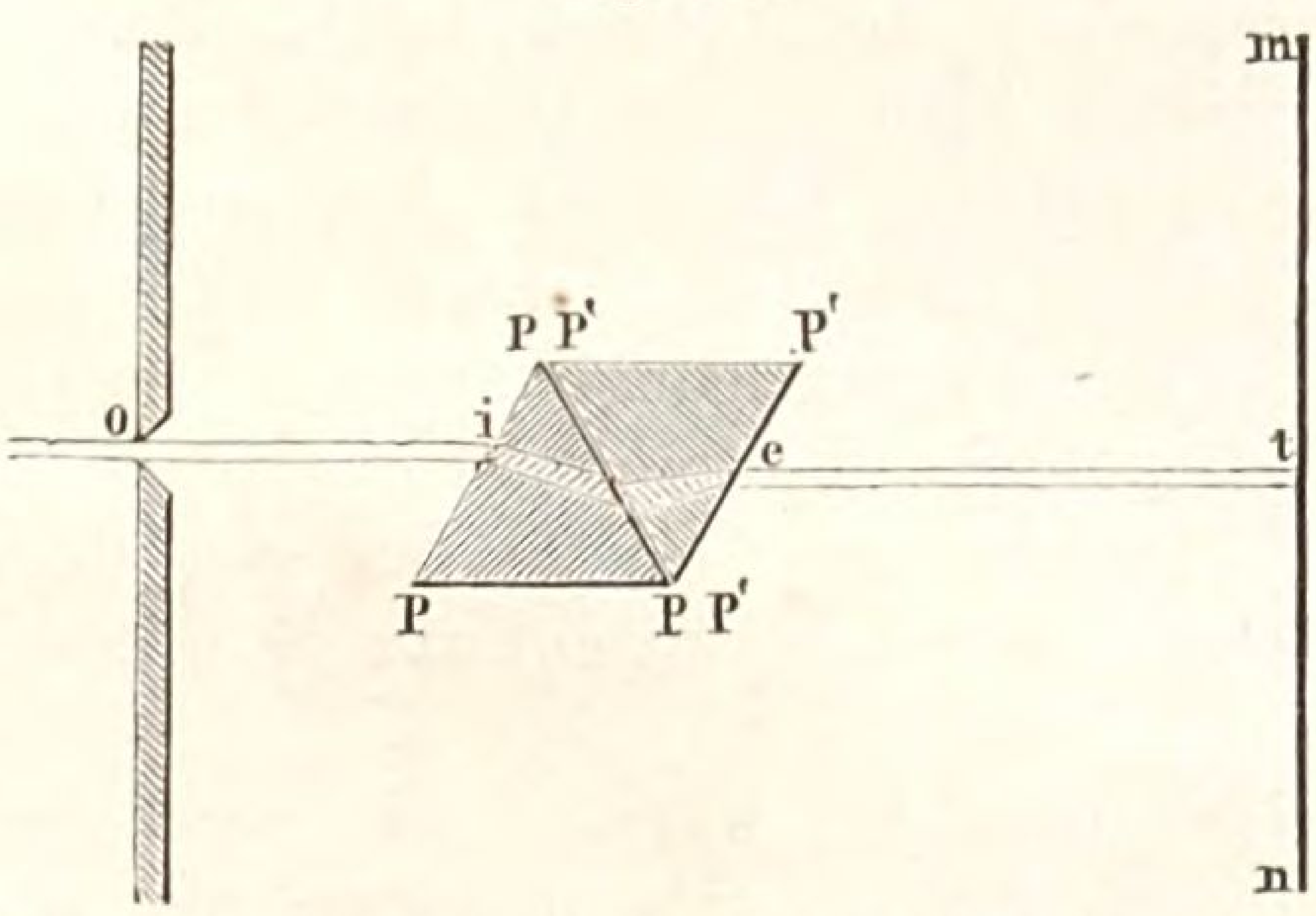
Schirm auf, der an einer Stelle einen schmalen Spalt hat, der dem Spalt in der Fensteröffnung parallel gestellt ist, so dass, wenn man das Spectrum auf den Spalt bringt, durch denselben ein schmales Bündel einer bestimmten Farbe herausgeschnitten wird. Man stellt etwa den Schirm so, dass zunächst das Violett auf den Spalt fällt, also ein schmales violettes Strahlenbündel durch ihn hindurchtritt. Hinter den Spalt wird ein Prisma gestellt, durch den das aus dem Spalt hervortretende Lichtbündel eine neue

Brechung erfährt und schliesslich fängt man das zum zweitenmal gebrochene Bündel mit einem Schirme auf, der passend in der Brechungsebene des Lichtes eine Skala hat. Man sieht dann direkt, dass die einzelnen farbigen Strahlenbündel ohne Verbreiterung abgelenkt werden, wenn man durch Drehung des Prismas *PPP* nach und nach verschiedenfarbige Bündel an dem Spalt des zweiten Schirmes erscheinen lässt. Man sieht dann gleichzeitig an der Skala, dass von den farbigen Lichtern das violette am stärksten, das rothe am wenigsten abgelenkt wird, und dass zwischen beide die übrigen Farben fallen in der Reihenfolge, in welcher sie im Spectrum erscheinen. Da nun bei der gewählten Anordnung die Richtung, in welcher das verschiedenfarbige Licht das zweite Prisma trifft, immer genau die gleiche ist, so folgt aus der Verschiedenheit der Ablenkung der verschiedenfarbigen Strahlen, dass denselben eine verschiedene Brechbarkeit zukommt, und zwar, dass der Brechungsexponent des rothen Lichtes der kleinste, derjenige des violetten Lichtes der grösste ist.

Daraus folgt also, dass, wenn in dem weissen Lichte alle diese verschiedenen Farben vorhanden sind, dieselben durch ein Prisma in das Spectrum auseinander gelegt werden müssen, da sie in dem weissen auf das Prisma gesandten Lichte alle in derselben Richtung auf das Prisma fallen.

Dass nun in der That in dem weissen Lichte alle die farbigen Lichtarten vorhanden sind, ergibt sich daraus, dass dadurch, dass man alle farbigen im Spectrum sich zeigenden Lichtbündel, die das Prisma als divergirende Bündel verlassen, wieder in ein paralleles Strahlenbündel verwandelt oder auf irgend eine Weise zusammenbringt, wieder weisses Licht entsteht. Am direktesten geschieht der Nachweis durch die Anordnung Fig. 175. Man stellt zwei aus gleichen Substanzen verfertigte Prismen von gleichem brechenden Winkel so zusammen, dass ihre brechenden Kanten entgegengesetzt liegen, die eine oben, die andere unten, aber beide horizontal. Das auf die Vorderfläche des ersten geleitete Bündel Sonnenstrahlen verlässt dann die hintere Fläche nicht als ein divergirendes farbiges Bündel, sondern als ein paralleles und vollständig weisses Strahlenbündel, es erscheint auf dem Schirme *mn* ein weisses Bild der Oeffnung *o*. Es ist dazu nicht erforderlich, dass die Prismen sich berühren, sondern man kann das zweite Prisma parallel *ot* verschieben.

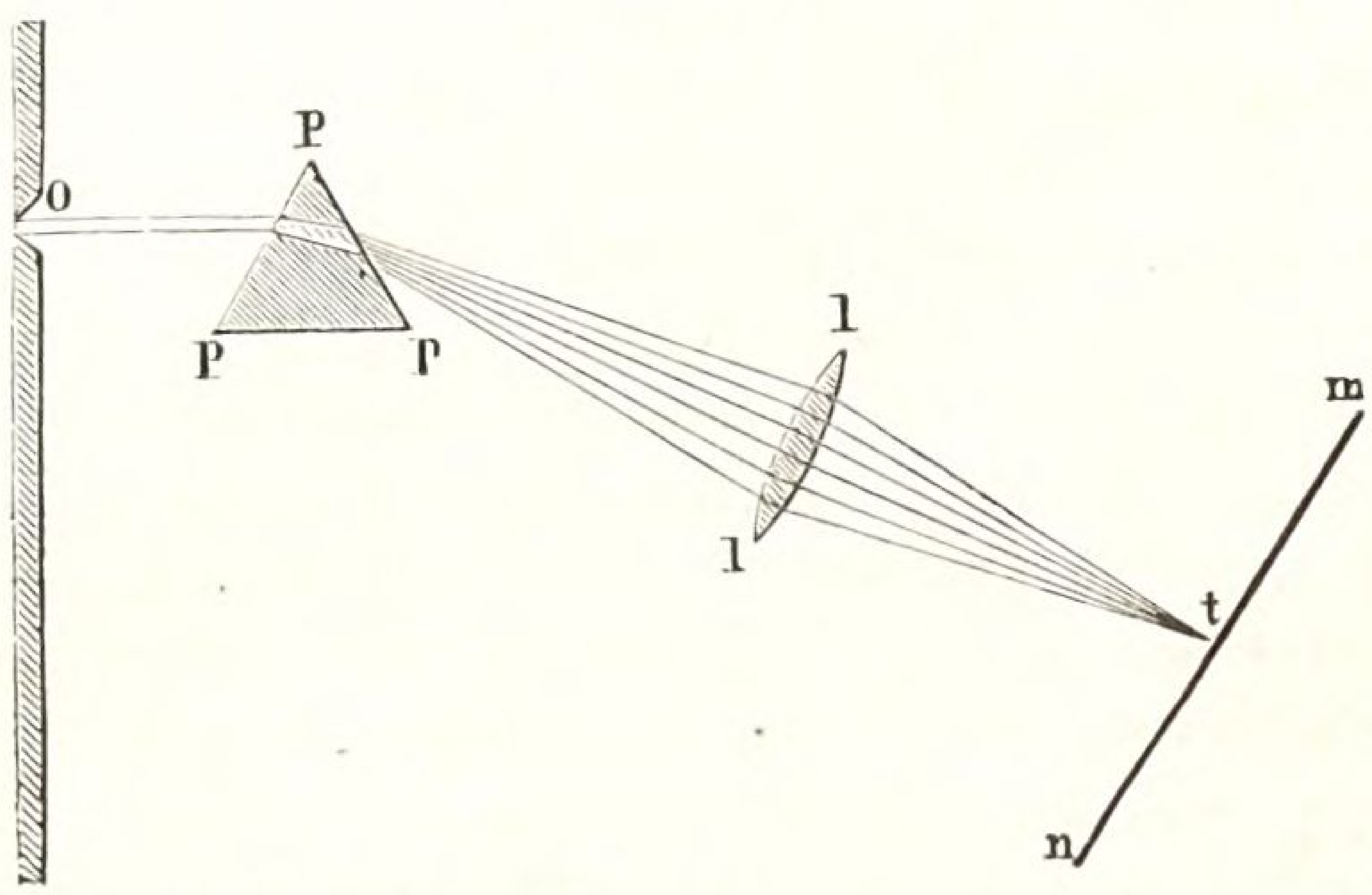
Fig. 175.



Aus dem ersten Prisma treten die farbigen Strahlenbündel divergirend hervor, das rothe weniger, das violette stärker nach unten abgelenkt; in dem zweiten Prisma wird nun jedes Bündel so stark nach oben abgelenkt, wie es in dem ersten nach unten abgelenkt war. Sämmtliche Bündel gehen somit parallel *ot* weiter, und da dieses Bündel weiss erscheint, folgt, dass durch das Zusammenwirken aller im Spectrum vorhandenen Farben weiss entsteht, oder dass das weisse Licht aus allen diesen Farben zusammengesetzt ist.

Eine andere Form des Versuches, die zugleich sehr bequem nachweisen lässt, dass nur durch das Zusammenwirken aller Farben des Spectrums weiss entsteht, zeigt Fig. 176. Man wendet als Oeffnung *o* eine kleine kreisförmige Oeffnung an und lässt die aus dem Prisma austretenden Strahlen durch eine achromatische Sammellinse gehen. Die auf eine solche Linse auffallenden von einem Punkte aus divergirenden Strahlen werden alle in einem Punkte *t* vereinigt. Bringt man den Schirm *mn* gerade an diese Stelle, so erscheint dort ein kleiner weisser Kreis. Bringt man den Schirm der Linse näher, so erhält man noch ein Spectrum mit derselben Reihenfolge der Farben, wie wenn die Linse nicht da wäre, entfernt man den Schirm weiter, so entsteht ein Spectrum mit umgekehrter Farbenfolge, ein Beweis, dass in dem Punkte *t* sich alle Farben kreuzten.

Fig. 176.



Schiebt man nun in die aus der Linse hervortretenden Strahlen von einer Seite her einen schmalen prismatischen Glasstreifen, dessen brechende Kante etwa der des Prismas parallel ist, so kann man ein beliebiges der farbigen Bündel zur Seite ablenken. Hält man den Glasstreifen in das rothe, so erscheint neben *t* ein rothes Bildchen der Oeffnung, sofort aber ist auch die Farbe des Bildes *t* nicht mehr weiss, sondern eine blassgrüne geworden. Nimmt man das gelbe fort, so erhält das Bild *t* eine blaue Färbung; bei Ablenkung des grünen wird das Bild purpurfarben u. s. f. Sobald also eine Farbe bei der Vereinigung des Lichtes fehlt, ist das Resultat der Vereinigung nicht mehr weiss, sondern eine bestimmte andere Farbe. Mischt man nun das farbige abgelenkte Licht mit dem aus dem übrigbleibenden zusammengesetzten farbigen Licht, so ergänzen sich diese Farben zu weiss; man nennt deshalb diese Farben complementäre; so ist grün und purpur, gelb und ein gewisser blauer Farbenton complementär. Da wir jede Mischfarbe durch die Fortnahme gewisser Farben aus dem Weiss entstanden denken können, folgt, dass jede Mischfarbe ihre complementäre Farbe hat.

Aus diesen Versuchen ergibt sich, dass das weisse Licht nicht ein einfaches, sondern ein aus allen möglichen Farben zusammengesetztes ist, dass dagegen die im Spectrum sich zeigenden farbigen Lichtarten die einfachen sind. Das Merkmal der Einfachheit des Lichtes ist die gleiche Brechbarkeit sämmtlicher in ihm vorhandenen Strahlen, also Durchgang durch ein Prisma ohne Verbreiterung des gebrochenen Lichtbündels. Licht, welches so gebrochen wird, enthält nur Strahlen einer Qualität, man nennt es homogenes Licht. Das physikalische Merkmal der Verschiedenheit zweier Lichtmengen ist verschiedene Brechbarkeit, wir müssen deshalb nach dieser die Verschiedenheit des Lichtes beurtheilen, selbst wenn unser Auge keinen Unterschied in der Farbe erkennen kann. Es lassen sich Mischfarben herstellen, welche auf unser Auge denselben Eindruck machen, wie

eine der Farben des Spectrums, wir erkennen das Licht als Mischfarbe, wenn wir es durch ein Prisma gehen lassen, durch das Prisma wird dasselbe in seine Bestandtheile zerlegt.

§. 138.

Ableitung der Brechung und Zerstreuung des Lichtes aus der Undulationstheorie. Für die in den letzten §§. mitgetheilten Sätze über die Brechung und Zerstreuung des Lichtes liefert uns sowohl die Annahme, dass das Licht eine schwingende Bewegung sei, als auch die, dass es ein von dem leuchtenden Körper ausgeworfener Stoff sei, eine befriedigende Erklärung; indess kommen beide Theorien in sofern zu einem entgegengesetzten Resultat, dass die Undulationstheorie die Brechung bei dem Uebergange in optisch dichtere Mittel einer Verminderung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes zuschreibt, die Emissionstheorie dagegen einer Vermehrung.

Dass zunächst die Undulationstheorie die Brechung als eine nothwendige Folge der Natur des Lichtes erkennen lässt, ergibt sich aus der Theorie der Wellenbewegung und der schon §. 127 zum Verständniss der Reflexionserscheinungen gemachten Annahme, dass die Dichtigkeit des Aethers in den verschiedenen Körpern eine verschiedene sei. Die an der Oberfläche eines Körpers ankommende schwingende Bewegung trifft dort darnach auf die Grenze zweier verschiedener Medien, sie muss demnach zum Theil in das erste Medium zurückkehren, zum Theil in das zweite Medium übergehen. In dem zweiten Medium pflanzt sich dann das Licht mit jener Geschwindigkeit fort, welche der Beschaffenheit des zweiten Mediums, also nach der Gleichung

$$c = \sqrt{\frac{ae}{d}}$$

der Elasticität und Dichtigkeit des zweiten Mediums entspricht. Nimmt man an, wie das seiner Zeit Fresnel that, dass durch die Molekularwirkungen zwischen den Molekülen der Körper und des Aethers nur eine Aenderung der Dichtigkeit des Aethers in den Körpern stattfindet, nicht der Elasticität, so würde die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Quadratwurzel aus der Dichtigkeit des Aethers in den verschiedenen Körpern umgekehrt proportional sein.

Die Aenderung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit muss dann nach §. 84 eine Aenderung der Fortpflanzungsrichtung bewirken, sobald das Licht nicht senkrecht auf die Grenzfläche trifft, und zwar so, dass die Normale der gebrochenen Welle, die Richtung der Fortpflanzung, in der Ebene bleibt, welche durch die Richtung der einfallenden Welle und das Einfallsloth bestimmt ist, und weiter, dass der Quotient aus dem Sinus des Einfallswinkels und dem Sinus des Brechungswinkels gleich sein muss dem Quotienten aus der Fortpflanzungsgeschwindigkeit im ersten und im zweiten Mittel. Nennen wir die Fortpflanzungsgeschwindigkeit im ersten Medium c, im zweiten c', den Einfallswinkel i, den Brechungswinkel r, so muss

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{c}{c'} = n,$$

der Quotient muss also constant sein, und der Brechungsexponent ist der Quotient der beiden Geschwindigkeiten, er muss somit bei dem Uebergange in optisch dichtere Mittel, in denen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit die kleinere ist, grösser als 1 sein.

Die eigentlichen Brechungsgesetze ergeben sich somit aus der Undulationstheorie unmittelbar; nicht so scheint es damit zu sein, dass die Brechbarkeit von der Farbe des Lichtes abhängig ist. Die Undulationstheorie macht die Annahme, dass die Farbe des Lichtes bedingt ist durch die Schwingungszahl, dass die Anzahl der in gleichen Zeiten stattfindenden Schwingungen im rothen Licht am kleinsten, im violetten am grössten ist. Da nun während einer Schwingung das Licht sich um eine Wellenlänge fortpflanzt, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit im leeren Raume für alle Lichtarten aber dieselbe ist, so folgt, dass die Wellenlänge des rothen Lichtes die grösste, die der übrigen Lichtarten kleiner, die des violetten Lichtes am kleinsten ist.

Der Unterschied der Brechbarkeit des verschiedenfarbigen Lichtes bedeutet daher nach der Undulationstheorie, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit bei dem Uebertritte aus dem leeren Raume in die Körper verschieden geändert wird je nach der Wellenlänge des Lichtes, oder auch dass in den Körpern die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von der Wellenlänge abhängig ist, so zwar, dass einer grössern Wellenlänge eine grössere Fortpflanzungsgeschwindigkeit entspricht. Da nun die Theorie der Wellenbewegung für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit derselben einen von der Wellenlänge unabhängigen Ausdruck liefert, so scheint diese Erfahrung mit der Theorie im Widerspruch zu sein.

Cauchy hat indess darauf aufmerksam gemacht, dass für transversale Schwingungen diese Unabhängigkeit nur so lange besteht, als man annimmt, die Wellenlänge sei gegen die Abstände der Moleküle eine so grosse, dass man den Abstand der verschobenen Moleküle von einander gleich dem in der Gleichgewichtslage ansehen könne, wodurch wir ja im §. 76 die bewegende Kraft bei der transversalen Bewegung einfach dem Verschiebungswinkel proportional setzen konnten. Wenn dagegen die Wellenlänge nicht eine solche Grösse hat, so hängt die bewegende Kraft in complicirterer Weise von der Wellenlänge ab, und deshalb fällt dann in dem Ausdrucke für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit die Wellenlänge nicht fort. Anstatt unseres Ausdruckes für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit

$$c^2 = \frac{ae}{d}$$

erhält Cauchy, wenn l die Länge der Welle, $a_1, a_2 \ldots$ Constanten sind, die nur von der Beschaffenheit des Mediums abhängen,

$$c^2 = a_1 + a_2 \left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 + a_3 \left(\frac{2\pi}{l}\right)^4 + \ldots$$

Macht man also die Voraussetzung, dass das Licht in transversalen Schwingungen des Aethers bestehe, und dass im Innern der Körper die Wellenlängen gegenüber den Abständen der Moleküle nicht mehr so gross sind, dass die Abstände der Moleküle dagegen verschwinden, so muss die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes in den Körpern von der Wellen-

länge abhängig sein, und damit müssen die Brechungsexponenten des Lichtes bei dem Uebergange aus dem leeren Raume in die Körper oder auch bei dem Uebergange aus einem Körper in einen andern für die verschiedenen Wellenlängen verschieden sein. Für den Brechungsexponenten einer Farbe, deren Wellenlänge im leeren Raume gleich λ ist, erhält man, wenn man die Geschwindigkeit des Lichtes im freien Raume mit c_0 bezeichnet, und unter Beachtung, dass die Wellenlänge l einer bestimmten Farbe, welche im leeren Raume gleich λ, im Innern eines Mediums, dessen Brechungsexponent n ist, gleich $\frac{\lambda}{n}$,

$$\frac{c^2}{c_0{}^2} = \frac{1}{n^2} = \frac{a_1}{c_0{}^2} + \frac{a_2}{c_0{}^2}\left(\frac{2\pi n}{\lambda}\right)^2 + \frac{a_3}{c_0{}^2}\left(\frac{2\pi n}{\lambda}\right)^4 \ldots$$

Dass die eben angewandte Beziehung zwischen λ und l besteht, ergibt sich daraus, dass die Schwingungsdauer des Lichtes bei dem Uebertritt aus einem Medium in ein anderes nicht geändert wird, es muss deshalb die Wellenlänge sich in demselben Verhältnisse ändern wie die Fortpflanzungsgeschwindigkeit. Denn es ist

$$\lambda = c_0\, T, \qquad l = c\, T, \qquad \lambda = \frac{c_0}{c} \,.\, l = n\, l.$$

Aus einer nähern Untersuchung der für n sich ergebenden Reihe, von der nur die beiden ersten Glieder beizubehalten nöthig ist, leitet dann schliesslich Cauchy für n eine Reihe ab

$$n = \alpha_1 + \frac{\alpha_2}{\lambda^2} + \frac{\alpha_3}{\lambda^4} + \ldots$$

worin $\alpha_1, \alpha_2 \ldots$ Constanten sind, deren Werthe von der Natur des Mediums abhängig sind, in welche das Licht übertritt.

Christoffel hat aus der von Cauchy gegebenen Gleichung für c^2 eine etwas andere Gleichung für n abgeleitet. Geht man nämlich von der Beziehung $l = c\,T$ aus, so kann die Gleichung für c^2 geschrieben werden

$$\frac{l^2}{T^2} = a_1 + a_2\left(\frac{2\pi}{l}\right)^2$$

oder auch

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = a_1\left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 + a_2\left(\frac{2\pi}{l}\right)^4,$$

wenn man auch hier sich auf zwei Glieder der Reihe beschränkt. Setzen wir wieder $\lambda = nl$, so wird

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = a_1\left(\frac{2\pi n}{\lambda}\right)^2 + a^2\left(\frac{2\pi n}{\lambda}\right)^2.$$

Da die Schwingungsdauer des Lichtes einer bestimmten Farbe sich nicht ändert, so können wir, wenn c_0 die Geschwindigkeit des Lichtes im leeren Raume ist, auf der linken Seite T durch λ ausdrücken und erhalten, indem wir auf beiden Seiten durch $\frac{4\pi^2}{\lambda^2}$ dividiren,

$$c_0{}^2 = a_1\, n^2 + a_2\,\frac{4\pi^2}{\lambda^2}\,.\, n^4,$$

eine Gleichung, welche nach n vierten Grades ist, und die wir schreiben können

$$\frac{1}{n^2} = \frac{a_1}{c_0^{\,2}} + \frac{a_2}{c_0^{\,2}} \cdot \frac{4\,\pi^2}{\lambda^2} \cdot n^2.$$

In dieser Gleichung muss, da die linke Seite immer positiv sein muss, das constante Glied positiv sein, da aber die Brechungsexponenten mit abnehmendem λ wachsen, somit der reciproke Werth mit abnehmendem λ abnehmen muss, so muss das zweite Glied negativ sein; man kann deshalb setzen

$$\frac{a_1}{c_0^{\,2}} = \frac{2}{n_0^{\,2}}; \quad \frac{a_2}{c_0^{\,2}} \cdot 4\,\pi^2 = -\frac{\lambda_0^{\,2}}{n_0^{\,4}},$$

worin n_0 und λ_0 zwei Constanten sind, die von der Natur des brechenden Körpers abhängig sind. Damit wird die Gleichung für n

$$\frac{1}{n^2} = \frac{2}{n_0^{\,2}} - \frac{\lambda_0^{\,2}}{\lambda^2}\,\frac{n^2}{n_0^{\,4}} \text{ oder } \left(\frac{n_0}{n}\right)^4 - 2\left(\frac{n_0}{n}\right)^2 + \left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^2 = 0.$$

Diese Gleichung liefert zunächst für n^2

$$n^2 = \frac{n_0^{\,2}}{1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^2}}.$$

Da der Nenner mit wachsendem λ wachsen muss, so muss der Wurzel das positive Vorzeichen gegeben werden, dann kann man die Gleichung auf die Form bringen

$$n^2 = \frac{2\,n_0^{\,2}}{\left(\sqrt{1 + \frac{\lambda_0}{\lambda}} + \sqrt{1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}}\right)^2}$$

und schliesslich

$$n = \frac{n_0\,\sqrt{2}}{\sqrt{1 + \frac{\lambda_0}{\lambda}} + \sqrt{1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}}}.$$

Gegen die Entwicklung von Cauchy hat Briot den Einwand erhoben, dass wenn im leeren Raume die Länge der Wellen als gegen den Abstand der Moleküle sehr gross anzusehen sei, dies auch im Innern der Körper der Fall sein müsse; denn wenn auch die Wellenlänge in den Körpern etwas kleiner sei als im leeren Raum, so sei andererseits nach allen sonstigen Erfahrungen auch anzunehmen, dass die Aethermoleküle dort in Folge der Anziehungen der körperlichen Moleküle näher zusammen liegen, wie ja Fresnel als Ursache der Brechung die grössere Dichtigkeit des Aethers in den Körpern ansieht. Das Verhältniss zwischen der Wellenlänge und dem Abstande der Moleküle kann daher im leeren Raume und im Innern der Körper nicht so sehr verschieden sein, dass wenn im leeren Raume die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von der Wellenlänge unabhängig ist, dieselbe im Innern der Körper wegen zu geringer Länge der Wellen davon abhängig sein kann. Briot nimmt deshalb an, da die Abhängigkeit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit von der Wellenlänge nur in den durchsichtigen Körpern vorhanden ist, in denen sich der Aether zwischen den körperlichen Molekülen befindet, dass eben die Gegenwart der Moleküle

des Körpers die Geschwindigkeit des Lichtes modificirt. Der Einfluss der Körpermoleküle kann ein doppelter sein. Zunächst muss nämlich sich die schwingende Bewegung auch den körperlichen Molekülen mittheilen, eine Mittheilung, die wir demnächst bei Besprechung der Absorption direkt nachweisen werden. Damit muss aber auch die Bewegung des Aethers und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit beeinflusst werden. Ferner muss aber auch die Vertheilung des Aethers in den Körpern durch die Anwesenheit der Moleküle eine eigenthümliche werden, es kann derselbe kein einfach homogenes Mittel sein, es muss im Innern der Körper eine periodisch wechselnde Dichtigkeit vorhanden sein. Nehmen wir z. B. an, dass die Körpermoleküle jene des Aethers anziehen, so muss eine Verdichtung des Aethers rings um die Körpermoleküle stattfinden, so dass in der Nähe der letztern der Aether eine grössere Dichtigkeit hat, als entfernt von denselben. Die Dichtigkeit des Aethers ist demnach nicht eine überall gleiche, sondern nur eine periodisch gleiche, das heisst in den verschiedenen Perioden, den Abständen zweier Moleküle, als Ganzes genommen, ist die Dichtigkeit überall dieselbe, aber innerhalb einer Periode ist die Dichtigkeit in den verschiedenen Stellen eine verschiedene. Die Isotropie des Mittels wird dadurch nicht beeinflusst, denn in welcher Richtung wir auch durch das Mittel fortschreiten, die Perioden, nach welchen die Dichtigkeit des Aethers wieder die gleiche wird, sind für alle Richtungen dieselben.

Beide Umstände beeinflussen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Schwingungen, und zwar die Schwingungen verschiedener Dauer in verschiedener Weise, so dass sich nach Briot für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit eine Gleichung von der Form ergibt

$$c^2 = A + Bl^2 + \frac{C}{l^2} + \frac{D}{l^4} + \cdots$$

worin A, B, C, D Constanten sind, von denen B durch das Mitschwingen der körperlichen Moleküle, C und D durch die periodische Vertheilung des Aethers bedingt sind. Briot glaubt nun, dass das Mitschwingen der körperlichen Moleküle in den gewöhnlichen durchsichtigen Medien keinen merklichen Einfluss habe, er nimmt deshalb an, dass $B = 0$ sei. Dann wird die Briot'sche Gleichung mit der Cauchy'schen dieselbe; somit wird bei der Beschränkung der Reihe auf zwei Glieder auch hier die Abhängigkeit der Brechungsexponenten durch die Gleichung von Christoffel dargestellt. Setzt man nicht ohne weiteres $B = 0$, so erhalten wir den Brechungsexponenten aus der Gleichung

$$\frac{c^2}{c_0{}^2} = \frac{1}{n^2} = K + \alpha l^2 + \frac{\beta}{l^2} + \frac{\gamma}{l^4},$$

wenn wir die durch $c_0{}^2$ dividirten Constanten der ersten Gleichung mit K, α, β, γ bezeichnen. Die Erfahrung muss darüber Aufschluss geben, ob $B = 0$ gesetzt werden darf oder nicht.

Die vorstehenden Entwicklungen zeigen, dass die Undulationstheorie auch die Zerstreuung des Lichtes zu erklären vermag. Die Cauchy'sche Theorie verlangt dazu, dass die allgemeine Annahme, das Licht sei eine schwingende Bewegung des Aethers, dahin präcisirt werde, dass die Schwingungen transversale seien; auch die Gleichungen von Briot sind unter dieser

Voraussetzung abgeleitet. Diese Annahme legt dem Aether in gewisser Beziehung die Eigenschaften eines festen Körpers bei, da, wie wir im dritten Abschnitt sahen, transversale Schwingungen nur in solchen Körpern möglich sind, in denen die Moleküle sich in bestimmten gegenseitigen Lagen nicht nur wie bei Flüssigkeiten und Gasen in bestimmten Entfernungen halten.

Es ist indess zu beachten, dass die Annahme, die Lichtschwingungen seien transversale, keine neue Hypothese ist, die der allgemeinen, der Undulationstheorie zu Grunde liegenden fremd ist. Im Gegentheil, sie ist nur eine Vervollständigung der allgemeinen Hypothese; wenn wir nämlich nicht ausdrücklich annehmen, dass der Aether eine Flüssigkeit oder ein Gas sei, so müssen die Luftschwingungen entweder longitudinale oder transversale sein, da die Fortpflanzungsgeschwindigkeit dieser beiden Schwingungen eine so verschiedene ist, dass schon in geringer Entfernung von der Lichtquelle dieselben vollständig von einander getrennt sein müssen. Die Dispersion veranlasst uns nun, von den beiden möglichen Wellensystemen die transversalen als diejenigen des Lichtes anzunehmen, und somit die Undulationstheorie zu einer fest bestimmten zu machen. Allerdings hat in der historischen Entwicklung, wie wir später sehen werden, nicht die Dispersion zu dieser Vervollständigung geführt, sondern die Dispersionstheorie ist erst entwickelt, lange nachdem Young und Fresnel aus den Polarisationserscheinungen geschlossen hatten, dass die Lichtschwingungen transversale seien.

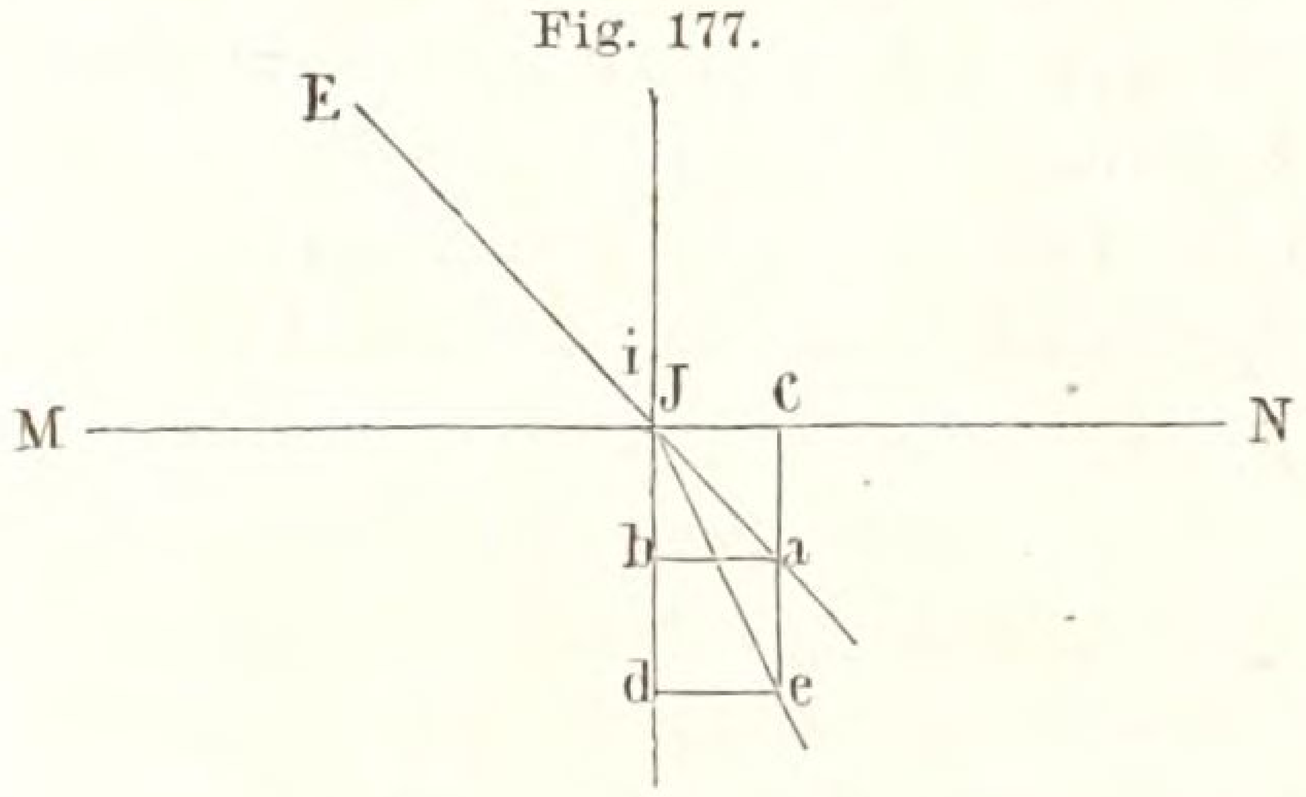
§. 139.

Ableitung der Brechung aus der Emissionshypothese. Vergleich beider Theorien. Nach der Emissionshypothese sind, wie wir §. 127 sahen, die Lichttheilchen periodisch wechselnd in den Anwandlungen des leichtern Durchgehens und leichtern Zurückgeworfenwerdens. Die in dem ersten Zustande befindlichen Lichttheilchen durchdringen die Schicht, in welcher die Moleküle des Körpers abstossend auf die Lichttheilchen wirken, und in welcher die Reflexion stattfindet, sie gelangen somit in jene Schicht, in welcher die Wirkung der Moleküle immer eine anziehende ist. Da nun auch hier rings um die Stelle, wo ein Lichtstrahl die Grenzebene eines Körpers trifft, alle Moleküle des Körpers ganz gleichmässig anziehend wirken, so folgt zunächst, dass die Resultirende aller Anziehungen jedenfalls senkrecht gegen die Grenzebene gerichtet sein muss. Es kann daher durch diese Kräfte nur die gegen die Grenzebene senkrechte Componente der Geschwindigkeit des ankommenden Lichtes geändert werden, nicht die der Grenzebene parallele. Daraus folgt zunächst, dass der gebrochene Strahl in der Einfallsebene weiter gehen muss. Da ferner die Aenderung der Geschwindigkeit nur in der Grenzebene stattfindet, so muss dieselbe, sobald das Lichttheilchen in das zweite Medium übergetreten ist, wieder eine constante, aber andere werden wie in dem ersten Mittel. Diese Geschwindigkeit in dem zweiten Mittel soll dann nur abhängen von der Beschaffenheit der eingedrungenen Lichttheilchen und des Mittels, in dem sich das Licht fortpflanzt und aus dem dasselbe austritt, nicht aber von der Richtung, in welcher das Licht die Grenzebene trifft. Mit dieser

letztern eigentlich ganz willkührlichen Annahme ergibt sich der zweite Theil des Brechungsgesetzes unmittelbar.

Trifft ein Lichtstrahl EJ Fig. 177 die Grenze unter dem Einfallswinkel i und stellt Ja seine Geschwindigkeit dar, so ist Jc seine der Grenzebene parallele, Jb die zu derselben senkrechte Componente der Geschwindigkeit. Durch die in der Grenzebene wirksamen Kräfte gehe die letztere in Jd über, so dass die aus der senkrechten Componente Jd und der parallelen Componente Ja resultirende Geschwindigkeit Je die Geschwindigkeit in dem zweiten Medium sei. Der Brechungswinkel ist

Fig. 177.



dann $dJe = r$. Nun ist

$$\sin i = \frac{ab}{aJ} \quad \sin r = \frac{ed}{eJ} = \frac{ab}{eJ}$$

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{eJ}{aJ} = \frac{c'}{c} = n,$$

wenn wir die Geschwindigkeit im zweiten Mittel mit c', die im ersten mit c bezeichnen. Es ergibt sich also auch hier, dass der Brechungsexponent constant ist, für jeden Einfallswinkel. Um die Verschiedenheit der Brechungsexponenten der verschiedenfarbigen Lichtarten zu erklären, nimmt die Emissionshypothese an, theils dass die verschiedenen Lichttheilchen eine verschiedene Masse besitzen, theils auch, dass die Anziehung der Körpermoleküle auf die verschiedenen Lichttheilchen etwas verschieden sein kann. Die rothen Lichttheilchen haben die grösste Masse, die violetten die kleinste; es folgt daraus, dass bei der gleichen anziehenden Kraft, welche in der Grenzebene wirkt, die Ablenkung des rothen Lichtes kleiner sein muss, da der Geschwindigkeitszuwachs der grössern Masse durch die gleiche Kraftwirkung ein kleinerer ist.

Wir gehen hier nicht weiter in Einzelnheiten ein, da schon der Ausdruck, den uns die beiden Theorieen für den Brechungsexponenten liefern, uns experimentell zu entscheiden möglich macht, welche von den beiden Theorieen die richtige ist. Der Versuch hat für die Unhaltbarkeit der Emissionstheorie entschieden.

Nach der Undulationstheorie ist

$$\frac{\sin i}{\sin r} = n = \frac{c}{c'},$$

nach der Emissionstheorie dagegen

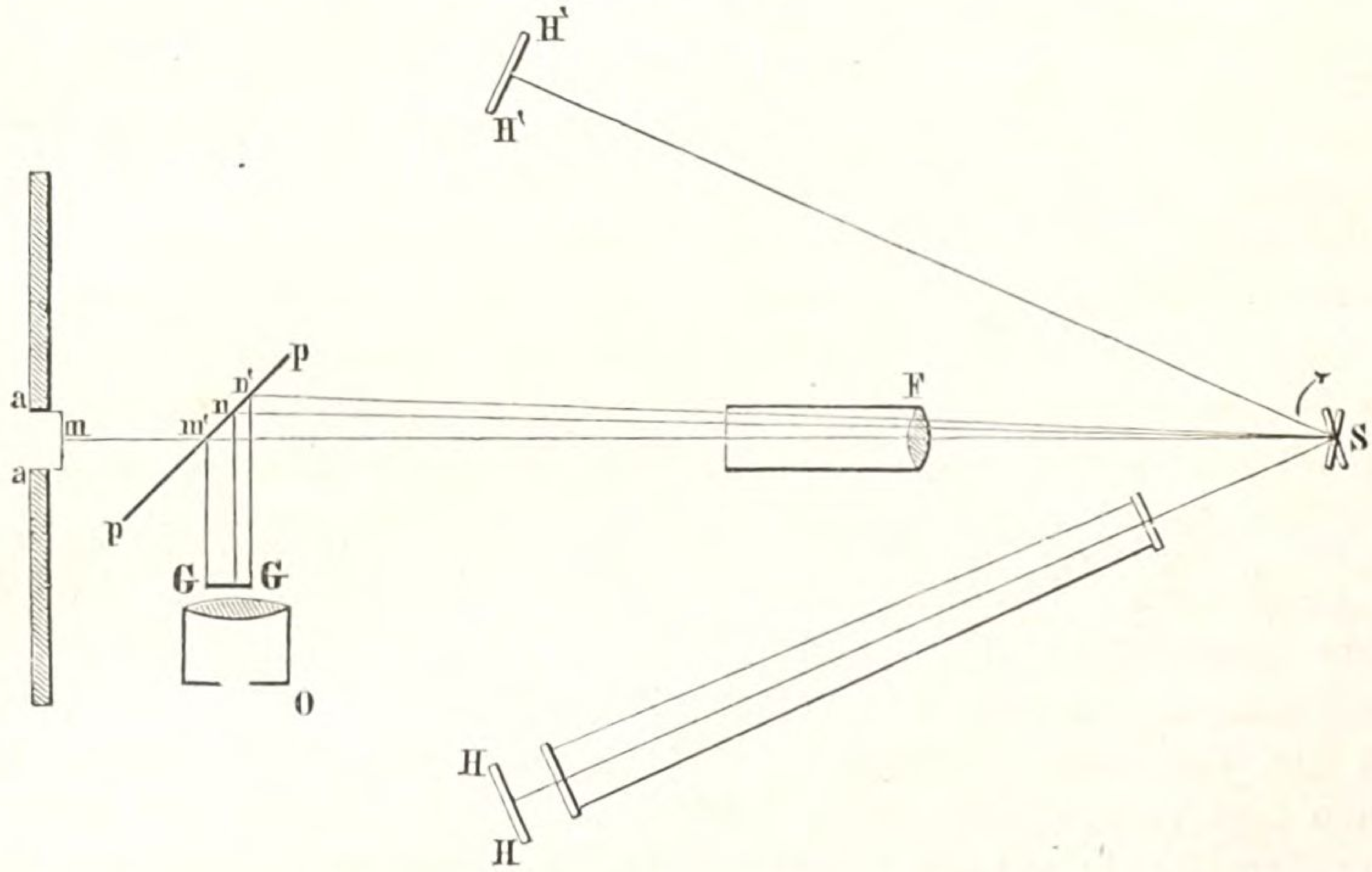
$$n = \frac{c'}{c}.$$

Beide Theorieen geben also für den Brechungsexponenten den Quotienten aus den Geschwindigkeiten in den beiden Medien. Die Undulationstheorie hat aber im Zähler die Geschwindigkeit, welche die Emissionstheorie im Nenner hat und umgekehrt. Ist also der Brechungsexponent grösser wie 1, so sagt die Undulationstheorie, die Geschwindigkeit muss im ersten

Mittel die grössere sein, die Emissionstheorie verlangt dagegen, dass die Geschwindigkeit im zweiten Mittel die grössere sei. Der Brechungsexponent des Lichtes bei dem Uebertritt aus Luft in Wasser ist $\frac{4}{3}\cdot$ Nach der Undulationstheorie muss sich somit die Geschwindigkeit des Lichtes in der Luft zu derjenigen im Wasser verhalten wie 4 : 3, nach der Emissionstheorie muss das Verhältniss wie 3 : 4 sein.

Dieses Geschwindigkeitsverhältniss ist von Foucault gemessen worden. Foucault liess durch eine kleine quadratische Oeffnung *a* Fig. 178 von

Fig. 178.



2 Mm. Seite, in deren Mitte ein feiner Platindraht *m* ausgespannt war, mittels eines Heliostaten ein Bündel Sonnenstrahlen horizontal in ein Zimmer eintreten. Die Strahlen trafen dann auf eine Linse *F*, deren optische Axe den eintretenden Strahlen parallel war. Jenseits der Linse war ein kleiner kreisförmiger Spiegel vertical aufgestellt, dessen Centrum ebenfalls auf der Axe der Linse lag, so dass die Strahlen nach dem Durchtritt durch die Linse den Spiegel trafen. Auf beiden Seiten des Spiegels *S* ist ein Hohlspiegel *HH*, *H'H'* so aufgestellt, dass der Krümmungsmittelpunkt in dem Centrum des Spiegels *S* liegt und dass seine Hauptaxe mit den eintretenden Strahlen in derselben horizontalen Ebene liegt. Die Entfernung der Linse *F* von dem Drahte *m* beträgt etwas weniger als die doppelte Brennweite der Linse und der Abstand *FS* der Linse vom Spiegel plus dem Abstande des Hohlspiegels *HH* oder *H'H'* von *S* ist so gewählt, dass gerade in der Spiegelfläche der Hohlspiegel das von der Linse entworfene reelle Bild des Drahtes *m* entworfen wird, wenn der Spiegel *S* so steht, dass die ihn treffenden Strahlen nach *HH* oder *H'H'* reflectirt werden. Die Summe der Abstände $FS + SH$ muss dazu, wie wir demnächst zeigen werden, etwas grösser als die doppelte Brennweite der Linse sein. Da das reelle Bild des Drahtes *m* in die Spiegelfläche *HH* oder *H'H'* fällt, entwirft der Spiegel ein virtuelles Bild des reellen Bildes, welches ebenfalls in der Spiegelfläche und an derselben Stelle wie das reelle Bild liegt, das heisst die Strahlen gehen auf demselben Wege nach

S und über S zur Linse F und weiter nach m zurück, auf welchem sie von m durch F und S nach HH gelangten. Die Linse entwirft deshalb wieder ein den Draht deckendes Bild des reellen Bildes, das sie selbst auf dem Spiegel entworfen hatte, also ein Bild des Drahtes m. Um dieses Bild sichtbar zu machen, stellte Foucault eine Spiegelglasplatte pp unter 45^0 geneigt gegen die zurückkehrenden Strahlen auf, welche dieselben zur Seite reflectirten, so dass das Bild in einem Punkte G entworfen wurde, der nach dem Reflexionsgesetz ebenso weit senkrecht vor pp liegt, als der Draht m hinter pp liegt. Bei G wurde das Bild durch eine mit einer feinen Theilung versehene Glasplatte aufgefangen und mit einem Mikroskope O beobachtet.

Der Spiegel S ist an der Axe einer Sirene befestigt und kann somit in eine rasche Rotation um dieselbe versetzt werden. Rotirt der Spiegel, so wird bei jeder Umdrehung das Licht einmal nach HH und einmal nach $H'H'$ reflectirt; rotirt derselbe dann so langsam, dass er innerhalb der Zeit, während der das Licht zu dem Hohlspiegel und vom Hohlspiegel zu dem Spiegel S zurückgelangt, keine merkliche Veränderung seiner Stellung erhalten hat, so erscheint das reelle Bild des Drahtes an derselben Stelle G, an welcher es erscheint, wenn der Spiegel in der betreffenden Lage ruhig steht. Ist dagegen die Geschwindigkeit der Rotation im Sinne des Pfeiles eine so grosse geworden, dass der Spiegel einen merklichen Bogen zurückgelegt hat, während das Licht von S nach HH oder $H'H'$ ging und zu S zurückkommt, so wird dieses Licht nicht in der Richtung Sm, aus der es kam, von dem Spiegel zurückgeworfen, sondern nach Sn, so dass nach §. 128 der Winkel nSm gleich ist dem doppelten Winkel α, um welchen sich der Spiegel innerhalb der Zeit gedreht hat, in welcher das Licht den Weg zum Hohlspiegel hin- und zurückgemacht hat. Diese Zeit ist für beide Hohlspiegel, wenn zwischen denselben und S sich Luft befindet, dieselbe, da der Abstand der beiden Hohlspiegel von S genau derselbe ist. In Folge dessen wird dann das reelle Bild des Drahtes m um eine gewisse Strecke d verschoben, welche auf der Glasplatte GG genau dieselbe ist, um welche das Bild bei m zur Seite geschoben würde, wenn die spiegelnde Platte pp nicht dazwischen gesetzt wäre. Ist nun der Abstand des Spiegels S von dem Drahte r, so folgt, dass die Verschiebung d gegeben ist durch

$$\frac{d}{r} = \text{tang}\, 2\,\alpha = 2\,\text{tang}\,\alpha; \quad d = 2\,r\,\text{tang}\,\alpha = 2\,r\,\alpha,$$

denn die Drehung α ist jedenfalls so klein, dass wir anstatt tang $2\,\alpha$ 2 tang α und $2\,\alpha$ einsetzen dürfen. Kennt man die Umdrehungszahl n des Spiegels in der Secunde, so ergibt sich für die Zeit t, innerhalb welcher der Spiegel sich um die Bogen α gedreht hat,

$$t = \frac{\alpha}{2\,n\,\pi},$$

da der Spiegel in der Secunde den Bogen $2\,n\,\pi$ zurückgelegt hat. Diese Zeit ist jene, welche das Licht gebraucht hat, um den Weg vom Spiegel S zu dem Hohlspiegel und zurück zu durchlaufen. Nennen wir somit die Geschwindigkeit des Lichtes c, den Abstand der Hohlspiegel von dem rotirenden Spiegel l, so ist gleichzeitig

$$t = \frac{2\,l}{c}; \quad c = \frac{2\,l}{t}.$$

Daraus ergibt sich für c, indem wir für t seinen Werth einsetzen,

$$c = \frac{2\,l\,.\,2\,n\,\pi}{\alpha} = \frac{2\,r\,2\,l\,2\,n\,\pi}{d} = \frac{8\,r\,l\,n\,\pi}{d},$$

wenn wir gleichzeitig α durch d ausdrücken. Die Geschwindigkeit des Lichtes c ergibt sich also aus Messung der Abstände r, l, der Umdrehungszahl n und der Verschiebung d. Die von Foucault ausgeführte, im §. 123 erwähnte Messung der Lichtgeschwindigkeit geschah nach dieser Methode.

Wird nun zwischen den Spiegel S und den Hohlspiegel HH eine mit Wasser gefüllte Röhre gebracht, so dass das Licht den Weg $2\,l$ in Wasser zurücklegen muss, so muss die Verschiebung des Bildes eine andere werden, wenn das Licht im Wasser eine andere Geschwindigkeit c' hat; denn nach der Gleichung, welche die Verschiebung des Bildes mit der Geschwindigkeit verknüpft, muss

$$d' = \frac{8\,r\,l\,n\,\pi}{c'}$$

sein, oder es muss

$$d' : d = \frac{1}{c'} : \frac{1}{c}.$$

Die Verschiebungen der Bilder müssen den Geschwindigkeiten c' und c umgekehrt proportional sein.

Man muss demnach, wenn c und c' verschieden sind, auf der Glasplatte GG zwei Bilder erhalten, eines von dem Lichte, das den Weg zwischen S und dem Hohlspiegel in Luft zurückgelegt hat, das „Luftbild", und ein zweites von dem Lichte, das diesen Weg in Wasser zurückgelegt hat, das „Wasserbild". Ist die Geschwindigkeit im Wasser grösser als in Luft, so muss das Luftbild das stärker verschobene sein, ist sie kleiner, so muss das Wasserbild stärker verschoben sein.

Foucault erhielt in der That zwei Bilder, von denen das Wasserbild durch seine geringere Helligkeit und grünliche Farbe als solches zu erkennen war. Weiter ergab die Beobachtung, dass wie es die Undulationstheorie verlangt, das Wasserbild das stärker verschobene war, und zwar, dass sich die Verschiebungen, wie es ebenfalls nach der Undulationstheorie sein muss, annähernd verhielten wie 4 : 3. Es folgt somit, dass die Geschwindigkeit des Lichtes im Wasser sich zu derjenigen in Luft verhält wie 3 : 4.

Damit ist die Emissionshypothese definitiv als unrichtig nachgewiesen, wir haben daher im Weitern nur mehr die Undulationstheorie auf ihre Zulässigkeit zu prüfen; das heisst, da aus der Widerlegung der Emissionstheorie sich ergibt, dass das Licht ein sich ausbreitender Zustand sein muss, ob die Auffassung, dass dieser sich ausbreitende Zustand eine sich ausbreitende schwingende Bewegung sei, sich in den Lichterscheinungen überall bestätigt.

§. 140.

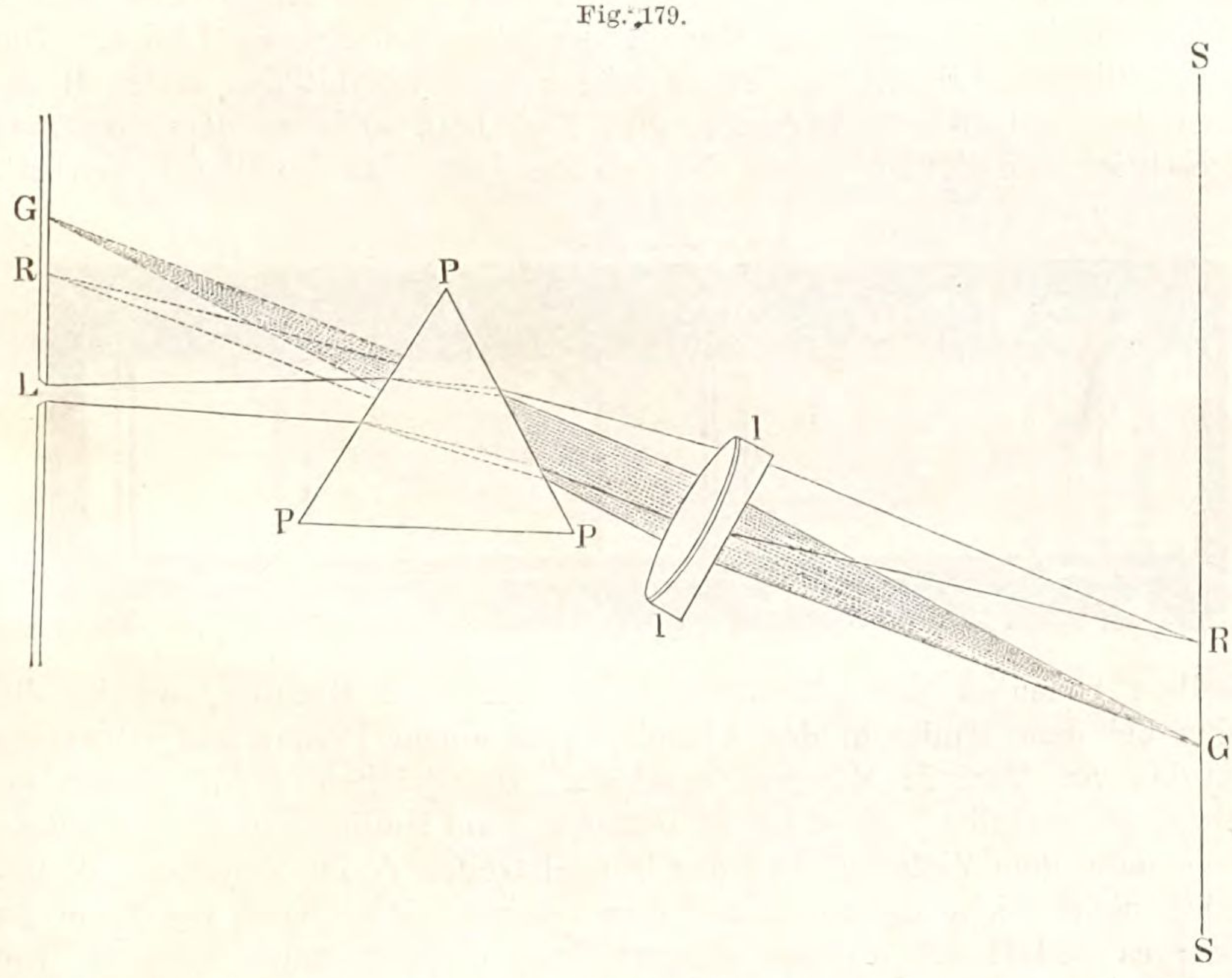
Darstellung eines reinen Spectrums; Fraunhofer'sche Linien. Da das verschiedenfarbige Licht eine verschiedene Brechbarkeit besitzt,

so ist es zur genauern Untersuchung der Brechungsexponenten, wie sie zur Prüfung der Dispersionstheorie nöthig ist, erforderlich, sich ganz homogenes Licht zu verschaffen. Durch das im §. 137 angegebene Verfahren ist solches nicht zu erhalten; wie wir zur Darstellung desselben verfahren müssen, ergibt sich leicht nach §. 136, indem wir nachwiesen, dass ein Prisma von einer der brechenden Kante parallelen Linie ein virtuelles Bild entwirft, welches wieder eine zur brechenden Kante parallele Linie ist, die nach einer Richtung gesehen wird, welche mit der Richtung des auf das Prisma fallenden Lichtes den Winkel

$$\delta = i + i' - \alpha$$

bildet. Lassen wir nun von verschiedenfarbigen leuchtenden Linien Licht auf das Prisma fallen, so folgt aus der Abhängigkeit der Ablenkung δ von dem Brechungsexponenten, dass die virtuellen Bilder dieser verschiedenfarbigen Bilder in verschiedenem Grade zur Seite abgelenkt werden. Nehmen wir nun eine weisse Lichtlinie, welche alle Farben gleichzeitig aussendet, so folgt, dass das virtuelle Bild der weissen Linie in die neben einanderliegenden verschiedenfarbigen virtuellen Bilder zerlegt wird, wie z. B. *R*, *G* Fig. 179 das rothe und grüne virtuelle Bild der weissen Lichtlinie *L* dar-

Fig. 179.

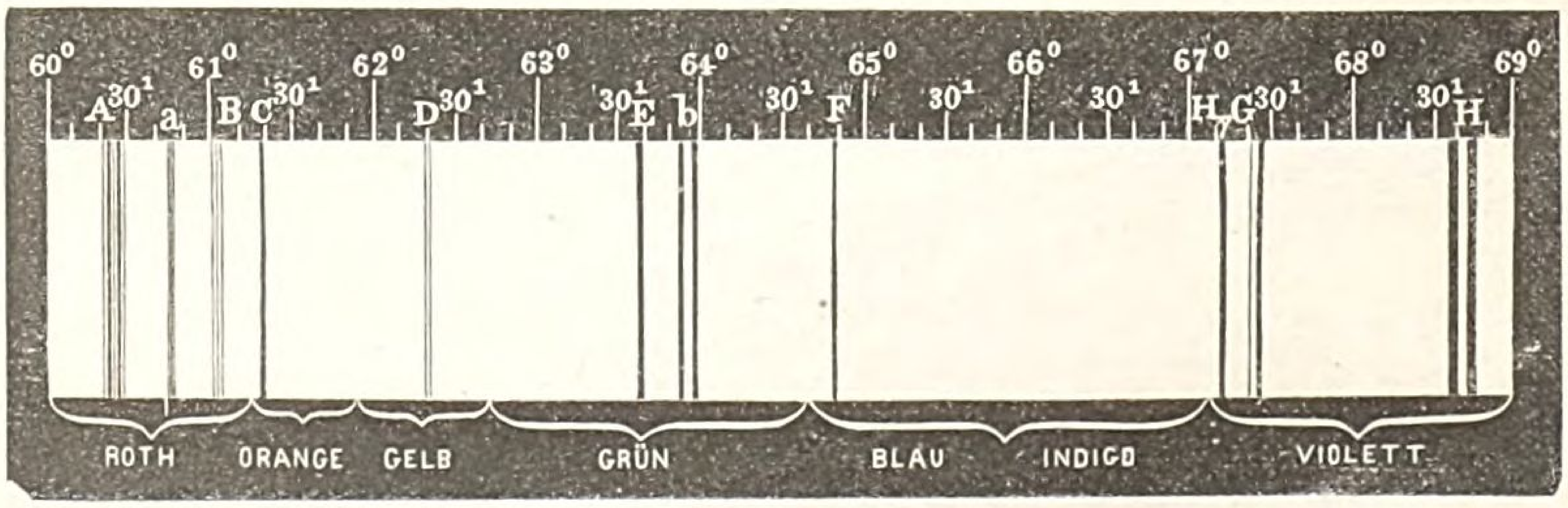


stellen. Lässt man nun die aus dem Prisma austretenden Strahlen auf eine achromatische Sammellinse *ll* fallen, welche, wie wir demnächst nachweisen werden, alle von einem Punkte ausgehenden Strahlen wieder in einem Punkte, die von einer Linie ausgehenden wieder in einer Linie vereinigt, welche in einem bestimmten Abstande hinter der Linse auf der verlängerten Verbindungslinie des leuchtenden Punktes mit dem Mittelpunkte der Linse liegt, so werden die Strahlen zu einem reellen Bilde

des virtuellen Bildes der einzelnen Lichtlinien vereinigt. Fängt man diese reellen Bilder auf einem Schirme *SS* auf, so sind sie, wie erwähnt wurde, von allen Seiten sichtbar. Damit nun das so auf dem Schirme *SS* entworfene Spectrum ein reines sei, das heisst damit an einer bestimmten Stelle desselben nur eine bestimmte Farbe auftritt, ist nothwendig, dass die den einzelnen Farben entsprechenden Bilder der Lichtlinie sich nicht überdecken, und das wird dadurch erreicht, dass man die leuchtende Linie *L*, also den Spalt, durch den wir die Sonnenstrahlen auf das Prisma fallen lassen, möglichst schmal nimmt. Denn da die verschieden gefärbten Strahlen nur eine bestimmte, von ihrer verschiedenen Brechbarkeit abhängige Divergenz erhalten, können die einzelnen Bilder nur dann vollständig neben einander fallen, wenn sie eine geringe Breite besitzen. Je schmaler deshalb die Lichtlinie ist, um so reiner wird das Spectrum.

Betrachtet man ein solches auf einem Schirm entworfenes reines Spectrum, so sieht man, dass dasselbe keineswegs ganz continuirlich ist, das heisst, dass in demselben die Farben nicht stetig in einander übergehen, sondern dass in demselben eine grosse Menge dunkler Linien vorhanden sind, welche der brechenden Kante parallel das Spectrum der Quere nach, also senkrecht zu seiner Längsausdehnung durchsetzen. Diese zuerst von Wollaston beobachteten, später von Fraunhofer genauer untersuchten Streifen führen den Namen der Fraunhofer'schen Linien. Die hauptsächlichsten dieser Streifen, welche Fraunhofer mit den ersten Buchstaben des Alphabets bezeichnete, gibt Fig. 180. Die an dem Spectrum hingeschriebenen Zahlen geben die relative Lage der dunklen Linien an;

Fig. 180.

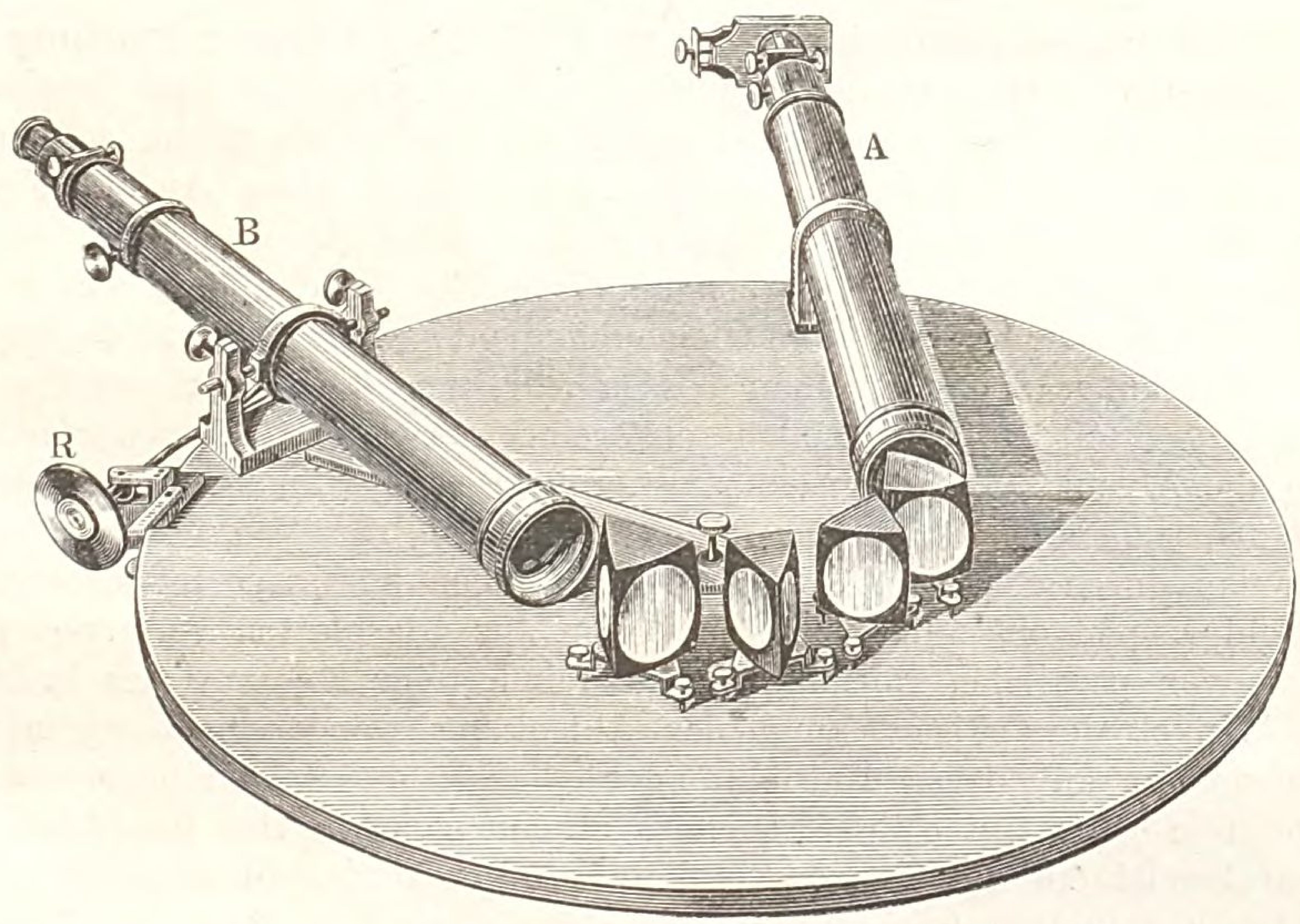


dieselben bedeuten die Ablenkung in Graden und Minuten, welche die Linien bei dem Minimum der Ablenkung in einem Prisma aus schwerem Flintglas von Merz in München erfahren. Die Streifen *A*, *B*, *C* liegen im Rothen, *D* im Gelben, *E* und *b* im Grünen, *F* im Hellblauen, *G* im Dunkelblauen nahe dem Violetten und der Doppelstreifen *H* im Violetten. *A* und *B* sind nicht leicht in einem auf dem Schirm entworfenen Spectrum zu sehen; es bedarf schon eines ausgezeichnet dispergirenden Prismas, wie sie Schröder in Hamburg anfertigt, um so *B* sichtbar zu machen. Die Fraunhofer'schen Linien liegen immer in demselben Theile des Spectrums und behalten immer ihre gegenseitige Lage, wann und wo auch das Spectrum untersucht wird, vorausgesetzt, dass man Sonnenlicht, direktes oder das vom heitern Himmel oder weissen Wolken reflectirte zur Darstellung des Spectrums anwendet. Die Streifen beweisen somit, dass in dem von der Sonne zu uns gelangenden Lichte nicht Strahlen jeglicher Brechbarkeit

innerhalb der Grenzen des Spectrums vorhanden sind, dass vielmehr Strahlen gewisser Brechbarkeit in demselben fehlen.

Die Zahl der sichtbaren Streifen wird eine viel grössere, wenn man das Spectrum nicht auf einem Schirme auffängt, sondern dasselbe mit einer Lupe betrachtet, also zur Beobachtung desselben ein Fernrohr anwendet, und gleichzeitig durch Anwendung mehrerer Prismen die Dispersion vergrössert. Schon ein schwach vergrösserndes Fernrohr lässt bei Anwendung eines Prismas alle die Linien im Spectrum Fig. 1 Tafel I erkennen. Eine vortreffliche Anordnung zur Beobachtung des Spectrums in dieser Weise hat Kirchhoff angegeben, die seitdem fast immer zu Spectralbeobachtungen angewandt wird. Eine mit einem Fuss versehene, oben glatt gehobelte Eisenplatte Fig. 181 trägt zunächst ein Collimatorrohr A,

Fig. 181.



ein Fernrohr, in welchem an Stelle des Oculars eine Spaltöffnung angebracht ist, die man mit einer Mikrometerschraube beliebig enge machen kann. Der Spalt, auf welchen parallel der Axe des Fernrohrs mit einem Heliostaten die Sonnenstrahlen geworfen werden, befindet sich in dem Brennpunkte des Objectivs, so dass die durch den Spalt in das Fernrohr eindringenden Strahlen dasselbe durch das Objectiv einander und der Axe des Fernrohrs parallel verlassen. Die Strahlen durchdringen dann der Reihe nach die zwischen dem Collimatorrohre und dem Fernrohr B aufgestellten Prismen und treten dann in das Objectiv des Fernrohrs B. Da nach §. 137 parallele Strahlen das Prisma auch als parallele Strahlen verlassen, so entwerfen die aus der letzten Prismenfläche austretenden Strahlen, wenn die Axe des Fernrohrs ihnen parallel gestellt ist, in dem Brennpunkte des Objectivs die verschieden gefärbten reellen Bilder der Spaltöffnung. Diese werden dann durch das Ocular des Fernrohrs B betrachtet. Das Fernrohr B ist an der Platte verschiebbar, um so die verschiedenen Theile des Spectrums, das hier nie auf einmal ganz zu sehen

ist, nach und nach an das Fadenkreuz des Fernrohrs bringen zu können. Die grobe Verschiebung geschieht mit der Hand, die feine, nachdem das Fernrohr festgestellt ist, mit der Mikrometerschraube *R*.

Da man bei dieser Beobachtungsweise den Spalt sehr enge nehmen kann, erhält man ein sehr reines Spectrum, und da man durch Anwendung mehrerer Prismen eine sehr starke Dispersion erhält, ausserdem stark vergrössernde Fernrohre anwenden kann, so kann man selbst die feinsten Linien des Spectrums sehen. Kirchhoff hat in seiner Zeichnung des Sonnenspectrums mehr als 2000 angegeben und deren relative Lage durch eine Skala bestimmt. Welche Bedeutung die genaue Kenntniss der dunklen Linien des Spectrums hat, wird bei Besprechung der Emissionserscheinungen hervortreten.

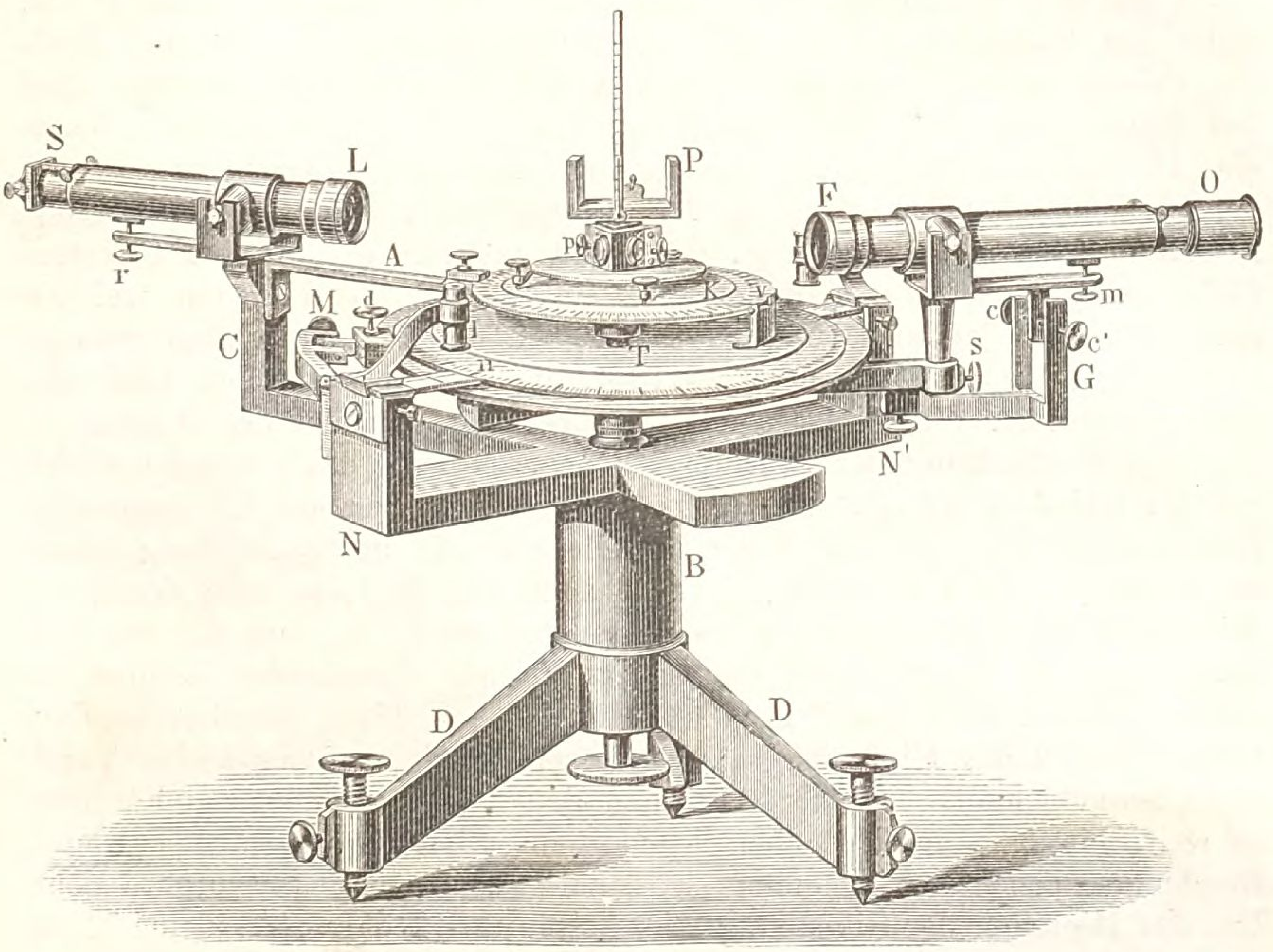
§. 141.

Brechungsexponenten fester und flüssiger Körper; Prüfung der Dispersionstheorie. Da die Fraunhofer'schen Linien uns ganz bestimmte Stellen des Spectrums, also ganz bestimmte Farben markiren, so können wir mit Hülfe derselben die Brechungsexponenten einer Anzahl Farben von ganz bestimmter Wellenlänge messen, und dadurch prüfen, ob die Abhängigkeit der Brechungsexponenten von der Wellenlänge den in der Dispersionstheorie mitgetheilten Gleichungen entspricht. Man hat die Körper, deren Brechungsexponenten man messen will, nur in die Form von Prismen zu bringen, mit Hülfe derselben ein reines Spectrum zu entwerfen und dann die Ablenkung der einzelnen Fraunhofer'schen Linien zu messen, indem man ihnen das Minimum der Ablenkung gibt. Den festen Körpern gibt man durch Schleifen die Prismenform, den flüssigen, indem man sie in Hohlprismen einschliesst, deren Seiten aus Glasplatten verfertigt sind, welche von parallelen Ebenen begrenzt sind. Zur Messung der brechenden Winkel der Prismen und der Ablenkung wendet man sogenannte Spectrometer an, deren Einrichtung Fig. 182, die Zeichnung eines von Meyerstein verfertigten Spectrometers erkennen lässt. Der Haupttheil des Apparates ist ein um eine durch den Mittelpunkt desselben gehende Axe drehbarer getheilter Kreis *T*. Derselbe wird getragen durch den Dreifuss *D*, welcher eine Büchse *B* hat, die genau cylindrisch durchbohrt ist, und in dessen Durchbohrung die stählerne Axe des Kreises genau hineinpasst. An der Büchse sind drei in einer horizontalen Ebene befindliche massive Arme angebracht, *N*, *N'*, *C*, von denen der letztere ein ebensolches Collimatorrohr trägt, wie es der Kirchhoff'sche Spectralapparat hat. Der Spalt *S* befindet sich im Brennpunkte des Objectives, so dass die durch den Spalt eintretenden Strahlen das Collimatorrohr als ein der Fernrohraxe paralleles Strahlenbündel verlassen. Die Axe des Rohres ist gegen den Mittelpunkt des Theilkreises *T* gerichtet; die kleine als dritter Unterstützungspunkt des Rohres dienende Schraube *r* gestattet, die Axe des Rohres der Ebene des Theilkreises genau parallel zu legen.

An der den Theilkreis *T* tragenden Stahlaxe ist der Träger *sm* des Beobachtungsfernrohrs *FO* angeschraubt; derselbe ist eingerichtet wie der des Collimatorrohres, jedoch mit dem Unterschied, dass der ganze Träger, wenn die Schraube bei *s* gelöst wird, um eine durch *s* gehende verticale Axe gedreht werden oder auch mit dem Fernrohr von dem Apparate ent-

fernt werden kann. Die Drehung, die den Zweck hat, die Fernrohraxe stets genau gegen die Axe des Theilkreises zu richten, geschieht durch

Fig. 182.



die Schrauben c und c', zwischen deren Spitzen ein an dem Träger befestigtes Ansatzstück hinabreicht. Um die Fernrohraxe genau der Ebene des Theilkreises parallel zu machen, dient die Schraube m, deren Spitze der dritte Stützpunkt des Fernrohrs ist. Die Theilung des Kreises T ist auf einem eingelegten Silberstreifen so aufgetragen, dass wenn die Axen des Collimators und des Fernrohrs in einer geraden Linie liegen, der Nullpunkt der Theilung an dem Nullpunkte des Nonius n liegt. Der Nonius wird von dem Arme N getragen, an welchem ebenfalls die zur feinen Einstellung des Kreises dienende Mikrometerschraube M angebracht ist. Zur Controle der Ablesung ist ein zweiter Nonius 180^0 von dem ersten entfernt an dem Arme N' angebracht. An dem Arme N' ist ausserdem durch einen Bogen die Gabel P befestigt, welche genau dieselbe Einrichtung wie die das Fernrohr FO tragende hat, und auf welche das Fernrohr zur Messung des brechenden Winkels der Prismen aufgelegt wird.

Die den Theilkreis tragende Stahlaxe ist von oben nach unten genau cylindrisch angebohrt und in diese Bohrung passt die den kleinen Theilkreis K tragende Axe. Wird der grosse Theilkreis gedreht, so dreht sich der kleine Theilkreis mit, ausser wenn er durch eine an dem Arme A angebrachte Klemme festgehalten wird. Löst man die Klemme A, und klemmt den grossen Theilkreis fest, so kann man den kleinen Theilkreis unabhängig von dem grossen drehen. Auf dem kleinen Theilkreis steht schliesslich ein kleines mit Stellschrauben versehenes Tischchen zur Auf-

nahme des Prismas. Durch die Stellschrauben kann man die Kante der Prismen der Drehungsaxe des ganzen Apparates genau parallel stellen.

Um nun mit Hülfe dieses Apparates zunächst den brechenden Winkel des Prismas zu bestimmen, legt man das Fernrohr auf die Gabel P und stellt den Theilkreis auf 0 ein. Man stellt dann auf dem kleinen Tisch das Prisma so auf, dass man das von der einen Fläche reflectirte Bild des Spaltes am Fadenkreuz des Fernrohrs sieht, was man leicht durch eine Drehung des kleinen Theilkreises erreichen kann. Darauf bringt man durch gemeinschaftliche Drehung des grossen und kleinen Theilkreises das Prisma in eine solche Stellung, dass man das von der zweiten Prismenfläche reflectirte Bild am Fadenkreuz sieht. Der Winkel, um welchen man dazu den Theilkreis und mit demselben das Prisma drehen musste, ergänzt den brechenden Winkel zu 180^0, die Differenz zwischen 180^0 und dem gemessenen Winkel ist somit der brechende Winkel des Prismas.

Zur Bestimmung der Brechungsexponenten wird das Fernrohr wieder auf die Gabel G gelegt, und dann der Kreis wieder auf 0^0 eingestellt. Man sieht dann, wenn das Fernrohr richtig steht, die Spaltöffnung scharf am Fadenkreuz des Fernrohrs, ist das nicht der Fall, so wird durch die Schrauben c die Lage des Fernrohrs so weit corrigirt, dass das der Fall ist. Damit ist die Richtung des in das Prisma eintretenden Lichtes bestimmt. Dann wird das Prisma auf den kleinen Tisch gestellt, so dass man ungefähr das Minimum der Ablenkung erhält und der kleine Theilkreis festgeklemmt. Darauf dreht man den Theilkreis mit dem Fernrohr so weit, bis man in demselben irgend eine Linie des Spectrums, deren Brechungsexponenten man messen will, am Fadenkreuz des Fernrohrs sieht. Um das Minimum der Ablenkung zu erhalten, wird dann der kleine Theilkreis gelöst und mit demselben das Prisma nach der einen oder andern Seite gedreht, während man, wenn die Ablenkung der betrachteten Linie bei der Drehung in dem einen Sinne kleiner wird, mit dem Fernrohr folgt, bis durch eine weitere Drehung des Prismas in demselben Sinne die Ablenkung der Linie wieder grösser wird. Ist so das Minimum der Ablenkung erreicht, klemmt man den kleinen Kreis wieder fest und stellt dann das Fernrohr wieder genau auf die Linie ein. Der Winkel, um den das Fernrohr dann aus seiner Anfangslage gedreht ist, und den man direkt an dem Nonius n abliest, ist dann das Minimum der Ablenkung der betreffenden Linie. Ist diese Ablenkung δ, der brechende Winkel des Prismas α, so ist der Brechungsexponent

$$n = \frac{\sin \frac{\delta + \alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}.$$

In dieser oder einer ähnlichen Weise ist von Fraunhofer, Baden Powell, Dutirou, van der Willigen und vielen Andern eine grosse Zahl farblos durchsichtiger fester und flüssiger Körper auf ihre Brechungsexponenten untersucht worden, wobei man sich fast stets begnügte, die relativen Brechungsexponenten zwischen Luft und den betreffenden Substanzen zu bestimmen. Als allgemeine Resultate kann man aus diesen Versuchen ableiten, dass für alle diese Körper die Brechungsexponenten grösser als 1 sind und dass bei allen dieselben von dem Rothen zu dem Violetten stetig

zunehmen. Für die festen Körper sind ferner die Brechungsexponenten sehr nahe unabhängig von der Temperatur, während bei den Flüssigkeiten dieselben für alle Farben mit steigender Temperatur und oft sehr beträchtlich kleiner werden. So ändert sich bei Wasser der Brechungsexponent für alle Farben ziemlich gleichmässig innerhalb 0^0 und etwa 40^0 um eine Einheit der fünften Decimale für jeden Grad der Temperaturerhöhung. Für andere Flüssigkeiten, wie z. B. Schwefelkohlenstoff, ist die Abnahme für die stärker brechbaren Strahlen grösser als für die weniger brechbaren; so nimmt für Schwefelkohlenstoff der Brechungsexponent für die Fraunhofer'sche Linie *C* im Rothen von 1,62873 bei 7^0 bis zu 1,61586 bei $23^0,4$ C. ab, für jeden Grad also um 0,00078. Für die Fraunhofer'sche Linie *G* im Blauen nimmt der Brechungsexponent von 1,68628 bei $6^0,9$ auf 1,67260 bei 23^0 C. ab, somit für jeden Grad um 0,00085. Mit steigender Temperatur nimmt auch die Dichtigkeit der Flüssigkeiten ab, und es ergibt sich aus den Beobachtungen von Dale und Gladstone, Landolt und mir selbst, dass mit sehr grosser Annäherung der Quotient aus den um 1 verminderten Brechungsexponenten und der Dichtigkeit der Flüssigkeiten constant, also

$$\frac{n-1}{d} = \text{const.}$$

ist. Wir kommen auf diesen Punkt später noch kurz zurück.

Aus dieser Veränderlichkeit der Brechungsexponenten der flüssigen Körper ergibt sich, dass man bei diesen die von der Theorie gelieferten Gleichungen nur prüfen kann, wenn man die Brechungsexponenten der verschiedenfarbigen Strahlen für ein und dieselbe Temperatur mit einander vergleicht. Folgende Tabelle gibt die Brechungsexponenten einiger festen und flüssigen Körper, sie lässt erkennen, innerhalb welcher Grenzen die Brechungsexponenten bei den verschiedenen Körpern und für die verschiedenen Farben etwa variiren. Die Zahlen beziehen sich auf die in der ersten Columne angegebenen Fraunhofer'schen Linien.

Strahlen	Flintglas I	Flintglas II	Crownglas	Wasser bei $19^0,5$	Schwefelkohlenstoff bei $24^0,2$
B	1,769702	1,61268	1,524312	1,33048	1,6114
C	1,771761	1,61443	1,525299	1,33122	1,6147
D	1,777664	1,61929	1,527982	1,33307	1,6240
E	1,785254	1,62569	1,531372	1,33527	1,6368
F	1,792420	1,63148	1,534337	1,33720	1,6487
G	1,806195	1,64269	1,539908	1,34063	1,6728
H	1,818597	1,65268	1,544684	1,34350	1,6956.

Die Zahlen für das Flintglas I rühren von Dutirou, für Flintglas II von Mascart, für Crownglas von Fraunhofer, für Wasser von van der Willigen, für Schwefelkohlenstoff schliesslich von Verdet her.

Zur Prüfung der Dispersionstheorie bedarf es der Kenntniss der Wellenlängen der verschiedenen Farben. Wir theilen deshalb im Folgenden dieselben mit, wie sie sich nach später zu besprechenden Methoden als Mittel vieler Messungen in Luft ergeben haben. Die den Zahlen zu Grunde liegende Einheit ist 0,0001 Mm. Die Wellenlängen sind für:

B	C	D	E	F	G	H
6,872	6,567	5,893	5,271	4,862	4,304	3,956.

Cauchy leitete, wie wir sahen, aus seiner Theorie die Gleichung ab

$$n = \alpha_1 + \frac{\alpha_2}{\lambda^2} + \frac{\alpha_3}{\lambda^4},$$

worin λ die Wellenlängen im leeren Raum bedeuten, für welche wir diejenigen in Luft einsetzen können. In vielen Fällen sollen die beiden ersten Glieder der Reihe genügen.

Christoffel leitete aus derselben die Gleichung ab

$$n = \frac{n_0 \sqrt{2}}{\sqrt{1 + \frac{\lambda_0}{\lambda}} + \sqrt{1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}}};$$

aus der Briot'schen Theorie ergab sich allgemein

$$\frac{1}{n^2} = K + \alpha l^2 + \frac{\beta}{l^2} + \frac{\gamma}{l^4} \cdot \cdot$$

worin l die Wellenlänge in der betreffenden Substanz ist; wenn α, das vom Mitschwingen der Moleküle abhängige Glied, Null ist und man sich auf zwei Glieder beschränkt, führt diese Gleichung zu der Christoffel'schen.

Da man die Constanten der Dispersionsgleichungen nicht auf andere Weise bestimmen kann, so muss man dieselben aus der nothwendigen Zahl von beobachteten Brechungsexponenten von möglichst weit aus einander liegenden Strahlen ableiten, mit diesen dann die Brechungsexponenten der übrigen Strahlen berechnen und mit den beobachteten vergleichen.

Auf die Berechnung der Constanten und der Brechungsexponenten, welche besonders für die Gleichungen, welche nicht λ sondern l enthalten, ziemlich umständlich ist, gehen wir hier nicht ein, wir begnügen uns an der Vergleichung der Brechungsexponenten für einige Substanzen zu zeigen, dass zuweilen schon die Cauchy'sche Gleichung mit den beiden ersten Constanten, in den meisten Fällen die Christoffel'sche, immer aber die Cauchy'sche Reihe mit drei Constanten die beobachteten Brechungsexponenten mit der erreichbaren Genauigkeit wiedergeben. Die Constante α der Briot'schen Gleichung kann für die farblos durchsichtigen Körper stets gleich Null gesetzt werden. In den nachfolgenden Tabellen, die uns dies zeigen, ist neben den beobachteten Brechungsexponenten der Unterschied zwischen den beobachteten und berechneten Brechungsexponenten hingeschrieben, und zwar unter I mit der zweiconstantigen Cauchy'schen Gleichung, unter II mit der Christoffel'schen, unter III mit der dreiconstantigen Gleichung in der Form von Briot mit $\alpha = 0$, und unter IV mit der vierconstantigen Gleichung, in der α nicht gleich Null gesetzt wurde.

Die erste Tabelle bezieht sich auf Flintglas No. II; diejenigen Brechungsexponenten, bei denen der Unterschied zwischen Beobachtung und Rechnung gleich Null ist, sind zur Berechnung der Constanten benutzt.

Strahl	n beob.	Die berechneten Werthe sind gleich den beobachteten nach I	nach II	nach III	nach IV
B	1,61268	0	0	0	0
C	1,61443	+ 9	— 1	0	+ 1
D	1,61929	+ 36	+ 1	— 1	+ 4
E	1,62569	+ 54	— 5	+ 5	+ 1
F	1,63148	+ 52	+ 8	— 10	0
G	1,64269	0	0	+ 12	— 4
H	1,65268	— 92	— 7	0	0
		Wasser bei 19°,2			
B	1,33048	+ 12	+ 12	0	0
C	1,33122	— 1	0	— 8	— 1
D	1,33307	— 12	— 14	— 9	0
E	1,33527	— 15	— 16	0	+ 4
F	1,33720	— 3	— 18	+ 1	0
G	1,34063	— 2	0	0	+ 1
H	1,34350	+ 14	+ 25	— 18	0

Die erste Tabelle zeigt, dass dort die Gleichung I nicht ausreicht die Brechungsexponenten darzustellen, dass aber die Christoffel'sche dieselben ebenso gut darstellt wie die Gleichung III und IV; in der zweiten Tabelle gibt schon die einfache Gleichung I nur Unterschiede, die etwas mehr als eine Einheit der vierten Decimale betragen, die vollständig dadurch erklärt werden, dass weder die beobachteten Brechungsexponenten, noch die Werthe der Wellenlängen absolut genau sind. Nur die Gleichung mit vier Constanten gibt näher sich anschliessende Werthe, was allein schon daraus folgt, dass vier von den sieben beobachteten Werthen zur Berechnung der Constanten benutzt sind.

Für Schwefelkohlenstoff reicht die Christoffel'sche Gleichung nicht mehr aus, dagegen genügt dort die Cauchy'sche Gleichung mit drei Constanten, wie folgende Zusammenstellung der von Verdet beobachteten und nach einer von mir aus meinen Beobachtungen abgeleiteten Gleichung für 24°,8 berechneten Werthe zeigt.

Strahlen	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*
n beob.	1,6114	1,6147	1,6240	1,6368	1,6487	1,6728	1,6956
n ber.	1,6115	1,6147	1,6240	1,6367	1,6487	1,6729	1,6955
Differ.	+ 1	0	0	— 1	0	+ 1	— 1.

Man sieht, dass die Uebereinstimmung eine fast vollkommene ist.

Setzt man in der Gleichung von Cauchy λ unendlich gross, so wird

$$n = \alpha,$$

thut man dasselbe in der Gleichung von Christoffel, so wird

$$n = \frac{n_0}{\sqrt{2}}.$$

Diese Constanten bedeuten daher jene Werthe, welchen sich die Brechungsexponenten bei wachsender Wellenlänge immer mehr annähern, die wir also auch als jenen Brechungsexponenten ansehen können, welchen eine Substanz haben würde, wenn keine Dispersion stattfände. Man kann daher diesen Brechungsexponenten als den eigentlich die Substanz charakteri-

sirenden ansehen. Die übrigen Constanten der Gleichung sind dann gewissermassen als charakteristisch für die Dispersion anzusehen, sie geben an, wie weit für die einzelnen Farben die Brechungsexponenten durch den Einfluss der körperlichen Moleküle geändert werden.

Die Beziehungen zwischen Brechungsexponenten und andern Eigenschaften der brechenden Substanzen, wie ihrer Dichtigkeit, können sich daher strenge genommen nur auf diese constanten, von der Dispersion unabhängigen Brechungsexponenten beziehen, und in der That gilt auch die vorhin erwähnte Beziehung, dass der Quotient aus dem um 1 verminderten Brechungsexponenten und der Körperdichte nahezu constant ist, für diesen constanten Brechungsexponenten. Wir wollen den so definirten Quotienten das specifische Brechungsvermögen der betreffenden Substanz nennen.

Diese Beziehung gilt dann nicht nur, wenn man die Dichtigkeit einer Substanz durch Aenderung der Temperatur ändert, sondern sie gilt mit derselben Annäherung auch dann, wenn man die Dichte dadurch ändert, dass man zwei Flüssigkeiten mischt oder einen festen Körper auflöst. Es folgt das aus dem zuerst für Gase von Biot und Arago aufgestellten Gesetze, dass die brechende Kraft eines Gemisches gleich ist der Summe der brechenden Kräfte der Bestandtheile, wenn wir das Product aus dem specifischen Brechungsvermögen und der Dichtigkeit einer Substanz, also den um 1 verminderten Brechungsexponenten für unendliche Wellenlängen einer Substanz als die brechende Kraft derselben bezeichnen. Mischen wir u Volume einer Flüssigkeit und v Volume einer zweiten, so dass w Volume des Gemisches entstehen, so ist die Dichtigkeit der ersten Flüssigkeit, welche vor der Mischung d_1 war, nach derselben $d_1 \cdot \frac{u}{w}$, die der zweiten, die vorher d_2 war, nach der Mischung $d_2 \frac{v}{w}$. Ist nun a_1 der constante Theil des Brechungsexponenten vor der Mischung für die erste, a_2 für die zweite, so sind die brechenden Kräfte der beiden Flüssigkeiten in der Mischung

$$\frac{a_1 - 1}{d_1} \cdot d_1 \frac{u}{w} \text{ und } \frac{a_2 - 1}{d_2} d_2 \frac{v}{w}.$$

Ist A der constante Theil des Brechungsexponenten der Mischung, somit $A - 1$ die brechende Kraft derselben, so wird somit nach dem Arago'schen Satze

$$A - 1 = (a_1 - 1) \frac{u}{w} + (a_2 - 1) \frac{v}{w}.$$

Ist nun die Dichtigkeit der Mischung D, ihr Gewicht P und sind die Gewichte der Bestandtheile p_1 und p_2, so können wir diese Gleichung, nachdem wir auf beiden Seiten mit w multiplicirt und dann durch P dividirt haben, schreiben

$$\frac{A - 1}{D} = \frac{a_1 - 1}{d_1} \frac{p_1}{P} + \frac{a_2 - 1}{d_2} \frac{p_2}{P},$$

oder das specifische Brechungsvermögen des Gemisches setzt sich aus jenem der Bestandtheile zusammen, so dass jedes mit dem Bruchtheile in die Summe eingeht, welchen das Gewicht der betreffenden Flüssigkeit vom Gewichte der ganzen Mischung bildet.

Landolt hat diese Beziehung benutzt, um aus dem Brechungsexponenten eines Gemisches zweier Flüssigkeiten, deren Brechungsexponenten einzeln bekannt waren, die Zusammensetzung des Gemisches zu berechnen. Dass das aus obiger Gleichung geht, ergibt die Erwägung, dass $p_1 + p_2 = P$ ist, somit obige Gleichung dann nur eine Unbekannte enthält.

Bei Salzen ergibt sich die Beziehung als gültig, wenn man die Brechungsvermögen zweier Lösungen mit einander vergleicht, denn man kann das specifische Brechungsvermögen des in der Lösung flüssigen Salzes nicht aus dem des festen Salzes ableiten.

§. 142.

Brechungsexponenten der Gase. Die Bestimmung der Brechungsexponenten der Gase ist mit einiger Schwierigkeit verknüpft, weil dieselben nur wenig von demjenigen der Luft verschieden sind, die Messung jenes der Luft, weil wir nicht im Stande sind, einen absolut luftleeren Raum herzustellen, in den wir das Licht aus Luft und aus dem wir das Licht in Luft übertreten lassen. Es gelingt indess auf Grund des Satzes, dass das specifische Brechungsvermögen der Gase constant ist, indem man Licht aus Luft von der Dichtigkeit der Atmosphäre in Luft von grösserer Dichtigkeit übertreten lässt und die dabei eintretende Brechung misst. Sei der absolute Brechungsexponent der Luft unter der Dichtigkeit d der Atmosphäre gleich n, sei der relative zwischen Luft von der Dichtigkeit d und solcher von der Dichtigkeit d' gleich n'; der absolute der letztern Luft ist dann nach §. 134 gleich nn'. Der Satz von der Constanz des specifischen Brechungsvermögens liefert dann die Gleichung

$$\frac{nn' - 1}{d'} = \frac{n - 1}{d}$$

und diese nach n aufgelöst gibt

$$n = \frac{d' - d}{d' - n'd}.$$

Der Werth von n' ergab sich bei dem Uebergange des Lichtes aus Luft unter dem Drucke einer Atmosphäre in solche von doppelter Dichtigkeit nach den Versuchen von Arago und Biot zu 1,000294; daraus folgt

$$n = \frac{2 - 1}{2 - 1{,}000294} = 1{,}000294$$

für den absoluten Brechungsexponenten der Luft von der dem Drucke der Atmosphäre entsprechenden Dichtigkeit.

Den Satz von der Constanz des specifischen Brechungsvermögens benutzte Dulong in sehr sinnreicher Weise, um die Brechungsexponenten der andern Gase mit grosser Genauigkeit zu messen. Ein Hohlprisma, das aus einem weiten Glasrohr hergestellt war, dessen Enden schräg gegen die Axe abgeschliffen waren, so dass die Schliffflächen einen Winkel von 145° mit einander bildeten, und durch zwei auf die Schliffflächen gekittete Spiegelglasplatten geschlossen waren, stand mit einem grossen Glascylinder in Verbindung, welcher das zu untersuchende Gas enthielt. Das Gas war über Quecksilber aufgefangen und der Druck, unter welchem

dasselbe im Cylinder und damit auch im Prisma stand, konnte durch eine Veränderung des Quecksilberniveaus beliebig geändert werden. An der einen Seite des als Prisma dienenden Glasrohrs war ein Fernrohr aufgestellt, dessen Axe mit der Axe des Prismas zusammenfiel, und welches auf eine an der andern Seite des Prismas angebrachte feste Marke eingestellt war, wenn das Prisma mit Luft von der Dichtigkeit der Atmosphäre gefüllt war.

Wurde nun das Prisma anstatt mit Luft mit einem andern Gase gefüllt, so wird das Licht im Allgemeinen abgelenkt, sah man deshalb durch das Fernrohr gegen die Marke, so erschien dieselbe abgelenkt, da das von der Marke ausgehende Licht, um in das Fernrohr zu gelangen, das Prisma durchsetzen musste. Durch Regulirung des Druckes des in dem Prisma enthaltenen Gases wurde dann bewirkt, dass man die Marke wieder genau an derselben Stelle sah, als wenn das Prisma mit Luft gefüllt war. Ist die Dichtigkeit des Gases dann d_1, so folgt, dass der Brechungsexponent des Gases von der Dichtigkeit d_1 gleich ist dem Brechungsexponenten der Luft unter dem Drucke der Atmosphäre, deren Dichtigkeit wir gleich d setzen. Nennen wir nun den Brechungsexponenten des Gases unter dem Drucke der Atmosphäre n, denjenigen der Luft, welcher dem des Gases bei der Dichtigkeit d_1 gleich ist, n_1, so gibt der Satz von der Constanz der Brechungsvermögen die Gleichung

$$\frac{n-1}{d} = \frac{n_1 - 1}{d_1}; \quad n - 1 = (n_1 - 1)\frac{d}{d_1}.$$

Da sich nun nach dem Mariotte'schen Gesetze die Dichtigkeiten eines Gases unter verschiedenen Drucken verhalten wie die Drucke, so wird, wenn wir den Druck der Atmosphäre mit 760, den der Dichtigkeit d_1 entsprechenden Druck mit p bezeichnen und für n_1 seinen Werth einsetzen

$$n = 1 + 0{,}000294\,\frac{760}{p}.$$

Die Versuche von Dulong bestätigten den von Arago und Biot aufgestellten Satz, dass die brechenden Kräfte der Gasgemische gleich der Summe der unter Voraussetzung der Constanz des specifischen Brechungsvermögens berechneten brechenden Kräfte der Bestandtheile sei, zugleich aber, dass dieser Satz nicht für die gasförmigen Verbindungen zweier Gase gelte. So gilt der Satz für ein Gemische aus Chlor und Wasserstoff, aber nicht mehr, wenn die beiden Gase sich zu Chlorwasserstoff verbunden haben.

Die Methode von Dulong genügt nicht, um die Brechungsexponenten der Gase für die verschiedenen Farben zu messen; deshalb haben später Ketteler und andere dieselben durch eine im zweiten Abschnitt zu besprechende Interferenzerscheinung gemessen. Ketteler benutzte dazu das rothe Licht einer Lithiumflamme, das gelbe einer Natriumflamme und das grüne einer Thalliumflamme, deren Wellenlängen sind

$$\lambda_L = 6{,}706 \qquad \lambda_N = 5{,}888 \qquad \lambda_{Th} = 5{,}345.$$

Die von ihm erhaltenen Brechungsexponenten für die Dichtigkeit der Gase unter dem Drucke einer Atmosphäre sind unter andern:

	n_L	n_N	n_{Th}
Gewöhnl. Luft	1,000293669	1,000294704	1,000295669
Kohlensäure	1,00044768	1,00044922	1,00045072
Wasserstoff	1,00014228	1,00014294	1,00014356
Cyan	1,00077954	1,00078440	1,00078896.

Die Zahlen zeigen, dass die Brechungsexponenten nur wenig von 1 und von einander verschieden sind, dass aber die Zerstreuung des Lichtes in Gasen dieselbe ist, wie in durchsichtigen festen und flüssigen Körpern. Davon macht indess nach den Beobachtungen von Leroux der Joddampf eine Ausnahme, derselbe bricht das rothe Licht stärker als das violette, das Spectrum liegt also umgekehrt. Es war das die erste Beobachtung der anomalen Dispersion, die man seitdem in vielen stark absorbirenden Körpern gefunden, und die wir im nächsten Kapitel besprechen werden.

§. 143.

Totale Reflexion. Wenn i der Winkel ist, unter welchem das Licht an der Grenze zweier Mittel ankommt und r der zugehörige Brechungswinkel ist, so ist nach dem Brechungsgesetz

$$n = \frac{\sin i}{\sin r}, \quad \sin r = \frac{1}{n} \sin i.$$

Lassen wir nun das Licht aus einem dichtern Mittel in ein dünneres übertreten, so ist $n < 1$, es folgt daraus, dass in diesem Falle das Licht nicht mehr bei allen Einfallswinkeln i in das dünnere Mittel austreten kann. Geben wir dem Einfallswinkel i einen solchen Werth g, dass

$$\frac{1}{n} \sin g = 1 = \sin 90^0,$$

so tritt das Licht aus dem Mittel parallel der Trennungsebene hervor, der Winkel r, den das gebrochene Licht mit dem Einfallslothe bildet, ist 90^0. Lassen wir nun i noch grösser werden, so dass

$$\frac{1}{n} \sin i > 1,$$

so gibt es keinen Winkel r mehr, den der austretende Strahl mit dem Einfallslothe bilden kann, so dass das Brechungsgesetz erfüllt wird, da es keinen Winkel gibt, dessen sinus grösser als 1 ist. Es gibt demnach, sobald der Grenzwinkel g, dessen sinus gleich n ist, überschritten ist, keinen gebrochenen Strahl mehr; es findet keine Brechung mehr statt, alles an der Grenze ankommende Licht wird reflectirt. Die Erfahrung bestätigt diese Folgerung. So erhält man z. B. diese als totale Reflexion bezeichnete Erscheinung, wenn man in ein mit Wasser gefülltes aus ebenen Wänden hergestelltes Glasgefäss von unten her einen Lichtstrahl so gegen die Oberfläche des Wassers sendet, dass sein Einfallswinkel grösser als 50^0, somit der Sinus grösser als 0,75 ist; das Licht tritt nicht mehr aus dem Wasser durch die Oberfläche aus, es wird total reflectirt.

Ebenso kann man die Erscheinung der totalen Reflexion sehr leicht erhalten, wenn man Prismen anwendet, deren brechender Winkel grösser ist als der Grenzwinkel der betreffenden Substanz. Es ergibt sich das

leicht aus der Gleichung, die wir im §. 135 für den Austrittswinkel des Prismas entwickelten,

$$\sin i' = \sin \alpha \sqrt{n^2 - \sin^2 i} - \cos \alpha \sin i.$$

Man erkennt unmittelbar, dass der zu einem bestimmten Austrittswinkel i' gehörige Winkel i erhalten wird, wenn wir einfach i und i' in der Gleichung vertauschen, dass also

$$\sin i = \sin \alpha \,.\, \sqrt{n^2 - \sin^2 i'} - \cos \alpha \sin i'$$

ist, eine Gleichung, die man überdies leicht erhält, wenn man die erste nach $\sin i$ auflöst. Der Einfallswinkel, für welchen das Licht das Prisma in einer solchen Richtung verlässt, dass das austretende Licht parallel der zweiten Prismenfläche sich fortpflanzt, und den wir als den Grenzeinfallswinkel des Prismas bezeichnen können, wird hieraus erhalten, wenn wir $\sin i' = 1$ setzen, er ist somit

$$\sin i = \sin \alpha \,.\, \sqrt{n^2 - 1} - \cos \alpha;$$

dieser Werth wird gleich 0, wenn $\sin \alpha = \frac{1}{n}$ gesetzt wird, es können somit, so lange α einen kleinern Werth hat als der Grenzwinkel der Substanz, alle Strahlen, welche in demselben Quadranten wie EJ Fig. 171 in das Prisma eintreten, das Prisma verlassen; lässt man aber die Strahlen in den nach der brechenden Kante zu liegenden Quadranten einfallen, so tritt totale Reflexion ein, und zwar bei einem um so näher bei 0 liegenden Einfallswinkel, je näher α dem Grenzwinkel kommt. Da wir nämlich den Einfallswinkel in der Lage wie Fig. 171 positiv setzten, müssen wir ihn in dem andern Quadranten negativ setzen; und dann zeigt die Gleichung für $\sin i$, dass es immer einen negativen Werth von i gibt, für welchen $\sin i' = 1$ wird. Setzen wir z. B. $\sin \alpha = \frac{1}{2n}$, so wird der Grenzeinfallswinkel gegeben durch

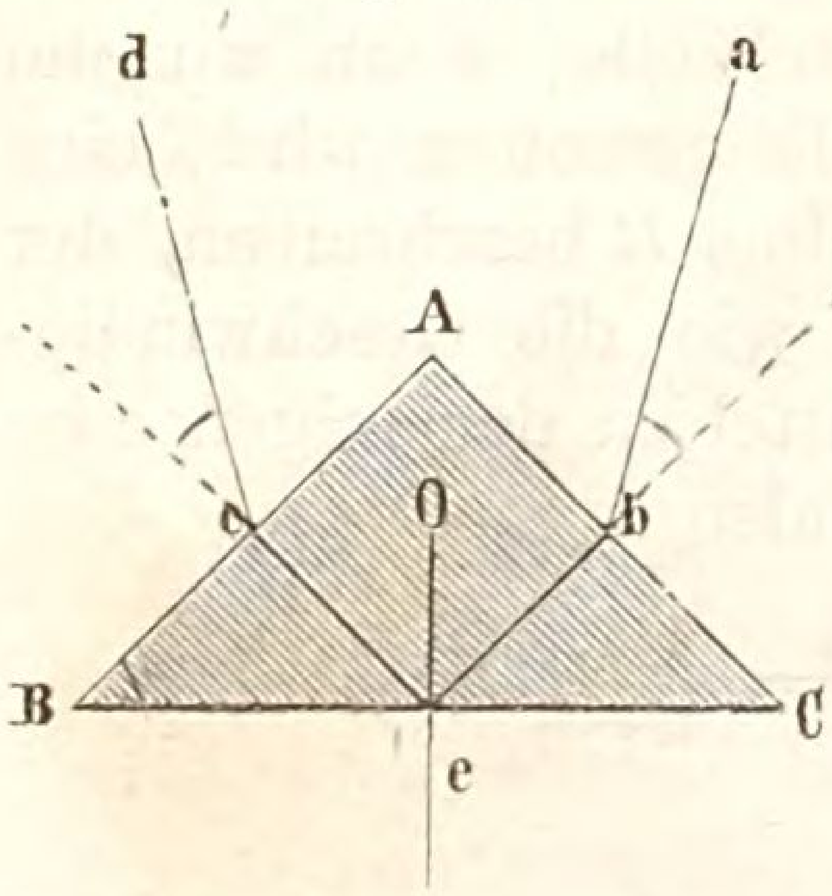
$$\sin i = - \tfrac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}.$$

Ist dagegen α grösser als der Grenzwinkel, so können auch Strahlen mit positivem Einfallswinkel das Prisma nicht verlassen; setzen wir α gleich dem doppelten Grenzwinkel, so wird der Grenzeinfallswinkel 90^0, es können gar keine in das Prisma eintretende Strahlen als gebrochene hindurchtreten, sie werden sämmtlich an der Austrittsfläche total reflectirt.

Wollaston hat die Erscheinung der totalen Reflexion benutzt, um in sehr einfacher Weise die Brechungsexponenten selbst undurchsichtiger Körper zu messen. Nimmt man ein bei A rechtwinkliges gleichschenkliges Prisma Fig. 183 und sieht auf dasselbe etwa in der Richtung ab hin, während man auf die Fläche AB das Licht des hellen Himmels fallen lässt, so gelangt immer durch partielle Reflexion Licht in das Auge, welches in einer Richtung dc auf das Prisma gefallen ist, so dass der Einfallswinkel des Strahles dc gleich ist dem Austrittswinkel des Strahles ba, dem Winkel, welcher den Winkel Aba zu 90^0 ergänzt. Wählt man Glas, dessen Brechungsexponent einen grossen Werth, etwa 1,6 hat, so ist der Grenzwinkel immer kleiner als 45^0, es gibt also eine Richtung dc, in dem gegen A liegenden

Quadranten, für welchen der Winkel $c\,e\,O$ gleich dem Grenzwinkel wird. Vergrössert man nun nach und nach den Winkel $A\,b\,a$, unter welchem man auf das Prisma herabsieht, so tritt bei einer gewissen Richtung, wenn $c\,e\,O$ gerade gleich dem Grenzwinkel wird, totale Reflexion ein und die Helligkeit des reflectirten Lichtes wird plötzlich eine sehr viel grössere, die ganze Hypotenusenfläche erscheint in silberähnlichem Glanze. Misst man nun den Winkel $A\,b\,a$, für welchen dieser Glanz eintritt, so ist der Grenzeinfallswinkel $i = 90^0 - A\,b\,a$, und unsere Gleichung für denselben

Fig. 183.



$$\sin i = \sin \alpha \sqrt{n^2 - 1} - \cos \alpha$$

gibt uns, da $\alpha = 45^0$, nach n aufgelöst den Brechungsexponenten des Lichtes bei dem Uebertritt aus Luft in die Substanz des Prismas.

Wird nun ein Theil der Hypotenusenfläche mit einem Körper in vollkommene Berührung gebracht, dessen Brechungsexponent n' kleiner ist als derjenige n des Prismas, aber grösser als derjenige der Luft, so wird der Grenzwinkel der Totalreflexion bei dem Uebergange aus dem Glase in diese Substanz ein anderer. Da wir die Brechungsexponenten n des Glases und n' der auf das Glas gebrachten Substanz als die absoluten Brechungsexponenten ansehen können, ist nach §. 133 der Brechungsexponent bei dem Uebertritt des Lichtes aus dem Glase in die betreffende Substanz und somit der Sinus des Grenzwinkels

$$\sin g = \frac{n'}{n};$$

da nun $n' > 1$, so ist derselbe grösser als bei dem Uebertritte des Lichtes aus dem Glase in Luft. Sieht man deshalb jetzt in der frühern Richtung auf das Prisma, so erscheint die Stelle, wo der Körper die Hypotenusenfläche bedeckt, nicht mehr in dem silberhellen Glanze, sondern dunkel auf hellem Grunde. Dreht man dann aber das Prisma so, dass der Einfallswinkel kleiner, eventuell negativ wird, so gibt es einen Einfallswinkel, für den diese dunklere Stelle gerade aufhört sichtbar zu sein, wo also die ganze Hypotenusenfläche wieder gleichmässig in dem Silberglanze erscheint. Misst man nun gerade wie vorher diesen Einfallswinkel i_1, so ist jetzt

$$\sin i_1 = \sin \alpha \sqrt{\left(\frac{n}{n'}\right)^2 - 1} - \cos \alpha,$$

eine Gleichung, aus der sich n' berechnen lässt.

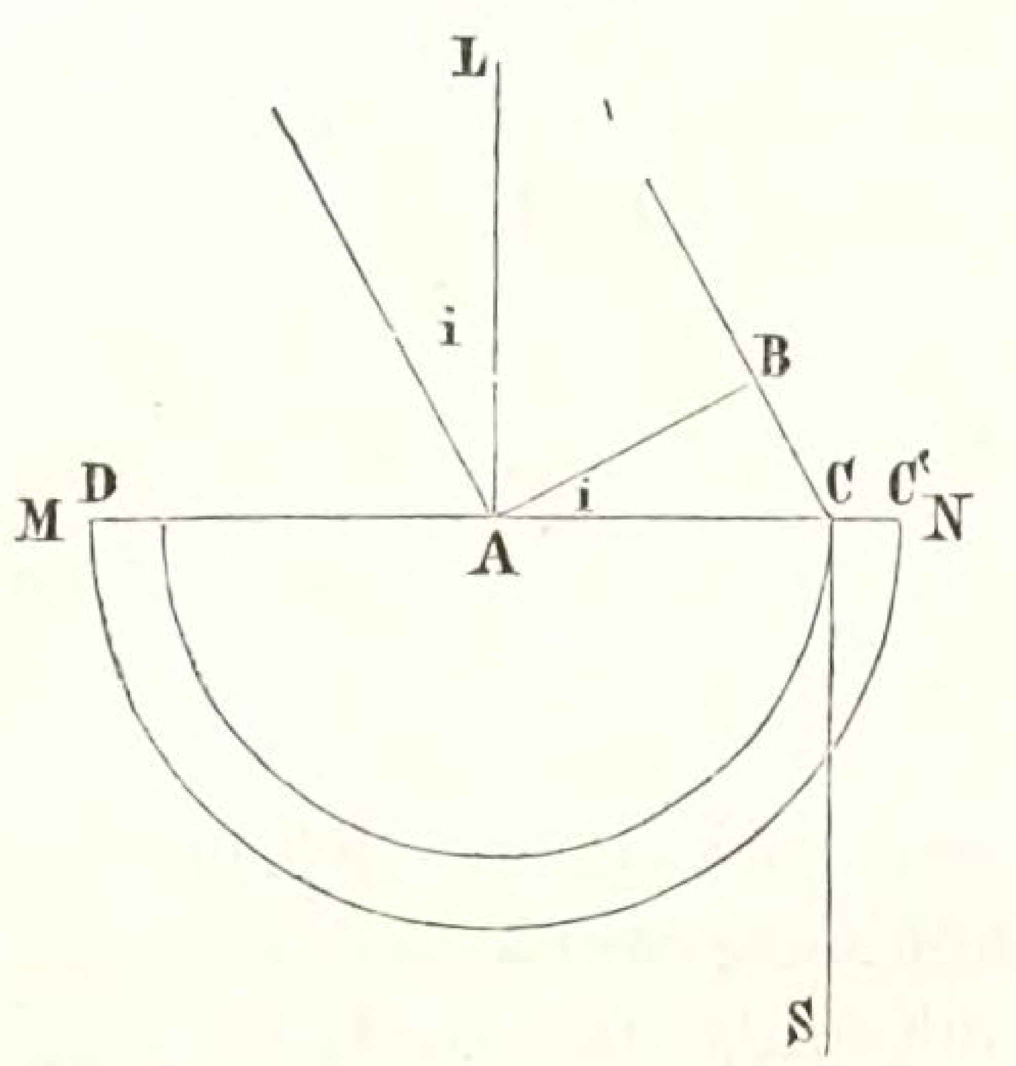
Diese Methode ist besonders für undurchsichtige Körper verwendbar, für welche sich die Brechung des Lichtes nicht direkt beobachten lässt; zu dem Zwecke ist sie auch besonders verwerthet worden. Ausserdem hat Abbe sie benutzt, um mit sehr geringen Quantitäten die Brechungsexponenten von Flüssigkeiten zu messen und zu dem Zwecke einen sehr bequemen Apparat construirt.

Die auf den ersten Blick sehr auffallende sich aus der mathematischen Form des Brechungsgesetzes ergebende Erscheinung der totalen Reflexion folgt auch aus der Huyghens'schen Construction der gebrochenen

Welle; dieselbe lässt erkennen, dass die totale Reflexion eintritt, wenn die im zweiten Mittel erregten elementaren Wellen sich nicht mehr zu einer Welle vereinigen können.

Ist AB Fig. 184 die an der Grenze zweier Medien ankommende Welle, so erhalten wir nach §. 84 die gebrochene Welle, wenn wir um den Punkt A der Grenze, der zuerst von der Welle getroffen wird, eine Kugel mit einem Radius R beschreiben, der sich zu BC verhält, wie die Geschwindigkeit c' im zweiten Mittel zu derjenigen c im ersten Mittel, es ist also

Fig. 184.



$$R = \frac{c'}{c} BC = \frac{1}{n} BC.$$

Es ist nun stets

$$AC = \frac{1}{\sin i} \cdot BC.$$

Wird nun der Winkel i gleich dem Grenzwinkel, also $\sin i = n$, so wird $R = AC$, oder die zur Construction der gebrochenen Welle um A zu legende Kugel geht durch den Punkt C, die von C aus an die Kugel zu legende Tangentialebene berührt also die Kugel im Punkte C, sie wird senkrecht zu MN, die gebrochene Welle pflanzt sich parallel der Fläche MN fort. Nehmen wir nun aber an, der Winkel i sei grösser als der Grenzwinkel, somit $\sin i > n$, so wird der Radius

$$\left(R = \frac{1}{n} BC\right) > \left(AC = \frac{1}{\sin i} BC\right).$$

Der Radius der um A zu legenden Kugel wird also grösser wie AC, etwa gleich AC', der Punkt C somit, durch den wir zur Construction der gebrochenen Welle die Tangentialebene an die Kugel legen müssen, liegt innerhalb der Kugel. Es kann somit überhaupt von C aus keine Tangentialebene an diese und somit an alle die elementaren Kugelwellen gelegt werden, die durch die ankommende Welle im zweiten Mittel erregt werden. Dieselben können deshalb zu keiner im zweiten Mittel fortschreitenden Welle Anlass geben. Wir werden im zweiten Abschnitte nachweisen, dass in Folge dessen alles Licht reflectirt werden muss.

§. 144.

Achromatische Prismen und Prismen ohne Ablenkung. Die Spectra, welche wir durch verschiedene Prismen mit gleichen brechenden Winkeln erhalten, haben eine sehr verschiedene Ausdehnung, so zwar, dass der Unterschied in der Länge der Spectra viel grösser ist als der Unterschied in der Ablenkung der Strahlen. Als Maass für die Länge der durch Prismen gleichen brechenden Winkels erzeugten Spectra können wir annähernd die Differenz zwischen den Brechungsexponenten der rothen, etwa der Linie B, und der violetten, der Linie H entsprechenden Strahlen ansehen. Denn bei Prismen gleichen brechenden Winkels wird die Ablenkung der Strahlen um so grösser, je grösser der Brechungsexponent ist, es wird deshalb auch der Unterschied der Ablenkung des rothen und

violetten Lichtes um so grösser, je grösser der Unterschied der Brechungsexponenten ist. Als Maass der Ablenkung des ganzen Spectrums können wir die Brechungsexponenten der mittlern Strahlen, etwa der Linie E ansehen.

Für die Substanzen, deren Brechungsexponenten wir im §. 141 mitgetheilt haben, erhalten wir so

Flintglas I $n_H - n_B =$	0,04889	$n^E =$ 1,78525
Flintglas II	0,04000	1,62569
Crownglas	0,02037	1,53137
Wasser	0,01302	1,33527

das von dem Flintglas II entworfene Spectrum hat also bei gleichem brechenden Winkel annähernd die doppelte Länge von dem durch Crownglas entworfenen Spectrum, während die Ablenkung der Spectra nur wenig verschieden ist.

Dadurch sind wir im Stande Prismen zu construiren, welche das Licht ablenken, ohne es in Farben zu zerlegen, achromatische Prismen und solche, welche ein Spectrum geben, welches nicht abgelenkt wird, Prismen ohne Ablenkung.

Verkleinert man nämlich den brechenden Winkel eines Prismas, so verkleinert man gleichzeitig die Ablenkung und die Länge des von ihm entworfenen Spectrums. Wir können deshalb etwa aus Flintglas No. II ein Prisma herstellen, welches ein Spectrum liefert, dessen Ausdehnung genau gleich ist derjenigen eines von Crownglas gelieferten Spectrums; die Ablenkung der einzelnen Farben dieser beiden Spectra ist dann sehr verschieden, die Differenz der Ablenkungen der einzelnen Farben ist in beiden Spectren gleich. Sei z. B. die Ablenkung des rothen Lichtes im Crownglasprisma gleich ϱ_c, die im Flintglas gleich ϱ_f, und bedeute φ_c und φ_f das Gleiche für das violette Licht, so ist $\varrho_c > \varrho_f$ und ebenso $\varphi_c > \varphi_f$, es ist aber

$$\varphi_c - \varrho_c = \varphi_f - \varrho_f.$$

Stellen wir nun hinter das Crownglasprisma das Flintglasprisma mit umgekehrter brechender Kante, so dass das Licht durch beide Prismen hindurchgehen muss, so wird das rothe Licht im ersten Prisma um ϱ_c abgelenkt und aus dieser Richtung im zweiten Prisma wieder um ϱ_f der frühern Richtung genähert, so dass die schliessliche Ablenkung noch ist

$$\delta_r = \varrho_c - \varrho_f;$$

ebenso geschieht es mit den andern Farben, die schliessliche Ablenkung des Violetten ist

$$\delta_v = \varphi_c - \varphi_f;$$

da, wie aus der Gleichung

$$\varphi_c - \varrho_c = \varphi_f - \varrho_f$$

folgt, $\varphi_c - \varphi_f = \varrho_c - \varrho_f$, so ergibt sich, dass die Ablenkung aller Strahlen die gleiche ist, somit dass alle Farben das zweite Prisma nach der gleichen Richtung verlassen. Wir erhalten also kein Spectrum, sondern nur ein abgelenktes nicht in seine Farben zerlegtes Lichtbündel.

Kennt man die Brechungsexponenten der beiden Gläser und den

brechenden Winkel des einen Prismas, so kann man leicht berechnen, welchen brechenden Winkel man dem zweiten Prisma geben muss, um eine achromatische Combination zu erhalten.

Wir haben dazu nur die Bedingung mathematisch zu formuliren, dass die rothen und violetten Strahlen die letzte Fläche des zweiten Prismas unter dem gleichen Winkel verlassen. Es sei a der brechende Winkel des ersten Prismas, n_r der Brechungsexponent der rothen, n_v der der violetten Strahlen; der Winkel, unter welchem die Strahlen das erste Prisma verlassen, ist dann gegeben durch die Gleichung

$$\sin i' = \sin a \sqrt{n^2 - \sin^2 i} - \cos a \sin i;$$

wir erhalten den Winkel i'_r der rothen Strahlen, wenn wir für n einsetzen n_r, den i'_v der violetten, wenn für n der Werth n_v eingesetzt wird.

Wir wollen nun annehmen, die erste Fläche des zweiten Prismas sei der zweiten des ersten parallel, dann sind die Winkel i'_r und i'_v gleichzeitig die Einfallswinkel der Strahlen bei dem Eintritte in das zweite Prisma. Sind nun α, ν_r, ν_v der brechende Winkel und die Brechungsexponenten der Strahlen in dem zweiten Prisma, so sind die Austrittswinkel i_{1r} und i_{1v} gegeben durch die Gleichungen

$$\sin i_{1r} = \sin \alpha \sqrt{\nu_r^2 - \sin^2 i'_r} - \cos \alpha . \sin i'_r$$

$$\sin i_{1v} = \sin \alpha \sqrt{\nu_v^2 - \sin^2 i'_v} - \cos \alpha . \sin i'_v.$$

Wir erhalten daraus α, indem wir diese Ausdrücke gleichsetzen und dann nach α auflösen. Wir erhalten dann, indem wir gleichzeitig $\sin i'_r$ und $\sin i'_v$ nach der ersten Gleichung auswerthen

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{\sin i'_v - \sin i'_r}{\sqrt{\nu_v^2 - \sin^2 i'_v} - \sqrt{\nu_r^2 - \sin^2 i'_r}} = \sin a \frac{\sqrt{n_v^2 - \sin^2 i} - \sqrt{n_r^2 - \sin^2 i}}{\sqrt{\nu_v^2 - \sin^2 i'_v} - \sqrt{\nu_r^2 - \sin^2 i'_r}},$$

wo wir im Nenner, um die Ausdrücke nicht zu complicirt zu machen, i'_r und i'_v haben stehen lassen, da man, wie man sieht, die Sinus dieser Winkel doch ausrechnen muss. Die Gleichung für α lässt erkennen, dass die so berechnete Combination den rothen und violetten Strahlen nur dann genau gleiche Ablenkung gibt, wenn sie unter dem angenommenen Einfallswinkel i in das erste Prisma eintreten, da sich mit dem Werthe von i auch der berechnete Werth von α ändert. Will man eine Prismencombination, welche für einen bestimmten Einfallswinkel berechnet ist, auch für andere Einfallswinkel ebenso achromatisch haben, so darf man die erste Fläche des zweiten Prismas nicht der zweiten des ersten parallel stellen, sondern muss die zweite gegen die erste so neigen, dass die Einfallswinkel für das zweite Prisma jenen i'_r und i'_v gleich sind, für welche α berechnet ist, was sich immer erreichen lässt. Hat man indess zur Berechnung einen solchen Einfallswinkel i zu Grunde gelegt, dass die mittlern Strahlen im ersten Prisma das Minimum der Ablenkung erhalten, so ist der Achromatismus auch dann noch ziemlich vollkommen, wenn der Winkel i etwas davon verschieden gewählt wird.

Eine vollkommen achromatische Combination ist indess auch für den bestimmten Einfallswinkel i durch diese zwei Prismen nicht erreicht, das würde nur dann der Fall sein, wenn die durch die zwei Prismen ent-

worfenen Spectra, deren Länge in Folge der Bedingung, dass die Differenz der Ablenkungen von roth und violett in beiden dieselbe sein soll, die gleiche ist, auch im Uebrigen identisch gleich wären, das heisst, wenn die relative Lage auch aller übrigen Farben genau dieselbe wäre. Das ist nicht der Fall, die Ausdehnung der einzelnen Farben, oder ihr Abstand vom Rothen ist nicht der Länge des ganzen Spectrums resp. dem Abstande des Violetten vom Rothen proportional. Vergleichen wir z. B. die Abstände der Linie F von B und H von B in Crownglas und Flintglas, so finden wir für

$$\text{Crownglas } \frac{n_F - n_B}{n_H - n_B} = \frac{0{,}010025}{0{,}02037} \qquad \text{Flintglas } \frac{n_F - n_B}{n_H - n_B} = \frac{0{,}01880}{0{,}04000},$$

im Crownglas ist demnach der Abstand des Grünen vom Rothen 0,497, im Flintglas nur 0,47 der Länge des ganzen Spectrums, oder im Crownglase wird das Grüne relativ stärker abgelenkt als im Flintglase. Daraus folgt also, dass wenn unsere Combination die rothen und violetten Strahlen genau parallel macht, die grünen Strahlen noch nicht zum Parallelismus gebracht werden; wir erhalten daher noch eine schwache Dispersion und zwar, da in dem parallel gemachten Strahlenbündel das etwas stärker abgelenkte Grün fehlt, ein schmales Spectrum, das an der Seite der kleinern Ablenkung purpurfarben, an der andern Seite grün ist.

Diese geringen Farbenzerstreuungen lassen sich nur durch mehr als zwei Prismen vermeiden, deren Berechnung nach demselben Princip erfolgt, das wir für zwei Prismen anwandten.

Die Construction der Prismen ohne Ablenkung ist noch leichter zu übersehen. Dieselben werden so gewählt, dass einer der Strahlen des Spectrums gar nicht abgelenkt wird, also etwa die mittlern der Linie E entsprechenden Strahlen. Da dann in dem zweiten Prisma die rothen Strahlen der Einfallsrichtung nicht so stark genähert werden als die grünen, die violetten aber über die Einfallsrichtung hinaus abgelenkt werden, so erhalten wir ein Spectrum, dessen Farbenfolge die umgekehrte ist, als diejenige, welche das Spectrum des aus dem ersten Prisma austretenden Lichtes zeigen würde. Die Berechnung einer solchen Combination gründet sich auf die Formulirung der Bedingung, dass die Ablenkung δ für einen bestimmten Strahl gleich Null wird. Da nun, wenn i der Einfallswinkel, i_1 der Austrittswinkel, a der brechende Winkel des ersten, α derjenige des zweiten umgekehrt liegenden Prismas ist, die Ablenkung gegeben ist durch

$$\delta = i - i_1 - (a - \alpha),$$

wie sich leicht durch eine der im §. 135 angewandten ähnliche Betrachtung ergibt, so ergibt sich α aus der Bedingung

$$i - i_1 - (a - \alpha) = 0;$$

die Ausrechnung ist nicht schwierig, aber ziemlich weitläufig.

Da derartige Prismen die Spectra in der Richtung des einfallenden Lichtes entwerfen, sind sie zu manchen Spectralbeobachtungen, besonders zu astronomischen sehr bequem, sie werden deshalb in neuerer Zeit vielfach construirt. Durch Anwendung von mehr als zwei Prismen, man wendet meist fünf an, kann man auch eine ebenso starke, ja selbst stär-

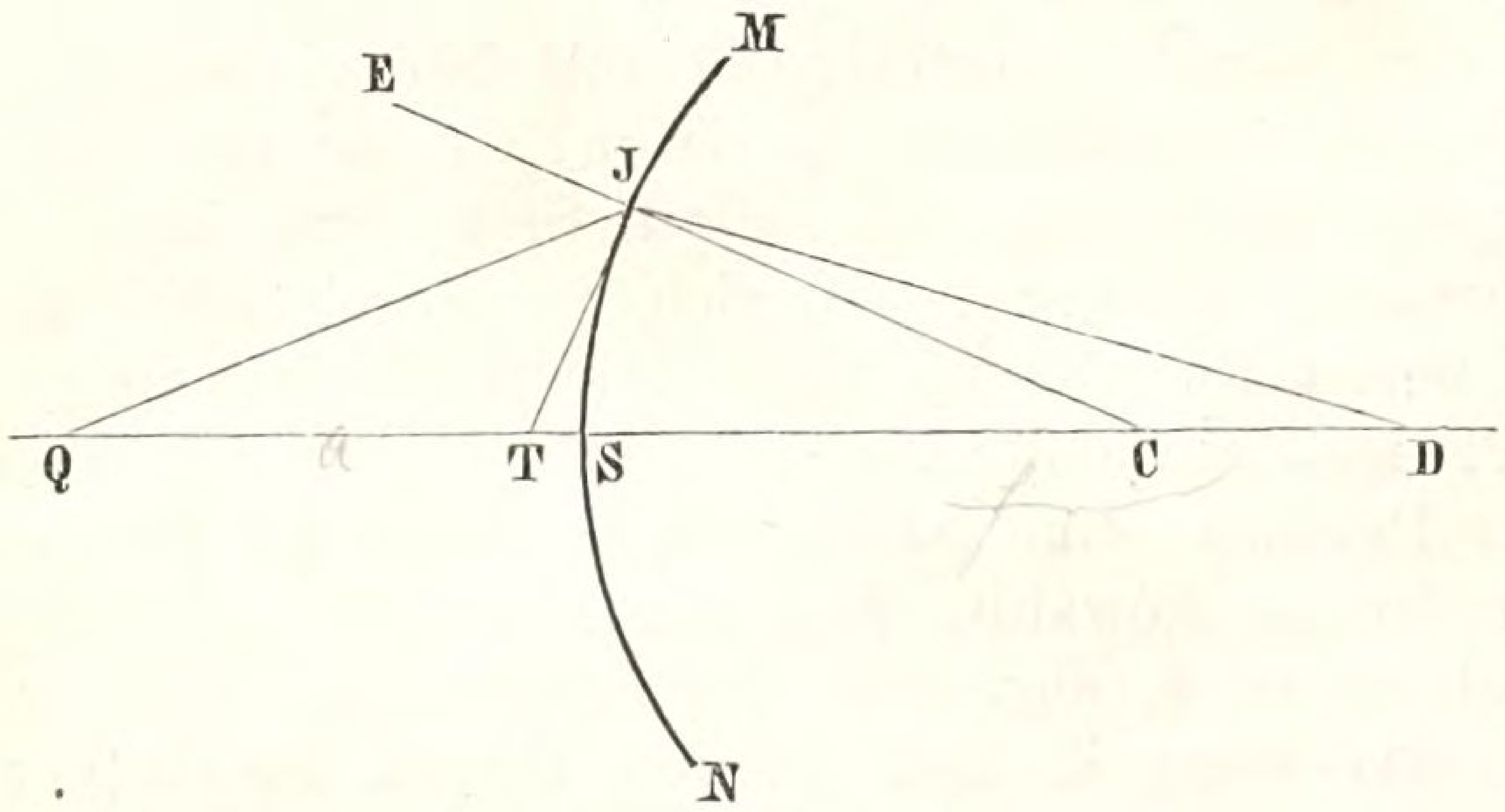
kere Dispersion erhalten als durch ein einzelnes Prisma. Prismen von ausgezeichneter Dispersion dieser Art verfertigt z. B. Schröder in Hamburg.

§. 145.

Brechung des Lichtes in kugelförmigen Flächen. Wie das Reflexionsgesetz, so gilt auch das Brechungsgesetz für krumme Flächen, weil die krumme Fläche an jeder Stelle für ein unendlich kleines Stück mit der dort angelegten Tangentialebene zusammenfällt. Wir haben daher nur in jedem Punkte der Fläche die Normale derselben als Einfallsloth zu betrachten, und auf diese die Einfallsebene, Einfalls- und Brechungswinkel zu beziehen.

Bei der Betrachtung der Brechung in krummen Flächen beschränken wir uns wieder auf kugelförmige Flächen, da diese fast ausschliesslich zur Verwendung kommen. Bei solchen Flächen sind die Radien die Einfallslothe. Wir bestimmen auch hier wieder die Richtung des gebrochenen Strahles, indem wir ausser dem Punkt J, in welchem er die brechende Fläche Fig. 185 trifft, den Punkt D aufsuchen, in welchem der Strahl nach der Brechung die Verbindungslinie des leuchtenden Punktes Q mit dem Mittelpunkte C der brechenden Fläche schneidet. Der Brechungsexponent des zunächst als homogen betrachteten Lichtes bei dem Uebertritt aus dem ersten Mittel in das zweite sei n.

Fig. 185.



Nach dem Brechungsgesetz ist dann

$$n = \frac{\sin QJE}{\sin DJC} = \frac{\sin QJC}{\sin DJC} = \frac{\sin QJC}{\sin JCQ} \cdot \frac{\sin JCD}{\sin DJC}.$$

Nach bekannten trigonometrischen Sätzen ist

$$\frac{\sin QJC}{\sin JCQ} = \frac{QC}{QJ}, \quad \frac{\sin JCD}{\sin DJC} = \frac{DJ}{DC}$$

und damit wird

$$n = \frac{QC}{QJ} \cdot \frac{DJ}{DC}.$$

Beschränken wir uns auf solche Strahlen, welche sehr nahe bei S auf die brechende Fläche fallen, so dass wir $DJ = DS$, $QJ = QS$ setzen dürfen, so wird

$$\frac{QC}{CD} = n \frac{QS}{SD}.$$

Es ergibt sich somit zunächst, dass alle von einem leuchtenden Punkte ausgehenden Strahlen sich nach der Brechung wieder in einem Punkte schneiden, dessen Abstand CD vom Mittelpunkte oder SD vom Scheitel der brechenden Fläche abhängt vom Abstande des leuchtenden Punktes

von der Fläche, dem Radius der Fläche und dem Brechungsexponenten des Mittels. Man bezeichnet deshalb den Punkt D als den Brennpunkt des Punktes Q und nennt allgemein zwei Punkte, die als leuchtender Punkt und Brennpunkt zusammengehören, conjugirte Punkte.

Bezeichnen wir nun ein für allemal den Abstand des leuchtenden Punktes Q vom Scheitel der brechenden Fläche mit a und zwar positiv, wenn der leuchtende Punkt im Sinne der Fortpflanzung des Lichtes vor der brechenden Fläche liegt, den Abstand des Brennpunktes, also hier DS von demselben Scheitel mit f, positiv, wenn derselbe hinter der brechenden Fläche liegt, wenn also die brechende Fläche zwischen dem leuchtenden Punkte und dem Brennpunkte liegt, schliesslich den Radius der brechenden Fläche mit r, so können wir obige Gleichung schreiben

$$\frac{a+r}{f-r} = n\frac{a}{f}$$

oder

$$f = \frac{n\,a\,r}{(n-1)\,a-r}.$$

Wir haben bei dieser Ableitung vorausgesetzt, dass Q der leuchtende Punkt vor der convexen Seite der brechenden Fläche sich befindet, wir können sie aber direkt benutzen, um die Lage des Brennpunktes zu erhalten, wenn derselbe vor der concaven Seite liegt. Ist D der leuchtende Punkt, Q sein Brennpunkt, so tritt, wenn wir jetzt den Brechungsexponenten des Lichtes bei dem Uebertritt des Lichtes aus dem Mittel rechts von MN in dasjenige links, mit n bezeichnen, in der ersten Gleichung an die Stelle von n dessen reciproker Werth, denn es ist dann

$$n = \frac{\sin CJD}{\sin QJE}.$$

Wir haben somit in obigen Gleichungen nur überall n durch seinen reciproken Werth zu ersetzen und erhalten

$$n\frac{QC}{CD} = \frac{QS}{SD};\quad n\frac{f+r}{a-r} = \frac{f}{a},$$

denn da wir den Abstand des leuchtenden Punktes vom Scheitel mit a bezeichnen, ist jetzt $DS = a$, und da der Abstand des Brennpunktes vom Scheitel f ist, so ist $QS = f$. Damit wird dann

$$f = \frac{-\,n\,a\,r}{(n-1)\,a+r},$$

ein Ausdruck, der sich von dem vorigen nur dadurch unterscheidet, dass die r enthaltenden Glieder das negative Vorzeichen haben. Wir können daher die Gleichung für f

$$f = \frac{n\,a\,r}{(n-1)\,a-r}$$

als die in allen Fällen gültige betrachten, indem wir das Vorzeichen von r unbestimmt lassen, und beachten, dass dasselbe positiv zu setzen ist, wenn das Licht auf die convexe, negativ, wenn es auf die concave Seite der brechenden Fläche einfällt. Das Gleiche gilt dann für alle aus diesem abgeleiteten Ausdrücke.

Dem Ausdrucke für f können wir manche andere häufig bequemere Form geben. Zunächst wird

$$\frac{1}{f} = \frac{n-1}{nr} - \frac{1}{na}.$$

Nennen wir den Abstand des Brennpunktes vom Scheitel, in dem sich die Strahlen eines der Axe parallelen Strahlenbündels nach der Brechung schneiden F, so erhalten wir denselben, indem wir in obiger Gleichung $a = \infty$ setzen,

$$\frac{1}{F} = \frac{n-1}{nr}; \qquad F = \frac{nr}{n-1}.$$

Man nennt diesen Punkt den zweiten Hauptbrennpunkt der brechenden Fläche, weil er im zweiten Mittel liegt, und bezeichnet F als die zweite Hauptbrennweite. Als ersten Hauptbrennpunkt bezeichnet man den Punkt vor der brechenden Fläche, von welchem die Strahlen ausgehen müssen, welche nach der Brechung parallel werden, deren Brennpunkt also unendlich weit vom Scheitel entfernt ist, für welchen also f unendlich wird. Den Abstand A dieses Punktes vom Scheitel nennt man die erste Hauptbrennweite. Dieselbe ergibt sich aus der Gleichung

$$0 = \frac{n-1}{nr} - \frac{1}{nA}; \qquad \frac{1}{A} = \frac{n-1}{r} = \frac{n}{F}; \qquad A = \frac{F}{n}.$$

Führen wir diese Hauptbrennweiten in die Gleichung für f ein, so können wir dieselbe schreiben

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{F} - \frac{1}{na}; \qquad \frac{n}{f} + \frac{1}{a} = \frac{1}{A}$$

$$\frac{nA}{f} + \frac{A}{a} = 1 = \frac{F}{f} + \frac{A}{a}$$

oder schliesslich

$$f = \frac{aF}{a-A}.$$

Ganz ebenso einfache Gleichungen für die Lage des Brennpunktes erhalten wir, wenn wir die Abstände des leuchtenden Punktes und seines Brennpunktes anstatt vom Scheitel von irgend zwei conjugirten Punkten, den Abstand des leuchtenden Punktes von dem im ersten Mittel liegenden, dem ersten der conjugirten Punkte, und den Abstand des Brennpunktes von dem zweiten der conjugirten Punkte, dem im zweiten Mittel liegenden rechnen. Für irgend zwei Punkte in den Abständen a und a_1 vom Scheitel haben wir für die Lage der Brennpunkte

$$\frac{F}{f} + \frac{A}{a} = 1; \qquad \frac{F}{f_1} + \frac{A}{a_1} = 1.$$

Wir können dann setzen

$$a = a_1 + c \qquad f = f_1 + h,$$

wobei nur zu beachten ist, dass wir c und h positiv setzen müssen, wenn a grösser als a_1 und f grösser als f_1 ist, dagegen negativ nehmen müssen, wenn die durch a_1 und f_1 gegebenen Punkte weiter vom Scheitel entfernt sind. Setzen wir das in die erste Gleichung ein, so wird

$$F(a_1 + c) + A(f_1 + h) = (f_1 + h)(a_1 + c).$$

Ziehen wir von dieser Gleichung ab die Gleichung

$$F a_1 + A f_1 = f_1 \, a_1,$$

so wird

$$\frac{F - f_1}{h} + \frac{A - a_1}{c} = 1.$$

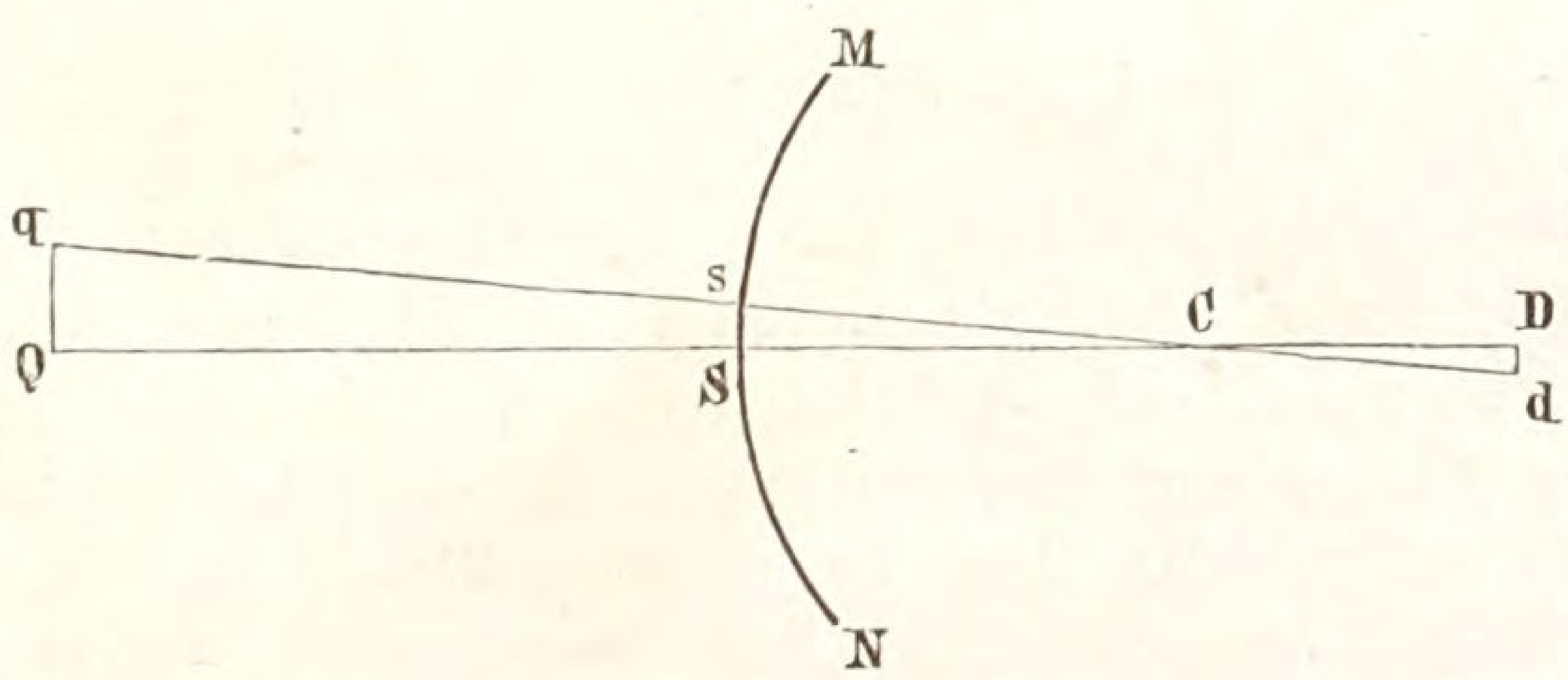
Nennen wir nun den Abstand des ersten Hauptbrennpunktes von dem ersten der conjugirten Punkte a_1 jetzt C, so ist $A - a_1 = C$, während $F - f_1 = H$ der Abstand des zweiten Hauptbrennpunktes von dem zweiten der conjugirten Punkte ist. Mit dieser Bezeichnung wird unsere Gleichung

$$\frac{H}{h} + \frac{C}{c} = 1,$$

also dieselbe Beziehung, die wir erhalten, wenn wir die Abstände vom Scheitel rechnen. Strenge genommen rechnen wir auch dann die Abstände von zwei conjugirten Punkten, denn der Scheitel der brechenden Fläche ist sich selbst conjugirt, was sich unmittelbar daraus ergibt, dass wenn $a = 0$ wird, auch $f = 0$ ist.

Liegt der Punkt Q so, dass seine Verbindungslinie QC Fig. 186 mit dem Mittelpunkte der Kugel gleichzeitig die Mitte S der brechenden Fläche trifft, so nennt man die Axe QC die Hauptaxe oder kurzweg Axe der brechenden Fläche. Ein Punkt q, der neben Q liegt, so dass qQ senkrecht zu QC ist, hat seinen Brennpunkt nicht auf der Axe der brechenden Fläche, sondern auf der zu q gehörigen Nebenaxe qC in d. Für den Abstand sd dieses Punktes vom Scheitel erhalten wir nach den vorhin abgeleiteten Sätzen

Fig. 186.



$$\frac{A}{qs} + \frac{F}{sd} = 1,$$

worin A und F ganz genau dieselben Werthe haben wie vorhin. Dividiren wir diese Gleichung durch den Cosinus des Winkels $qCQ = \alpha$, so wird

$$\frac{A}{qs \, . \cos \alpha} + \frac{F}{sd \, . \cos \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha}.$$

Da wir die Oeffnung unserer brechenden Fläche als sehr klein gesetzt haben, so können wir, da das Kreiselement senkrecht zu dem zu ihm gehörigen Radius ist, Ss als senkrecht zu Qc betrachten; ziehen wir dann ferner qQ und dD senkrecht zu QC, so ist

$$qs \cos \alpha = QS \cdot \qquad sd \, . \cos \alpha = SD.$$

Da α sehr klein ist, können wir ferner auf der rechten Seite der Gleichung $\cos \alpha = 1$ setzen, und erhalten dann

$$\frac{A}{QS} + \frac{F}{SD} = 1,$$

die Werthe von QS und SD stehen also in derselben Beziehung zu einander, wie die Abstände eines leuchtenden Punktes zu dem seines Brennpunktes, oder D ist der Brennpunkt von Q. Es folgt somit, wenn wir von einem auf einer Nebenaxe liegenden leuchtenden Punkte eine Senkrechte zur Hauptaxe ziehen, dass dann der Brennpunkt D des Punktes Q, wo die Hauptaxe von jener Senkrechten getroffen wird, die Projection des auf der Nebenaxe liegenden Brennpunktes d auf die Hauptaxe ist; oder wie wir den Satz kurz aussprechen können, der Brennpunkt des Fusspunktes Q von q ist der Fusspunkt D des auf der Nebenaxe liegenden Brennpunktes d.

Daraus folgt unmittelbar, dass wenn Qq eine zur Axe senkrechte Linie ist, jeder Punkt derselben seinen Brennpunkt auf der Linie Dd hat, oder die Linie Dd ist das Bild der Linie Qq. Jede zur Hauptaxe senkrechte Linie hat also als Bild eine zur Hauptaxe senkrechte Linie, welche die Hauptaxe in dem Brennpunkte desjenigen Punktes schneidet, der der Brennpunkt des Punktes ist, in welchem die leuchtende Linie die Hauptaxe schneidet. Daraus folgt dann weiter, dass eine zur Hauptaxe senkrechte Ebene ebenfalls als Bild eine zur Hauptaxe senkrechte Ebene hat, deren Lage durch denselben Satz gegeben ist. Ist a der Abstand des auf der Axe liegenden Punktes vom Scheitel, so ist derjenige des Bildes f vom Scheitel gegeben durch

$$\frac{F}{f} + \frac{A}{a} = 1 \quad . \; . \; . \quad \text{(I)}$$

Die Grösse der Bilder ist dadurch gegeben, dass alle Dimensionen des Bildes zu den Dimensionen der Ebene, als deren Bild die betreffende Dimension des Bildes anzusehen ist, sich verhalten, wie die Abstände des Bildes und der leuchtenden Ebene von dem Mittelpunkte, da alle Nebenaxen sich im Mittelpunkte schneiden. Da dieses Verhältniss für alle Dimensionen dasselbe ist, folgt, dass das Bild dem Gegenstande ähnlich ist. Ein Kreis gibt als Bild einen Kreis, eine Ellipse als solches eine Ellipse u. s. f. Für die Bestimmung des Grössenverhältnisses haben wir

$$Dd : Qq = CD : CQ. \qquad Dd = \frac{f - r}{a + r} \cdot Qq.$$

Dabei ist indess zu beachten, dass wenn $f > r$ ist, also das Bild hinter dem Mittelpunkte liegt, das Bild ein umgekehrtes ist, ein oberhalb der Axe liegender leuchtender Punkt hat sein Bild unterhalb der Axe, weil alle Axen sich im Mittelpunkte schneiden. Um das in unserer Gleichung auszudrücken, müssen wir Dd das entgegengesetzte Vorzeichen von Qq geben, also schreiben

$$-Dd = \frac{f - r}{a + r} Qq \text{ oder } Dd = -\frac{f - r}{a + r} Qq,$$

ein Ausdruck, dem wir leicht die Formen geben können

$$\left.\begin{aligned} Dd &= -\frac{A}{a - A} \cdot Qq = -\frac{f - F}{f} Qq \\ Dd &= -\frac{r}{(n-1)\,a - r} Qq = -\frac{f}{n\,a} Qq \end{aligned}\right\} \text{(II.)}$$

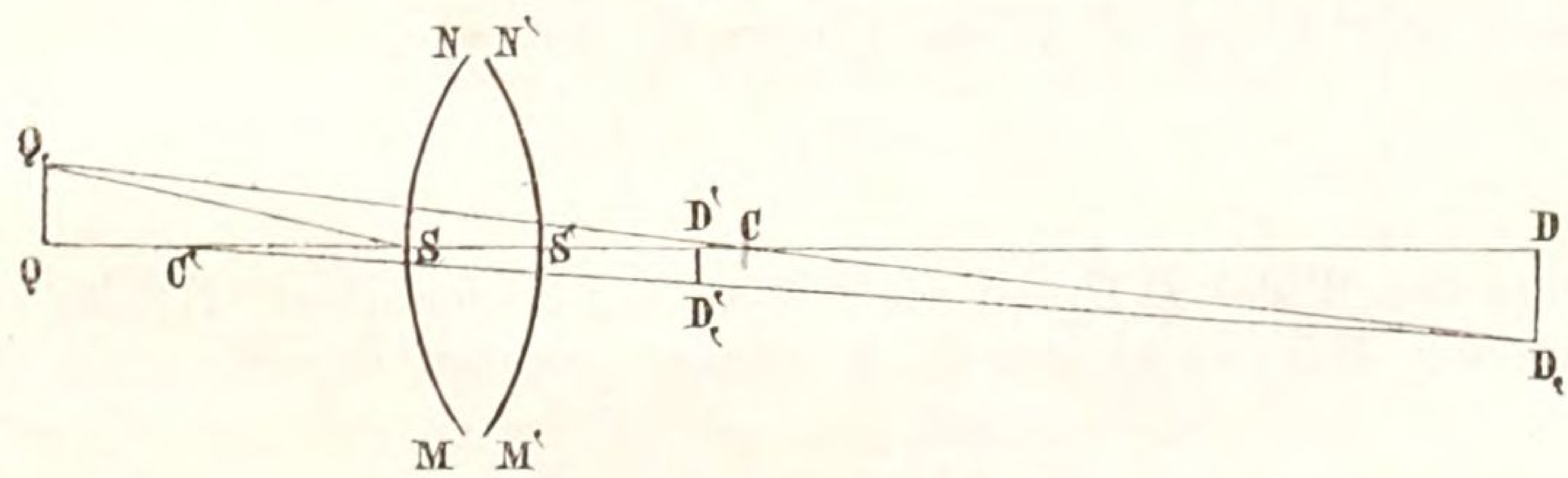
Die Gleichung (I) gibt uns die Lage, jede der Gleichungen (II) die Grösse

des Bildes, so dass durch diese beiden Gleichungen das Bild vollkommen bestimmt ist. Einer Untersuchung der Lage der Bilder im Einzelnen bedarf es nicht, man erhält dieselbe unmittelbar, indem man die betreffenden Werthe von a einsetzt, und erkennt, dass die Bilder ebenso wie bei den Spiegeln reelle und virtuelle sein können; convexe brechende Flächen geben im Allgemeinen reelle, concave im Allgemeinen virtuelle Bilder.

§. 146.

Brechung in einem System zweier centrirter Kugelflächen. In der Praxis werden einzelne brechende Flächen höchst selten benutzt, fast stets zwei oder mehrere brechende Flächen, die zu sogenannten Linsen combinirt sind, bei welchen die Kugelflächen centrirt, das heisst so gelegt sind, dass die Verbindungslinie der Krümmungsmittelpunkte in einer geraden Linie liegen, welche für jede brechende Fläche die Hauptaxe ist. Wir betrachten zunächst ein centrirtes System von zwei Flächen und suchen die Lage und Grösse der von einem solchen entworfenen Bilder auf. Dass ein solches System Bilder entwirft, ergibt sich schon aus den Entwicklungen des vorigen §. Die von einem leuchtenden Punkte aus auf die erste brechende Fläche fallenden Strahlen pflanzen sich nach der ersten Brechung so fort, dass sie, wenn sie in dem zweiten Mittel blieben, sich in einem Punkte vereinigen. Dieser Punkt ist dann der leuchtende Punkt für die zweite brechende Fläche; ob der Punkt ein reeller oder virtueller ist, das heisst, ob die Strahlen sich in einem Punkte schneiden, ehe sie die zweite Fläche treffen oder nicht, ist dabei gleichgültig, indem die Bilder ebenso gut von virtuellen leuchtenden Punkten entworfen werden als von reellen. Durch diese Bemerkung ist der Gang der Untersuchung gegeben. Wir suchen die Lage und Grösse des von der ersten brechenden Fläche entworfenen Bildes auf und bestimmen dann das Bild, das die zweite brechende Fläche von diesem Bilde entwirft. Ist also $D D_1$ Fig. 187 das Bild, welches die erste brechende Fläche von $Q Q_1$ entwerfen

Fig. 187.



würde, wenn das Licht ganz in dem zweiten Mittel bliebe, so ist $D D_1$ das leuchtende Object für die zweite brechende Fläche, welche dann von diesem das Bild $D' D'_1$ entwirft. Die Lage und Grösse dieses Bildes haben wir zu bestimmen. Wir nennen den Brechungsexponent des Lichtes bei der Brechung in MN, der ersten brechenden Fläche n, denjenigen bei dem Uebertritt aus dem zweiten Mittel durch $M'N'$ in das dritte Mittel ν; der Radius der ersten brechenden Fläche sei r, der der zweiten ϱ. Sei ferner die erste Hauptbrennweite der ersten brechenden Fläche, das heisst der Punkt, von dem Strahlen ausgehen müssen, damit sie nach der ersten

Brechung parallel werden, A_1, die zweite Hauptbrennweite der ersten brechenden Fläche, also der Abstand des Punktes vom Scheitel S, nach welchem die Strahlen convergiren, welche als parallele die erste brechende Fläche treffen, F_1; sei die erste Hauptbrennweite der zweiten brechenden Fläche, also der Abstand, von welchem die Strahlen herkommen müssten, wenn vor $M'N'$ überall das zweite Mittel wäre, damit sie nach der Brechung parallel werden, gleich A_2 und die zweite Hauptbrennweite der zweiten Fläche, also der Abstand des Punktes von S', nach welchem die Strahlen convergiren, die als parallele die zweite brechende Fläche treffen, gleich F_2. Die vier Brennweiten sind nach dem vorigen §. gegeben durch die Gleichungen

$$A_1 = \frac{r}{n-1} \qquad F_1 = \frac{n\,r}{n-1} \qquad A_2 = \frac{\varrho}{\nu - 1} \qquad F_2 = \frac{\nu\,\varrho}{\nu - 1}.$$

Schliesslich sei der Abstand der Scheitel der beiden brechenden Flächen gleich d.

Für den Abstand $SD = f_1$ des von der ersten brechenden Fläche entworfenen Bildes DD_1 vom Scheitel S erhalten wir nach dem vorigen §., wenn wir $QS = a_1$ setzen,

$$D'S' = f_1 = \frac{a_1\,F_1}{a_1 - A_2}.$$

Nennen wir den Abstand DS' dieses Bildes vom Scheitel der zweiten brechenden Fläche a_2, so wird der Abstand des Bildes, welches die zweite brechende Fläche von diesem Bilde entwirft,

$$D'S' = f_2 = \frac{a_2\,F_2}{a_2 - A_2}.$$

Darin ist

$$a_2 = d - f_1 = d - \frac{a_1\,F_1}{a_1 - A_1},$$

denn a_2 ist positiv, wenn das erste Bild vor S' liegt, also $d > f_1$ ist, dagegen negativ, wenn wie in der Zeichnung D hinter S' liegt. Setzen wir diesen Werth von a_2 in die Gleichung für f_2 ein, so wird

$$f_2 = \frac{a_1\,F_2\,(d - F_1) - d\,A_1\,F_2}{a_1\,(d - F_1 - A_2) - A_1\,d + A_1\,A_2} \cdots \text{(A)}$$

Die Grösse des Bildes DD_1 ist nach einer der Gleichungen (II) des vorigen §., wenn wir $DD_1 = y_1$, $Qq = Y$ setzen, gegeben durch

$$y_1 = -\frac{A_1}{a_1 - A_1} \cdot Y.$$

Nennen wir die Grösse des Bildes $D'D_1' = y_2$, so ist das Verhältniss derselben zu y_1, da es das von der Fläche (II) entworfene Bild von DD_1 ist, gegeben durch

$$y_2 = -\frac{A_2}{a_2 - A_2} \cdot y_1.$$

Bezogen auf die Grösse der Linie Qq wird es demnach

$$y_2 = \frac{A_1}{a_1 - A_1} \cdot \frac{A_2}{a_2 - A_2} \cdot Y.$$

Ersetzen wir auch hierin a_2 durch seinen Werth in d_1, A_1 und a_1, so wird

$$y_2 = \frac{A_1\, A_2}{a_1\,(d - F_1 - A_2) - A_1\, d + A_1\, A_2}\, Y \ldots . (B).$$

Die Gleichungen für die Lage und Grösse des Bildes vereinfachen sich auch hier bedeutend, wenn wir die Entfernungen von Gegenstand und Bild von zwei conjugirten Punkten rechnen, also von zwei Punkten auf der Hauptaxe, die so liegen, dass der zweite das Bild ist, welches das System von dem ersten entwirft. So sind der erste Hauptbrennpunkt der ersten und der zweite Hauptbrennpunkt der zweiten brechenden Fläche conjugirte Punkte, denn da die von dem erstern dieser Punkte ausgehenden Strahlen nach der ersten Brechung parallel werden, müssen sie nach der zweiten Brechung gegen den zweiten Hauptbrennpunkt der zweiten Fläche convergiren. Obwohl es zur Vereinfachung der Gleichungen einerlei ist, von welchem Paare conjugirter Punkte wir die Abstände rechnen, wollen wir sie doch gleich von dem von Gauss in die Dioptrik eingeführten Paare der Hauptpunkte aus rechnen, da dieselben, resp. die senkrecht zur Hauptaxe durch die Hauptpunkte gelegten Hauptebenen zur Construction der Bilder sehr bequem sind. Die Lage der Hauptpunkte ist dadurch definirt, dass ein in der ersten Hauptebene liegender Punkt sein Bild in der zweiten Hauptebene hat und zwar an derselben Seite der Hauptaxe und in der gleichen Entfernung von derselben, in welcher sich der in der ersten Hauptebene gegebene Punkt befindet. Der Abstand h_1 des ersten Hauptpunktes vom Scheitel ist somit, wenn wir den Abstand des in der ersten Hauptebene gegebenen Punktes von der Axe mit Y, den Abstand seines Bildes von der Axe mit y bezeichnen, gegeben durch die Bedingung $y = Y$ oder nach Gleichung (B),

$$1 = \frac{A_1\, A_2}{h_1\,(d - F_1 - A_2) - A_1\, d + A_1\, A_2}$$

$$h_1 = \frac{A_1\, d}{d - F_1 - A_2}.$$

Mit diesem Werthe von h_1 erhalten wir dann den Abstand des zweiten Hauptpunktes vom zweiten Scheitel aus der Gleichung (A), indem wir für h_1 diesen Werth einsetzen, es wird dann

$$h_2 = \frac{F_2\, d}{d - F_1 - A_2},$$

die Abstände der beiden Hauptpunkte verhalten sich somit wie die erste Hauptbrennweite der ersten Fläche zur zweiten der zweiten brechenden Fläche.

Um nun die Abstände des leuchtenden Gegenstandes von dem ersten Hauptpunkte zu rechnen, haben wir in unsern Gleichungen, wenn a der Abstand des Gegenstandes von dem ersten Hauptpunkte ist, zu setzen

$$a_1 = a + h_1 = a + \frac{A_1\, d}{d - F_1 - A_2},$$

denn die Summe der Abstände des ersten Hauptpunktes vom Scheitel und des Gegenstandes vom ersten Hauptpunkte ist gleich dem Abstande des Gegenstandes vom Scheitel. Anstatt des Abstandes f_2 des Bildes vom Scheitel berechnen wir dann den Abstand f vom zweiten Hauptpunkte, also

$$f = f_2 - h_2 = f_2 - \frac{F_2\, d}{d - F_1 - A_2}.$$

Setzen wir diese Werthe für a_1 und h_2 in die Gleichung (A), so erhält man unmittelbar

$$f = \frac{a \,.\, F_1\, F_2}{a(F_1 + A_2 - d) - A_1\, A_2} \quad \ldots\ldots \quad (\mathrm{I}),$$

und die Gleichung (B) wird

$$y_2 = - \frac{A_1\, A_2}{a(F_1 + A_2 - d) - A_1\, A_2}\, Y \quad \ldots\ldots \quad (\mathrm{II}).$$

Führen wir in diese Gleichungen die Hauptbrennweiten des Systems ein, so nehmen die Gleichungen dieselbe Form an, die wir auch für eine brechende Fläche erhielten. Als erste Hauptbrennweite definiren wir den Abstand des leuchtenden Punktes von dem ersten Hauptpunkte, von welchem die Strahlen ausgehen, welche nach sämmtlichen Brechungen im dritten Mittel als parallele weiter gehen, als zweite Hauptbrennweite den Abstand des Punktes vom zweiten Hauptpunkte, in welchem sich nach dem Durchtritt durch beide brechenden Flächen die Strahlen schneiden, welche vor der ersten Brechung parallel waren. Der Abstand A des ersten Punktes wird also aus der Gleichung (I) erhalten, indem wir $f = \infty$ setzen, der Abstand F des zweiten Punktes, indem wir $a = \infty$ setzen. Wir schreiben dazu (I)

$$\frac{1}{f} = \frac{F_1 + A_2 - d}{F_1\, F_2} - \frac{A_1\, A_2}{a \,.\, F_1\, F_2},$$

und erhalten dann

$$\frac{1}{F} = \frac{F_1 + A_2 - d}{F_1\, F_2}; \qquad \frac{1}{A} = \frac{F_1 + A_2 - d}{A_1\, A_2}; \qquad A = F\,\frac{A_1\, A_2}{F_1\, F_2}.$$

Da nun nach dem vorigen §.

$$F_1 = n\, A_1, \qquad F_2 = \nu \,.\, A_2,$$

so wird

$$\frac{A_1\, A_2}{F_1\, F_2} = \frac{1}{n\,\nu}; \qquad A = \frac{F}{n\,\nu},$$

und damit

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{F} - \frac{1}{n\,\nu\, a}; \qquad \frac{F}{f} + \frac{A}{a} = 1; \qquad f = \frac{a\, F}{a - A}.$$

Wie man sieht, sind die Gleichungen identisch gleich den im vorigen §. erhaltenen, auch die erste dieser drei Formen, denn das Product $n \,.\, \nu$ ist nach §. 134 der Brechungsexponent des Lichtes, wenn dasselbe direkt aus dem ersten Mittel in das dritte übergehen würde. Auch für y_2 erhalten wir dieselbe Gleichung, denn es ist

$$y_2 = - \frac{f}{n\,\nu\, a} \cdot Y = - \frac{A}{a - A} \cdot Y.$$

Um unsere Gleichungen durch die Dimensionen und Brechungsexponenten unseres Systems auszudrücken, haben wir nur die Brennweiten und Abstände der Hauptpunkte vom Scheitel der brechenden Flächen auszudrücken. Diese werden dann

$$h_1 = \frac{\frac{r}{n-1}\,d}{d - \frac{n\,r}{n-1} - \frac{\varrho}{\nu - 1}} = \frac{(\nu - 1)\,r\,d}{(n-1)(\nu-1)\,d - (\nu-1)\,n\,r - (n-1)\,\varrho}$$

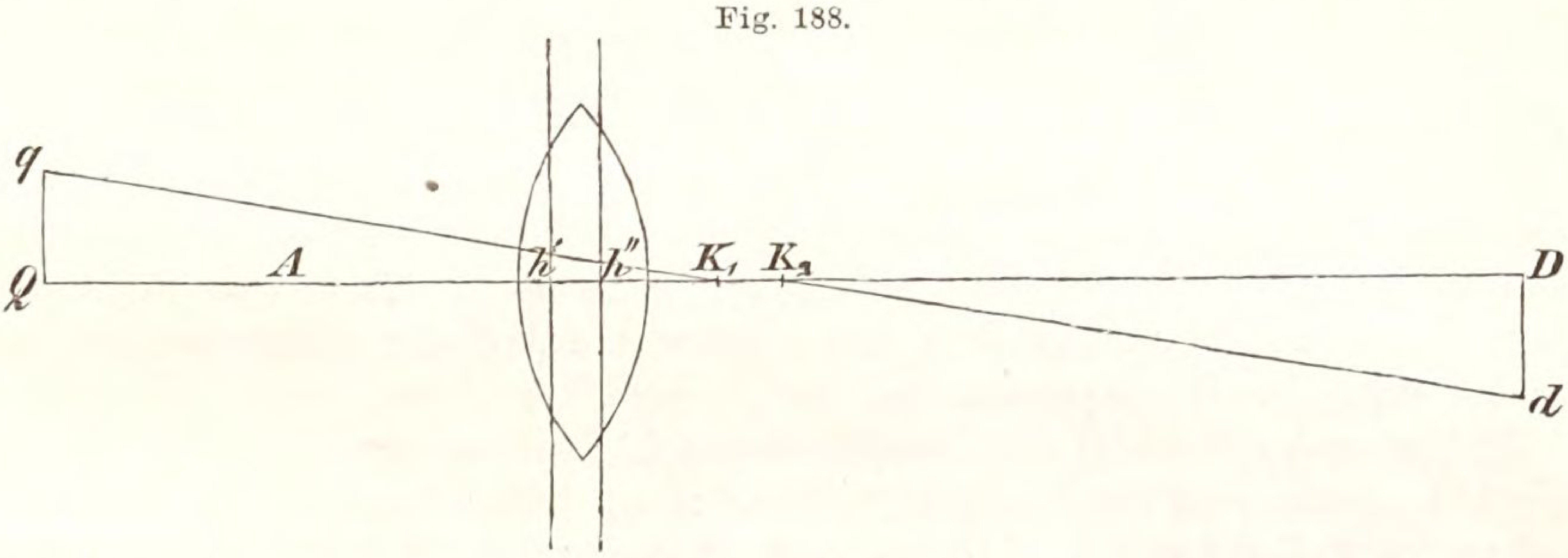
$$h_2 = \frac{(n-1)\,\nu\,\varrho\,d}{(n-1)(\nu-1)\,d - (\nu-1)\,n\,r - (n-1)\,\varrho}$$

$$\frac{1}{F} = \frac{\nu - 1}{\nu\,\varrho} + \frac{n-1}{n\,\nu\,r} - \frac{d\,(n-1)(\nu-1)}{n\,\nu\,r\,\varrho}; \qquad \frac{1}{A} = \frac{n\,\nu}{F}.$$

Damit ist die Lage und Grösse der Bilder vollständig bestimmt, indem wir alle in Betracht kommenden Grössen durch die gegebenen Constanten unseres Systemes ausgedrückt haben.

Zu einer noch bequemern Construction der Grösse des Bildes hat Listing noch ein anderes Paar conjugirter Punkte in die Dioptrik eingeführt, die Knotenpunkte. Ist q Fig. 188 ein ausser der Axe liegender

Fig. 188.



leuchtender Punkt, d sein Bild, so gibt es auf der Axe jedenfalls zwei Punkte K_1 und K_2, die so liegen, dass ein im ersten Mittel nach K_1 sich fortpflanzender Strahl nach allen Brechungen durch K_2 geht und dass der gebrochene Strahl $K_2\,d$ dem einfallenden $q\,K_1$ parallel ist. Kennt man die Lage dieser Punkte, so kann man sich zur Bestimmung der Bildgrösse der beiden Strahlen $q\,K_1$ und $K_2\,d$ gerade so bedienen, wie bei einer brechenden Fläche der Nebenaxe. Man berechnet den Abstand $f = D\,h''$ des Bildes von dem zweiten Hauptpunkte und zieht $D\,d$ senkrecht zur Hauptaxe, man zieht dann $q\,K_1$ und legt durch K_2 die Linie $K_2\,d \parallel q\,K_1$, der Punkt d, in welchem diese Linie $D\,d$ trifft, ist dann das Bild von q.

Zur Bestimmung der Punkte haben wir zunächst die Gleichung für conjugirte Punkte überhaupt, denn der zweite Punkt ist das Bild des ersten, weil die vor der Brechung zum ersten gehenden Strahlen nach der Brechung durch den zweiten gehen. Ist deshalb k_1 der Abstand des ersten Knotenpunktes vom ersten Hauptpunkte h', k_2 der des zweiten vom zweiten Hauptpunkte h'', so ist zuerst

$$k_2 = \frac{k_1\,F}{k_1 - A}.$$

Ferner ist, da $d\,K_2 \parallel q\,K_1$ ist,

$$\frac{d\,D}{q\,Q} = -\,\frac{y}{Y} = \frac{K_2\,D}{K_1\,Q} = \frac{f - k_2}{a - k_1}.$$

Zum Verständniss des negativen Vorzeichens von k_1 ist zu beachten, dass

wenn K_1 wie in der Zeichnung hinter h' liegt, der Abstand negativ ist, dass also $QK_1 = Qh' + h'K_1 = f - k_1$ ist.

Da wir das Grössenverhältniss von Bild und Gegenstand kennen, so ist weiter

$$-\frac{y}{Y} = \frac{f - k_2}{a - k_1} = \frac{A}{a - A} \cdots$$

Drücken wir in dieser Gleichung k_2 durch k_1 und f durch a, F und A aus, so wird

$$\frac{\frac{aF}{a - A} - \frac{k_1 F}{k_1 - A}}{a - k_1} = \frac{A}{a - A},$$

woraus sich unmittelbar ergibt

$$k_1 = A - F.$$

Daraus ergibt sich dann

$$k_2 = \frac{k_1 F}{k_1 - A} = -(A - F) = F - A.$$

Der Abstand des ersten Knotenpunktes von dem ersten Hauptpunkte ist gleich der Differenz der ersten und zweiten Hauptbrennweite, der des zweiten vom zweiten Hauptpunkte dieselbe Differenz negativ genommen. Der zweite Knotenpunkt liegt also genau so weit vor dem zweiten Hauptpunkt, wie der erste vor dem ersten, der Abstand der Knotenpunkte ist gleich dem der Hauptpunkte.

Die sechs Punkte, die Hauptbrennpunkte, Hauptpunkte und Knotenpunkte, nennt man die Cardinalpunkte des optischen Systems; da, wie wir sahen, sich die Lage und Grösse der Bilder vollständig durch die Lage der Hauptpunkte und Hauptbrennpunkte ausdrücken lässt, folgt, dass das optische System sich vollständig durch diese Punkte bestimmen lässt. Optische Systeme, deren Cardinalpunkte dieselben sind, sind optisch identisch.

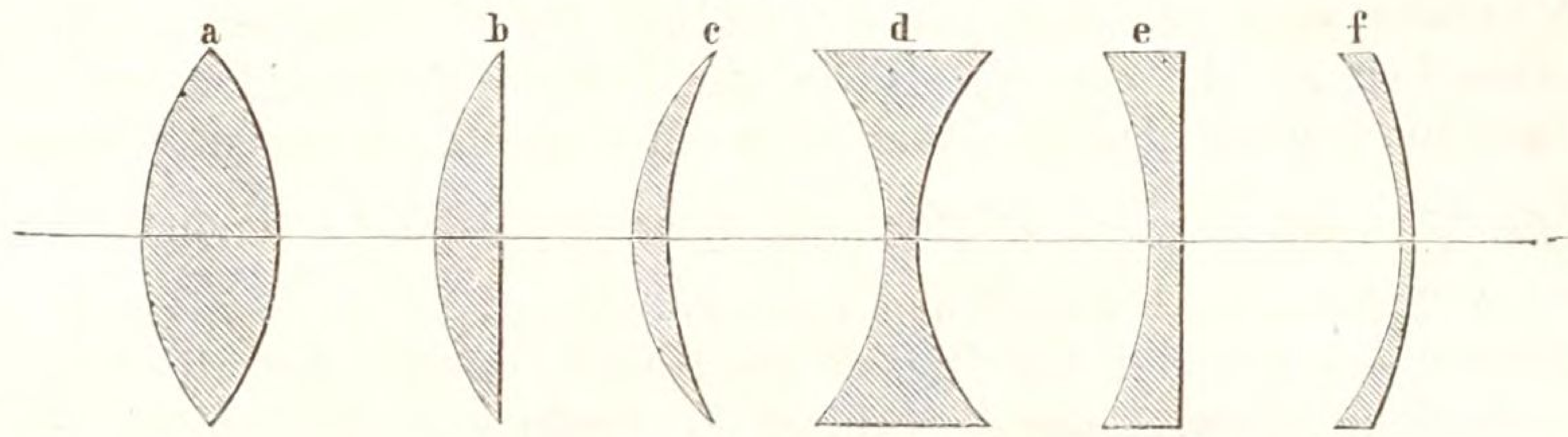
§. 147.

Linsen und Linsenbilder. Die Resultate des letzten §. liefern uns sofort den Gang der Lichtstrahlen durch die in der Praxis gebrauchten Linsen. Als Linsen bezeichnet man alle durch krumme Flächen begrenzten brechenden Medien; die von kugelförmigen brechenden Flächen begrenzten nennt man sphärische Linsen. Von letztern unterscheidet man sechs Arten, die biconvexe Fig. 189 *a*, welche an beiden Seiten nach aussen gewölbt ist, die planconvexe *b*, welche an der einen Seite eben, an der andern nach aussen gewölbt ist, die concavconvexe *c* oder Meniscus, dessen eine Seite nach aussen, dessen andere nach innen gewölbt ist, bei der aber der Krümmungsradius der convexen Fläche kleiner ist als derjenige der nach aussen concaven Fläche; dann die biconcave, planconcave und convexconcave, *d*, *e*, *f*, von denen bei der letztern die Krümmung der concaven Seite stärker ist als die der convexen Seite.

Man kann die Linsen auch in zwei Gattungen theilen, und zwar die drei ersten als Sammellinsen von den drei letzten als Zerstreuungslinsen trennen. Die erstern drei liefern nämlich bei der Art, wie sie gewöhnlich gebraucht werden, in den meisten Fällen reelle, die drei letztern virtuelle Bilder.

Um die Lage und Grösse der Bilder bei den Linsen zu erhalten, müssen wir nach dem vorigen §. nur die Lage der Cardinalpunkte bestimmen, da sich, wenn diese bekannt sind, aus der Lage und Grösse

Fig. 189.



des leuchtenden Objectes auch die des Bildes bestimmen lassen. Die Lage der Cardinalpunkte hängt aber nur ab von den Constanten des optischen Systemes, den Brechungsexponenten, Krümmungsradien und der Dicke der Linse oder dem Abstand der Scheitel der beiden Flächen.

Nennen wir den Brechungsexponenten der Linsensubstanz n, so ist der Brechungsexponent $\nu = \frac{1}{n}$, wenn wie in den weitaus meisten Fällen vor und hinter der Linse dasselbe Medium ist, also die Linsen einfach in der Luft gebraucht werden.

Nennen wir den absoluten Werth des Krümmungsradius der ersten Fläche r_1, den der zweiten Fläche r_2, so dass also der im vorigen §. mit r bezeichnete Radius der ersten Fläche gleich $\pm r_1$ und ebenso der der zweiten $\varrho = \pm r_2$ sein kann, so erhalten wir nach der Definition des §. 145, nach der wir den Radius der Fläche positiv setzen müssen, welche dem ankommenden Lichte die convexe, jenen negativ setzen müssen, wenn die Fläche dem ankommenden Licht die concave Seite zuwendet, für die Radien unserer sechs Linsen folgendes Schema

1. biconvex	2. planconvex	3. concavconvex
$r = r_1;\ \varrho = -r_2$	$r = \infty;\ \varrho = -r_2$	$r = r_1;\ \varrho = r_2;\ r_2 > r_1$
	oder	oder
	$r = r_1;\ \varrho = \infty$	$r = -r_1;\ \varrho = -r_2;\ r_2 < r_1$
4. biconcav	5. planconcav	6. convexconcav
$r = -r_1;\ \varrho = r_2$	$r = \infty;\ \varrho = r_2$	$r = -r_1;\ \varrho = -r_2;\ r_2 > r_1$
	oder	oder
	$r = -r_1;\ \varrho = \infty$	$r = r_1;\ \varrho = r_2;\ r_2 < r_1.$

Die verschiedenen Angaben bei den Linsen 2, 3, 5, 6 beziehen sich auf die verschiedenen Lagen der Linsen, so entspricht bei 2 und 5 die erste Angabe jener Lage der Linse, bei welcher die ebene Seite dem leuchtenden Punkte zugewandt ist, die zweite der umgekehrten, bei drei entspricht die erste Angabe der Lage, bei welcher die convexe Seite dem Lichte zugewandt ist u. s. f. Wir setzen zunächst voraus, der Brechungsexponent n sei grösser wie 1, und $\nu = \frac{1}{n}$, wir hätten also etwa Glaslinsen in Luft.

Setzen wir diesen Werth von ν in die Gleichung für die Hauptpunkte, so erhalten wir für die biconvexe Linse:

$$h_1 = -\frac{r_1\, d}{n\,(r_1 + r_2) - (n-1)\, d} \qquad h_2 = -\frac{r_2\, d}{n\,(r_1 + r_2) - (n-1)\, d},$$

die Hauptpunkte liegen also immer im Innern der Linse, der erste hinter dem Scheitel der ersten, der zweite vor dem Scheitel der zweiten Fläche, die Abstände verhalten sich wie die Radien der Flächen, ist $r_1 = r_2$, so sind dieselben gleich. Ist die Dicke der Linsen klein und $r_1 = r_2$, so dass wir im Nenner das d enthaltende Glied vernachlässigen können, so wird $h_1 = h_2 = -\frac{d}{2\,n}$. Dürfen wir überhaupt die Linsendicke gegenüber den Radien der Kugelflächen vernachlässigen, so wird $h_1 = h_2 = 0$, wir können die Scheitel der Linsen als Hauptpunkte betrachten.

Aehnliche Werthe, die sich durch Einsetzen der betreffenden Werthe der Radien leicht ergeben, erhalten h_1 und h_2 für die andern Linsen.

Dadurch, dass wir $\nu = \frac{1}{n}$, $n\,\nu = 1$ setzen, erhalten die Gleichungen für die Hauptbrennweiten folgende Form

$$\frac{1}{F} = (n-1)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\varrho} + \frac{n-1}{n\, r\, \varrho}\, d\right) \qquad A = F.$$

Die erste Hauptbrennweite wird der zweiten gleich, damit fallen Hauptpunkte und Knotenpunkte zusammen, oder die Verbindungslinien des leuchtenden Punktes mit dem ersten Hauptpunkte, des Bildpunktes mit dem zweiten Hauptpunkte sind einander parallel. Das Verhältniss der Grösse von Bild und Gegenstand ist somit gleich dem Verhältniss der Abstände beider von den Hauptpunkten. Das ergibt die Gleichung für die Bildgrösse direkt, denn wegen $n\,\nu = 1$ wird

$$y = -\frac{f}{n\,\nu\, a}\, Y = -\frac{f}{a} \cdot Y.$$

Aus der Gleichheit der ersten und zweiten Hauptbrennweite folgt weiter, dass es für die Lage und Grösse der Bilder gleichgültig ist, welche Seite der Linse wir dem Lichte zuwenden, denn f ist allgemein bestimmt durch

$$f = \frac{a\, F}{a - A}.$$

Die zweite Hauptbrennweite in der zweiten Lage ist aber die erste in der ersten Lage, da $A = F$, kann also der ausser von a nur von F und A abhängige Werth von f nicht durch Aenderung der Lage geändert werden.

Zur Bestimmung der Brennweiten haben wir in die allgemeine Gleichung für F nur die betreffenden Werthe der Radien einzusetzen. Darnach wird für die biconvexe Linse

$$\frac{1}{F} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} - \frac{n-1}{n\, r_1\, r_2}\, d\right),$$

für die planconvexe

$$\frac{1}{F} = (n-1)\,\frac{1}{r_2} = (n-1)\,\frac{1}{r_1},$$

für die concavconvexe

$$\frac{1}{F} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \frac{n-1}{n\, r_1\, r_2}\, d\right) = (n-1\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} + \frac{n-1}{n\, r_1\, r_2}\, d\right).$$

Der in den beiden letzten Fällen jedesmal erste Ausdruck entspricht der einen, der zweite der entgegengesetzten Lage der Linse; dass die beiden Ausdrücke gleich sind, ergibt sich daraus, dass der Radius, der in der einen Lage r_1 ist, in der andern r_2 ist und umgekehrt. Da bei der planconvexen Linse in der ersten Lage $r_2 > r_1$, in der zweiten $r_1 > r_2$ ist, so folgt, dass wenn $n > 1$ ist, bei der concavconvexen und planconvexen Linse immer, bei der biconvexen so lange der Abstand der Scheitel d,

$$d < \frac{n}{n-1}(r + r'),$$

der Werth von F positiv ist. Alle diese Linsen haben also eine positive Hauptbrennweite, das heisst parallele Strahlen werden von der Linse in einem hinter der Linse liegenden leuchtenden Punkte, dem Hauptbrennpunkte, vereinigt. Daraus folgt dann nach der Gleichung

$$f = \frac{aF}{a - A} = \frac{aF}{a - F}$$

dass, so lange $a > F$, so lange also der leuchtende Gegenstand weiter von der Linse entfernt ist als der Hauptbrennpunkt, f positiv ist; von allen diesen Gegenständen entwirft die Linse reelle, hinter der Linse liegende Bilder. Die Bilder sind umgekehrte, sie sind so lange $a > 2F$, näher bei der Linse als der Gegenstand, somit sind dieselben so lange verkleinerte; ist $a = 2F$, so wird $f = a$, Bild und Gegenstand sind an Grösse gleich; wird $a < 2F$, aber grösser als F, so sind die Bilder weiter von der Linse entfernt als der Gegenstand, die Bilder sind vergrösserte. Wird $a = F$, so verlassen die auf die Linse fallenden Strahlen dieselbe als paralleles Strahlenbündel. Wird $a < F$, so wird f negativ, die Bilder werden also virtuelle; und da nach

$$y = -\frac{f}{a} Y,$$

für ein negatives f also y positiv wird, aufrechtstehende. Die aufrechtstehenden Bilder rücken der Linse um so näher, je kleiner a wird. In dem Falle gehen die Strahlen nach der Brechung also so weiter, als kämen sie von einem Bilde des Gegenstandes, dessen Lage und Grösse durch f und y bestimmt sind, sie sind also nur sichtbar, wenn man durch die Linse auf den Gegenstand hinsieht.

Für die drei Linsen der zweiten Gattung erhalten wir die Brennweiten aus folgenden Gleichungen:

Für die biconcave

$$\frac{1}{F} = (n-1)\left(\frac{1}{-r_1} - \frac{1}{r_2} - \frac{n-1}{n r_1 r_2} d\right) = -(n-1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{n-1}{n r_1 r_2} d\right);$$

für die planconcave

$$\frac{1}{F} = -(n-1)\frac{1}{r_1} = -(n-1)\frac{1}{r_2};$$

für die convexconcave

$$\frac{1}{F} = -(n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} - \frac{n-1}{n r_1 r_2} d\right) = -(n-1)\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} - \frac{n-1}{n r_1 r_2} d\right).$$

Diese drei Ausdrücke zeigen, dass gegenüber den drei ersten Linsenarten, bei diesen dreien der Werth von F stets ein negativer ist, dieselben haben somit keine reellen, sondern virtuelle Hauptbrennpunkte; Strahlen also, welche vor der Brechung parallel waren, werden nach der Brechung nicht in einem Punkte vereinigt, sondern so zerstreut, als kämen sie von einem in der Entfernung F vor der Linse liegenden Punkte; setzen wir den absoluten Werth dieses Abstandes F', so dass $F = - F'$, so zeigt die Gleichung für f

$$f = - \frac{a F'}{a + F'},$$

dass bei diesen Linsen, so lange a positiv ist, der leuchtende Gegenstand also ein reeller ist, das Bild ein virtuelles ist. Ein reelles Bild kann durch Zerstreuungslinsen nur erhalten werden, wenn a negativ ist, wenn also der leuchtende Gegenstand ein virtueller ist, dass heisst, wenn das Licht so auf die Linse fällt, dass es ungebrochen weiter gehend sich hinter der Linse und zwar in einem Abstande a, der kleiner ist als F, vereinigen würde. Liegt der virtuelle Punkt weiter hinter der Linse als um die Hauptbrennweite, so ist das Bild wieder ein virtuelles. Convergiren die Strahlen nach dem um F' hinter der Linse liegenden Punkte, so werden sie nach der Brechung parallel, dieser um F' hinter der Linse liegende Punkt ist also der erste Hauptbrennpunkt.

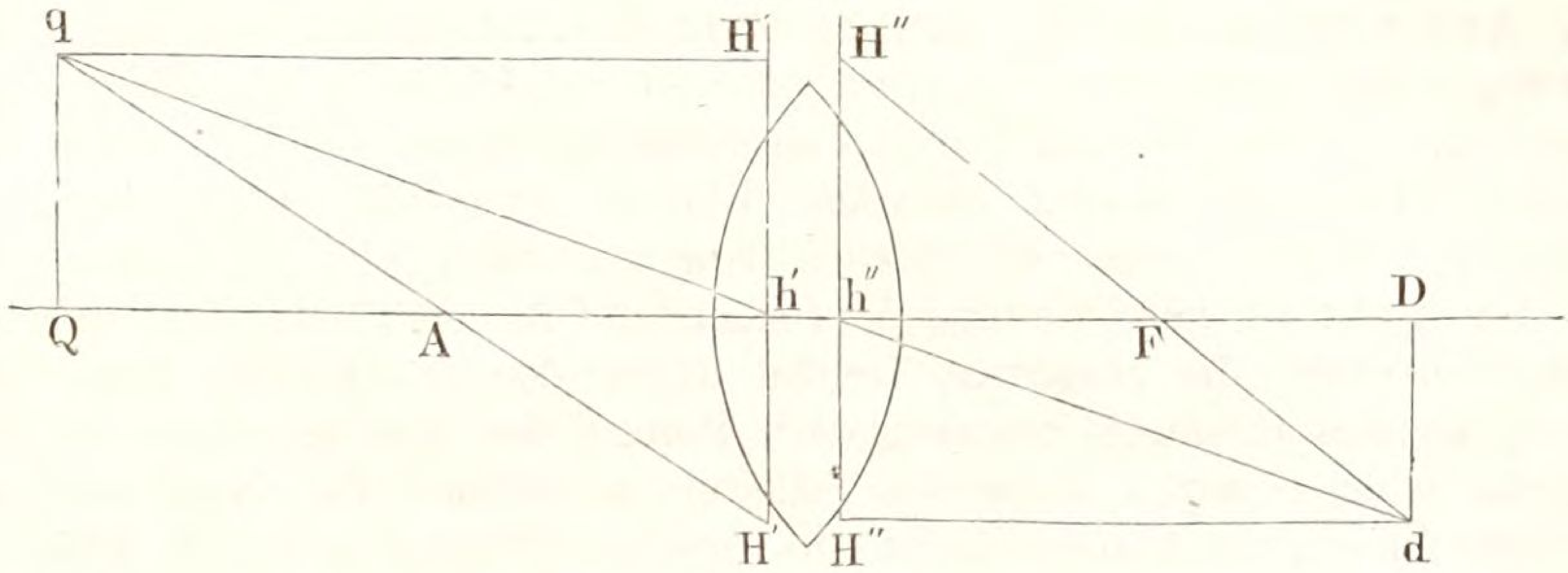
Ist der Brechungsexponent $n < 1$, stellen wir also etwa von Uhrgläsern eine Luftlinse her und tauchen diese in Wasser, so wird der Charakter der einzelnen Linsen der gerade entgegengesetzte; die Linsenformen, welche als Glaslinsen in Luft Sammellinsen sind, sind als Luftlinsen in Wasser Zerstreuungslinsen, die Zerstreuungslinsen sind Sammellinsen. Das folgt unmittelbar, weil $n - 1$ dann negativ wird, somit diejenigen Werthe von F, welche bei der vorhin gemachten Voraussetzung positiv waren, jetzt negativ werden und umgekehrt.

Die Lage und Grösse der Bilder, wie sie durch die vorigen Gleichungen erhalten wird, lässt sich auch leicht durch einfache Constructionen erhalten. Wir erwähnen von den mannigfachen möglichen Constructionen nur folgende, welche auf der Eigenschaft beruhen, dass die vor der Brechung der Axe parallelen Strahlen nach der Brechung durch den zweiten Hauptbrennpunkt gehen und Strahlen, welche vor der Brechung durch den ersten Hauptbrennpunkt gehen, nach der Brechung der Axe parallel werden. Ist demnach Fig. 190 $Q q$ eine leuchtende, zur Axe senkrechte Linie, so erhält man das Bild $D d$, indem man $q H'$ parallel der Axe bis zur ersten Hauptebene zieht und dann den Punkt H'' der zweiten Hauptebene, der dadurch gegeben ist, dass $h' H' = h'' H''$, mit dem zweiten Hauptbrennpunkte F verbindet und $H'' F$ passend verlängert, dass man weiter $q A H'$ durch den ersten Brennpunkt zieht und dann $H'' d$ der Axe parallel. Der Punkt d, wo $H'' F$ und $H'' d$ sich schneiden, ist der Bildpunkt von q, somit die zur Axe senkrechte $d D$ das Bild von $q Q$. Anstatt dieser beiden Strahlen kann man auch einen derselben und den nach dem ersten Hauptpunkt gezogenen Strahl $q h'$ benutzen. Der zu demselben gehörige gebrochene Strahl geht nach der Brechung durch den zweiten Hauptpunkt und ist, da wenn hinter der Linse dasselbe Mittel ist als vor derselben, die Haupt-

punkte zugleich Knotenpunkte sind, dem einfallenden Strahl parallel. Wir haben also nur $h''d$ dem Strahle qh' parallel zu ziehen.

Bei Benutzung dieser Constructionen für die Zerstreuungslinsen ist nur zu beachten, dass dort A der zweite und F der erste Hauptbrennpunkt ist; der von q nach F gezogene Strahl wird nach der Brechung

Fig. 190.



der Axe parallel und der von q parallel der Axe gezogene Strahl wird so gebrochen, als käme er aus dem Punkte A.

Lässt man die bisherige Annahme fallen, dass hinter der Linse dasselbe Mittel ist, so werden die Werthe der Brennweiten andere, und besonders sind die erste und zweite Hauptbrennweite nicht mehr gleich, sondern es wird

$$F = n\nu A.$$

Wenn aber $n > 1$, $\nu < 1$, so sind die Erscheinungen qualitativ dieselben wie bei Glaslinsen in Luft, ist $n < 1$, $\nu > 1$, wie bei Luftlinsen in Wasser, nur sind die Werthe von f jetzt andere, und zwar wenn $n\nu > 1$, also z. B. vor einer Glaslinse Luft, hinter derselben Wasser ist, für einen gleichen Abstand a grösser, als wenn hinter der Linse Luft ist. Denn in dem Falle ist $F > A$, somit auch

$$f = \frac{aF}{a - A}$$

grösser, als wenn $A = F$ ist.

Bei der Construction der Bilder ist dann ausser der Verschiedenheit der Hauptbrennweiten zu beachten, dass die Knotenpunkte nicht mehr mit den Hauptpunkten zusammenfallen, sondern wie in Fig. 188 hinter denselben liegen. Die dort angenommene Lage würde etwa einer Glaslinse entsprechen, vor welcher Luft, hinter welcher Wasser ist.

Sind die Mittel, welche die Linse begrenzen, nicht gleich, so ist es, wenn die Krümmungsradien der Linsenflächen nicht dieselben sind, nicht mehr gleichgültig, welche Seite der Linse dem ankommenden Lichte zugewandt ist, da die Hauptbrennweiten je nach der Lage der Linse andere werden. Haben wir z. B. eine planconvexe Glaslinse, deren Brechungsexponent $n = 1{,}5$ sei, vor derselben Luft, hinter derselben Wasser, so dass $n\nu = 1{,}333$, somit $\nu = {}^8/_9$ ist, so ist, wenn die convexe Seite der Luft zugewandt ist, also $\varrho = \infty$,

$$\frac{1}{F} = \frac{n-1}{n\nu} \cdot \frac{1}{r} = \frac{0{,}5}{1{,}333\, r}; \quad F = 2{,}666\, r; \quad A = 2\, r,$$

ist dagegen die ebene Seite der Luft zugewandt, $r = \infty$, $\varrho = -r_2$,

$$\frac{1}{F} = -\frac{\nu - 1}{\nu} \cdot \frac{1}{r_2} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{r_2}; \quad F = 8\,r_2; \quad A = 6\,r_2.$$

Der Unterschied ist, wie man sieht, sehr beträchtlich, und damit auch die Lage und Grösse der Bilder sehr verschieden.

§. 148.

Aplanatische Linsen und Linsencombinationen; achromatische Linsen. Der den Entwicklungen über die Linsenbilder zu Grunde liegende Satz, dass alle von einem Punkte ausgehenden leuchtenden Strahlen sich nach der Brechung wieder in einem Punkte schneiden, gilt strenge genommen nur für brechende Flächen von unendlich kleiner Ausdehnung. Bei den praktisch herzustellenden brechenden Flächen ist das deshalb nicht genau der Fall; die Strahlen, welche näher dem Rande der Linse auffallen, werden in einem etwas andern Punkte der Axe vereinigt, als diejenigen, welche in der Nähe des Scheitels auffallen. Es ergibt sich das für eine brechende Fläche direkt aus unserer Gleichung des §. 145, die wir erhielten, ehe wir die Abstände QJ des leuchtenden Punktes und JD des Brennpunktes von der brechenden Fläche gleich den betreffenden Abständen vom Scheitel S setzten, also aus der Gleichung

$$\frac{QC}{CD} = n\,\frac{QJ}{JD}.$$

Bezeichnen wir den Abstand QC Fig. 185 des leuchtenden Punktes vom Mittelpunkte mit b, den Abstand CD des Brennpunktes vom Mittelpunkte mit g, und den Winkel JCS, die Oeffnung der brechenden Fläche mit α, so wird

$$\frac{b}{g} = n\,\frac{\sqrt{b^2 + r^2 - 2\,b\,r\cos\alpha}}{\sqrt{g^2 + r^2 + 2\,g\,r\cos\alpha}}.$$

Ist r positiv, wendet also die brechende Fläche dem Lichte ihre convexe Fläche zu, so erhält g den grössten Werth für $\alpha = 0$, es folgt also, dass die dem Rande nähern Strahlen sich nach der Brechung näher bei dem Mittelpunkte schneiden als die mittlern Strahlen, oder die Brennweite der Randstrahlen ist kleiner als die der mittlern Strahlen. Ist dagegen r negativ, wendet die brechende Fläche dem Lichte ihre concave Seite zu, so ist das Umgekehrte der Fall, die Brennweite der Randstrahlen ist grösser als diejenige der mittlern Strahlen. Die Differenz zwischen den Brennweiten der Randstrahlen und der mittlern Strahlen, die Abweichung, hängt von dem Abstande b des leuchtenden Punktes und vom Radius, sowie der Oeffnung α der brechenden Fläche ab.

Ganz Aehnliches ergibt eine Berechnung der verschiedenen Brennweiten für die verschiedenen Linsen; setzen wir Glaslinsen in Luft voraus, so ist für alle ausser den concavconvexen die Brennweite der Randstrahlen eine kleinere als die der mittlern Strahlen. Für die concavconvexen Linsen ist für gewisse, von den Constanten der Linse abhängige Entfernungen die Brennweite der Randstrahlen eine kleinere, für andere eine grössere, es gibt demnach eine bestimmte Entfernung, für welche die Brennweiten gleich werden. Für diese Entfernung ist die Linse aplanatisch. Die von einem in dieser Entfernung befindlichen leuchtenden Punkte

ausgehenden Strahlen werden also wieder in einem Punkte vereinigt, die Linse entwirft also von dort befindlichen Gegenständen scharfe Bilder.

Will man bei einer willkührlich gewählten Brennweite für bestimmte Entfernungen aplanatische Linsen haben, also z. B. für sehr weit entfernte Gegenstände, so muss man eine Combination mehrerer Linsen anwenden, deren Formen und Abstände man eben aus der Bedingung, dass sie aplanatisch sein sollen, für weite Entfernungen durch allerdings ziemlich langwierige Rechnungen erhalten kann.

Die Abweichung wächst mit der Grösse der Oeffnung, bei einer gegebenen Grösse der Linse ist somit die Abweichung um so grösser, je stärker die Krümmung der Linse, je kleiner also die Brennweite ist. Will man also nicht sehr kleine Oeffnungen wählen, also nur centrale Strahlen anwenden, wodurch die Bilder sehr lichtschwach werden, so muss man zur Erzielung kleiner Brennweiten eine Combination mehrerer Linsen anwenden, die einzeln für sich eine grosse Brennweite, also schwache Krümmungen haben, die aber passend zusammengestellt eine kleine Brennweite geben.

Die Wirkung einer solchen Linsencombination ergibt sich unmittelbar aus den Gleichungen des §. 146. Nennen wir nämlich jetzt die erste Hauptbrennweite der ersten Linse, wie dort der ersten brechenden Fläche, A_1, die zweite Hauptbrennweite der ersten Linse F_1, und bedeuten A_2 und F_2 dasselbe für die zweite Linse, und bedeutet jetzt d den Abstand des ersten Hauptpunktes der zweiten Linse vom zweiten Hauptpunkte der ersten Linse, wie es dort der Abstand der Scheitel der beiden brechenden Flächen war, so gelangen wir durch identisch dieselben Entwicklungen zur Bestimmung der Hauptpunkte des Systems von zwei Linsen, deren Abstände h_1 des ersten Hauptpunktes vom ersten Hauptpunkte der ersten und h_2 vom zweiten Hauptpunkte der zweiten Linse durch identisch dieselben Gleichungen in A, F und d gegeben werden; wir gelangen identisch zu denselben Gleichungen (I) und (II) für f und y, wo a vom ersten, f vom zweiten Hauptpunkte des Systems zu rechnen ist. Wir erhalten ebenso für die beiden Hauptbrennweiten die Gleichungen

$$\frac{1}{F} = \frac{F_1 + A_2 - d}{F_1 F_2}; \qquad \frac{1}{A} = \frac{F_1 + A_2 - d}{A_1 A_2}; \qquad A = F \cdot \frac{A_1 A_2}{F_1 F_2}.$$

Nennen wir den Brechungsexponenten des Lichtes bei dem Eintritt in die erste Linse n_1, bei dem Austritt ν_1, bei dem Eintritt in die zweite Linse n_2, bei dem Austritt ν_2, so ist nach §. 146

$$F_1 = n_1 \nu_1 A_1; \qquad F_2 = n_2 \nu_2 A_2; \qquad F = n_1 \nu_1 n_2 \nu_2 A.$$

Damit wird dann

$$f = \frac{a F}{a - A}; \qquad y = - \frac{A}{a - A} Y = - \frac{f}{n_1 \nu_1 n_2 \nu_2 a} Y.$$

Ebenso wie für zwei Linsen haben wir zur Bestimmung der Lage und Grösse der Bilder für beliebig viele zu verfahren; hätten wir drei Linsen, so bestimmen wir erst F und A für die beiden ersten und setzen dieselben als F_1 und A_1, die Brennweiten der dritten Linse als F_2 und A_2 in obige Gleichungen ein u. s. f.

Dass man so bei passender Wahl der Linsen und ihrer Abstände

beliebige Brennweiten herstellen kann, zeigt obige Gleichung für F. Nimmt man z. B. zwei Glaslinsen in Luft, jede von 0,5 M. Brennweite und stellt sie 0,1 M. von einander, resp. genauer so, dass der zweite Hauptpunkt der ersten 0,1 M. vor dem ersten Hauptpunkt der zweiten liegt, so liegt der erste Hauptpunkt des Systems um 0,0555 M. hinter dem ersten Hauptpunkt der ersten Linse, der zweite um ebensoviel vor dem zweiten Hauptpunkt der zweiten, und die Brennweite wird 0,277 M., also nur etwa halb so gross als die der einzelnen Linse. Da bei gleicher Grösse der Linsen die Oeffnung α indess viel kleiner ist als bei einer einzigen Linse dieser Brennweite, so ist die Abweichung eine viel kleinere.

Eine noch grössere Störung tritt in der Deutlichkeit der von einer Linse entworfenen Bilder durch die chromatische Abweichung ein, also dadurch, dass die von einem leuchtenden Gegenstande ausgehenden Strahlen aus verschiedenen Farben zusammengesetzt sind. Wie wir wissen, sind die Brechungsexponenten der verschiedenen Farben sehr verschieden. Da nun die Brennweiten kleiner sind für grössere Brechungsexponenten, bei planconvexen Linsen sind sie z. B. dem reciproken Werthe des um eins verminderten Brechungsexponenten proportional, so folgt, dass die Brennweiten der rothen Strahlen grösser sind als die der gelben, diese grösser als die der grünen etc., und dass diejenigen der violetten Strahlen am kleinsten sind. Dort, wo die violetten Strahlen sich schneiden, sind sie also noch von den rothen eingehüllt, dort, wo die rothen sich schneiden, umgeben die stärker convergirenden violetten Strahlen den Brennpunkt. Wo wir also auch die von einem leuchtenden Punkte ausgehenden Strahlen nach ihrem Durchtritte durch die Linse, etwa auf einem Schirme auffangen, erhalten wir als Bild des Punktes einen kleinen Kreis, im Brennpunkte der violetten Strahlen mit rothem, in dem der rothen mit violettem Rande, in der Mitte zwischen beiden einen annähernd weissen Kreis.

Diese chromatische Zerstreuung lässt sich nur durch ein System von Linsen, mindestens zwei aufheben, welches aus Sammellinsen und Zerstreuungslinsen zusammengesetzt ist. Soll das System als Sammellinse wirken, so muss die Sammellinse aus einer Substanz gefertigt werden, welche ein geringes, die Zerstreuungslinse aus einer solchen hergestellt werden, welche ein starkes Zerstreuungsvermögen besitzt. Es muss dann die Combination so gewählt werden, dass die Differenz der Brennweiten für die rothen und violetten Strahlen für die Sammellinse ebenso gross ist als für die Zerstreuungslinse, gerade wie wir ein achromatisches Prisma durch eine Combination zweier Prismen erhalten, welche gleich lange Spectra liefern, und von denen die brechende Kante des zweiten umgekehrt liegt als die des ersten.

Setzen wir voraus, dass vor und hinter den Linsen Luft ist, so erhalten wir die Lage der Bildpunkte aus der Gleichung

$$f = \frac{a F}{a - F},$$

und nehmen wir an, die beiden Linsen seien so nahe beisammen, dass wir $d = 0$ setzen können, so wird

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{F_1} - \frac{1}{F_2}.$$

Bezeichnen wir nun die Brennweiten der rothen Strahlen mit R_1 und R_2, der violetten mit V_1 und V_2, so folgt, da für diese Farben die Brennweite die gleiche sein soll,

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2}.$$

Diese Gleichung enthält also die Bedingung dafür, dass die Combination zweier Linsen achromatisch ist, oder genauer, dass sie für die rothen und violetten Strahlen gleiche Brennweiten hat. Da nun $R_1 > V_1$, $R_2 > V_2$, so ergibt diese Gleichung schon, dass, wie wir vorher angaben, die eine der Linsen eine negative Brennweite haben muss, denn ohnedem wäre die Gleichung unmöglich. Bezeichnen wir nun die Brechungsexponenten der ersten Linse mit n_r und n_v, die der zweiten mit ν_r und ν_v, und sind die Krümmungsradien der Linsen r_1, r_2 und ϱ_1, ϱ_2, so wird nach dem vorigen §. obige Bedingungsgleichung

$$\left(n_r - 1\right)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \frac{n_r - 1}{n_r \, . \, r_1 \, r_2} d_1\right) + \left(\nu_r - 1\right)\left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_1} + \frac{\nu_r - 1}{\nu_r \, . \, \varrho_1 \, \varrho_2} d_2\right) =$$
$$\left(n_v - 1\right)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \frac{n_v - 1}{n_v \, . \, r_1 \, r_2} d_1\right) + \left(\nu_v - 1\right)\left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2} + \frac{\nu_v - 1}{\nu_v \, \varrho_1 \, \varrho_2} d_2\right).$$

Jede Combination zweier Linsen, die dieser Bedingungsgleichung genügt, vereinigt die rothen und violetten Strahlen in demselben Punkte. Wie aus der grossen Anzahl von Grössen, die in dieser Gleichung vorkommen, sich ergibt, lässt sich zu einer gegebenen Linse aus einer gegebenen Substanz, für welche die Zerstreuung grösser ist als die der gegebenen Linse, zur Erzielung einer bestimmten Brennweite noch eine ganze Anzahl von Linsenformen angeben, welche die Combination zu einer achromatischen machen. Die Aufgabe wird erst dann eine bestimmte, wenn über die Form der zweiten Linse, etwa über einen Radius derselben noch bestimmte Bedingungen gemacht werden. Es ist überflüssig, eine solche Rechnung hier durchzuführen.

Was wir seiner Zeit von den achromatischen Prismen bemerkt, gilt auch hier; zwei Linsen können strenge nur zwei Farben in einem Punkte vereinigen, eine aus zwei Linsen hergestellte Combination gibt deshalb immer noch eine gewisse Farbenabweichung, dieselbe ist aber so gering, dass sie keine merkbare Störung mehr gibt. Man begnügt sich deshalb stets mit zwei Linsen und berechnet dieselben so, dass die rothen und violetten Strahlen vereinigt werden.

Drittes Kapitel.

Absorption und Emission des Lichtes und die sie begleitenden Erscheinungen.

§. 149.

Absorption des Lichtes in festen und flüssigen Körpern. Wir erwähnten schon im Eingange des vorigen Kapitels, dass das bei seiner Ausbreitung auf einen Körper treffende Licht nicht nur regelmässig reflectirt

und gebrochen wird, sondern dass ein Theil des Lichtes eine unregelmässige oder diffuse Reflexion erfährt. Dieses diffus reflectirte Licht ist es, welches uns die Körper sichtbar macht, während das regelmässig zurückgeworfene uns ein Bild der Lichtquelle liefert. Die Thatsache, dass wir durch dieses diffus zurückgeworfene Licht die Körper selbst sehen, beweist uns, dass dasselbe von den einzelnen Flächenelementen der Oberfläche so zurückgeworfen wird, dass die Strahlen sich in den Elementen selbst schneiden, denn wir sehen die Quelle des unser Auge treffenden Lichtes stets dort, wo die unser Auge treffenden Strahlen sich schneiden. Diese unregelmässige Reflexion hat ihren Grund darin, dass auch die glatteste Oberfläche keine geometrische Ebene ist, sondern dass an allen Stellen der Oberfläche Flächenelemente vorhanden sind, welche nicht in die Grenzebene fallen, deren Normalen somit nicht mit der Normale der Grenzebene zusammenfallen, sondern alle möglichen Richtungen haben. Daraus folgt nach dem Reflexionsgesetz, dass an diesen Flächenelementen die Strahlen nicht nach derselben Richtung zurückgeworfen werden können, wie die regelmässig zurückgeworfenen, dass sie vielmehr nach allen möglichen Richtungen fortgehen, somit auch, dass diese Strahlen von den Flächenelementen selbst auszugehen scheinen müssen. Damit stimmt auch überein, dass eine Fläche um so weniger selbst sichtbar ist, je mehr Licht sie regelmässig zurückwirft, je sorgfältiger sie geglättet ist; ein sorgfältig polirtes Spiegelglas ist selbst kaum sichtbar.

Das unregelmässig zurückgeworfene Licht zeigt aber noch eine weitere Verschiedenheit von dem regelmässig zurückgeworfenen, es lässt uns die Körper, wenn sie von weissem Lichte beleuchtet werden, in bestimmten Farben, in ihren eigenen Farben erscheinen. Diese Aenderung der Farbe des auf die Körper fallenden Lichtes hat ihren Grund darin, dass die Körper nicht alle Farben in dem Maasse reflectiren, in welchem sie in dem die Körper treffenden Lichte vorhanden sind, dass sie vielmehr die verschiedenfarbigen Strahlen, die einen mehr, die andern weniger in sich zurückhalten. Man kann das durch verschiedene Versuche direkt zeigen. Betrachtet man einen schmalen Streifen eines farbigen Körpers mit einem Prisma, so sieht man in dem Spectrum, welche Farben in dem zerstreuten Licht vorhanden sind, welche nicht. Entwirft man nun auf dem Körper, von dem man einen Streifen betrachtet hat, ein Sonnenspectrum, so erscheinen die Farben des Spectrums dunkel, welche bei der Betrachtung des Streifens mit dem Prisma im Spectrum fehlten, diejenigen dagegen hell, welche man mit dem Prisma sah. Daraus folgt, dass die Oberfläche des Körpers die Farben nicht diffus reflectirt, dass der Körper diejenigen festhält, welche in der Farbe des Körpers fehlen. Ebenso deutlich erkennt man das, wenn man die Körper mit homogenem farbigen Licht beleuchtet, sie erscheinen dann nicht mehr farbig, sondern hell oder dunkel. Hell erscheinen die Körper, welche im weissen Licht dieselbe Farbe zeigen, welche wir zur Beleuchtung gewählt haben, dunkel dagegen diejenigen, welche eine andere Farbe besitzen. Fehlt in dem Spectrum des von einem Körper bei Beleuchtung mit weissem Lichte zerstreuten Lichtes eine Farbe ganz, so erscheint er bei der Beleuchtung mit Licht dieser Farbe schwarz.

Es folgt daraus, dass alle Körper eine gewisse Menge des auf sie fallenden Lichtes in sich festhalten, dass sie dasselbe absorbiren. Die

Farbe, in welcher uns ein Körper bei Beleuchtung mit weissem Lichte erscheint, ist die Mischfarbe, die sich aus den Lichtarten zusammensetzt, welche derselbe nicht absorbirt. Die Thatsache, dass uns fast alle Körper in bestimmten Farben erscheinen, beweist, dass die Absorption der verschiedenfarbigen Lichtarten in verschiedenem Grade stattfindet, denn würden alle Farben in gleichem Verhältniss absorbirt, so müssten die Köper uns weiss, oder bei stärkerer Absorption grau erscheinen, würde alles auffallende Licht absorbirt, so würde ein solcher Körper vollkommen schwarz erscheinen.

Ganz ebenso wie bei den Erscheinungen der diffusen Reflexion erkennen wir auch in dem durch die Körper hindurchgehenden Lichte eine Absorption, und bei allen farbigen durchsichtigen Körpern kann man schon in dünnen Schichten erkennen, dass die Absorption für die verschiedenfarbigen Strahlen verschieden stark ist. Bei den in dünnern Schichten farblos durchsichtigen Körpern erkennt man dasselbe, wenn man hinreichend dicke Schichten anwendet; so färbt nach einem Versuche von Bunsen selbst reines destillirtes Wasser in einer Schicht von zwei Meter Dicke das Licht schwach blau.

Die Absorption des Lichtes bei dem Durchtritt durch die Körper untersucht man am bequemsten, indem man direkt von dem durchgelassenen Lichte ein Spectrum entwirft. Man findet dann, dass das durchgelassene Licht immer noch mehr oder weniger zusammengesetzt ist, wenn auch, wie bei mit Kupfer roth gefärbtem Glase, es nur die verschiedenen Nüancen des Roth sind, welche die Gläser durchdringen. In allen Fällen erkennt man aber, dass die Menge des absorbirten Lichtes mit der Dicke der absorbirenden Schicht wächst; deshalb ist das Licht um so weniger zusammengesetzt, die Farbe wird um so reiner, je dickere Schichten eines farbigen Körpers das Licht durchstrahlt hat. Nimmt man eine dünne Schicht eines mit Kobalt blau gefärbten Glases, so treten im Spectrum noch alle Farben auf, die gelben und grünen sind nur stärker geschwächt als die rothen und blauen. Wendet man aber immer dickere Platten an, so verschwinden die mittlern Partieen des Spectrums immer mehr, und schliesslich bleibt nur mehr das rothe und blaue Licht übrig. Diese werden dann auch bei Anwendung sehr dicker Schichten nicht mehr merklich geschwächt. Lässt man dann aber das so durch ein Mittel gefärbte Licht auf ein anderes fallen, welches gerade dieses Licht absorbirt, so wird dasselbe sehr stark geschwächt. So kann man durch zwei complementär gefärbte Gläser, etwa ein rothes und grünes, von nicht sehr grosser Dicke fast alles Licht zurückhalten.

Die Zunahme der Absorption mit wachsender Dicke der durchstrahlten Schicht ergibt sich unmittelbar aus dem durch die Messungen von Bunsen und von Becquerel bewiesenen Gesetze, dass eine gegebene Schicht eines absorbirenden Körpers von einer bestimmten Lichtart immer einen bestimmten Bruchtheil absorbirt, so dass also die Menge des absorbirten Lichtes der Menge des in den Körper eintretenden einfach proportional ist. Ist also J die Menge des in den Körper eintretenden, J' die des absorbirten Lichtes, so ist

$$J' = A J,$$

worin A eine für einen gegebenen Körper und gegebene Farbe constante Grösse ist.

Fällt nun auf die Grenzfläche eines Körpers die Lichtmenge J einer bestimmten Farbe, so wird in der ersten Schicht des Körpers von der Dicke eins die Lichtmenge αJ absorbirt, worin α ein echter Bruch ist, welcher uns das Absorptionsvermögen der betreffenden Substanz messen kann, da er sich auf die Einheit der Schichtdicke bezieht. Auf die zweite Schicht von der Dicke eins fällt dann die Lichtmenge $J(1-\alpha)$ und von dieser wird in der zweiten Schicht absorbirt $\alpha . J(1-\alpha)$, es tritt demnach in die dritte über $J(1-\alpha) - \alpha . J(1-\alpha) = J(1-\alpha)^2$, aus der dritten Schicht tritt hervor $J(1-\alpha)^3$, und wie sich in derselben Weise ergibt, aus einer Schicht von der Dicke d

$$i = J(1-\alpha)^d.$$

Die Intensität des aus einem Körper hervortretenden Lichtes nimmt also in geometrischer Reihe ab, wenn die Dicke der Schicht in arithmetischer Reihe zunimmt.

Wenn nun auf einen Körper, dessen Dicke d ist, zusammengesetztes, etwa weisses Licht fällt, in welchem die Intensitäten der verschiedenen Farben $J_1, J_2, J_3 \ldots J_n$ sind, so ist das aus dem Körper austretende Licht gegeben durch die Summe

$$J_1(1-\alpha_1)^d + J_2(1-\alpha_2)^d + J_3(1-\alpha_3)^d + \cdots J_n(1-\alpha_n)^d,$$

wenn $\alpha_1, \alpha_2 \ldots$ die Absorptionsvermögen des Körpers für die verschiedenen Farben bedeuten.

Wie man sieht, hängt der Einfluss der Körper auf das Licht wesentlich von dem Werthe des Absorptionsvermögens ab; ist α klein und für alle Farben nahe gleich, so erhalten wir die farblos durchsichtigen Körper, bei denen eine sehr grosse Schichtdicke nöthig ist, um an der Färbung des durchtretenden Lichtes die Verschiedenheit in den Werthen von α zu erkennen. Je grösser die Werthe von α sind, um so geringer ist die Durchsichtigkeit der Körper, bei um so geringerer Dicke nähert sich obige Summe dem Werthe Null; würde α gleich 1, so würde der Körper schon bei der geringsten Dicke absolut undurchsichtig erscheinen, er würde auch gar kein Licht reflectiren, er wäre vollkommen schwarz.

Die in der Färbung der Körper im zerstreuten Licht sich zeigende Absorption muss ebenfalls im Innern der Körper stattfinden, in den oberflächlichen Schichten, so dass wir also annehmen müssen, dass das in der diffusen Reflexion von den Körpern zurückkehrende Licht zum grossen Theil nicht von der geometrischen Oberfläche, sondern aus dem Innern der Körper zurückkehrt. Es folgt das daraus, dass die Körper im diffusen Licht im Wesentlichen dieselbe Farbe zeigen, in welcher uns dünne Schichten der betreffenden Körper im durchgehenden Lichte erscheinen. Davon machen nur die Körper mit sogenannten Oberflächenfarben eine Ausnahme, auf welche wir bei Besprechung der anomalen Dispersion hinweisen werden. Das bei der diffusen Reflexion von den Körpern zurückkehrende Licht wird daher vorwiegend von den Elementen des Körpers bis zu einer gewissen Tiefe reflectirt.

Eben deshalb zeigen auch Körper niemals eine Färbung, sie erscheinen

weiss, wenn auch das diffus reflectirte Licht von totaler Reflexion herrührt. Diese totale Reflexion tritt, wie wir sahen, ein, wenn Licht aus einem optisch dichtern durchsichtigen Mittel an der Grenze eines weniger dichten ankommt, sie kann deshalb nur dann nach allen Richtungen, somit als diffuse eintreten, wenn beide Medien häufig mit einander abwechseln und die Elemente beider alle möglichen Lagen haben. Durch sehr innige Mengung zweier Körper von sehr verschiedenen Brechungsexponenten erhalten wir deshalb weisse Körper; so bildet jede schäumende Flüssigkeit, einerlei, welche Farbe sie selbst hat, weissen Schaum, in Folge der Mengung der Flüssigkeit mit Luft; die weisse Farbe des Schnees ist Folge der innigen Mengung kleiner Eistheilchen mit Luft.

Die zu der Erklärung der Farben der Körper angenommene Reflexion im Innern der Körper scheint auf den ersten Blick den Principien der Wellentheorie zu widersprechen, in denen wir sahen, dass eine Schwingung nur an den Grenzen zweier Medien, nicht in einem und demselben Medium reflectirt werden kann. Der Widerspruch ist indess nur scheinbar, da ein jeder Körper in optischer Beziehung als ein gemischtes Punktsystem anzusehen ist, bestehend aus dem zwischen den körperlichen Molekülen vorhandenen Aether und den körperlichen Molekülen selbst. Die zunächst als Aetherschwingungen eindringende Bewegung findet also auch im Innern des Körpers in den Molekülen desselben ein zweites Medium, an welchem die innere Reflexion stattfindet.

§. 150.

Absorption des Lichtes in Gasen. Untersucht man mit einem Prisma das Licht, welches durch farbige Gase hindurchgegangen ist, so zeigt uns das Spectrum, dass die Absorption dort im Allgemeinen in ganz anderer Weise stattfindet als in festen und flüssigen Körpern. Lässt man das Licht durch letztere bei hinreichender Dicke der Schicht hindurchgehen, so werden immer mehr oder weniger grosse Partieen des Spectrums ausgelöscht, also etwa alles Rothe oder alles Grüne oder anderes. Bei den Gasen ist das in der Regel nicht der Fall, dort erstreckt sich die Absorption auf ganz bestimmte Strahlen, während unmittelbar benachbarte wenig oder gar nicht absorbirt werden. Man sieht nämlich in dem Spectrum des durch solche Gase hindurchtretenden Lichtes neue, den Fraunhofer'schen Linien ähnliche Linien auftreten, deren Zahl je nach der Natur des Gases sehr verschieden sein kann. Daneben erscheint das Spectrum vielfach schattirt, ähnlich wie es das Spectrum Fig. 3 Tafel I zeigt, welches allerdings nicht ein solches Absorptionsspectrum darstellt, aber eine Vorstellung eines solchen liefern kann.

Diese Beobachtung wurde zuerst von Brewster an gasförmiger salpetriger Säure, einem in nicht zu dicken Schichten schwach orange gefärbten Gase gemacht. Er fand, dass in dem Spectrum des Lichtes, welches durch eine Schicht dieses Gases von etwa 2 Cent. Dicke hindurchgegangen war, gegen 2000 den Fraunhofer'schen ähnliche Linien auftraten, deren Anzahl im Grünen und Blauen grösser war als im Rothen und Gelben.

Daniell und Miller fanden ähnliche Absorptionslinien in dem durch Joddampf, Bromdampf und einige andere gefärbte Gase hindurchge-

gangenen Lichte, bei farblosen Gasen vermochten sie eine solche Absorption nicht zu erkennen. Es lag das indess, wie Janssen, Morren, Secchi u. a. gezeigt haben nur daran, dass sie bei ihren Versuchen nicht hinreichend dicke Schichten der Gase untersuchten. Mit zunehmender Dicke der Schichten werden nämlich die Linien immer dunkler, so dass Linien, welche bei dünnen Gasschichten noch nicht dunkel genug sind, um sichtbar zu sein, bei dickern Schichten deutlich als dunkle hervortreten. Indem nun Janssen das Licht einer Gasflamme, welches in seinem Spectrum gar keine dunkle Linien zeigt, durch eine 37 Meter lange mit Wasserdampf gefüllte Röhre gehen liess, konnte er besonders in Roth und Orange eine ganze Anzahl von dunklen Linien erkennen; ebenso fand Secchi in dem Spectrum einer weit entfernten Gasflamme eine Anzahl dunkler Linien.

Brewster hat ferner gezeigt, dass ein Theil der Fraunhofer'schen Linien der Absorption in der Atmosphäre zuzuschreiben ist, indem die Dunkelheit derselben um so grösser ist, je tiefer die Sonne am Horizont steht, je grösser also die Dicke der Atmosphäre ist, welche das Licht der Sonne durchlaufen hat, so ist es z. B. mit der Linie B; indem ferner auch eine nicht unerhebliche Anzahl von Linien nur sichtbar ist, wenn die Sonnenstrahlen einen weiten Weg in der Atmosphäre zurückgelegt haben. Dass viele Linien gerade durch die Absorption im Wasserdampf der Atmosphäre entstehen, zeigte Ångström durch Beobachtung des Sonnenspectrums, als die Temperatur der Luft — 24° C war, bei welcher in der Luft nur äusserst geringe Mengen Wasserdampf vorhanden sein können. Eine grosse Zahl Linien, die sich sonst im Spectrum im Rothen und Gelben zeigen, waren verschwunden.

Die Mehrzahl der Fraunhofer'schen Linien entsteht aber nicht durch Absorption des Lichtes in der Atmosphäre; es folgt das daraus, dass die Dunkelheit und Schärfe dieser Linien von dem Stande der Sonne und dem Zustande der Atmosphäre ganz unabhängig ist.

§. 151.

Beziehung zwischen der Absorption und Emission des Lichtes; Kirchhoff'scher Satz. Lässt man das Licht durch Flammen und glühende Gase gehen, so zeigt sich die Absorption in denselben wie in nicht glühenden Gasen, das heisst, es treten durch die Absorption auch hier dunkle Streifen auf. Wie nun Kirchhoff zuerst gezeigt hat, absorbirt eine solche Flamme oder ein glühendes Gas gerade jene Lichtarten, welche die Flamme oder das Gas selbst aussendet. Man erkennt das am besten, wenn man Flammen anwendet, welche selbst nur Licht einer ganz bestimmten Farbe aussenden, und eine Lichtquelle benutzt, in deren Spectrum keine dunklen Linien vorkommen. Derartige Flammen erhält man am bequemsten, indem man in der nichtleuchtenden Gasflamme des Bunsen'schen Brenners gewisse Salze zum Glühen bringt, von denen dann geringe Quantitäten verdampfen; die glühenden Dämpfe senden dann Licht bestimmter Farben aus. Bringt man so in die Flamme eine etwa an einen Platindraht angeschmolzene Sodaperle oder Kochsalzperle, so erhält die Flamme eine gelbe Farbe, und die prismatische Untersuchung derselben zeigt, dass die Flamme nur gelbes Licht aussendet, welches genau der gelben Linie D

des Sonnenspectrums entspricht. Bringt man in derselben Weise ein Lithiumsalz in die Flamme, so wird dieselbe roth, und die prismatische Untersuchung gibt fast nur eine rothe Linie, die im Sonnenspectrum der Mitte zwischen B und C entspricht.

Das Licht einer leuchtenden Gasflamme, des Drummond'schen Kalklichtes oder des elektrischen Flammenbogens liefert ein Spectrum, in welchem keine dunkle Linien vorhanden sind. Lässt man nun das Licht der Drummond'schen Lampe oder des Flammenbogens durch eine gelbe Natriumflamme gehen, so fehlt in dem Spectrum desselben gerade das gelbe Licht, welches die Natriumflamme aussendet, an Stelle desselben tritt eine dunkle Linie auf, welche gerade so aussieht wie die Linie D des Sonnenspectrums. Ersetzt man die Natriumflamme durch die Lithiumflamme, so erscheint gerade an der Stelle des Spectrums, welche dem Roth der Lithiumflamme entspricht, eine dunkle Linie. So, wie Kirchhoff zeigte, in allen Fällen; Flammen, deren Spectra wesentlich aus hellen Linien bestehen, schwächen von dem durch sie hindurchgehenden Lichte gerade die Strahlen dieser Farben, so zwar, dass in dem Spectrum der Lichtquelle, deren Licht durch die Flamme geht, an Stelle der hellen Linien dunkle Linien auftreten, wenn die Lichtquelle hinreichende Helligkeit besitzt.

Kirchhoff erkannte bald, dass diese Erscheinung nur ein specieller Fall eines ganz allgemeinen Satzes ist, den er dahin ausspricht, dass das Verhältniss zwischen Emissionsvermögen und Absorptionsvermögen für Licht bei allen Körpern, vorausgesetzt, dass sie die gleiche Temperatur besitzen, genau denselben Werth hat. Als Emissionsvermögen wird dann die Intensität der von dem betreffenden Körper ausgesandten Strahlen irgend einer Farbe und als Absorptionsvermögen der Bruch bezeichnet, welcher angibt, ein wie grosser Theil des den Körper treffenden Lichtes derselben Farbe von dem Körper absorbirt wird. Nennen wir demnach E die Menge des Lichtes, welche irgend ein Körper von irgend einer Farbe aussendet und A den Bruchtheil des Lichtes derselben Farbe, welchen der Körper absorbirt, wenn er überall dort, wo er Licht aussendet, auch von Licht getroffen wird, so sagt der Kirchhoff'sche Satz, dass bei derselben Temperatur

$$\frac{E}{A} = \text{const.},$$

also für alle Körper denselben Werth hat, so verschieden für die verschiedenen Körper auch E oder A sein mag. Der Werth dieses Quotienten ändert sich bei gegebener Temperatur mit der Farbe, und für jede Farbe mit der Temperatur.

Die Bedeutung dieser Constanten lässt sich leicht erkennen; wir nannten schon vorhin einen vollkommen schwarzen Körper einen solchen, der alles ihn treffende Licht absorbirt, dessen Absorptionsvermögen also gleich 1 ist. Bezeichnen wir nun das Emissionsvermögen eines solchen Körpers mit e, so folgt aus dem Kirchhoff'schen Satze, dass das Verhältniss zwischen Emission und Absorption auch eines vollkommen schwarzen Körpers denselben constanten Werth haben muss, oder dass

$$\frac{E}{A} = \frac{e}{1} = e$$

sein muss. Jene Constante ist also das Emissionsvermögen eines vollkommen schwarzen Körpers für dieselbe Temperatur.

Schreiben wir jene Gleichung in der Form

$$E = A e,$$

so erkennt man, dass das Emissionsvermögen und Absorptionsvermögen einander proportional ist. Ein vollkommen schwarzer Körper sendet also bei einer gegebenen Temperatur von allen Körpern das meiste Licht aus, alle übrigen Körper einen durch ihr Absorptionsvermögen gegebenen Bruchtheil dieses Lichtes. Ein Körper, der also bei einer bestimmten Temperatur etwa die Hälfte des auf ihn fallenden Lichtes einer bestimmten Farbe absorbirt, sendet dann auch nur halb soviel Licht derselben Farbe aus als ein vollkommen schwarzer Körper.

Den Beweis des Kirchhoff'schen Satzes können wir erst in der Wärmelehre führen, wir theilen hier nur die Betrachtung von Stokes mit, wodurch er denselben durch ein näheres Eingehen auf den Vorgang der Emission plausibel gemacht hat. Die Aussendung des Lichtes kann nur in einer periodischen Bewegung der Körpermoleküle ihren Grund haben, welche sich dem benachbarten Aether mittheilt. Sendet deshalb ein Körper, wie eine Natrium enthaltende Flamme gelbes Licht aus, so müssen die Moleküle gerade in der Periode schwingen, also dieselbe Schwingungsdauer haben, welche den Schwingungen des Aethers, die uns als dieses gelbe Licht erscheinen, entspricht. Wenn nun in eine solche Flamme Licht eindringt, dessen Schwingungsdauer ganz dieselbe ist als die der Moleküle, dessen Intensität aber grösser ist als diejenige des von der Flamme erzeugten, so setzt sich dieses mit der Bewegung des in der Flamme enthaltenen Aethers zusammen. Die Bewegung des Aethers wird dann, da diejenige des Aethers in der Flamme jedenfalls in allen möglichen Phasen ist, durch Interferenz theils geschwächt, theils dort, wo die ankommende Bewegung und die des in der Flamme vorhandenen Aethers gleicher Phase ist, verstärkt. Die Verstärkung und Schwächung werden sich das Gleichgewicht halten, so dass in soweit das die Flamme verlassende Licht die Summe des von der Flamme erzeugten und des in sie eindringenden sein würde. Nun wird aber an den Stellen, wo in Folge der gleichen Phase der ankommenden und der in der Flamme vorhandenen Bewegung des Aethers dieselbe verstärkt wird, diese Bewegung ganz gleicher Phase mit derjenigen der an dieser Stelle vorhandenen körperlichen Moleküle sein, deren Bewegung an diesen Stellen die Ursache des in der Flamme erzeugten Lichtes war. Da nun die neben einander liegenden Körper- und Aethermoleküle sich zugleich und nach gleicher Richtung bewegen, die Aethermoleküle aber schneller, so werden die Moleküle einander stossen und das stossende Aethermolekül wird an Geschwindigkeit verlieren. Da nun die Perioden der Bewegung ganz gleich sind, so muss sich der Stoss bei jeder Schwingung wiederholen und so das Aethertheilchen immer mehr an Geschwindigkeit verlieren. Dieser Verlust geht in das Molekül des Körpers über, dessen Geschwindigkeit wegen seiner viel grössern Masse nur wenig vermehrt wird, eine Vermehrung, die, wie in der Wärmelehre gezeigt wird, eine geringe Temperaturerhöhung der Flamme zur Folge hat.

Der Erfolg ist daher der, dass das in die Flamme eindringende Licht in derselben zurückgehalten wird, da die Bewegung an die Moleküle der Flamme übergeht.

Hat dagegen die in die Flamme eindringende Bewegung eine andere Periode, so erfolgen die Stösse zwischen den Molekülen des Aethers und des Körpers bald in dem einen, bald in dem andern Sinne, die Bewegung des Aethers wird daher bald verzögert, bald beschleunigt, und der Erfolg ist, dass die eindringende Bewegung keine merkliche Aenderung erfährt.

Die vorhin beschriebenen Absorptionserscheinungen in den Flammen ergeben sich nun direkt aus dem Kirchhoff'schen Satze. Für diejenigen Strahlen, welche die Flamme am stärksten aussendet, muss sie nach der Gleichung

$$E = A\,e$$

Maxima des Absorptionsvermögens besitzen, da die Constante e, das Emissionsvermögen eines vollkommen schwarzen Körpers, keine solche von der Farbe abhängige Maxima hat, wie sich schon daraus ergibt, dass in dem Spectrum glühender fester Körper, wie etwa der Kohle, keine hellen Linien vorhanden sind. Dringt nun Licht in die Flamme ein, so wird das Licht, für welches A ein Maximum ist, am stärksten absorbirt. An der Stelle des Spectrums, an der dieses Licht auftritt, ist die Wirkung dann eine doppelte, die Helligkeit wird vermehrt durch das von der Flamme ausgesandte Licht, vermindert durch das in der Flamme absorbirte Licht. Wird nun in der Flamme mehr Licht absorbirt, als sie aussendet, so muss an der Stelle dieser Farbe gegenüber der Umgebung eine Schwächung des Lichtes eintreten, es muss dort eine dunkle Linie auftreten. Damit nun aber die Flamme mehr absorbiren kann, als sie aussendet, muss die Lichtquelle, die das Licht in die Flamme sendet, eine grössere Intensität als die Flamme haben, und da diese Intensität mit steigender Temperatur wächst, muss sie viel heisser sein als die Flamme.

Nehmen wir an, das Absorptionsvermögen der Natriumflamme sei für das gelbe Licht $\frac{1}{n}$, so sendet die Natriumflamme auch $\frac{1}{n}$ des Lichtes eines vollkommen schwarzen Körpers bei derselben Temperatur aus. Würde also ein solcher als Lichtquelle genommen, so würde die Flamme $\frac{1}{n}$ des eindringenden Lichtes absorbiren, aber ebenso viel aussenden, das Licht würde also durch die Flamme nicht geschwächt. Steigern wir aber die Temperatur der Lichtquelle und damit die Intensität des ausgesandten Lichtes etwa auf das 10fache, so hält die Flamme $\frac{10}{n}$ zurück und sendet $\frac{1}{n}$ aus, es tritt also von gelbem Lichte aus der Flamme $\frac{9}{n}$ weniger aus als von den benachbarten Farben des Spectrums. An Stelle des gelben Lichtes muss also eine dunkle Linie auf hellem Grunde erscheinen.

Hiernach müssen in dem Spectrum einer Lichtquelle immer dann dunkle Linien auftreten, wenn das Licht derselben eine Schicht von Dämpfen durchdringen muss, deren Temperatur niedriger ist als die der Lichtquelle, auch dann, wenn die Dämpfe von dem leuchtenden Körper selbst ausgesandt werden. In der That kann man auf diese Weise Lichtquellen herstellen, welche in ihrem Spectrum dunkle Linien zeigen. Lässt man z. B. durch eine Capillarröhre, in deren Enden Drähte eingeschmolzen sind und in der man die Luft sehr stark verdünnt hat, die Entladungen

einer Leydner Flasche hindurchgehen mit möglichst grosser Schlagweite, so reisst der elektrische Funke von der Innenwand der Röhre eine grosse Menge feiner Glassplitter ab, welche in die lebhafteste Weissgluth gerathen. Dieselben geben ein glänzendes Spectrum, in welchem aber, wie ich gefunden habe, die Natriumlinie dunkel erscheint. Aus dem stets natronhaltigen Glase verdampft nämlich dann Natrium, da somit die Splitter in einer Atmosphäre von Natriumdampf glühen, wird in derselben das entsprechende Licht absorbirt, und die Stelle, wo das Natriumlicht erscheinen würde, erscheint in der hellen Umgebung dunkel.

Damit ist auch die Erklärung der Fraunhofer'schen Linien im Sonnenspectrum, welche nicht durch Absorption in der Atmosphäre entstehen, gegeben. Kirchhoff hat hervorgehoben, dass die Sonne jedenfalls ein Körper sein muss, der sich in der höchsten Weissgluth befindet. Der glühende Sonnenkern muss dann, wenn die Sonne überhaupt verdampfbare Substanzen enthält, von einer Dampfatmosphäre umgeben sein, und diese Dämpfe müssen dann alle jene Strahlen in sich absorbiren, die sie selbst aussenden. Das continuirliche Spectrum des weissglühenden Sonnenkerns muss dadurch an allen den Stellen dunkle Linien zeigen, wo die von den Dämpfen ausgesandten Strahlen auftreten würden. Eine Vergleichung der Fraunhofer'schen Linien mit den hellen Linien, welche von den verschiedenen Dämpfen ausgesandt werden, kann uns somit Aufschluss geben, welche verdampfbare Substanzen in der Sonne sind. Aus der Uebereinstimmung des Natriumlichtes mit der dunklen Linie D schliessen wir somit, dass die Sonne jedenfalls Natrium enthält.

§. 152.

Emission des Lichtes; Spectralanalyse. Der in dem vorigen §. besprochene Kirchhoff'sche Satz führt zu einer Reihe der wichtigsten Folgerungen betreffs des von den Körpern ausgesandten Lichtes. Wir wissen, dass die Körper nur dann selbständig Licht aussenden, wenn sie bis zur sogenannten Glühhitze erhitzt werden. Eine prismatische Untersuchung des etwa von einem Platindraht ausgesandten Lichtes, den man durch einen galvanischen Strom nach und nach stärker und stärker erhitzt, zeigt dann, dass das bei beginnendem Glühen ausgesandte Licht nur Roth enthält und zwar zunächst das äusserste Roth; steigert man dann die Erhitzung, so wächst die Intensität dieses rothen Lichtes, gleichzeitig treten aber nach und nach die übrigen Farben hinzu, das Spectrum dehnt sich gegen das Blaue hin stetig wachsend aus, so dass also die Strahlen grösserer Brechbarkeit erst in höherer Temperatur ausgesandt werden als diejenigen kleinerer Brechbarkeit. Da nun ein Platindraht in allen Temperaturen undurchsichtig ist, folgt, dass sein Absorptionsvermögen für alle Strahlen von Null verschieden ist; deshalb können wir aus diesen Erfahrungen nach der Gleichung

$$E = A \cdot e$$

auch über das Verhalten eines vollkommen schwarzen Körpers, also den Verlauf der Grösse e schliessen, dass bei allen Temperaturen, die niedriger sind als die sogenannte Glühhitze, die Grösse e, also das Emmissionsvermögen des vollkommen schwarzen Körpers gleich Null ist. Denn da

A für Platin nicht gleich Null ist, müsste, wenn e von Null verschieden wäre, auch E von Null verschieden sein, oder der Platindraht hätte unterhalb der Glühhitze Licht aussenden müssen. Der Werth e ist dann zuerst von Null verschieden für die Strahlen grösserer Wellenlänge und in immer höhern Temperaturen für die kleinern Wellenlängen; mit steigender Temperatur wächst dann e für alle Strahlen, wie wir in der Wärmelehre zeigen werden, sehr stark. Da nun für alle Körper das Emissionsvermögen gleich ist dem Producte aus ihrem Absorptionsvermögen und dem Emissionsvermögen eines vollkommen schwarzen Körpers, so folgt, dass für alle Körper erst bei einer bestimmten und für alle gleichen Temperatur das Emissionsvermögen für eine bestimmte Farbe von Null verschieden ist, oder dass alle Körper, für welche nicht A absolut gleich Null ist, bei derselben Temperatur anfangen müssen rothes Licht auszusenden, bei einer andern höhern, aber wieder für alle gleichen, gelbes, grünes u. s. f.

Die Richtigkeit dieser Folgerung ist schon vor der Kenntniss des Kirchhoff'schen Satzes durch einen Versuch von Draper gezeigt worden, der in einen Flintenlauf eine Anzahl kleiner Stücke von sehr verschiedenen festen Körpern, Marmor, Flussspath, Coaks und verschiedene Metalle einschloss und dieselben zusammen erhitzte. Es ergab sich, dass beim Erhitzen alle gleichzeitig leuchtend wurden, und beim Erkalten alle wieder gleichzeitig erloschen.

Wenn nun auch bei einer gegebenen Temperatur die Function e einen bestimmten Werth hat, muss doch das von den verschiedenen Körpern ausgesandte Licht eine sehr verschiedene Zusammensetzung haben, da die Intensität des ausgesandten Lichtes einer bestimmten Farbe dem Werthe, den A bei dem betreffenden Körper für diese Farbe hat, proportional ist. Würde A für alle Farben gleich Null, der Körper also absolut durchsichtig sein, so könnte er selbst in der höchsten Temperatur kein Licht aussenden. Ein solcher Körper ist, wie Kirchhoff gezeigt hat, phosphorsaures Natron; bringt man dasselbe in einen Ring von Platindraht und schmilzt es in der nicht leuchtenden Flamme des Bunsen'schen Brenners, so bildet es in demselben eine vollkommen klare flüssige Linse, welche gar nicht leuchtet, selbst wenn der Platindraht in heller Weissgluth strahlt.

Da die Zusammensetzung des Lichtes, welches ein Körper ausstrahlt, wesentlich von dem Absorptionsvermögen abhängt, dieses aber durch die chemische und physikalische Beschaffenheit des Körpers bedingt wird, so folgt, dass auch das Spectrum, welches das von einem Körper ausgestrahlte Licht liefert, wesentlich von seiner Natur abhängt. Nennen wir nämlich das Emissionsvermögen eines schwarzen Körpers für die verschiedenen Farben $e_1, e_2, e_3 \ldots e_n$, das Absorptionsvermögen eines beliebigen Körpers für dieselben Farben $A_1, A_2 \ldots A_n$, so ist das bei der betreffenden Temperatur von dem Körper ausgesandte Licht S

$$S = A_1 e_1 + A_2 e_2 + A_3 e_3 \ldots . A_n e_n.$$

Eine nähere Untersuchung der Umstände, von denen die Grössen A abhängen, lässt uns erkennen, wodurch die Intensität der verschiedenen Farben in dem Spectrum eines Körpers bedingt ist. Wir wollen die Lichtmenge einer bestimmten Farbe, welche eine Schicht eines Körpers von

der Dicke 1 absorbirt, α nennen, und sei ε die Menge derselben Farbe, welche diese Schicht aussendet, so dass

$$\varepsilon = \alpha\, e,$$

worin e das Emissionsvermögen des schwarzen Körpers bedeutet. Hat nun der Körper die Dicke d, so ergibt sich nach zuerst von Zöllner durchgeführten Betrachtungen das von dem Körper ausgesandte Licht in folgender Weise.

Die erste Schicht strahlt die Lichtmenge

$$\varepsilon_1 = \alpha\,.\,e$$

nach aussen hin; dieselbe Lichtmenge strahlt die zweite Schicht, von dieser Lichtmenge wird aber in der ersten Schicht die Menge $\alpha\,\varepsilon_1$ absorbirt, so dass nach aussen gelangt

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1\,(1 - \alpha) = \alpha\, e\,(1 - \alpha);$$

die dritte Schicht strahlt dasselbe aus, von derselben wird in der zweiten Schicht aber schon $\alpha\,\varepsilon_1$ absorbirt, so dass an der Grenze der ersten Schicht die Lichtmenge $\alpha\, e\,(1 - \alpha)$ ankommt; von dieser wird aber dann in der ersten Schicht wieder der Bruchtheil α absorbirt, so dass nach aussen hervortritt

$$\varepsilon_3 = \alpha\, e\,(1 - \alpha) - \alpha\,.\,\alpha\, e\,(1 - \alpha) = \alpha\, e\,(1 - \alpha)^2.$$

In derselben Weise findet man für die folgenden Schichten, dass die von jeder nach aussen hervortretende Lichtmenge abnimmt wie die Glieder einer geometrischen Reihe, deren Quotient $1 - \alpha$ ist. Das von der d Schicht heraustretende Licht ist

$$\varepsilon_d = \alpha\, e\,(1 - \alpha)^{d-1}.$$

Das den Körper nach der betrachteten Richtung überhaupt verlassende Licht E ist dann die Summe des von den einzelnen Schichten herrührenden

$$E = \alpha\, e\,\{1 + (1 - \alpha) + (1 - \alpha)^2 + \cdots\cdots (1 - \alpha)^{d-1}\}.$$

Bilden wir die Summe der in der Klammer stehenden geometrischen Reihe, so wird

$$E = e\,\{1 - (1 - \alpha)^d\}.$$

Es folgt also zunächst, dass der Coefficient A für die Menge des ausgesandten Lichtes wesentlich von der Dicke des strahlenden Körpers abhängt. Da α zwischen Null und 1 liegt, so ist auch der Werth von $1 - \alpha$ ein echter Bruch; ist nun α nicht absolut gleich Null, so folgt, dass mit wachsender Dicke $(1 - \alpha)^d$ sich immer mehr der Null nähert, es folgt weiter, dass für alle Körper, bei denen überhaupt irgend eine Absorption stattfindet, mit wachsender Dicke der Coefficient A für alle Farben sich dem Werthe 1 nähert, den er bei unendlicher Dicke erreicht. Bei wachsender Dicke nähert sich also für alle Körper das Emissionsvermögen demjenigen eines vollkommen schwarzen Körpers, es muss deshalb bei hinreichend grosser Dicke das Spectrum des von allen Körpern ausgesandten Lichtes demjenigen des von schwarzen Körpern ausgesandten annähernd gleich werden. Welche Dicke d dazu erforderlich ist, hängt von dem Werthe α ab, die Dicke ist um so kleiner, je grösser α ist.

Der Werth von α, das Absorptionsvermögen einer Schicht von der Dicke 1 hängt nun ausser von der Natur der absorbirenden Substanz noch wesentlich von ihrer Dichtigkeit ab. Die Absorption ist, nach den Bemerkungen von Stokes, Abgabe der Bewegung des schwingenden Aethers an die Moleküle des Körpers; die Absorption muss daher mit der Menge der Moleküle, die das Licht auf seinem Wege durch den Körper trifft, zunehmen, und sie muss immer dann, wenn das Licht auf dieselbe Anzahl von Molekülen trifft, auch dieselbe sein. Dann ist es gleichgültig, ob wir die Zahl der von dem Licht getroffenen Moleküle durch eine Vermehrung der Dicke der durchstrahlten Schicht oder durch eine Vermehrung der Dichte bei constanter Dicke der Schicht vergrössern. Nennen wir deshalb jetzt das Absorptionsvermögen einer Schicht von der Dicke 1, wenn gleichzeitig die Substanz die Dichte 1 hat, $\mathfrak{a}$, so muss das Absorptionsvermögen α für eine Dichte δ sich gerade so zu $\mathfrak{a}$ verhalten, wie jenes einer Schicht von der Dicke δ zu dem einer Schicht gleicher Dichte von der Dicke 1, oder wir erhalten

$$\alpha = \left(1 - (1 - \mathfrak{a})^{\delta}\right).$$

Ganz dasselbe muss nun für die Emission des Lichtes gelten, die Menge des von einer Schicht von der Dicke 1 ausgesandten Lichtes ε ist gegeben durch

$$\varepsilon = \left\{1 - (1 - \mathfrak{a})^{\delta}\right\} e$$

und die Menge des von einer Schicht von der Dicke d und der Dichtigkeit δ ausgesandten Lichtes einer bestimmten Farbe ist

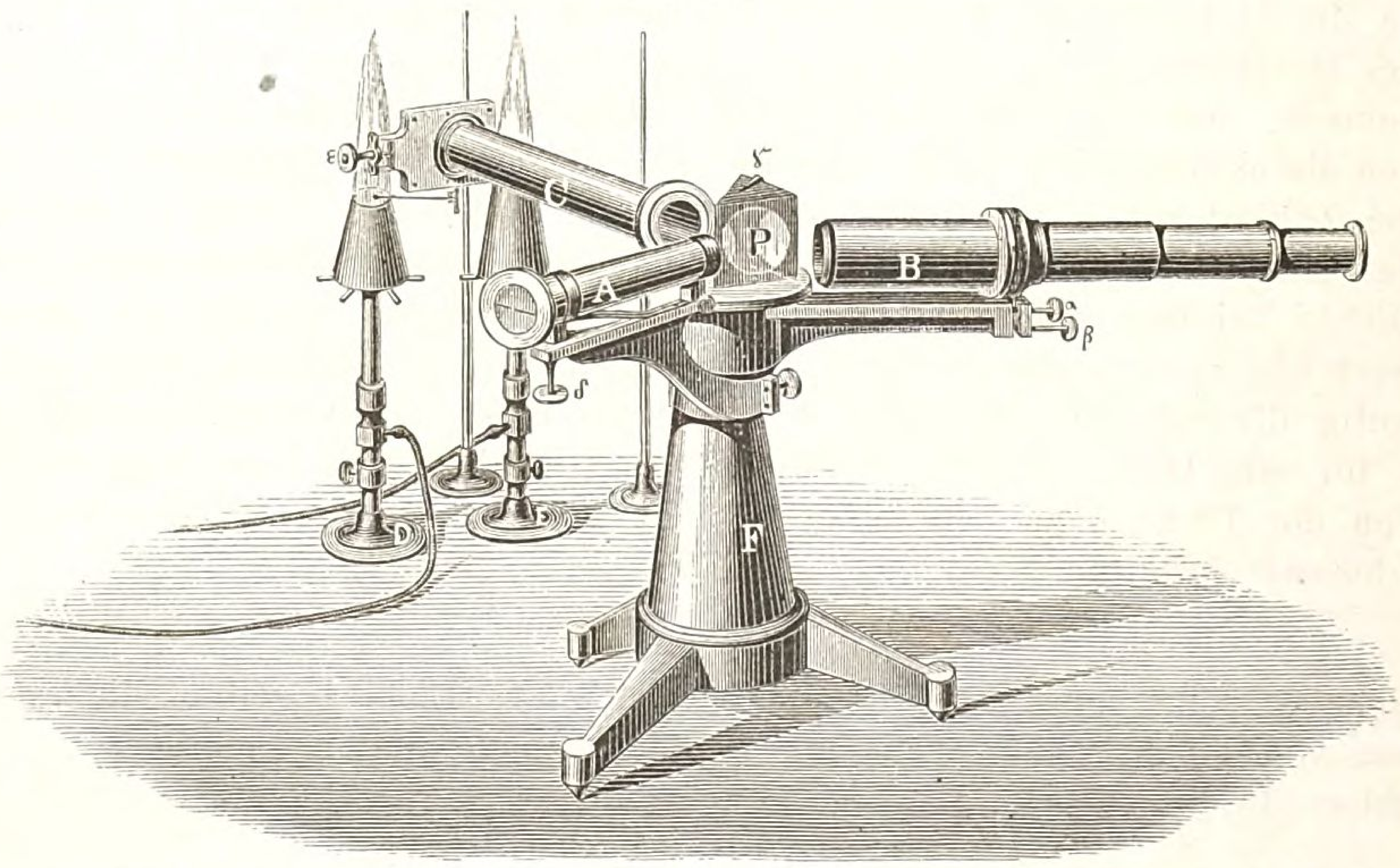
$$E = e\left\{1 - \left[1 - \left(1 - (1 - \mathfrak{a})^{\delta}\right)\right]^{d}\right\} = e\left\{1 - (1 - \mathfrak{a})^{d\delta}\right\},$$

die Menge des ausgesandten Lichtes nimmt also bei constanter Dicke mit wachsender Dichte ebenso zu, wie bei wachsender Dicke und constanter Dichte; auch bei wachsender Dichte muss also das Spectrum für alle Körper dem eines schwarzen Körpers immer ähnlicher werden.

Die Grösse $\mathfrak{a}$ in diesem Ausdrucke hängt nun nur mehr von der Natur der absorbirenden Substanz ab. Es folgt somit, dass wenn eine Substanz charakteristische Maxima des Absorptionsvermögens für gewisse Farben hat, dieselben auch charakteristische Maxima des Emissionsvermögens hat, somit helle Linien in dem Spectrum des ausgesandten Lichtes zeigen muss, wenn wir dünne Schichten der Substanz zum Leuchten bringen und zugleich dafür sorgen, dass in denselben die Substanz nur eine geringe Dichtigkeit hat. Feste und flüssige Körper werden daher immer wegen zu grosser Dichte ein mehr oder weniger continuirliches Spectrum zeigen, wie es auch die Erfahrung zeigt. Das den charakteristischen Maximis des Absorptionsvermögens entsprechende, aus einzelnen hellen Linien bestehende Spectrum muss dagegen auftreten, wenn wir geringe Mengen der Substanz in Dampfform zum Glühen bringen. Diese aus dem Kirchhoff'schen Satze sich ergebende Folgerung ist schon längere Zeit von verschiedenen Chemikern und Physikern, unter andern von Ångström und Plücker geahnt worden, in seiner Allgemeinheit wurde aber der Satz, dass jede Substanz ein sie charakterisirendes Spectrum habe, und dass daher das Spectrum zur Erkennung der Substanzen zur chemischen Analyse dienen könne, erst von Kirchhoff und Bunsen erkannt.

Kirchhoff und Bunsen benutzten zur Untersuchung der Spectra der chemischen Elemente, insbesondere der Metalle theils den grossen Spectralapparat Fig. 184, theils den kleineren Apparat Fig. 191, der jetzt in den

Fig. 191.



meisten Laboratorien als Spectralapparat benutzt wird. Auf das obere Ende des gusseisernen Fusses F ist eine Messingplatte geschraubt, die das Rohr C und das Flintglasprisma P trägt. Das Rohr C dient als Collimatorrohr, es hat an dem einen Ende einen Spalt, an dem andern eine Sammellinse, in deren Brennweite sich der Spalt befindet. An dem Fusse sind weiter zwei drehbare Arme befestigt, deren einer das Fernrohr B von etwa achtfacher Vergrösserung, deren anderer das Skalenrohr A trägt; letzteres enthält in seinem dem Prisma zugewandten Ende eine Sammellinse und an seinem andern Ende in der Brennweite der Linse eine kleine photographirte Skala. Das Rohr A wird so gestellt, dass man in dem Fernrohr B gleichzeitig das Spectrum und in Folge der Reflexion des in das Skalenrohr eindringenden Lichtes an der Fläche des Prismas das Bild der Skala sieht. Man sieht deshalb die etwaigen hellen Linien des Spectrums auf die Skala projicirt, und kann so die Lage der Linien bestimmen, wenn man zunächst die Skala nach dem Sonnenspectrum graduirt, das heisst, die Theilstriche der Skala bestimmt hat, an denen bestimmte Fraunhofer'sche Linien erscheinen. Um direkt die Lage der Linien in dem Spectrum zweier Lichtquellen vergleichen zu können, ist vor der untern Hälfte des Spaltes ein kleines Prisma angebracht, welches das von einer passend seitlich aufgestellten Lampe herkommende Licht total in das Collimatorrohr hinein reflectirt, so dass man das Spectrum der vor dem Spalt stehenden Flamme und der seitlich aufgestellten unmittelbar übereinander sieht.

Als Lichtquelle wendet man nach dem Vorgange von Kirchhoff und Bunsen meist die nichtleuchtende Flamme des Bunsen'schen Brenners an, in die man die betreffenden Salze, an einen Platindraht geschmolzen, hineinschiebt, oder wenn es sich um die Untersuchung der Spectra von

Metallen handelt, den elektrischen Funken, den man zwischen den Drahtenden des zu untersuchenden Metalles überspringen lässt.

Die Spectra der Metalle, deren helle Linien Kirchhoff und Bunsen bestimmten, sind auf der grossen Zeichnung des Sonnenspectrums, welche Kirchhoff in den Abhandlungen der Berliner Akademie mitgetheilt hat, eingezeichnet.

Aus den Versuchen von Kirchhoff und Bunsen schien sich zu ergeben, dass die Spectra der Metallsalze nur von dem in ihnen vorhandenen Metalle abhängig seien, so dass sämmtliche Salze eines und desselben Metalles dasselbe Spectrum, das der glühenden Dämpfe des Metalles zeigten. Die beiden Forscher machten indess darauf aufmerksam, dass die Salze in der Flamme wahrscheinlich zersetzt würden, und dass dann nur das von den Metalldämpfen ausgesandte Licht hell genug sei, um ein Spectrum zu liefern. Das ist durch die Versuche von A. Mitscherlich bestätigt worden, der die Spectra der Chlorverbindungen dadurch erhielt, dass er durch gleichzeitiges Einführen von etwas Chlorwasserstoffsäure in die Flamme die Zersetzung der Salze verhinderte. Jede unzersetzt zum Glühen gebrachte Verbindung liefert in Dampfform leuchtend ihr charakteristisches Spectrum.

§. 153.

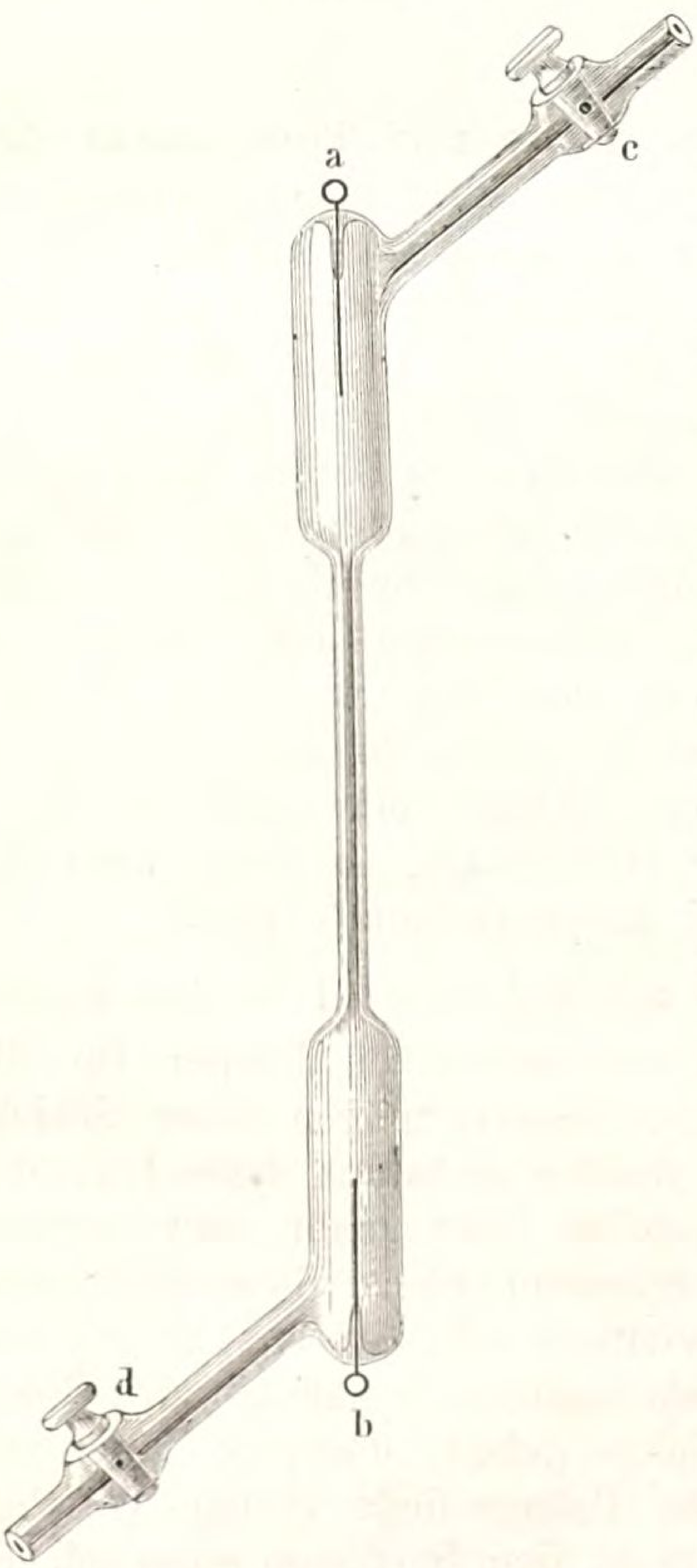
Abhängigkeit der Spectra von der Dicke und Temperatur der strahlenden Schicht. Nach den Entwicklungen des vorigen Paragraphen können wir die aus einzelnen hellen, den absoluten Maximis des Emissionsvermögens entsprechenden Linien bestehenden Spectra, welche eben, weil sie nur aus einer begrenzten Anzahl von hellen Linien bestehen, geeignet sind, die betreffenden Substanzen zu charakterisiren, nur darstellen, wenn wir den leuchtenden Dämpfen eine sehr geringe Dichte geben, oder sehr dünne Schichten derselben zum Leuchten bringen. Deshalb ist das beste Mittel zur Darstellung desselben der elektrische Funke, der eine Lichtlinie von äusserster Feinheit, fast nur eine lineare Reihe leuchtender Moleküle darstellt. Die Flammen sind bei ihrer gegenüber den Wellenlängen des Lichtes sehr grossen Dicke nur für solche Substanzen geeignet, welche nur in geringer Menge verdampfen. Bringt man dagegen in die Flammen Gase oder Dämpfe von grosser Dichtigkeit, so muss nach der im vorigen §. abgeleiteten Gleichung für das ausgesandte Licht

$$S = e_1\left(1 - (1 - \mathfrak{a}_1)^{d\delta}\right) + e_2\left(1 - (1 - \mathfrak{a}_2)^{d\delta}\right) + \cdots e_n\left(1 - (1 - \mathfrak{a}_n)^{d\delta}\right)$$

in der $e_1, e_2 \ldots$ die Emissionsvermögen der schwarzen Körper für die verschiedenen Farben, $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2 \ldots$ die Absorptionsvermögen einer Schicht von der Dicke und Dichte 1 der betreffenden Substanz bedeuten, das Spectrum ein ganz anderes werden. Dasselbe muss mehr oder weniger continuirlich werden, sich aber von dem Spectrum eines glühenden festen Körpers dadurch unterscheiden, dass es vielfach schattirt aus hellern und dunklern Partieen besteht. Im Allgemeinen kann man nämlich den Gasen in den Flammen nicht eine so grosse Dichte geben, dass, so lange die Temperatur nicht eine sehr hohe ist, die Unterschiede in den Werthen von $\mathfrak{a}$ verschwinden, es muss sich deshalb in dem Spectrum eines solchen leuchtenden Gases jeder Unterschied des Absorptionsvermögens durch eine grössere oder geringere Helligkeit zu erkennen geben.

Für die meisten Gase und Dämpfe ist das Absorptionsvermögen oder Emissionsvermögen zu klein, so dass bei den in Flammen zu erreichenden Dichten derselben und bei der Temperatur der Flammen eine merkliche Aussendung von Licht überhaupt noch nicht stattfindet; durch Anwendung des stark absorbirenden Joddampfes in der nicht leuchtenden Flamme des Wasserstoffs habe ich indess zeigen können, dass die Spectra der Gase in Flammen diesen Charakter haben. Das Spectrum war ein continuirliches, zeigte aber alle die Schattirungen, welche auch das Spectrum des durch eine entsprechend dicke Schicht des Joddampfes hindurchgegangenen Tageslichtes zeigt. Eine Bestimmung der Lage der hellen und dunklen Partieen im Spectrum und eine Vergleichung mit der Lage der hellen und dunklen Partieen in dem Spectrum des durch Joddampf hindurchgegangenen Tageslichtes bewies dann, dass in dem Flammenspectrum gerade jene Partieen hell waren, die in dem Absorptionsspectrum dunkel sind und umgekehrt. Man konnte so direkt erkennen, dass jedem Maximum des Absorptionsvermögens auch ein solches des Emissionsvermögens entspricht.

Fig. 192.



Das aus einzelnen hellen Linien bestehende Spectrum des Joddampfes lässt sich in der Flamme nicht erhalten, da bei der dazu erforderlichen geringen Dichte des Joddampfes die Flamme zu schwach leuchtet.

Man erhält dasselbe und ebenso die verschiedenen Spectra der übrigen Gase durch Anwendung des elektrischen Inductionsstromes, wie das von Plücker, Plücker und Hittorf und von mir nachgewiesen ist. Am bequemsten wendet man zu diesen Versuchen sogenannte Geissler'sche Röhren von der Form Fig. 192 an; dieselben bestehen aus zwei weitern Röhren, welche durch ein längeres oder kürzeres Stück einer capillaren Röhre mit einander verbunden sind. In die Enden der weiten Röhren bei *a* und *b* sind Platindrähte eingeschmolzen, ausserdem sind an die weitern Röhren seitliche Röhren *c* und *d* mit Glashähnen angeschmolzen. Die capillaren Theile liefern in Folge der Concentration des Stromes eine grössere Helligkeit, dieser Theil der Röhre wird deshalb vor den Spalt des Spectralapparates gebracht. Der capillare Theil ist indess nicht wesentlich, man kann bei Benutzung kräftiger Inductionsströme auch überall gleich weite Röhren anwenden. Man verbindet dann die Enden des Inductionsdrahtes mit den Drähten *a* und *b*.

Wie wir später in der Elektricitätslehre nachweisen werden, geht bei

gewissen nicht zu grossen Drucken der Inductionsstrom so durch das Gas der Röhren, dass die ganze Gasmasse in den Röhren leuchtend wird. Bei dieser Art der Entladung, die ich das positive Büschellicht genannt habe, leuchten Schichten des Gases, welche gegenüber den Wellenlängen des Lichtes eine sehr grosse Dicke haben; die meisten Gase, welche überhaupt bei der Temperatur, die sie bei dieser Entladung haben, hinreichend hell leuchten, geben dann schön schattirte continuirliche Spectra, die ich als Bandenspectra bezeichnet habe, ähnlich dem in Fig. 3 Taf. I abgebildeten Bandenspectrum des Stickstoffs. Die Schattirungen sind bei jedem Gase andere, so dass man bei genauer Betrachtung an denselben die Gase erkennen kann. Steigert man den Druck des Gases über eine gewisse für jedes Gas und je nach den Dimensionen der angewandten Röhre andere Grenze hinaus, so tritt das positive Büschellicht nicht mehr auf, sondern der elektrische Strom durchsetzt die Röhren in einzelnen elektrischen Funken, welche dann nur mehr die einzelnen in der Funkenbahn liegenden Moleküle zum Glühen bringen. Diese Funken liefern dann ein aus einzelnen hellen Linien bestehendes Spectrum, wie Fig. 4 der Tafel es für den Stickstoff zeigt. Die beiden Spectra des Stickstoffs sind in gleichem Maassstabe gezeichnet, so dass die durch beide hindurchgelegte Linie H_α in beiden die Stelle der rothen Linie C, die Linie N_α die der gelben Linie D, H_β die der grünen Linie F und H_γ die einer dunklen Linie eben vor G bedeutet. Die drei Linien H_α, H_β und H_γ sind die drei hellsten Linien, welche der durch Wasserstoff gehende elektrische Funke liefert, sie bilden das Linienspectrum des Wasserstoffs.

Vergleicht man die Lage der hellen Linien im Linienspectrum mit dem Bandenspectrum, so findet man, dass keineswegs immer im Bandenspectrum an der Stelle, wo im Linienspectrum die Linien liegen, eine gegen die der Umgebung hervorragende Helligkeit ist, in manchen Fällen sind sogar im Bandenspectrum diejenigen Stellen, in welchen im Linienspectrum sich Linien befinden, weniger hell als benachbarte. Es rührt das einmal daher, dass nach unsern Entwicklungen die Unterschiede des Emissionsvermögens immer mehr verschwinden, je dicker die Schicht ist, und andererseits daher, dass die Temperatur des Gases in dem elektrischen Funken eine viel höhere ist als in der Büschelentladung.

Der Einfluss der Temperatursteigerung ist ein doppelter, indem erstens dadurch für jede einzelne Farbe der Werth von e, das Emissionsvermögen der vollkommen schwarzen und dadurch das Emissionsvermögen aller Körper ganz beträchtlich zunimmt. Nach welchem Gesetze für die verschiedenen Farben die Zunahme von e mit der Temperatur erfolgt, und ob sie für alle Farben nach dem gleichen Gesetze erfolgt, das hat sich bisher noch nicht bestimmen lassen, nur das werden wir in der Wärmelehre nachweisen können, dass die Zunahme des ausgestrahlten Lichtes eine viel stärkere ist als diejenige der Temperatur.

Zweitens aber wächst im Allgemeinen für alle Körper auch das Absorptionsvermögen, also der Coefficient A in der die Emission darstellenden Gleichung

$$E = A\,e.$$

Dass das Letztere der Fall ist, beweist allein schon der Umstand, dass die meisten durchsichtigen Körper in der Glühhitze mehr oder weniger

undurchsichtig werden; so ist glühendes Glas fast ganz undurchsichtig und ebenso sind glühende Gase in Schichten, in welchen sie bei gewöhnlicher Temperatur fast vollkommen durchsichtig sind, sehr viel weniger durchsichtig. Auch hier kennt man das Gesetz der Zunahme nicht. Wie in Folge beider Umstände die Emissionsverhältnisse sich ändern müssen, lässt sich deshalb noch nicht bestimmen, man kann deshalb auch nicht im voraus angeben, wie die Lage der Linien in dem einer viel höheren Temperatur angehörigen Linienspectrum gegenüber den hellern oder dunklern Stellen des Bandenspectrums sein muss. Das würde nur möglich sein, wenn man im Stande wäre, dickere Schichten des Gases auf die Temperatur des elektrischen Funkens zu erhitzen, was bis jetzt noch nicht möglich ist.

Aus der Zunahme von A und e für alle Farben folgt, dass mit wachsender Temperatur das Spectrum des auch von dünnen Schichten ausgesandten Lichtes sich dem der schwarzen Körper nähern muss, um so mehr, da A nur bis zur Einheit wachsen kann. Denn deshalb muss für jene Farben, für welche A in niedrigern Temperaturen kleiner ist, die Zunahme von A eine stärkere sein als für jene, für welche schon in niedrigern Temperaturen A der Einheit näher liegt. In der That habe ich auch nachweisen können, dass alle Gase in hinreichend hohen Temperaturen ein continuirliches Spectrum geben, indem man den Druck des Gases in den Geissler'schen Röhren steigert. Dadurch wird die Ausbildung des Funkens eine schwierigere, er kann erst das Gas durchsetzen, wenn die Dichtigkeit der Elektricität an den Drähten eine sehr grosse geworden ist. In jedem Funken tritt deshalb eine grosse Menge von Elektricität über, und dadurch wird die Temperatur der Funkenbahn eine sehr hohe. Bei hinreichend grossem Druck liefern deshalb alle Gase ein continuirliches Spectrum, ähnlich dem der glühenden festen Körper.

§. 154.

Fluorescenz. Bei Mittheilung der Stokes'schen Erklärung des Kirchhoff'schen Satzes wurde erwähnt, dass die Absorption des Lichtes dadurch zu Stande kommt, dass die Bewegung des Aethers an die Moleküle der Körper übergeht, und dass die an die Körpermoleküle abgegebene Bewegung im Allgemeinen eine Temperaturerhöhung des Körpers bewirkt. In manchen Fällen tritt indess noch eine andere Wirkung des absorbirten Lichtes hervor, indem die Körper unter der Einwirkung des Lichtes theils wieder Licht ausstrahlen, theils chemische Aenderungen erfahren.

Die erste der Wirkungen dieser Art, welche Stokes mit dem Namen der Fluorescenz bezeichnet hat, wurde von Brewster und Herschel entdeckt, welche fanden, dass gewisse Körper, wenn man sie mit Tages- oder Sonnenlicht beleuchtet, ein schwaches, in der Regel von der Farbe des beleuchtenden Lichtes verschiedenes Licht aussenden.

Eine wasserklare Lösung von schwefelsaurem Chinin z. B. vom Tageslicht beleuchtet zeigt an der Oberfläche, an welcher das Licht in die Flüssigkeit eindringt, einen schwachen zartblauen Schein; lässt man durch eine Linse mit kurzer Brennweite einen Kegel von Sonnenstrahlen in die Flüssigkeit eintreten, so wird dieser Kegel ebenfalls in blauem Lichte leuchtend, am stärksten dort, wo das Licht in die Flüssigkeit eintritt,

schwächer gegen die Spitze des Kegels hin. Dass diese Erscheinung nicht etwa einer Färbung der eindringenden Strahlen durch Absorption zuzuschreiben ist, ergibt sich daraus, dass das durch die Flüssigkeit hindurchgetretene Licht ebenso farblos erscheint, wie das eintretende, und weiter daraus, dass dieser blaue Kegel von allen Seiten sichtbar ist. Aehnliches zeigt sich bei dem alkoholischen Extract von Rinde der Rosskastanie, welche ebenfalls blaues Licht zeigt, bei Lösungen von Chlorophyll, welche rothes Licht geben, während die Lösung selbst grün ist, bei Curcumatinctur, welche grünes Licht gibt, während die Tinctur selbst hellbraun ist, u. a. m. Auch bei festen Körpern zeigt sich diese Erscheinung, so bei dem Flussspath, in welchem dieses Fluorescenzlicht violett blau, im Uranglas, bei welchem dasselbe grün gefärbt ist.

Brewster und Herschel glaubten in dieser Erscheinung eine eigenthümliche Dispersion des Lichtes zu erkennen, Stokes zeigte aber, dass die Fluorescenz eine Wirkung des absorbirten Lichtes ist, und zwar, dass die Körper durch die Wirkung des absorbirten Lichtes selbst leuchtend werden.

Schon die Beobachtungen von Brewster und Herschel, nach denen sich die Erscheinung stets nur in oder nahe der Oberfläche zeigt, durch die das Licht in die Körper eindringt, machten es wahrscheinlich, dass dasjenige im eindringenden Licht, was das Fluoresciren hervorbringt, um so mehr verschwindet, eine je dickere Schicht der Substanz das Licht durchdringt. Der direkte Versuch beweist das, denn Licht, welches eine nur 1 Centm. dicke Schicht einer fluorescirenden Substanz durchdrungen hat, ist nicht mehr im Stande, dieselbe Substanz zum Fluoresciren zu bringen. Das scheinbar ganz ungeänderte, durch eine Schicht von schwefelsaurem Chinin hindurchgegangene Licht lässt eine andere Lösung desselben Körpers als eine klare Flüssigkeit erscheinen, ohne auch nur die geringste Spur des blauen Lichtes.

Dass nun das Fluorescenzlicht nicht dadurch entsteht, dass das die Fluorescenz erregende Licht in eigenthümlicher Weise zerstreut wird, sondern dass der fluorescirende Körper das Licht wie ein selbstleuchtender Körper ausstrahlt, folgt daraus, dass das Fluorescenzlicht im Allgemeinen verschieden ist, aus andern Farben besteht als das absorbirte, die Fluorescenz erregende Licht. Es folgt das zunächst daraus, dass die Farbe des Fluorescenzlichtes im Allgemeinen nur wenig geändert wird, wenn man das erregende Licht, indem man es durch ein farbiges Glas gehen lässt, färbt. So ist z. B. die Fluorescenz der Curcumatinctur immer grün, ob man sie mit weissem Lichte oder mit Licht hervorruft, welches durch ein tiefblaues oder violettes Glas oder auch durch eine blaue Lösung von schwefelsaurem Kupferoxyd-Ammoniak gefärbt ist. Betrachtet man dagegen das Fluorescenzlicht durch farbige Gläser, so erscheint es in der Farbe derselben, wenn es dieselben überhaupt durchstrahlen kann, ein Beweis, dass die Farbe des Lichtes eine zusammengesetzte ist.

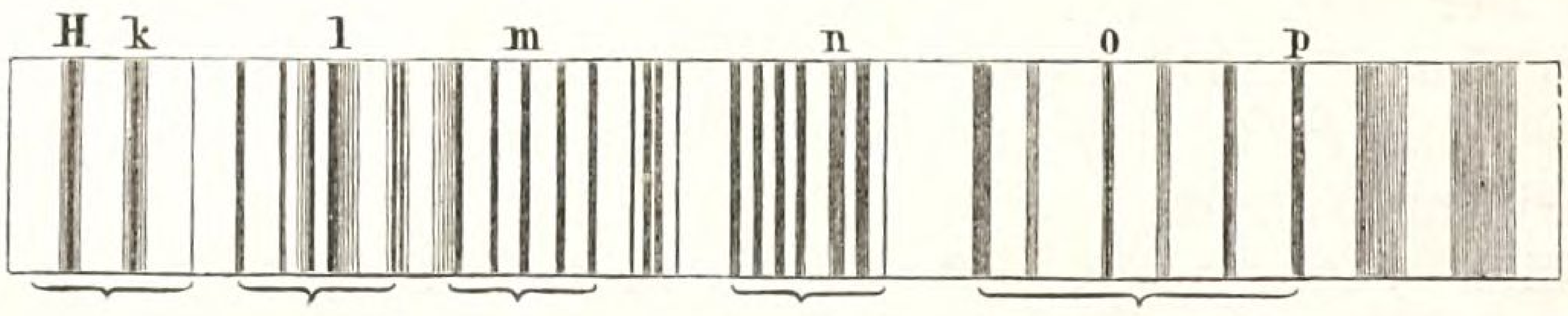
Noch deutlicher zeigt sich das, wenn man die Fluorescenz durch ein Spectrum hervorruft und das Fluorescenzlicht durch ein Prisma betrachtet.

Wirft man ein Sonnenspectrum auf ein etwa mit Lösung von schwefelsaurem Chinin gefülltes parallelepipedisches Glasgefäss, so dass man etwa gerade in der Vorderfläche der Flüssigkeit die Fraunhofer'schen Linien

erkennen kann, so findet man, dass die weniger brechbaren Strahlen des Spectrums bis etwa zur Linie *G* durch die Flüssigkeit hindurchgehen, ohne Fluorescenz zu erregen, und ohne absorbirt zu werden. Bei *G* beginnt die Fluorescenz eben sichtbar zu werden, die Helligkeit wächst gegen *H* hin und bei *H* zeigt das Licht bereits die zarte himmelblaue Färbung. Dabei findet man dann, dass die Fluorescenz sich keineswegs auf die sichtbaren Theile des Spectrums beschränkt, sondern dass sie noch weit über das Violette hinaus sichtbar ist, ein Beweis, dass in dem Sonnenlicht noch eine Menge von Strahlen vorhanden sind, die für gewöhnlich dem Auge nicht wahrnehmbar sind, die es erst werden, wenn man sie auf eine fluorescirende Substanz fallen lässt, in welcher sie das Fluorescenzlicht erregen. Beim schwefelsauren Chinin und einer Anzahl anderer Substanzen ist sogar das durch die ultravioletten Strahlen erregte Licht weitaus das hellste.

In dem durch Fluorescenz sichtbaren ultravioletten Lichte lassen sich eine ganze Reihe Fraunhofer'scher Linien erkennen, zum Beweise, dass auch in diesem Theile des Spectrums durch die Absorption in der Sonnenatmosphäre eine nicht unbeträchtliche Anzahl von Strahlen fortgenommen wird, denn alle im ultravioletten Theile des Spectrums fluorescirenden Substanzen zeigen dieselben Linien an denselben Stellen des Spectrums. Stokes liefert von dem ultravioletten Theile des Spectrums die Zeichnung Fig. 193, in welcher die mit *H* bezeichnete Linie die Fraunhofer'sche

Fig. 193.



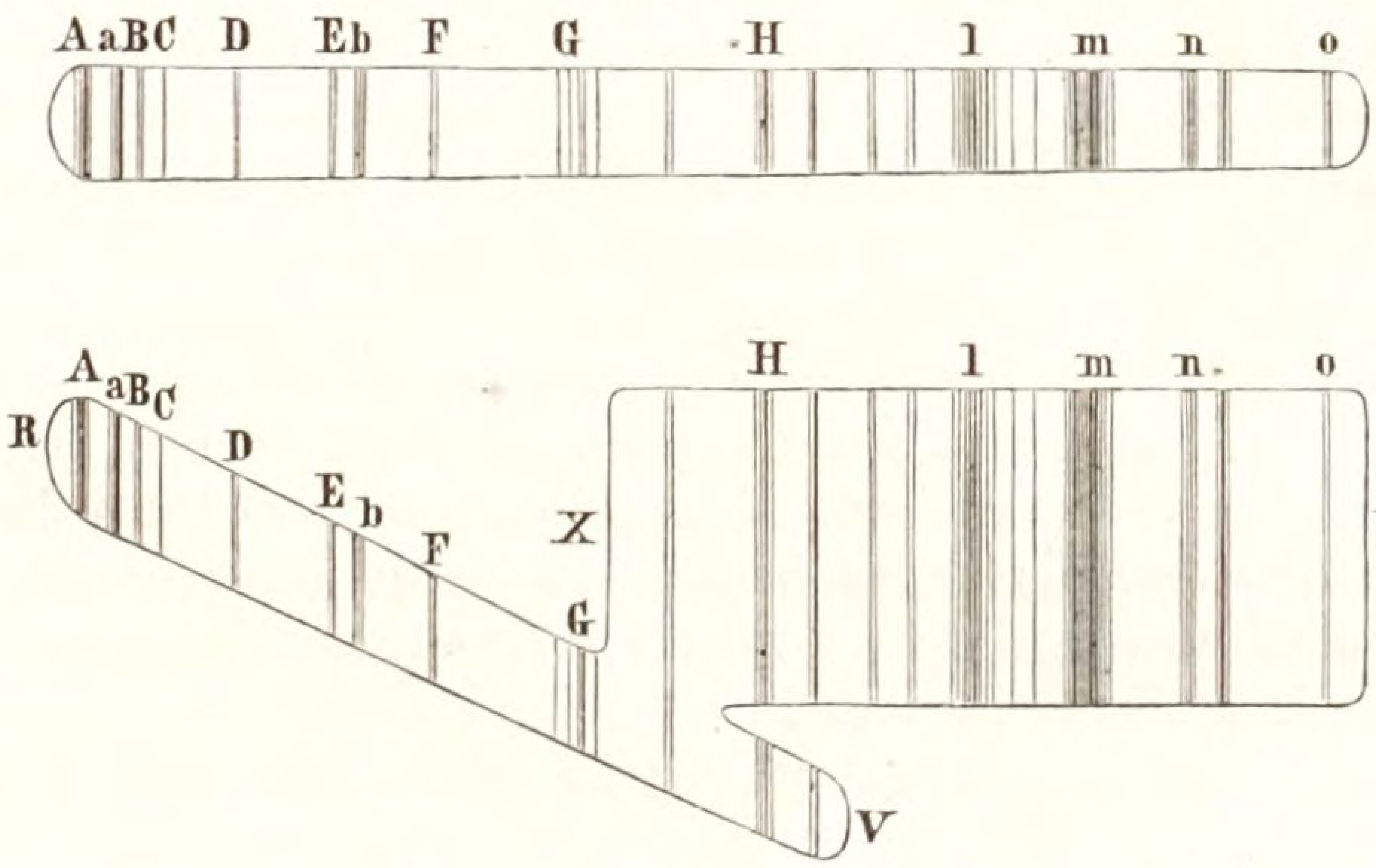
Linie *H* im violetten Theile des Spectrums ist. Stokes theilte diese Linien in Gruppen, die er mit den in der Zeichnung angegebenen Buchstaben bezeichnete. Die Hauptlinien dieser Gruppen fallen mit den auch aus der chemischen Wirkung des Lichtes bekannten Fraunhofer'schen Linien, deren Lage in dem vollständigen Spectrum Fig. 2 der Tafel angegeben ist, zusammen.

Fängt man das Spectrum, nachdem es die Flüssigkeit durchsetzt hat, auf einem Schirme auf, so zeigt sich, dass von da ab, wo die Fluorescenz beginnt, die Strahlen absorbirt sind, während die Theile des Spectrums, welche keine Fluorescenz erregten, ohne Schwächung hindurchgegangen sind. Man erkennt so direkt, dass gerade die Strahlen absorbirt werden, welche die Fluorescenz hervorrufen.

Entwirft man anstatt auf der Flüssigkeit auf einem stark mit Chininlösung getränkten Papier ein Spectrum, so zeigt sich dasselbe wie der Spectralstreif Fig 194, wenn man einen kurzen Spalt nimmt. Die nicht fluorescirenden Theile des Spectrums werden durch diffuse Reflexion sichtbar, die ultravioletten im blauen Fluorescenzlicht. Wenn man dann dieses Spectrum durch ein Prisma betrachtet, dessen brechende Kante dem Spectralstreifen parallel ist, so sieht man das abgelenkte Spectrum *R V* Fig. 194 und darüber das Spectrum *X Y* des Fluorescenzlichtes, welches Stokes als das derivirte Spectrum bezeichnet. In dem Spectrum des Fluorescenz-

lichtes bilden die einzelnen Farben horizontale Streifen und zwar in der Reihenfolge der Farben wie in jedem Spectrum, oben roth, darunter

Fig. 194.



gelb u. s. f., so dass die Fraunhofer'schen Linien alle Farben durchsetzen. Das Spectrum des Fluorescenzlichtes liegt stets an der obern Seite des abgelenkten und ist somit weniger abgelenkt als die die Fluorescenz erregenden Strahlen, die rothen, gelben u. s. w. Strahlen liegen in gleicher Höhe mit den gleichen Farben des abgelenkten Spectrums. Das Auftreten dieses derivirten Spectrums beweist, dass das Fluorescenzlicht ein zusammengesetztes ist, somit auch, da in demselben alle Farben erscheinen dort, wo in dem erregenden Spectrum nur Licht bestimmter Brechbarkeit vorhanden ist, dass durch homogenes Licht in dem fluorescirenden Körper zusammengesetztes Licht erzeugt wird. Gleichzeitig sieht man, da der brechbarste Theil des Fluorescenzspectrums an jeder Stelle weniger abgelenkt ist, als das an der betreffenden Stelle vorhandene erregende Licht, dass das Fluorescenzlicht eine kleinere Brechbarkeit hat als das erregende Licht. Dieser letztere Satz wurde von Stokes als überall gültig erkannt, er glaubte, dass niemals das Fluorescenzlicht eine grössere Brechbarkeit haben könne als das erregende Licht, sondern höchstens die gleiche. Die Versuche von Pierre und Hagenbach bestätigten diesen Satz, während Lommel in einzelnen Fällen auch Licht von grösserer Brechbarkeit zu erkennen geglaubt hat. Es bedarf noch weiterer Versuche, um die Frage zu entscheiden, in wie weit dieser Satz von Stokes gültig ist.

Nach den Versuchen von Pierre und Hagenbach kann das Fluorescenzlicht je nach der Natur des fluorescirenden Körpers in der verschiedensten Weise zusammengesetzt sein. Bei einigen Substanzen ist es ein fast homogenes Licht, wie bei dem Chlorophyll roth, bei andern Substanzen zeigt dasselbe eine Anzahl deutlich ausgeprägter Maxima, so bei dem salpetersauren Uranoxyd 8 Maxima, bei andern erhält man ein mehr oder weniger ausgedehntes continuirliches Spectrum. Es scheint somit, dass jede fluorescirende Substanz ihr charakteristisches Spectrum des Fluorescenzlichtes hat.

Dieser letztere Umstand führt uns zu einer Erklärung der Fluorescenzerscheinungen, er zeigt uns, dass die fluorescirenden Körper aus Molekülen bestehen, welche in bestimmter Weise zu schwingen im Stande sind,

und welche sehr leicht in Schwingung versetzt werden, so dass schon die Stösse des in den Körpern schwingenden Aethers genügen, um die Schwingungen zu erregen. Die Periode der erregten Schwingungen hängt dann ab von der Beschaffenheit der Moleküle, deshalb hängt das Spectrum ab von der Natur des fluorescirenden Körpers. Zwar haben wir bei Besprechung der Wellenbewegung gesehen, dass eine schwingende Bewegung immer nur Schwingungen der gleichen Periode erregen kann; indess lag diesem Satze ausdrücklich die Voraussetzung zu Grunde, dass die Kraft, welche die schwingenden Theilchen gegen die Gleichgewichtslage zurücktreibt, dem Abstande der Theilchen von der Gleichgewichtslage proportional ist. Sobald diese Proportionalität nicht mehr besteht, treten Schwingungen anderer Periode hervor, wie wir das schon im §. 118 bei Besprechung der Combinationstöne hervorgehoben haben. Nimmt man nun an, dass die Vibrationen, welche die Fluorescenz erregen, nicht solche der ganzen Moleküle, sondern solche der einzelnen Theile der Moleküle sind, so können wir bei der äusserst geringen Ausdehnung der Moleküle selbst nicht mehr voraussetzen, dass die Kräfte den Verschiebungen proportional sind, dann müssen also die Schwingungen einer Periode solche anderer hervorrufen, oder das Fluorescenzlicht muss aus andern Schwingungen zusammengesetzt sein als die erregenden. Die Annahme, dass wir es mit Schwingungen im Innern des Moleküls zu thun haben, wird aber äusserst wahrscheinlich gemacht durch die später zu besprechenden chemischen Wirkungen des Lichtes, die uns eine Trennung der Bestandtheile des Moleküles zeigen durch die Wirkung des absorbirten Lichtes. Es möge an diesen Andeutungen genügen, eine vollständige Theorie der Fluorescenz lässt sich noch nicht geben.

§. 155.

Phosphorescenz. Eine Reihe von Körpern zeigt eine der Fluorescenz in sofern sehr ähnliche Wirkung des Lichtes, dass sie unter dem Einflusse des Lichtes selbstleuchtend werden, in sofern aber verschiedene, dass dieses Selbstleuchten nicht aufhört, wenn man aufhört die Körper zu belichten, sondern dass es mehr oder weniger lange fortdauert, in der Regel wegen der Schwäche des Lichtes auch erst sichtbar wird, wenn man den Körper ins Dunkle bringt. Man bezeichnet diese Erscheinung als Phosphorescenz, weil das Leuchten dieser Körper eine gewisse Aehnlichkeit hat mit dem nur im Dunkeln sichtbaren Leuchten des schwach geriebenen Phosphors. Körper dieser Art kommen in der Natur vor und lassen sich auch künstlich darstellen; zu den natürlich vorkommenden gehören besonders der Diamant, der Kalkspath, gewisse Varietäten des Flussspathes, so der unter dem Namen Chlorophan bekannte Flussspath von Nertschinsk; unter den künstlich darzustellenden sind besonders hervorzuheben die Schwefelverbindungen der alkalischen Erden, welche man durch Glühen von Schwefel mit Kalk, Baryt oder Strontian oder mit deren Carbonaten oder auch durch Reduction der Sulfate dieser alkalischen Erden mit Kohle erhält.

Man erregt die Phosphorescenz, indem man die betreffenden Körper eine kurze Zeit der Wirkung des Lichtes, des Sonnenlichtes oder des Tageslichtes oder einer andern hinreichend starken Lichtquelle aussetzt. Betrachtet man die Körper im Dunkeln, so sieht man, dass jeder phosphorescirende Körper in einer ihm eigenthümlichen Farbe leuchtet, welche

von seiner chemischen und physikalischen Beschaffenheit, so unter anderm auch von der Temperatur abhängt, bei welcher die phosphorescirenden Körper der Wirkung des Lichtes ausgesetzt waren, wie das E. Becquerel, dem wir die ausführlichsten Untersuchungen über die Phosphorescenz verdanken, gezeigt hat.

Nach Becquerel haben wir die Phosphorescenz nur als eine länger dauernde Fluorescenz, also nur als eine allmähliche Wiederausgabe eines gewissen Quantums absorbirten Lichtes zu betrachten. Auch hier gerathen also die Moleküle in ihren Bestandtheilen durch die Stösse der eindringenden Lichtschwingungen selbst in eine schwingende Bewegung, welche indess nicht aufhört, wenn die erregende Bewegung aufhört, sondern nur allmählich zur Ruhe kommt, wenn die von den Schwingungen des eindringenden Lichtes aufgenommene lebendige Kraft verbraucht worden ist. Becquerel zeigte nämlich zunächst, dass bei einem und demselben Körper unmittelbar nach der Belichtung die Helligkeit des Phosphorescenzlichtes der Intensität des die Phosphorescenz erregenden Lichtes proportional ist. Er liess zu dem Zwecke in einer kleinen Dunkelkammer auf die phosphorescirenden Körper genau gleiche Zeit hindurch Licht einwirken, welches durch verschieden grosse Oeffnungen in die Dunkelkammer eintrat. Die Menge des eindringenden Lichtes darf man bei den immerhin kleinen von Becquerel angewandten Oeffnungen der Grösse der Oeffnung proportional setzen. Durch eine photometrische Bestimmung der Intensität des Phosphorescenzlichtes ergab sich ebenso, dass dieselbe der Grösse der Oeffnung proportional ist. Den deutlichsten Beweis lieferte Becquerel für die Richtigkeit seiner Auffassung, indem er den Einfluss der Wärme auf die Intensität des Phosporescenzlichtes näher untersuchte. Es ist eine schon alte Erfahrung, dass gewisse Körper, wie Flussspath, Diamant u. a. auch durch Erwärmen zum Phosphoresciren gebracht werden können. Wie indess Becquerel gezeigt hat, ist diese Phosphorescenz, wenn man die Körper längere Zeit auf höherer Temperatur hält, eine vorübergehende, und ebenso kann ein solcher Körper ein zweitesmal durch Erwärmen nur dann zur Phosphorescenz gebracht werden, wenn er vor dem zweiten Erwärmen wieder dem Lichte ausgesetzt war. Die Phosphorescenz durch Erwärmen ist also ebenfalls nur eine durch die Erwärmung beschleunigte Wiederausgabe von absorbirtem Lichte. Dasselbe folgt aus der von Becquerel gezeigten Thatsache, dass durch Erwärmung stets die Helligkeit der Phosphorescenz vermehrt, dafür aber die Dauer derselben vermindert wird.

Nach Becquerel ist somit die Phosphorescenz von der Fluorescenz nicht wesentlich verschieden. Der Unterschied ist nur der, dass die von dem eindringenden Lichte in den fluorescirenden Körpern erregten Schwingungen sofort aufhören oder doch sehr schnell erlöschen, wenn die erregende Bewegung aufhört, während dieselben in den phosphorescirenden Körpern zuweilen eine lange Zeit, selbst mehr als dreissig Stunden, fortdauern kann. Dem entspricht dann, dass das Phosphorescenzlicht stets weniger intensiv ist als die Fluorescenz.

§. 156.

Chemische Wirkung des Lichtes. Bei einer Reihe von Körpern beschränkt sich die Wirkung des absorbirten Lichtes nicht darauf, inner-

halb der Moleküle Schwingungen hervorzurufen, so dass die Körper Licht ausstrahlen, sondern bei diesen werden die Bestandtheile der Moleküle getrennt, es erfahren die belichteten Körper eine Veränderung ihrer Zusammensetzung. In Bezug auf die einzelnen chemischen Wirkungen des Lichtes müssen wir auf die Lehrbücher der Chemie und der Pflanzenphysiologie verweisen. In das Gebiet der letztern gehört die grossartigste chemische Wirkung des Lichtes, der Einfluss derselben auf die Vegetation; nur unter der Einwirkung des Lichtes können die Pflanzen gedeihen, indem durch dasselbe die Kohlensäure, welche die Blätter aus der Atmosphäre absorbiren, zersetzt, der Sauerstoff derselben ausgehaucht und der Kohlenstoff in den Pflanzen abgelagert wird.

Im Uebrigen zeigt die Chemie, dass durch die Wirkung des Lichtes sowohl Verbindungen zweier Elemente hergestellt werden, als auch Zerlegungen von Verbindungen stattfinden können. Von erstern erwähnen wir die Verbindung des Chlors mit dem Wasserstoff zu Salzsäure, welche, wenn man Gemenge aus gleichen Volumen der beiden Bestandtheile, das sogenannte Chlorknallgas, der Wirkung des direkten Sonnenlichtes aussetzt, unter Explosion stattfindet; unter Wirkung des zerstreuten Tageslichtes geschieht die Verbindung langsamer, um so langsamer, je schwächer das Licht ist.

Die zersetzende Wirkung des Lichtes tritt besonders bei den Haloidverbindungen des Silbers, Jodsilber, Chlorsilber etc., mehr oder weniger aber bei allen Silbersalzen auf; auch die Verbindungen des Goldes, Platins, Quecksilbers und wenn sie gleichzeitig mit organischen Körpern in Berührung sind, auch manche Eisensalze und Uransalze werden durch die Wirkung des Lichtes zersetzt. Die zersetzende Wirkung des Lichtes auf derartige Salze wird in neuerer Zeit in der ausgedehntesten Weise in der Photographie benutzt.

Die Gesetze der chemischen Wirkung des Lichtes sind am ausführlichsten von Bunsen und Roscoe an der Einwirkung des Lichtes auf Chlorknallgas untersucht worden, indem sie einen Apparat herstellten, der die Menge der unter Einwirkung des Lichtes entstandenen Salzsäure direkt zu messen gestattete. Der mit Chlorknallgas gefüllte Apparat wurde in einem sonst dunklen Raume so aufgestellt, dass man das Licht beliebiger Lichtquellen auf die Gasmischung wirken lassen konnte.

Die Versuche ergaben zunächst, dass die chemische Lichtwirkung der Intensität des wirkenden Lichtes bei constanter Zusammensetzung desselben direkt proportional ist. Es ergab sich das aus Versuchen mit einer constant brennenden Gasflamme, deren Licht man aus verschiedenen Entfernungen auf das Chlorknallgas wirken liess. Die Versuche zeigten, dass die Menge der jedesmal in einer Minute gebildeten Salzsäure dem Quadrate des Abstandes der Gasflamme umgekehrt proportional war.

Wendet man dagegen Licht verschiedener Quellen an, so ist die chemische Wirkung keineswegs der optisch gemessenen Intensität desselben proportional, da die chemische Wirkung für die Strahlen verschiedener Brechbarkeit eine sehr verschiedene ist. Um die Abhängigkeit der Wirkung von der Art der Strahlen zu untersuchen, entwarfen Bunsen und Roscoe auf einem mit schwefelsaurem Chinin bestrichenen Schirm mit Hülfe von Quarzlinsen und Quarzprismen, welche in vorzüglicher Weise

auch die ultravioletten Strahlen durchlassen, ein reines Spectrum. Der Schirm hatte einen Spalt, dessen Breite gleich 0,08 der Länge des Spectrums war, und an welchem das Spectrum vorüber geführt werden konnte. Das Gefäss mit dem Chlorknallgas befand sich dann etwa 1,5 M. hinter dem Spalt, so dass jedesmal 0,08 des ganzen Spectrums auf das Gasgemisch wirkte. Indem man dann das Spectrum allmählich an dem Spalt vorbeiführte und die verschiedenen Strahlen genau gleich lange wirken liess, konnte man so direkt die Wirkung der verschiedenen Bündel vergleichen. Die Versuche wurden an einem wolkenlosen Tage von kurz vor bis kurz nach Mittag angestellt, so dass während derselben die Höhe der Sonne, somit auch der von den Strahlen in der Atmosphäre zurückgelegte Weg sich nur wenig änderte.

Die von Bunsen und Roscoe erhaltenen Resultate sind in folgender kleinen Tabelle zusammen und in Fig. 195 graphisch dargestellt. Die die Wirkung der verschiedenen Bündel angebenden Zahlen sind die nach der willkührlichen Einheit des Apparates gemessenen, in einer Minute gebildeten Salzsäuremengen. Die Bezeichnung der Bündel gibt die Grenzen der durch den Spalt gehenden Strahlen an; so bedeutet $C - \frac{1}{2} DE$, dass ein Bündel durch den Spalt ging, dessen eine Grenze die Fraunhofer'sche Linie C, dessen andere Grenze die Mitte zwischen D und E war, $\frac{1}{5} DE - E$ bedeutet ein Bündel, dessen eine Grenze um $\frac{1}{5}$ des Abstandes E von D hinter D, dessen andere Grenze bei E lag u. s. f.

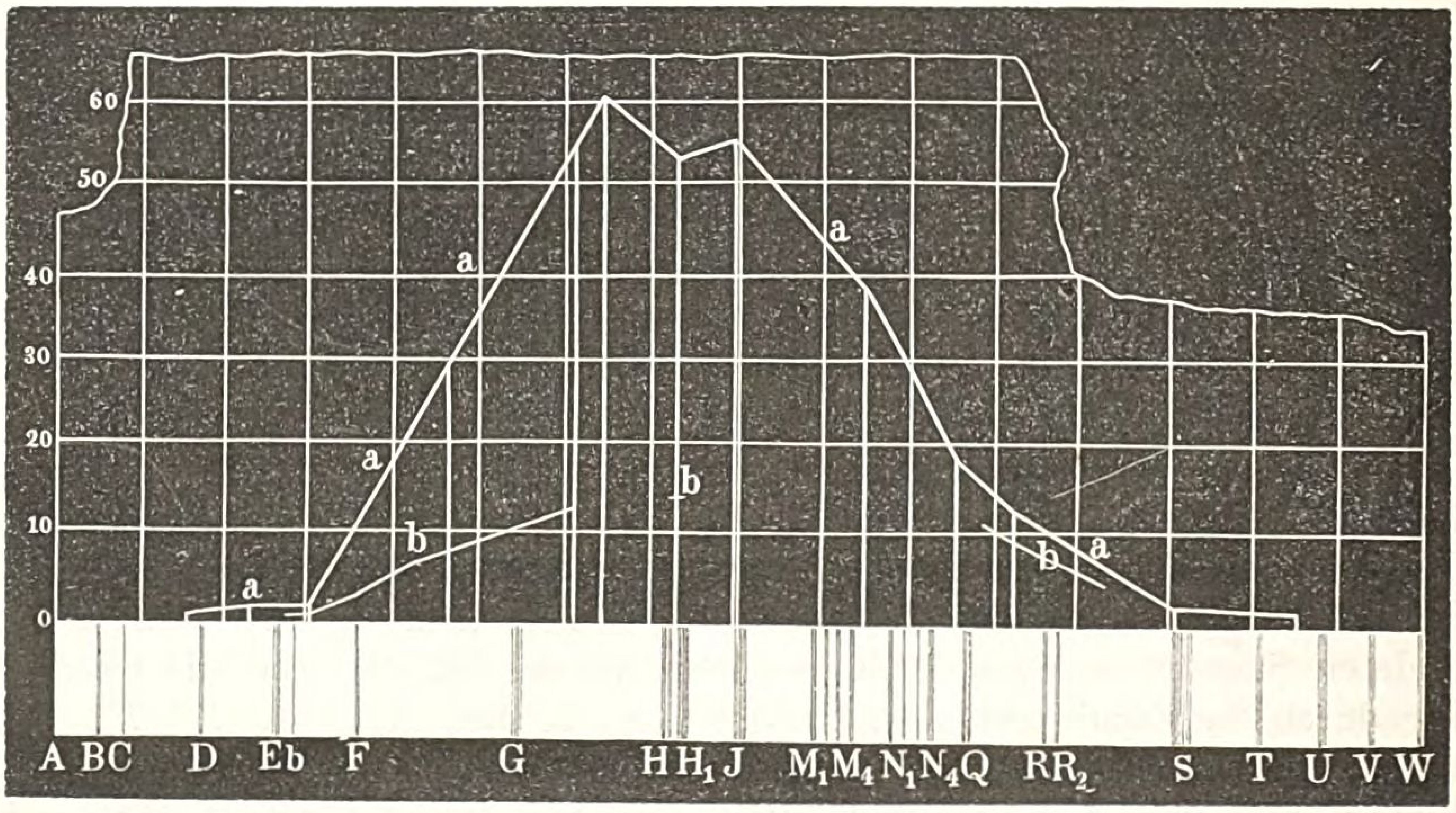
$C - \frac{1}{2} DE$. .	0,5	$H_1 - \frac{3}{4} JM_1$. .	55,1
$\frac{1}{5} DE - E$. .	1,3	$\frac{4}{5} OM_1 - N_4$. .	38,6
$\frac{3}{4} DE - F$. .	1,4	$N_1 - \frac{3}{4} QR$. .	18,9
$\frac{1}{5} FG - G$. .	28,4		
$G - \frac{4}{5} GH$. .	54,5	$\frac{1}{2} N_4 Q - \frac{1}{3} RS$. .	12,5
$\frac{1}{5} GH - H$. .	60,5	$\frac{1}{2} RS - \frac{2}{3} ST$. .	2,1
$\frac{3}{5} GH - J$. .	52,7	$\frac{3}{4} ST - \frac{2}{3} UV$. .	1,2.

Fig. 195 lässt die Vertheilung der chemischen Wirkung in dem Spectrum direkt erkennen, es sind jedesmal in der Mitte der vorhin angegebenen Bündel die beobachteten Wirkungen in einem willkührlichen Längenmaasse senkrecht zur Längsausdehnung des Spectrums aufgetragen und dann die Enden dieser Linien durch die Linie *a a a a* verbunden. Man sieht, wie in dem rothen und gelben Theile des Spectrums bis zum Grün die Wirkung sehr schwach ist, wie sie dann im Blauen sehr rasch ansteigt bis zu einem ersten Maximum zwischen G und H, dann bis gegen H etwas abnimmt, wieder bis zur Linie J im Beginne des Ultravioletten ansteigt und dann im Ultravioletten allmählich abnimmt und schon vor der Grenze des im Fluorescenzlicht sichtbaren Spectrums unmerklich wird.

Aehnlich vertheilt sich in dem Sonnenspectrum die Wirkung des Lichtes auf die zersetzbaren Silbersalze, wie Müller in Freiburg durch direktes Photographiren des Spectrums gezeigt hat. Schon nach wenigen Secunden erhielt er eine Photographie des von G bis mitten zwischen R und S liegenden Theiles des Spectrums, während die Partieen zwischen B und F selbst nach zweistündiger Einwirkung das Silbersalz der photographischen Platte kaum merklich schwärzten. Die Schnelligkeit der Wirkung ist aber auch in den wirksamen Theilen verschieden, so dass man

zur Herstellung schöner Photographieen des Spectrums dasselbe stückweise photographiren muss. Man erhält dann in der Photographie des ultra-

Fig. 195.



violetten Theiles des Spectrums genau dieselben Fraunhofer'schen Linien, welche auch im Fluorescenzlicht sichtbar werden. Das in Fig. 2 der Tafel dargestellte Spectrum ist von Mascart so nach Photographieen gezeichnet worden. Die Bezeichnung der Linien entspricht der von Stokes und Bunsen angewandten.

Für andere chemische Wirkungen ist die Vertheilung derselben im Spectrum indess eine andere; so fand Sachs, dass das Ergrünen des Chlorophylls ebenso gut unter der Wirkung des Rothen und Gelben erfolgt und dass die Zersetzung der Kohlensäure durch diese Lichtarten stärker erfolgt als durch die blauen Strahlen.

Dass auch die chemische Wirkung des Lichtes in Folge der Absorption, also des Ueberganges einer gewissen Menge lebendiger Kraft der Aetherbewegung auf die Moleküle des Körpers zu Stande kommt, zeigten Bunsen und Roscoe durch Messung der Absorption im Chlorgase, wenn sie ohne chemische Wirkung stattfindet und Vergleichung mit derjenigen Absorption, die im Chlorknallgas stattfindet, wenn das Licht gleichzeitig eine Verbindung der Gase zu Salzsäure bewirkt. Bunsen bestimmte zu dem Zwecke die Dicke einer Schicht, in welcher das Licht durch Absorption, ohne oder mit chemischer Wirkung auf ein Zehntel seiner Intensität herabsank. Bezeichnen wir den Absorptionscoefficienten des Chlorgases für das angewandte Licht in dem bereits §. 149 gebrauchten Sinne mit α, so wird die Intensität J_0 bei dem Durchstrahlen einer Schicht von der Dicke d geschwächt auf

$$J = J_0 (1 - \alpha)^d.$$

Ist nun h die Dicke der Schicht, in welcher das Licht auf 0,1 geschwächt wird, so wird

$$0{,}1\, J_0 = J_0 (1 - \alpha)^h; \qquad 10^{-1} = (1 - \alpha)^h; \qquad 10^{-\frac{1}{h}} = 1 - \alpha.,$$

somit auch

$$J = J_0\, 10^{-\frac{d}{h}} = J_0\, 10^{-\varepsilon d}.$$

Den Coefficienten ε, also den reciproken Werth der Dicke h, in welchem die Lichtstärke auf 0,1 geschwächt wird, nennt Bunsen den Exstinctionscoefficienten. Zur Bestimmung desselben lässt man zunächst Licht direkt auf Chlorknallgas wirken und dann, indem man zwischen die Lichtquelle und den Messapparat eine Schicht Chlorgas von der Dicke d bringt, und wieder die gebildete Salzsäuremenge bestimmt. Da man dann J_0 und J kennt, liefert die Gleichung direkt den Werth von ε.

Durch solche Versuche bewies Bunsen nun zunächst experimentell den von uns schon bei Besprechung der Emission angewandten Satz, dass eine Vergrösserung der Dichte des absorbirenden Gases ganz denselben Einfluss hat, als Vergrösserung der Dicke der durchstrahlten Schicht, indem er bei Chlorgas zeigte, dass der Exstinctionscoefficient der Dichte des Gases direkt proportional ist. Wurde die Dichte des Gases verdoppelt, so genügte zu gleicher Schwächung schon eine Schicht von halber Dicke als bei Gas der einfachen Dichte. Als Exstinctionscoefficienten des Chlorgases von der Dichte einer Atmosphäre fand er

$$\varepsilon = 0{,}00577 = \frac{1}{173{,}3}.$$

Wurde das Chlorgas mit dem gleichen Volumen Luft gemischt, so dass also in einer Schicht derselben Dicke nur die Hälfte Chlor vorhanden war, ergab sich

$$\varepsilon' = 0{,}00288 = \frac{1}{346{,}6}.$$

Da das Chlorknallgas aus gleichen Volumen Chlor und Wasserstoff besteht, und die Absorption in Wasserstoff jener in Luft gleich zu setzen ist, so ist der optische Exstinctionscoefficient, also jener, der die Schwächung des Lichtes ohne seine chemische Wirkung misst, gleich ε'. Für den Exstinctionscoefficienten des Chlorknallgases ergab sich nun aus einer Reihe von Versuchen mit verschiedener Dicke der durchstrahlten Schicht

$$\varepsilon_1 = 0{,}00427 = \frac{1}{234},$$

derselbe ist also beträchtlich grösser, ein Beweis, dass zur chemischen Action eine derselben proportionale Lichtmenge verbraucht wird. Die Differenz zwischen dem Exstinctionscoefficienten ε_1 und dem optischen ε'

$$\varepsilon_1 - \varepsilon' = 0{,}00139 = \frac{1}{723}$$

gibt uns den chemischen Exstinctionscoefficienten; derselbe zeigt, dass wenn in dem Chlorknallgase das Licht nur zur chemischen Action verbraucht würde und keine sonstige Abgabe der Bewegung stattfände, dass dann das Licht der zu den Versuchen benutzten Quelle in einer Schicht von 723 Mm. Dicke auf ein Zehntel seiner chemischen Wirksamkeit geschwächt werden würde. Für andere Lichtquellen, welche anders zusammengesetztes Licht liefern, würde der Zahlenwerth natürlich ein anderer.

§. 157.

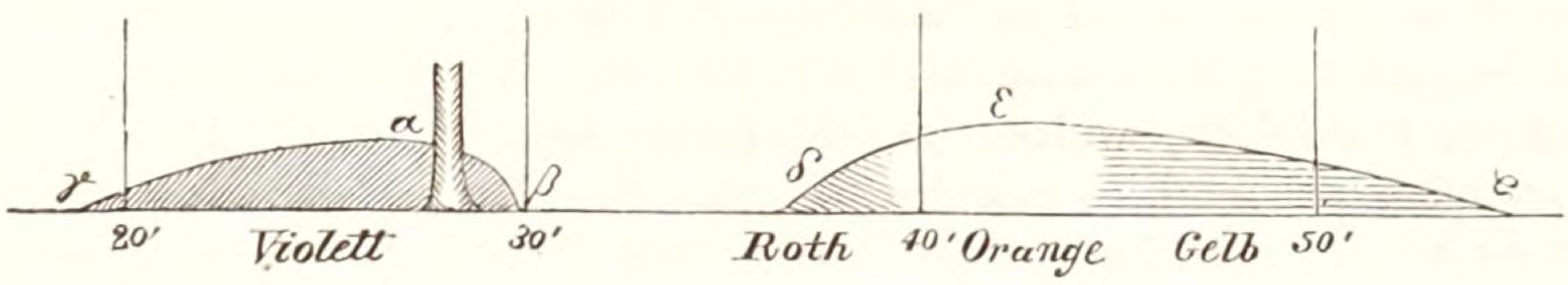
Anomale Dispersion. Schon bei Besprechung der Dispersionstheorie wiesen wir darauf hin, dass zwar bei der Fortpflanzung des Lichtes in den durchsichtigen Medien sich ein direkter Einfluss der Mitbewegung der körperlichen Moleküle auf die Fortpflanzung nicht zeige, dass das aber in solchen Medien, in denen eine Absorption des Lichtes stattfinde, der Fall sein müsse. Denn in diesen erkennen wir nach den Entwicklungen der letzten Paragraphen in der Absorption direkt den Uebergang der Bewegung gewisser Schwingungsdauern an die körperlichen Moleküle, zuweilen in solchem Maasse, dass es den Schwingungen dieser Periode überhaupt unmöglich wird in den absorbirenden Medien sich auszubreiten. Auch die Schwingungen anderer Periode müssen dadurch mehr oder weniger beeinflusst und ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit dadurch geändert werden. In der That zeigt sich das darin, dass die Brechungsexponenten bei solchen Substanzen nicht, wie bei den durchsichtigen Körpern, stetig mit abnehmender Wellenlänge wachsen, sondern dass das Verhältniss zwischen Wellenlänge und Brechungsexponenten ein viel complicirteres ist. Entwirft man durch solche stark absorbirende Substanzen, indem man ihnen Prismenform gibt, ein Spectrum, so findet man, dass die Folge der Farben in demselben eine ganz andere ist, als in einem mit einem durchsichtigen Prisma entworfenen Spectrum. Man bezeichnet deshalb die durch solche Prismen stattfindende Dispersion des Lichtes als anomale Dispersion.

Den ersten Fall der anomalen Dispersion, die umgekehrte Folge in den Farben des Spectrums bei einem mit Joddampf gefüllten Prisma, welchen Leroux beobachtet hat, haben wir bereits bei der Besprechung der Brechungsexponenten der Gase kennen gelernt. Mit Hülfe von aus absorbirenden Flüssigkeiten hergestellten Prismen hat sie zuerst Christiansen am Fuchsin oder Anilinroth und später Kundt an allen Lösungen aus solchen Substanzen, welche in fester Form Oberflächenfarben zeigen, nachgewiesen. Diese Körper haben das Eigenthümliche, dass sie in dem zerstreuten Lichte betrachtet andere Farben zeigen, als wenn man das durch die Körper hindurchgegangene Licht betrachtet. So erscheint z. B. das feste Fuchsin, wie man es erhält, wenn man auf einer Glasplatte eine concentrirte Lösung von Fuchsin rasch verdampft, im reflectirten Lichte grün, während das durchgehende Licht roth ist. Diese im zerstreuten Lichte entstehende Färbung kann daher nicht wie die gewöhnlichen Farben der Körper entstehen, welche im reflectirten und durchgehenden Lichte gleich sind, da auch das zerstreute Licht seine Färbung dadurch erhält, dass die dasselbe zu weiss ergänzenden Farben in dem Körper zurückgehalten werden. Sie kann nur darin ihren Grund haben, dass an diesen Körpern gewisse Wellen unter allen Incidenzen total oder nahezu total reflectirt werden, dass somit diese Farben an der Oberfläche zurückgeworfen werden und überhaupt nur wenig in das Innere der Körper eindringen. Dann muss die Farbe dieser Körper im zerstreuten Licht nahezu complementär sein zur Farbe, die das Licht zeigt, welches die Körper durchdrungen hat. In der That haben das die Versuche von Haidinger und Stokes gezeigt. Diese im festen Zustande Oberflächenfarben zeigenden Körper absorbiren nun im gelösten Zustande das Licht sehr stark; sie

zeigen immer an den Stellen des Spectrums, welche den Oberflächenfarben entsprechen, Absorptionsstreifen, welche mit wachsender Dicke der durchstrahlten Schicht, oder mit wachsender Concentration der Lösung sehr rasch an Dunkelheit zunehmen.

Gerade bei den Lösungen dieser Substanzen tritt nun der Einfluss der mitschwingenden körperlichen Moleküle in solchem Maasse hervor, dass die Abhängigkeit der Brechbarkeit von den Wellenlängen eine ganz andere ist, als bei den durchsichtigen Körpern. So zeigt Fig. 196 das Spectrum, wie es durch ein aus einer 18,8 Procent Fuchsin enthaltenden Lösung hergestelltes Prisma von $1^0 14' 40''$ brechenden Winkel von Christiansen

Fig. 196.



beobachtet wurde. Ein Prisma von grösserem brechenden Winkel ist nicht anwendbar, weil durch dickere Schichten dieser Lösungen nur mehr rothes Licht hindurchgeht. Als Abscissen sind die Ablenkungen der betreffenden Farben in Bogenminuten aufgetragen, die Ordinaten der Curven stellen die Intensitätsverhältnisse der verschiedenen Farben dar. Bei α ist zur Vergleichung das unter denselben Umständen von reinem Alkohol entworfene Spectrum dargestellt, das rothe links, das violette rechts; $\gamma \beta \delta \varepsilon \zeta$ ist das von der Lösung entworfene Spectrum. Die im Vergleich zur Ausdehnung des vom Alkohol gelieferten ausserordentliche Ausdehnung des Spectrums beweist die starke Dispersion des Fuchsins. Das Spectrum besteht aus zwei Theilen, der am wenigsten abgelenkte Theil ist das Violette, der durch einen dunklen Zwischenraum davon getrennte Theil enthält Roth, Orange, Gelb, in der gewöhnlichen Reihenfolge. Das Grün fehlt, es ist absorbirt.

Das, was sich so direkt im Spectrum darstellt, wird durch eine Messung der Brechungsexponenten bestätigt; Kundt erhielt bei einer concentrirten Fuchsinlösung für dieselben folgende Werthe, unter welche wir diejenigen des Alkohols stellen.

Strahlen	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*
Lösung	1,387	1,392	1,398	—	1,361	1,367	1,376
Alkohol	1,363	1,365	1,366	1,367	1,373	1,375	1,376.

Der mit *F* bezeichnete Strahl bedeutet das äusserste, nicht absorbirte Blau. Wie man sieht, sind die Brechungsexponenten an der rothen Seite des Absorptionsstreifens sämmtlich grösser als an der blauen, und sie wachsen vom Roth an bis zur Grenze des absorbirten Lichtes rasch an; die Brechungsexponenten an der blauen Seite sind kleiner und um so kleiner, je näher die Farbe des Lichtes dem absorbirten ist. Dieses Verhalten fand Kundt bei allen anormal dispergirenden Medien, nähert man sich von der rothen Seite des Spectrums der absorbirten Farbe, so nimmt der Brechungsexponent stark zu, nähert man sich derselben von der violetten Seite, so nimmt der Brechungsexponent rasch ab.

Dieser Satz gilt nach den Beobachtungen von Kundt ganz ebenso, wenn eine Lösung mehrere Absorptionsstreifen zeigt, für alle Theile des Spectrums, welche nicht absorbirt werden.

Aus diesen Erfahrungen über die anormale Dispersion ergibt sich, dass bei der Theorie der Dispersion, sobald wir sie allgemein entwickeln wollen, der Einfluss der körperlichen Moleküle der brechenden Medien nicht vernachlässigt werden darf. Deshalb ist seit der Entdeckung der anomalen Dispersion in Flüssigkeiten durch Christiansen die Theorie der Dispersion gerade mit Berücksichtigung des Mitschwingens der körperlichen Molêküle, welche Briot glaubte ausser Acht lassen zu dürfen, mehrfach besonders von Sellmeier, Helmholtz und Ketteler neu behandelt worden. Auf diese theoretischen Entwicklungen können wir hier nicht eingehen, nur bemerken wollen wir, dass es besonders Ketteler gelungen ist, Gleichungen abzuleiten, welche den Zusammenhang zwischen Absorption und Brechung sehr deutlich erkennen lassen, und deren Uebereinstimmung mit der Erfahrung er durch Berechnung der Kundt'schen Versuche nachgewiesen hat. So erhält Ketteler z. B. für die Lösung eines Farbstoffs, der einen Absorptionsstreifen zeigt, als Gleichung für den Brechungsexponenten n des Lichtes, dessen Wellenlänge im freien Raume gleich λ ist, die Gleichung

$$n^2 - \nu^2 = \frac{D \,.\, L}{\left(\frac{\lambda}{n}\right)^2 - L^2} + \frac{D_1\, L_1}{\left(\frac{\lambda}{n}\right)^2 - L_1^2},$$

worin ν, D, L, D_1, L_1 Constanten sind, die von der Natur des Lösungsmittels und des gelösten Farbstoffs abhängig sind. Die Constante ν ist der Brechungsexponent für unendlich grosse Wellenlängen, oder Wellen von solcher Länge, dass das körperliche Medium auf deren Fortpflanzung keinen Einfluss hat, denn setzen wir λ unendlich, so wird $n = \nu$. Die Constanten D und L hängen dann von der Beschaffenheit des Lösungsmittels, D_1 und L_1 von der des gelösten Farbstoffs ab. Die letztern Constanten liefern dann gleichzeitig den Absorptionscoefficienten des betreffenden Farbstoffes für die verschiedenen Farben.

Viertes Kapitel.

Wahrnehmung des Lichtes.

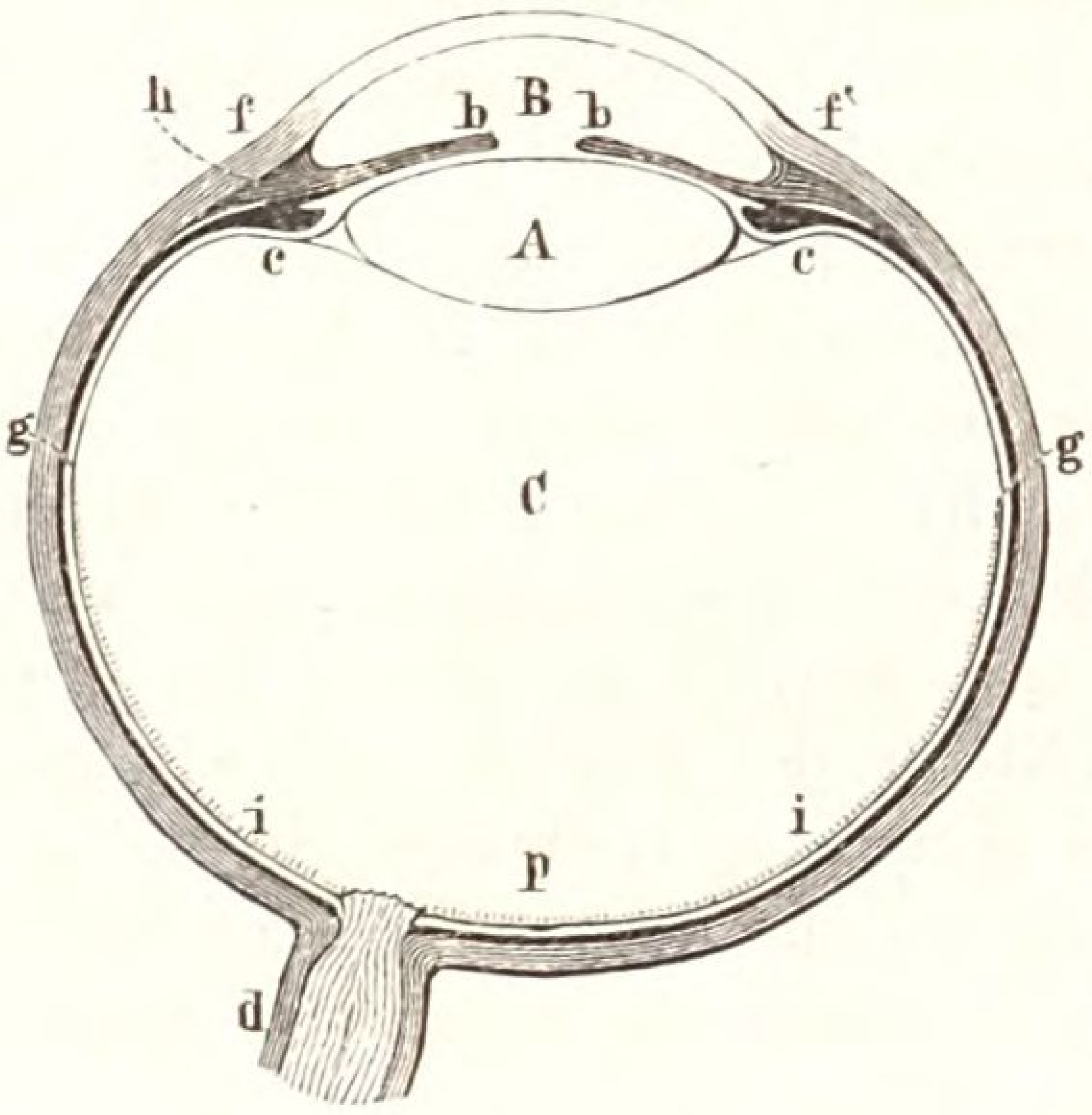
§. 158.

Das menschliche Auge. Das zur Wahrnehmung des Lichtes dienende menschliche Auge besteht wie das der Wirbelthiere aus einer Combination von Linsen verschiedener brechenden Medien, welche zusammen als Sammellinse wirken, und hinter welchen die das Licht empfindende Nervenhaut ausgespannt ist, auf welcher von dieser Sammellinse das Bild entworfen wird, das zu unserer Wahrnehmung gelangt.

Der Augapfel Fig. 197 ist von einer festen Kapsel eingeschlossen, welche durch den innern Druck gespannt gehalten wird; der grösste Theil dieser Kapsel, in der Zeichnung schattirt, ist die undurchsichtige Faser-

haut oder Sehnenhaut (Sclerotica), welche dem Augapfel seine im Ganzen kugelige Form gibt. Nur vorn von f bis f' ist dieselbe durch die durchsichtige Hornhaut (Cornea) ersetzt, welche ein kleines Segment einer stärker gekrümmten Kugel ist, und durch welche das Licht in das Auge eindringt. Am lebenden Auge sieht man zwischen den Augenlidern den vordern Theil der Sehnenhaut, das Weisse, und in der Mitte die durchsichtige Hornhaut.

Fig. 197.



Das Innere des Auges besteht aus drei Abtheilungen, der vordern Augenkammer B, welche die wässerige Feuchtigkeit enthält, der Krystalllinse A und hinter derselben dem gallertartigen Glaskörper C. Der Rand der Krystalllinse ist mit der Grenze ff der Sehnenhaut und Hornhaut so fest verwachsen, dass die Linse die vordere Augenkammer vollständig von dem Glaskörper trennt.

Zwischen der Linse, dem Glaskörper und der das ganze Auge umschliessenden Sehnenhaut sind noch zwei Häute ausgespannt. Zunächst schliesst den Glaskörper die Netzhaut ein, ii. Die Nervenfasern, von deren Ausbreitung dieselbe gebildet wird, treten durch die Oeffnung d der Sehnenhaut ein, welche dem Scheitel der Hornhaut nahe gegenüber liegt. Ziemlich genau in der durch den Scheitel der Hornhaut und den Mittelpunkt des Auges gezogenen Linie liegt auf der Netzhaut der sogenannte gelbe Fleck, jene Stelle, wo die Netzhaut am empfindlichsten ist, weil hier die Nervenendigungen am dichtesten beisammen liegen. Der Querschnitt d des in das Auge eintretenden Nerven, der Mariotte'sche Fleck, ist für das Licht unempfindlich, da dort keine Nervenenden vorhanden sind. Nach vorn wird die Nervenhaut dünner und die lichtempfindenden Nervenenden sind sparsamer vertheilt, bei g hört die Netzhaut ganz auf, und an ihre Stelle tritt eine nervenlose Membran, welche bis zur Linse reicht und an diese angeheftet ist.

Zwischen der Netzhaut und der Sehnenhaut liegt das Hautsystem der Uvea; sie besteht aus der Aderhaut (Chorioidea) mit einer der Netzhaut zunächst liegenden Schicht schwarzen Pigments, und aus deren bis vor die Linse reichenden Fortsetzung, der Regenbogenhaut (Iris). Letztere ist wie die Aderhaut auf ihrer innern Seite mit Pigment bedeckt und liegt frei verschiebbar auf der Linse; in der Mitte hat sie eine kreisförmige Oeffnung, die Pupille, welche durch die kreisförmigen und radiären Muskelfasern der Iris erweitert und verengert werden kann. Diese Verengerung geschieht unwillkührlich bei zu starker Beleuchtung der Netzhaut.

Die Uebergangsstelle der Aderhaut in die Regenbogenhaut zwischen der Grenze der Sehnenhaut und Hornhaut und dem Rande der Linse verdickt sich zu einem ringförmigen Wulste, dem Ciliarkörper, welcher aus den einzelnen Ciliarfortsätzen c gebildet ist. Zwischen diesem Wulst und der Sehnenhaut ist endlich noch ein ringförmiger Muskel, der Ciliarmuskel h, eingeschaltet, der mit dem Rande der Regenbogenhaut zusammenhängend, wie diese aus durchflochtenen radiären und kreisförmigen

Muskelfasern besteht, von denen die erstern an der Innenfläche des Randes der Hornhaut und Sehnenhaut befestigt sind. Dadurch kann dieser Ring sich erweitern und verengern und so bald mehr bald weniger auf den Ring der Ciliarfortsätze, mittelbar also auch auf den Rand der Linse drücken. Auf diese Weise werden wahrscheinlich die kleinen, zur Accommodation erforderlichen Gestaltsänderungen der Linse hervorgebracht.

Die von einem vor dem Auge befindlichen leuchtenden Punkte ausgehenden Lichtstrahlen erhalten die erste Brechung bei dem Eintritt in die ein kleines Kugelsegment bildende Hornhaut, und zwar so, dass sie nach dieser Brechung ungestört weiter gehend sich etwa 10 Mm. hinter der Netzhaut wieder in einem Punkte vereinigen würden. Nach dieser Brechung werden sie aber neuerdings in der Krystalllinse gebrochen, deren Brechungsexponent ein anderer ist als der der wässerigen Feuchtigkeit, treten aus der Linse in den Glaskörper und werden an dessen hinterer Grenze auf der Netzhaut vereinigt. Die Bilder der Punkte, die wir mit dem Auge fixiren, deren den Scheitel der Hornhaut treffender Strahl somit durch die Axe des Auges geht, werden auf der empfindlichsten Stelle des Auges, dem gelben Fleck, entworfen, so dass dort ein scharfes reelles Bild entsteht, welches wir wahrnehmen.

Dass dies der Gang der Lichtstrahlen im Auge ist, ergibt sich aus den Constanten des Auges als einem System centrirter kugelförmiger brechender Flächen. Für ein mittleres Auge ergeben sich aus den Messungen von Helmholtz folgende optische Constanten:

1.	Brechungsexponent der Hornhaut, der wässerigen Feuchtigkeit und des Glaskörpers	$\frac{101}{75} = 1{,}3465.$
2.	Brechungsexponent der Linse	$\frac{16}{11} = 1{,}4545$
3.	Krümmungsradius der Hornhaut	7,8 Mm.
4.	„ „ vordern Linsenfläche . .	9,51 „
5.	„ „ hintern „ . .	5,87 „
6.	Abstand der vordern Linsenfläche von der vordern Hornhautfläche	3,78 „
7.	Dicke der Linse	4 „
8.	Abstand der Netzhaut von der Linse	14,387 „

Um aus diesen Angaben den Gang der Lichtstrahlen im Auge abzuleiten, haben wir nach §. 146 nur nöthig, die Lage der sechs Cardinalpunkte des Auges, der Hauptpunkte, Hauptbrennpunkte und Knotenpunkte, zu bestimmen. Wir betrachten dazu das Auge als ein System von drei brechenden Flächen, deren erste die Hornhaut ist, deren andere die Krystalllinse bilden. Die Hornhaut resp. ihre Vorderfläche trennt die Luft von der wässerigen Feuchtigkeit, deren Brechungsexponent 1,3465 ist; die Linse ist, da wässerige Feuchtigkeit und Glaskörper denselben Brechungsexponenten haben, auf beiden Seiten von optisch demselben Medium begrenzt.

Um die Cardinalpunkte des Systems zu erhalten, müssen wir die seiner einzelnen Theile bestimmen.

Die Hauptpunkte einer einzelnen brechenden Fläche fallen mit deren Scheitel zusammen; die Hauptpunkte der Hornhaut fallen somit in den Scheitel derselben.

Die Hauptbrennpunkte einer brechenden Fläche vom Radius r sind nach §. 145

$$F_1 = \frac{n_1 r}{n_1 - 1} = \frac{1,3465 \,.\, 7,8}{0,3465} = 30,31 \text{ Mm.}; \qquad A_1 = \frac{F_1}{n_1} = 22,22 \text{ Mm}$$

Der erste Hauptbrennpunkt liegt somit 22,22 Mm. vor, der zweite Hauptbrennpunkt um 30,31 Mm. hinter der Vorderfläche der Hornhaut.

Da die Linse auf beiden Seiten dasselbe Medium hat, sind nach §. 147 ihre Hauptpunkte gegeben durch

$$h_1 = -\frac{r_1 d}{n(r_1 + r_2) - (n-1)d}; \qquad h_2 = -\frac{r_2 d}{n(r_1 + r_2) - (n-1)d},$$

wenn n den Brechungsexponent des Lichtes bei dem Uebertritt aus der wässerigen Feuchtigkeit in die Linse, r_1 den Radius der Vorderfläche, r_2 der Hinterfläche der Linse und d deren Dicke bedeutet. Der Brechungsexponent n ist, da derjenige n_1 der wässerigen Feuchtigkeit gleich 1,3465, derjenige n_2 der Linse 1,4545 ist,

$$n = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1,4545}{1,3465} = 1,0802.$$

Setzen wir diesen und die vorhin angegebenen Werthe für r_1, r_2 und d in die Gleichungen für h_1 und h_2 ein, so wird

$$h_1 = -2,334 \text{ Mm.} \qquad h_2 = -1,441 \text{ Mm.}$$

Für die Brennweiten erhalten wir aus

$$\frac{1}{F_2} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} - \frac{n-1}{n r_1 r_2} d\right), \qquad A_2 = F_2,$$

mit obigen Werthen

$$F_2 = 46,142 = A_2.$$

Strahlen, welche die Vorderfläche der Linse als paralleles Bündel treffen, convergiren also nach einem Punkte, der 46,142 Mm. hinter dem zweiten Hauptpunkte der Linse, und da dieser 1,441 Mm. vor der hintern Linsenfläche liegt, der 44,701 Mm. hinter der Hinterfläche der Linse liegt.

Die Hauptpunkte des Auges ergeben sich nun nach §. 146 und 148 aus den Gleichungen

$$H_1 = \frac{A_1 D}{D - F_1 - A_2} \qquad H_2 = \frac{F_2 D}{D - F_1 - A_2},$$

wenn D den Abstand des ersten Hauptpunktes der Linse vom Scheitel der Hornhaut bedeutet. Es ist dann H_1 der Abstand des ersten Hauptpunktes des Auges vom Scheitel der Hornhaut, H_2 der Abstand des zweiten Hauptpunktes vom zweiten Hauptpunkte der Linse. Da der erste Hauptpunkt der Linse, weil h_1 negativ ist, um 2,334 Mm. hinter der Vorderfläche der Linse liegt, so ist

$$D = 3,78 + 2,334 = 6,114,$$

und damit wird

$$H_1 = -1,931 \text{ Mm.} \qquad H_2 = -4,011 \text{ Mm.}$$

Der erste Hauptpunkt liegt somit 1,931 Mm. hinter der Vorderfläche der Hornhaut, der zweite 4,011 Mm. vor dem zweiten Hauptpunkte, also

5,452 Mm. vor der Hinterfläche der Linse oder 2,328 Mm. hinter der Vorderfläche der Hornhaut, 0,397 Mm. hinter dem ersten Hauptpunkte.

Die beiden Hauptbrennweiten des Auges werden nach §. 146 und §. 148

$$F = \frac{F_1 F_2}{F_1 + A_2 - D} \qquad A = F\frac{A_1 A_2}{F_1 F_2} = F\frac{A_1}{F_1} = \frac{F_1}{n_1},$$

oder mit den gefundenen Werthen

$$F = 19{,}883 \text{ Mm.} \qquad A = 14{,}767 \text{ Mm.}$$

Der zweite Brennpunkt liegt 19,883 Mm. hinter dem zweiten Hauptpunkte des Auges, somit da dieser 5,452 Mm. vor der Hinterfläche der Linse liegt, um 14,431 Mm. hinter der Hinterfläche der Linse.

Der erste Hauptbrennpunkt liegt 14,767 Mm. vor dem ersten Hauptpunkte, somit, da dieser 1,931 Mm. hinter dem Scheitel der Hornhaut liegt, 12,836 Mm. vor dem Scheitel der Hornhaut. Von diesem Punkte ausgehende Strahlen treten also in den Glaskörper als ein paralleles Strahlenbündel über.

Aus den Brennweiten ergeben sich die Knotenpunkte, der erste derselben liegt um die zweite Hauptbrennweite hinter dem ersten Hauptbrennpunkt, also um 5,116 Mm. hinter dem ersten Hauptpunkte oder um 7,047 Mm. hinter der Vorderfläche der Hornhaut. Der zweite Knotenpunkt liegt so weit hinter dem ersten, wie der zweite Hauptpunkt hinter dem ersten Hauptpunkte, 0,397 Mm.

Für die Berechnung des Ganges der Lichtstrahlen im Auge kann nach Bestimmung dieser Werthe anstatt des wirklichen Auges ein sehr viel einfacheres optisches System zu Grunde liegen, da wir jedes System durch ein anderes ersetzen können, dessen Cardinalpunkte dieselben sind. Wegen des geringen Abstandes der beiden Hauptpunkte können wir dieselben durch einen ersetzen, der in der Mitte der beiden liegt, und demzufolge auch die Knotenpunkte durch einen in der Mitte zwischen beiden Knotenpunkten liegenden Punkt. Damit ersetzen wir das Auge durch eine brechende Fläche, deren Scheitel in dem Hauptpunkt, deren Mittelpunkt im Knotenpunkt liegt, deren Radius also der Abstand des Hauptpunktes vom Knotenpunkte ist. Dieser Radius würde nach dem Vorigen 5,1248 Mm. sein, der Scheitel der Fläche liegt 2,3448 Mm. hinter dem Scheitel der Hornhaut, der Mittelpunkt um 0,4764 Mm. vor der Hinterfläche der Linse. Das Medium hinter dieser brechenden Fläche muss dann so gewählt werden, dass die beiden Brennpunkte genau dieselbe Lage behalten, und das ist der Fall, wenn man annimmt, dass es ein Glaskörper sei, dessen Brechungsexponent 1,3465 ist. Für das so vereinfachte System, welches Listing als reducirtes Auge bezeichnet, können wir somit die Gleichungen für eine brechende Fläche verwenden.

Das hiernach bestimmte mittlere Auge hat seinen zweiten Hauptbrennpunkt gerade auf der Netzhaut liegen, denn wir sahen, der zweite Hauptbrennpunkt liegt 14,43 Mm. hinter der Hinterfläche der Linse, während die Netzhaut 14,38 Mm. nach den Messungen von Krause hinter derselben liegt.

Für den Abstand des Bildes vom Hauptpunkte erhalten wir nach §. 145, wenn der leuchtende Gegenstand sich im Abstande a vor demselben befindet,

$$f = \frac{a\,F}{a - A},$$

somit für den Abstand des Bildes von der Netzhaut

$$f - F = \frac{A\,F}{a - A},$$

es folgt somit, dass die in das von uns betrachtete Auge eindringenden Strahlen von allen Punkten, deren Abstand vom Auge nicht unendlich gross ist, nach einem Punkte convergiren, der hinter der Netzhaut liegt. Der nach diesem Punkte convergirende Strahlenkegel schneidet somit die Netzhaut in einem kleinen Kreis, so dass anstatt eines scharfen Bildes des Punktes auf der Netzhaut ein kleiner Zerstreuungskreis entsteht. Den Radius dieses Zerstreuungskreises erhalten wir aus der Erwägung, dass der in das Auge dringende Strahlenkegel von der Pupille begrenzt ist, so dass in der Pupille der Durchmesser des Kegels gleich dem Durchmesser der Pupille ist. Die Grösse des Zerstreuungskreises verhält sich demnach zu dem Durchmesser der Pupille, wie der Abstand der Netzhaut von dem Vereinigungspunkte der Strahlen, der Spitze des Strahlenkegels, zu dem Abstande der Pupille von demselben Punkte. Nennen wir den Abstand der Pupille von dem Scheitel der durch den Hauptpunkt gelegten brechenden Fläche d, den Durchmesser der Pupille p, den des Zerstreuungskreises z, so wird

$$z : p = f - F : f - d$$

$$z = p \cdot \frac{f - F}{f - d} = p\,\frac{A\,F}{(a - A)\,(f - d)}.$$

Der Durchmesser der Pupille ist 4 Mm., ihr Abstand vom Scheitel des reducirten Auges, da sie auf der Vorderfläche der Linse liegt, $d = 1{,}435$ Mm.

Darnach wird z. B. für

$a - A$	$f - F$	z
10 M.	0,030 Mm.	0,0064 Mm.
1 „	0,300 „	0,0640 „
0,75 „	0,400 „	0,0825 „
0,5 „	0,60 „	0,1260 „
0,1 „	3,00 „	0,5434 „

Man sieht, dass sobald der Abstand des Gegenstandes vom Auge kleiner als 1 M. wird, der Abstand des Bildpunktes von der Netzhaut und damit die Grösse des Zerstreuungskreises sehr rasch zunimmt. Da wir nun aber Gegenstände nur dann scharf sehen, wenn von denselben scharfe Bilder auf der Netzhaut entworfen werden, so fragt es sich, wie es möglich ist, dass das gesunde Auge sowohl sehr entfernte, als auch dem Auge bis auf wenige Centimeter genäherte Gegenstände scharf zu sehen im Stande ist.

Man hat früher wohl geglaubt, dass das Auge ein optischer Apparat ganz eigenthümlicher Beschaffenheit sei, der gleichzeitig die von sehr entfernten und von nahe liegenden Punkten ausgehenden Strahlen auf der Netzhaut vereinigen könne; es bedarf indess nur geringer Aufmerksamkeit, um sich zu überzeugen, dass dem nicht so sei. Denn fixirt man einen

fernen Gegenstand und richtet gleichzeitig seine Aufmerksamkeit auf einen dem Auge näher liegenden Punkt, so bemerkt man, dass derselbe undeutlich und verschwommen erscheint, ebenso bemerkt man leicht, dass bei Fixirung eines nahe liegenden Punktes alle entferntern Gegenstände verschwommen erscheinen. Wir können weiter, besonders wenn wir in rascher Folge sehr nahe und sehr entfernte Gegenstände fixiren, in unsern Augen fühlen, dass wir dieselben den verschiedenen Entfernungen anpassen, dass wir sie accommodiren müssen.

Fixiren wir einen bestimmten Punkt, so dass also dessen Bild gerade auf die Netzhaut fällt, so fällt das Bild eines entferntern Punktes nach den Gesetzen der Lichtbrechung vor die Netzhaut, dasjenige eines nähern Punktes hinter die Netzhaut. Der Act der Accommodation muss also in einer solchen Aenderung bestehen, dass bei dem Fixiren näherer Punkte die Brennweite des Auges verkleinert, dagegen beim Fixiren entfernter Punkte vergrössert wird, so dass die Bilder stets auf die Netzhaut fallen.

Nach den Versuchen von Max Langenbeck, Cramer und Helmholtz wird diese Accommodation im Wesentlichen dadurch bewirkt, dass die Krümmung der Linsenflächen und damit auch die Dicke der Linse etwas geändert wird. Der Nachweis dieser Veränderung geschieht durch die Beobachtung des Bildes, welches die vordere oder die hintere Linsenfläche von einer Lichtflamme entwirft, wenn das Auge für die Ferne oder die Nähe accommodirt ist, und welches man unter gewissen Vorsichtsmassregeln beobachten kann. Ein kugelförmiger Spiegel, sowohl ein convexer als ein concaver, entwirft von einem in bestimmter Entfernung von ihm befindlichen Gegenstand ein um so kleineres Bild, je kleiner sein Krümmungsradius ist. Die Beobachtung zeigt nun, dass die von den Linsenflächen entworfenen Bilder einer Lichtflamme kleiner sind, wenn das Auge für nahe liegende, als wenn es für ferne Gegenstände accommodirt ist. Nach den Versuchen von Helmholtz ist der Krümmungsradius der vordern Linsenfläche, den wir im schematischen Auge zu 9,51 Mm. angaben, bei Accommodation für die Nähe 6 Mm., der der hintern Linsenfläche, den wir zu 5,87 angaben, 5 Mm.

Diese kleinen Aenderungen genügen, um die Bilder von Punkten, die dem Auge bis etwa 100 Mm. nahe rücken, auf die Netzhaut zu bringen, da hierdurch die zweite Hauptbrennweite des Auges auf etwa 15,3, die erste auf 11,4 Mm. vermindert wird. Gegenstände, die dem Auge noch näher gebracht werden, können nicht scharf gesehen werden.

Am bequemsten, das heisst ohne Anstrengung, sieht das normale Auge deutlich, wenn die Gegenstände sich etwa 250 Mm. vor dem Auge befinden. Man nennt diese Entfernung die deutliche Sehweite.

Die Fähigkeit, innerhalb dieser Breite zu accommodiren, kommt indess nicht allen Augen zu; manche können nicht für die Ferne accommodiren, ihr Fernpunkt liegt nicht in unendlichem, sondern in oft nur kleinem Abstande vom Auge; solche Augen nennt man kurzsichtig. Dieselben haben eine zu kleine Brennweite, ihr zweiter Hauptbrennpunkt liegt vor der Netzhaut; man wird daher solche Augen in den Stand setzen, auch fernere Gegenstände scharf zu sehen, indem man die Brennweite des Auges durch Vorsetzen eines Zerstreuungsglases vergrössert. Andere Augen können parallele Strahlen auf der Netzhaut vereinigen; indess kann den Linsen-

flächen nicht mehr die erforderliche stärkere Krümmung gegeben werden, dass auch die Bilder näherer Punkte auf der Netzhaut entworfen werden, der Nahepunkt solcher Augen ist in die Ferne gerückt; man nennt diesen Fehler, da er meist in ältern Lebensjahren eintritt, Presbyopie. Durch Anwendung passender convexer Brillen kann demselben abgeholfen werden.

§. 159.

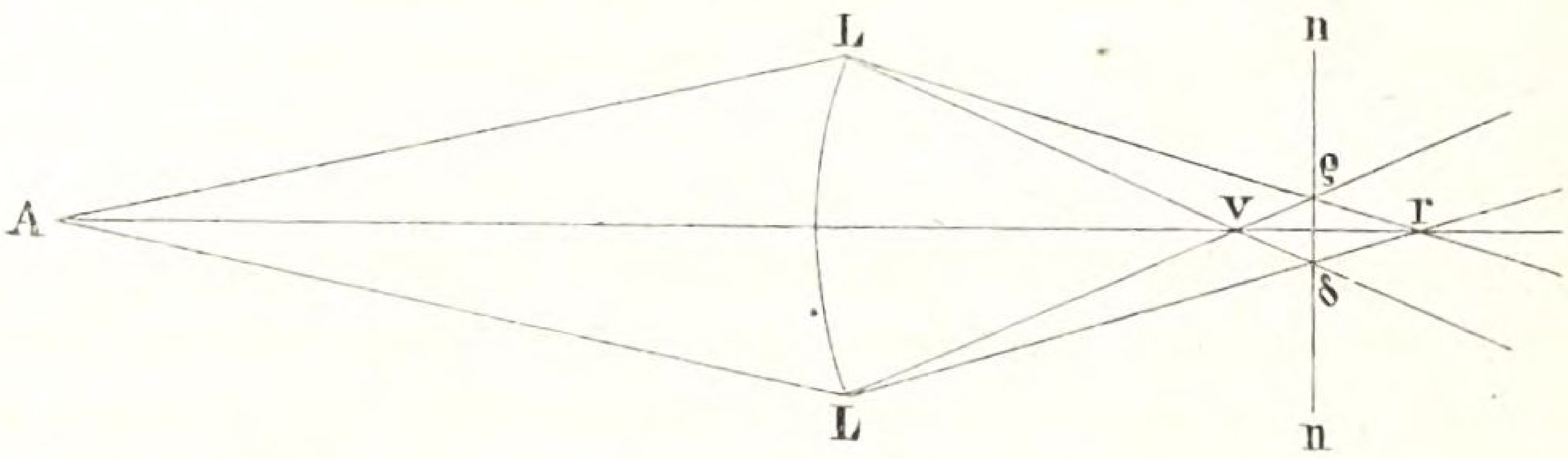
Monochromatische und chromatische Abweichung; Irradiation. Die Schärfe der auf der Netzhaut des Auges entworfenen Bilder wird durch in allen Augen vorkommende Abweichungen der Lichtstrahlen und dadurch etwas beeinträchtigt, dass das Auge keine achromatische Linsencombination ist. Die auch bei einfarbigem Lichte vorkommenden Abweichungen sind nicht die bei allen Linsen vorkommenden stärkern Brechungen der Randstrahlen; diese treten nicht ein, da die Pupille fast nur die centralen Strahlen durchlässt, und da ausserdem nach der Angabe von Volkmann der Brechungsexponent der Linse gegen den Rand hin etwas kleiner wird. Dieselben rühren vielmehr zum Theil daher, dass die Hornhaut fast immer mit kleinen Feuchtigkeitströpfchen bedeckt ist, und dass in der That die brechenden Flächen des Auges nicht genaue Kugelflächen sind. Man erkennt diese Abweichungen am stärksten, wenn man ferne hellleuchtende Punkte betrachtet. So sehen die wenigsten Augen die Sterne als leuchtende Punkte, oder entfernte Flammen scharf in ihrer Form, sondern als eigenthümliche strahlige Figuren. Die Anzahl der von der hellen Mitte ausgehenden Strahlen ist für verschiedene Augen nicht dieselbe, sie beträgt meist acht bis zehn. Unterstützt wird das Auftreten dieser Strahlen durch eine mangelhafte Accommodation. Etwas Aehnliches ist das Entstehen mehrfacher Bilder von einer entfernten leuchtenden Linie, wie von der Sichel des Mondes.

Eine grössere Bedeutung hat der Umstand, dass unser Auge keine achromatische Combination ist, wie sich daraus ergibt, dass wir es als aus zwei Sammellinsen bestehend ansehen können, während zu einer achromatischen Combination, wie wir sahen, immer mindestens eine Zerstreuungslinse erforderlich ist. In Folge dessen werden die von einem Punkte ausgehenden verschieden gefärbten Strahlen in verschiedenen Punkten vereinigt, und zwar dem Hauptpunkte des Auges um so näher, je grösser die Brechbarkeit der Strahlen ist. Dem entsprechend fand Fraunhofer, dass ein Auge, welches eine unendlich entfernte Linie scharf sieht, welche rothes, der Fraunhofer'schen Linie *C* entsprechendes Licht aussendet, eine blaues, der Linie *G* entsprechendes Licht aussendende Linie in einer Entfernung von 0,45 — 0,6 M. scharf sieht. Daraus ergibt sich dann, dass bei einem für die Ferne accommodirten Auge der Vereinigungspunkt der rothen Strahlen etwa 0,6 Mm. hinter dem der violetten liegt.

Die Folge dieser Farbenzerstreuung ist, dass als Bild eines leuchtenden Punktes, der weisses Licht aussendet, auf der Netzhaut ein kleiner Kreis entsteht, indem das Auge dann für die Strahlen mittlerer Brechbarkeit accommodirt wird. Man erkennt das unmittelbar an Fig. 198. Ist LL ein Durchschnitt durch die Hornhaut, so convergiren die von A ausgehenden violetten Strahlen nach v, die rothen nach r; befindet sich nun die Netzhaut in nn, an der Convergenzstelle der mittlern Strahlen, so

überdecken sich in $\rho\sigma$ die verschiedenen farbigen Kreise und liefern dort einen kleinen, eben wegen der Ueberdeckung der einzelnen farbigen Kreise

Fig. 198.



weissen Kreis. Schiebt man dann von der einen Seite einen undurchsichtigen Schirm vor, dass etwa nur ein schmales oben in das Auge eintretendes Lichtbündel zur Netzhaut kommt, dann entsteht statt des weissen Zerstreuungskreises ein Spectrum $\rho\sigma$. Durch diesen Versuch kann sich jeder überzeugen, dass das Auge nicht achromatisch ist.

Diese Zerstreuungskreise werden uns wahrnehmbar bei den zuerst von Plateau genauer untersuchten Irradiationserscheinungen, die sich im Allgemeinen dahin zusammenfassen lassen, dass stark beleuchtete Flächen grösser erscheinen, als sie wirklich sind, während benachbarte dunkle Flächen um ebenso viel kleiner erscheinen. Die Erscheinungen sind am auffallendsten bei nicht ganz scharfer Accommodation, sie zeigen sich aber, besonders bei starker Beleuchtung, auch bei scharfer Accommodation. So erscheint stets eine helle Fläche auf dunklem Grunde grösser als eine gleich grosse dunkle auf hellem Grunde; die helle Mondsichel scheint selbst bei scharfer Accommodation einem grössern Kreise anzugehören als der im Erdlichte schwach sichtbare Mond. Ferner scheinen nahe liegende leuchtende Flächen zusammenzufliessen, so die weissen Felder eines Schachbrettes, so dass die schwarzen von einander getrennt zu sein scheinen; ein feiner Draht ist vor der hellsten Stelle einer Lichtflamme oder gegen die Sonne gehalten nicht sichtbar.

Schliesslich scharfe Kanten, wie diejenige eines Lineals zwischen das Auge und eine schmale helle Flamme gehalten, erscheinen dort, wo die Flamme über die Kante hervorragt, ausgezackt.

Man sieht, überall schieben sich die Ränder heller Flächen über benachbarte dunkle vor. Es ist das Folge des Auftretens der Zerstreuungskreise als Bilder heller Punkte, durch diese wird bewirkt, dass am Rande des Netzhautbildes die Helligkeit über die geometrische Grenze des Bildes sich ausbreitet. Dadurch werden allerdings die Randtheile des Bildes weniger hell; da aber, wie wir im nächsten §. sehen werden, unser Auge besonders bei grosser Helligkeit kleine Unterschiede der Helligkeit viel weniger empfindet als eine, wenn auch schwache Beleuchtung vorher dunkler Stellen, so folgt, dass man die Verbreiterung des Hellen vorzugsweise sieht und um so mehr, je intensiver die angesehene Fläche leuchtet.

§. 160.

Von den Gesichtsempfindungen. Durch die auf die Netzhaut wirkenden Strahlen erhalten wir zunächst eine Empfindung des Lichtes, wir fühlen eine Wirkung. Diese Empfindung des Lichtes kann nach zweier-

lei Richtungen eine verschiedene sein, wir empfinden Verschiedenheit der Lichtstärke und Verschiedenheit der Farbe.

Nach der von uns bereits als richtig erkannten Theorie, nach der das Licht eine schwingende Bewegung des Aethers ist, wie der Schall eine schwingende Bewegung der Luft, kommt uns das Licht dadurch zur Empfindung, dass die in unser Auge eindringende schwingende Bewegung des Aethers an unsere Netzhaut übergeht. Die objective Intensität des Lichtes muss daher, wie diejenige des Schalls, der lebendigen Kraft der schwingenden Bewegung, also dem Quadrate der Geschwindigkeit, mit der die schwingenden Aethertheile die Gleichgewichtslage passiren, oder dem Quadrate der Amplitude proportional sein. Indess ist die subjectiv empfundene Lichtstärke dieser objectiven Lichtstärke nicht proportional zu setzen, da unser Auge nicht alle objectiv vorhandenen Unterschiede der Beleuchtung wahrzunehmen im Stande ist. Man beleuchte eine Fläche mit einem schwachen Lichte, so dass die Helligkeit derselben h wird, und bringe nun zwischen dieser Lichtquelle und dem Schirm einen Stab an, so dass derselbe einen Schatten auf den Schirm wirft. Beleuchtet man dann den Schirm durch eine zweite Lichtquelle, welche dem Schirm für sich die Helligkeit H gibt, so ist an allen Stellen des Schirmes ausserhalb des Schattens die Helligkeit $H + h$, in dem von der ersten Lichtquelle entworfenen Schatten aber nur H. So lange nun die Helligkeit H nicht sehr gross ist, nimmt man den Schatten deutlich wahr, man unterscheidet also die Lichtstärken H und $H + h$. Wächst aber H, so wird der Schatten immer weniger bemerkbar, und es gibt immer eine Lichtstärke H, bei welcher der Schatten nicht mehr sichtbar ist, bei der also das Auge den Unterschied $H + h$ und H nicht mehr empfindet, wie gross auch die Lichtstärke h sein mag.

So wirft das Mondlicht einen deutlichen Schatten etwa eines Stiftes auf eine weisse Fläche, beleuchtet man dann aber die Fläche mit einer hellbrennenden Lampe, so ist der Schatten nicht mehr sichtbar. Entwirft man bei Tage mit der Lampe einen Schatten, der im zerstreuten Tageslichte noch sichtbar ist, so verschwindet derselbe, wenn man das Licht der Sonne auf die Fläche wirken lässt.

Ebenso wie bei zu grosser Helligkeit verschwinden kleine Unterschiede der Beleuchtung bei zu geringer Helligkeit, indem bei dieser die Unterschiede zu klein sind, als dass sie noch empfunden werden können.

Es folgt somit, dass unsere Augen bei gewissen mittlern Helligkeiten Lichtunterschiede am schärfsten empfinden, es sind das diejenigen, bei welchen wir zu arbeiten gewohnt sind. Bei diesen können wir nach Versuchen von Fechner Unterschiede der Helligkeit unterscheiden, welche 0,01 der ganzen Helligkeit betragen, denn Fechner fand, dass man an dem Rumford'schen Photometer bei Anwendung zweier vorher als gleich erkannter Flammen den einen Schatten nicht mehr sehen kann, wenn die eine Flamme 3 Decimeter, die andere 30 Decimeter vom Schirme entfernt war. Da nun alle photometrischen Methoden schliesslich darauf hinauskommen, dass man zwei aneinandergrenzende Flächen als gleich hell beleuchtet empfindet, so folgt, dass wir mit denselben eine grössere Genauigkeit als 1 Procent nicht erreichen können.

Unser Auge unterscheidet verschiedene Farben, die ihren Grund da-

rin haben, dass die Anzahl der unser Auge in der Zeiteinheit treffenden Schwingungen eine verschiedene ist. Wir haben die Farben, die wir unterscheiden, bei Besprechung des Spectrums bereits namhaft gemacht und erwähnt, dass wir in jeder derselben noch eine Reihe von Nüancen unterscheiden. Wir erkennen aber leicht, dass unser Auge für geringe Farbenunterschiede keineswegs so empfindlich ist, wie unser Ohr für Tonhöhen; denn nahe neben einander liegende Theile des Spectrums erscheinen uns gleich gefärbt, während doch die Verschiedenheit der Ablenkung des Lichtes uns die objective Verschiedenheit beweist.

Bei dem Schall unterscheidet unser Ohr sofort die einfachen Töne und die aus einfachen Tönen zusammengesetzten Klänge gleicher Höhe, ferner auch in den aus verschiedenen Klängen zusammengesetzten Accorden die einzelnen Klänge. Auch darin steht die Empfindlichkeit des Auges gegenüber dem Ohre zurück. Ein jedes Farbengemische setzt sich für uns zu einem Gesammteindrucke zusammen, in welchem wir die Bestandtheile nicht zu erkennen vermögen. Es folgt das schon daraus, dass uns die Mischung sämmtlicher Farben einfach weiss erscheint, und weiter daraus, dass wir durch Mischung von Farben solche erhalten können, die wir von reinen Spectralfarben nicht unterscheiden können. Die Zusammengesetztheit einer Farbe können wir nur durch eine Analyse derselben erkennen.

Der Farbeneindruck einer bestimmten Lichtqualität ist ferner keineswegs constant, er hängt wesentlich von der Intensität des Lichtes ab. Alle Farbenempfindungen nähern sich bei gesteigerter Intensität dem Weissen, so besonders das Violett, welches einen um so röthlicheren Ton erhält, je dunkler es ist, dagegen grauer aussieht, je heller es wird; schon in dem im Fernrohr betrachteten Sonnenspectrum erscheint es weissgrau. Ebenso hat Helmholtz für die andern Farben das allmähliche Uebergehen in weiss bei intensiver Beleuchtung nachgewiesen; man erkennt das schon, wenn man durch farbige Gläser nach intensiven Lichtquellen, dem Lichte der elektrischen Lampe oder nach der Sonne sieht.

Ebenso wie die Empfindung der Farbe von der Intensität, hängt auch umgekehrt die Empfindung der Lichtstärke von der Farbe ab. Wir werden in der Wärmelehre nachweisen, dass die lebendige Kraft der Schwingungen, also die objective Lichtstärke von dem rothen zum violetten Ende des Spectrums stetig abnimmt, subjectiv erscheint uns aber die gelbe Partie des Spectrums am hellsten. Die Stärke der Lichtempfindungen hängt also nicht allein von der lebendigen Kraft der Schwingungen, sondern auch von ihrer Anzahl ab; wird die Schwingungszahl im ultravioletten Lichte zu gross, so können wir für gewöhnlich die Schwingungen gar nicht mehr empfinden. Für die Photometrie folgt daraus, dass wir die Lichtstärken verschiedenfarbiger Lichtquellen gar nicht vergleichen können.

Die Abhängigkeit der Farbenempfindung von der Intensität des Lichtes, sowie die Unfähigkeit des Auges, in einem Farbengemische die einzelnen Farben zu erkennen, beweist, dass auf der Netzhaut nicht, wie es im Ohr der Fall zu sein scheint, für jede Schwingungszahl, also für jede Farbe, besondere Nervenfasern vorhanden sind. Dadurch ist die Empfindung der Farben als ein rein physiologischer Vorgang zu betrachten, der

physikalisch nicht weiter zu deuten ist. Wir können hier auf die von Thomas Young zuerst aufgestellte, von Helmholtz später vervollkommnete Theorie der Farbenempfindung nicht eingehen.

Betreffs der Lichtempfindungen ist noch zu erwähnen, dass die Reizung der Netzhaut noch fortdauert, wenn auch das sie bewirkende Licht schon verschwunden ist. Wir haben auf diese Dauer des Lichteindrucks schon hingewiesen bei Besprechung der Anwendung rotirender Spiegel zur Zerlegung rasch wechselnder Erscheinungen an einem und demselben Ort, wie etwa schwingender Flammen. Diese Dauer wird noch durch eine Reihe anderer Erscheinungen bewiesen; so erscheint eine im Kreise geschwungene glühende Kohle als schwingender Kreis; so erscheint eine rasch rotirende kreisförmige Platte, deren Sectoren eine verschiedene Färbung haben, in der aus diesen Farben sich ergebenden Mischfarbe. Färbt man die Sectoren möglichst genau mit Farben, die denen des Spectrums gleich sind, so sieht man den Gesammteindruck der Farben, nämlich weiss, und um so reiner, je genauer die Farben des Kreises mit denen des Spectrums übereinstimmen.

Die Dauer der Reizung der Netzhaut zeigt sich zugleich in den beiden Arten der Nachbilder, den positiven und den negativen. Fixiren wir einen hell beleuchteten Gegenstand und schliessen dann die Augen, so sieht man denselben noch eine kurze Zeit, das Helle hell und das Dunkle dunkel. Sehr bald verschwindet indess das positive Nachbild und geht, besonders wenn man gegen eine hellere Fläche sieht, in das negative über, bei welchem das vorher hell Gesehene dunkel erscheint und umgekehrt. Das Auge ist für kurze Zeit an den stärker gereizten Stellen unempfindlicher geworden und reagirt dort auf eine neue Reizung weniger stark als an den weniger gereizten Stellen. Aus demselben Grunde erscheint uns auch eine weisse Fläche, wenn wir vorher eine beleuchtete farbige Fläche angesehen haben, in der complementären Farbe.

§. 161.

Von den Gesichtswahrnehmungen. Als Gesichtswahrnehmungen bezeichnen wir die in Folge der Lichtempfindung in uns entstehenden Vorstellungen der ausser uns befindlichen Objecte; die Bildung dieser Vorstellungen ist allerdings eine psychische Thätigkeit, dieselbe wird aber veranlasst und unterstützt durch die Beschaffenheit der Netzhautbilder.

Wir sehen zunächst in einer bestimmten Richtung; zur Bestimmung derselben dient nach Helmholtz der Satz, dass, wenn eine bestimmte Stelle der Netzhaut gereizt wird, wir die reizende Ursache und zwar, da das der ungeheuren Mehrzahl nach Licht aussendende Objecte sind, als solche in der Richtung zu sehen glauben, von wo aus bei normalen Verhältnissen, das heisst bei ungestörter Ausbreitung des Lichtes, ein Lichtreiz die gereizte Stelle treffen würde. Wir verlegen also durch unser Urtheil jenes Object immer in die durch die gereizte Stelle und den Knotenpunkt des Auges gelegte Richtungslinie.

Das ist auch der Grund des so vielfach als einer besondern Erklärung bedürftig betrachteten Aufrechtsehens der ausser uns befindlichen Gegenstände, von denen auf der Netzhaut ein umgekehrtes Bild entworfen ist. Die Richtungslinien der angesehenen Punkte kreuzen sich sämmtlich in dem Knotenpunkte des Auges; eine unterhalb der Augenaxe gereizte

Stelle der Netzhaut sieht daher auswärts einen oberhalb derselben liegenden leuchtenden Punkt, wir sehen deshalb die Gegenstände aufrecht, weil die Netzhautbilder umgekehrte sind.

An den ausser uns befindlichen Objecten unterscheiden wir ihre räumliche Ausdehnung und ihre räumliche Lage. Die Ausdehnung in einer zur Augenaxe senkrechten Ebene, also die Breite und Höhe der Objecte beurtheilen wir nach den entsprechenden Ausdehnungen der Netzhautbilder, oder nach dem Winkel, den die nach den äussersten Punkten der gesehenen Objecte gezogenen Richtungslinien mit einander bilden, dem sogenannten Sehwinkel. Der hiernach die scheinbare Grösse der Gegenstände messende Sehwinkel hängt ab von der wirklichen Grösse des angesehenen Gegenstandes und seiner Entfernung vom Auge, so zwar, dass die scheinbare Grösse gleich ist dem Quotienten aus der wirklichen Grösse und der Entfernung des Gegenstandes vom Knotenpunkt des Auges, denn die Grösse des Netzhautbildes ist, da wir den Abstand der Netzhaut vom Knotenpunkte des Auges als constant ansehen können, jenem Quotienten direkt proportional. Es folgt somit, dass alle Gegenstände, deren wirkliche Grösse sich verhält wie der Abstand derselben vom Auge, dieselbe scheinbare Grösse haben, da sie gleich grosse Netzhautbilder liefern, ein doppelt so grosser Gegenstand hat also in der doppelten Entfernung dieselbe scheinbare Grösse wie ein Gegenstand von einfacher Grösse in der einfachen Entfernung. Dass uns dennoch der erste Gegenstand grösser erscheint, ist nur eine Folge unseres Urtheils, indem wir entweder die wahre Grösse kennen und dann schliessen, dass er weiter entfernt ist, oder umgekehrt aus der bekannten Entfernung auf die Grösse schliessen. Das ergibt sich daraus, dass wir uns sehr oft über die Grösse der Gegenstände täuschen, wenn wir unbekannte Gegenstände in Entfernungen sehen, die wir nicht anderweit schätzen können. Das zeigt sich besonders leicht bei dem Indirektsehen. Richten wir z. B. unsere Aufmerksamkeit auf ein Buch, so halten wir oft eine seitwärts am Auge vorüberfliegende Mücke für einen am Fenster vorüberfliegenden Vogel und umgekehrt.

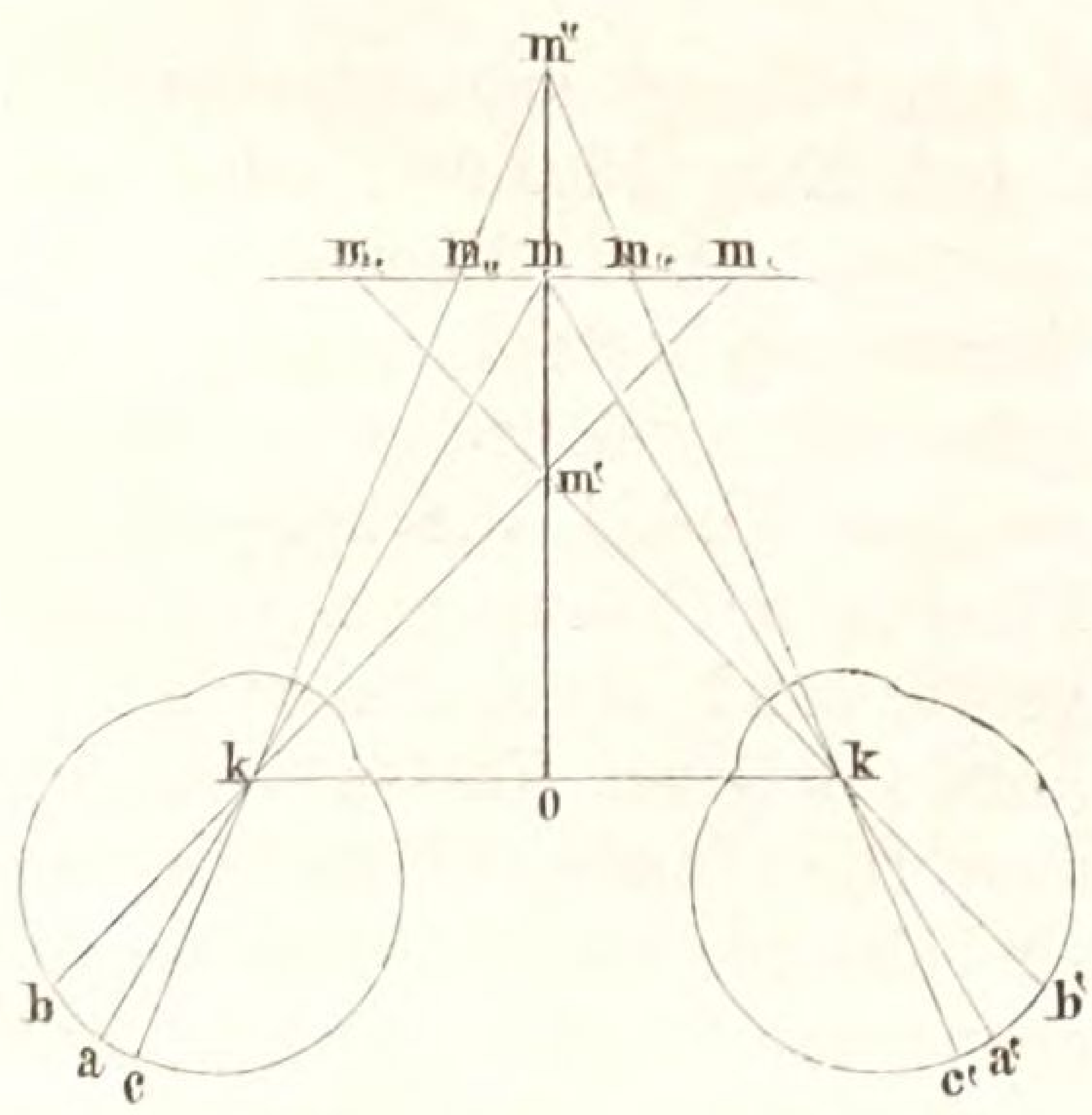
Wird der Gesichtswinkel, unter welchem ein Gegenstand erscheint, zu klein, so kann er nicht mehr wahrgenommen werden; die Grösse des zur Wahrnehmbarkeit erforderlichen Gesichtswinkels schwankt nach der Helligkeit des Objectes und der individuellen Beschaffenheit des Auges. Bei mässiger Beleuchtung und mittlern Augen wird ein Gegenstand erst wahrnehmbar, wenn er unter einem Sehwinkel von 30″ erscheint. Ein hell beleuchteter Gegenstand auf dunklem Grunde ist indess unter noch kleinerm Gesichtswinkel sichtbar.

Ganz dasselbe, was für die Beurtheilung der Grösse und Breite gilt, das gilt auch für jene des räumlichen Nebeneinanders, den Abstand zweier Gegenstände in einer zur Augenaxe senkrechten Ebene. Anders aber für die Beurtheilung der dritten Dimension. Bei Gegenständen, die unsern Augen nicht sehr nahe sind, ist die dritte Dimension nicht direkt wahrnehmbar, wir schliessen nur auf dieselbe. Wir wissen, dass die Gegenstände, die auf der Fläche der Netzhaut abgebildet sind, im Raume sich hinter einander befinden und wir kennen aus Erfahrung die Grösse der meisten Gegenstände, wir schliessen daher aus der scheinbaren Grösse der gesehenen Gegenstände auf ihre Entfernung, also auf ihre Vertheilung

im Raume nach der zur Augenaxe parallelen Dimension. Dazu kommt, dass wir selbst bei normalem Auge die Gegenstände um so deutlicher sehen, je näher sie bei der bequemsten Sehweite liegen, entferntere sehen wir weniger deutlich; aus der Undeutlichkeit der feinern Contouren schliessen wir auf die grössere Entfernung. Manche Physiologen nehmen auch an, dass wir ein gewisses Accommodationsgefühl haben, das zur Schätzung der Entfernung beiträgt.

Bei nahe liegenden Gegenständen wird die Beurtheilung der dritten Dimension durch das Sehen mit zwei Augen bewirkt. Die meisten in unserm Gesichtsfeld befindlichen Gegenstände liefern in beiden Augen ein Bild; wir erhalten dadurch zwei Empfindungen, die jedoch als eine wahrgenommen werden, wenn wir die Gegenstände fixiren, oder wenn sie in einer bestimmten Stellung vor dem Auge sich befinden, alle übrige Gegenstände sehen wir wirklich doppelt. Damit wir trotz der Reizung beider Augen einfach sehen, müssen die Reizungen an den sogenannten identischen Netzhautpunkten stattfinden, welche, wenn sie zugleich in beiden Augen getroffen werden, die Ursache ihrer Erregung an derselben Stelle des äussern Raumes suchen. Wenn wir nun einen Gegenstand fixiren, so convergiren die Sehaxen nach diesem Punkte und die Endpunkte der Sehaxen *a* Fig. 199 werden zugleich von dem Lichte getroffen, welches von dem fixirten Punkte ausgeht. Da wir den Punkt einfach sehen, so folgt, dass die Endpunkte der Augenaxen identische Netzhautpunkte sind.

Fig. 199.

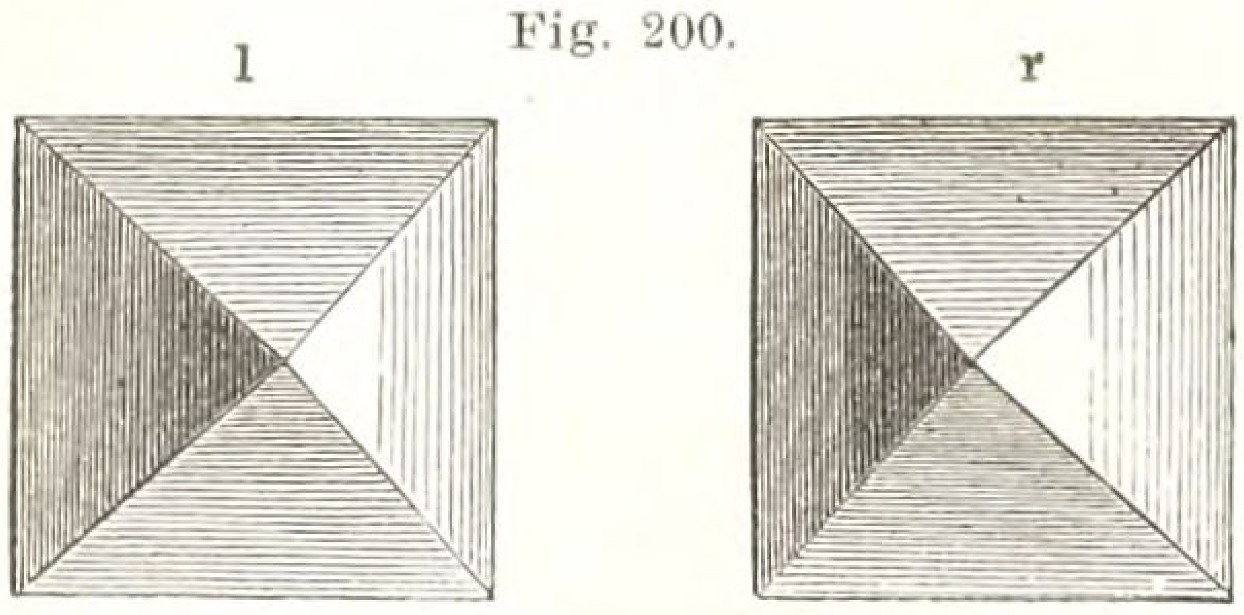


Wenn man von drei hintereinanderliegenden Punkten, etwa den Spitzen dreier hinter einander gesteckter Nadeln, die mittlere fixirt, so erscheinen die näher liegende und die fernere doppelt. Die Doppelbilder der näher liegenden sind verkehrtseitig, das rechte m_1 gehört dem linken, das linke gehört dem rechten Auge an, die Bilder $m_{,,}$ der entferntern Nadel sind rechtseitige, wie man leicht bei abwechselndem Schliessen des einen und andern Auges erkennt, wenn man beachtet, welches Bild jedesmal verschwindet. Es folgt daraus, dass auf den beiden innern und auf den beiden äussern Seiten der Netzhaut sich keine Punkte als identisch entsprechen. Wir müssen deshalb unsern Augenaxen eine ganz bestimmte Stellung geben, damit wir die Gegenstände einfach sehen, und so lange die Gegenstände überhaupt nahe sind, ist für verschiedene Entfernungen diese Stellung eine merklich und fühlbar verschiedene. Wir schliessen deshalb aus dieser Verschiedenheit der Augenstellung auf die Entfernung des Gegenstandes.

Dazu kommt nun aber als wesentlicher Umstand, dass die Bilder von nahe gelegenen Gegenständen in den beiden Augen wirklich verschieden sind, die wir, da sie auf identischen Netzhautpunkten entworfen werden, doch als zusammengehörig erkennen. Betrachten wir z. B. eine vierseitige Pyramide, deren Spitze dem Gesichte zugewandt ist, so sehen wir die-

selbe mit dem linken Auge wie Fig. 200 l, mit dem rechten aber wie Fig. 200 r. Dennoch combiniren wir diese beiden Gefühlseindrücke zu einem einzigen, weil wir wissen, dass es derselbe Körper ist, welcher die beiden verschiedenen Bilder erzeugt; die Verschiedenheit der beiden Bilder bestimmt dann unser Urtheil, den Körper als solchen, also nach der Tiefe ausgedehnt zu sehen.

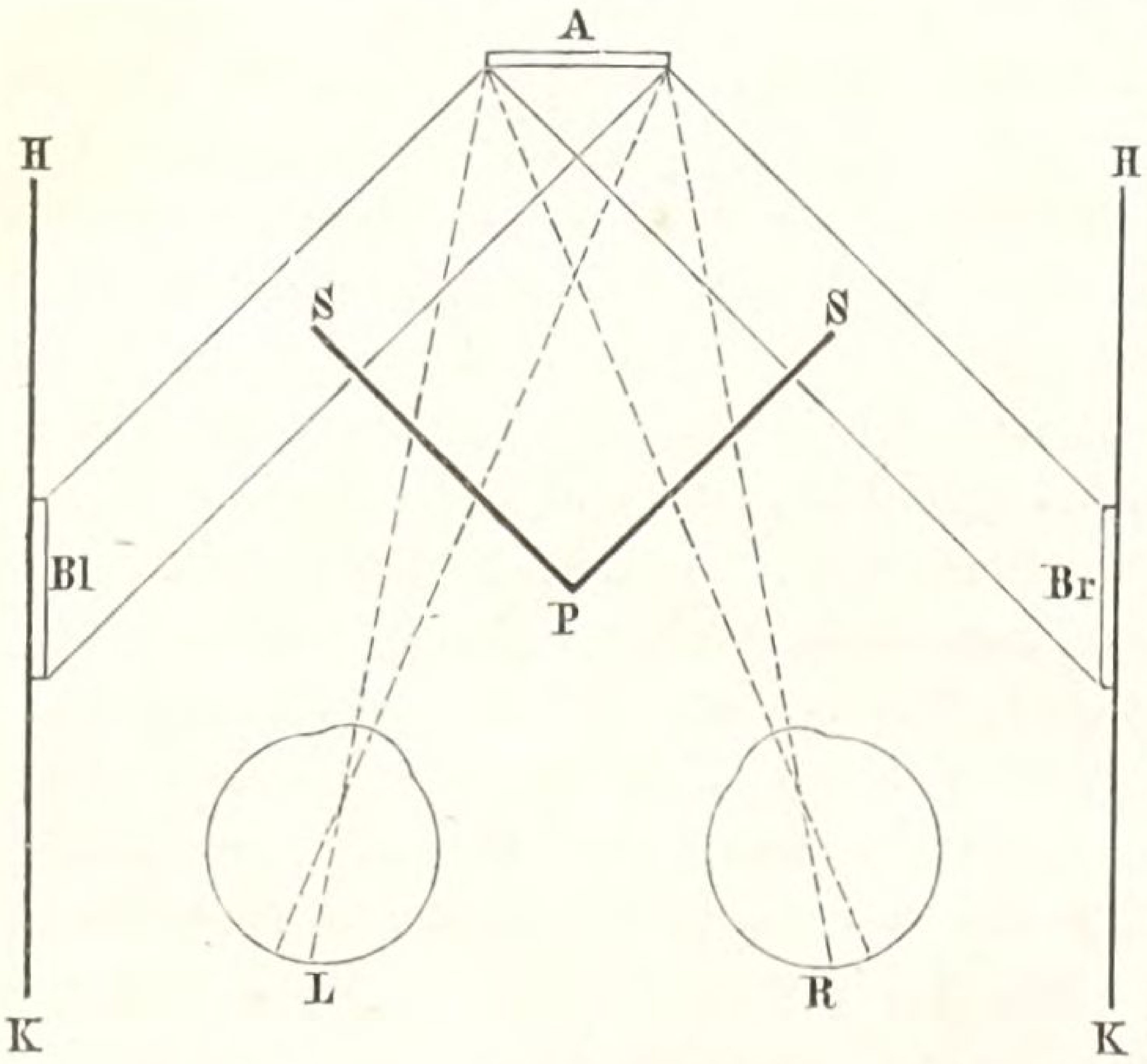
Fig. 200.



Den Beweis hierfür erhalten wir durch die zuerst von Wheatstone gefundene Thatsache, dass wir durch gleichzeitige Betrachtung zweier nach Art der Fig. 200 dargestellten Projectionen eines Körpers vollständig den Eindruck des Körperlichen erhalten. Betrachtet man die Fig. 200 l mit dem linken, gleichzeitig r mit dem rechten Auge, so combiniren sich beide Eindrücke zu einem und wir erhalten den Eindruck einer vierseitigen Pyramide, deren Spitze uns zugewandt ist. Bei einiger Uebung gelingt es ohne weitere Hülfsmittel die Augen bei Betrachtung der Figur so zu stellen, dass die beiden Bilder sich zu einem vereinigen und als vierseitige Pyramide erscheinen; erleichtert wird diese Wahrnehmung, wenn man durch ein zwischen die Figuren gehaltenes Blatt Papier dafür sorgt, dass jedes Auge nur die für dasselbe bestimmte Zeichnung sieht.

Ganz sicher gelingt es jedem mit Anwendung der sogenannten Stereoskope, dem Wheatstone'schen Spiegelstereoskop Fig. 201 oder dem Brewster'schen dioptrischen Stereoskop Fig. 202. Das Wheatstone'sche Stereoskop besteht aus zwei Spiegeln *SP*, welche unter einem rechten Winkel, die spiegelnden Flächen nach aussen zusammengefügt und in einem vorn und hinten offenen Kasten befestigt sind. Die Wände *HK* des Kastens sind einander und der Halbirungsebene des Winkels parallel und um den Abstand der deutlichen Sehweite von den Spiegeln entfernt. Stellt man nun bei *Br* eine für das rechte, bei *Bl* eine für das linke Auge gefertigte Zeichnung eines Körpers auf, so liegen die virtuellen Bilder beider Zeichnungen in *A* und die vor den Spiegeln befindlichen Augen *R* und *L* sehen jedes das für dasselbe gefertigte an derselben Stelle befindliche Bild.

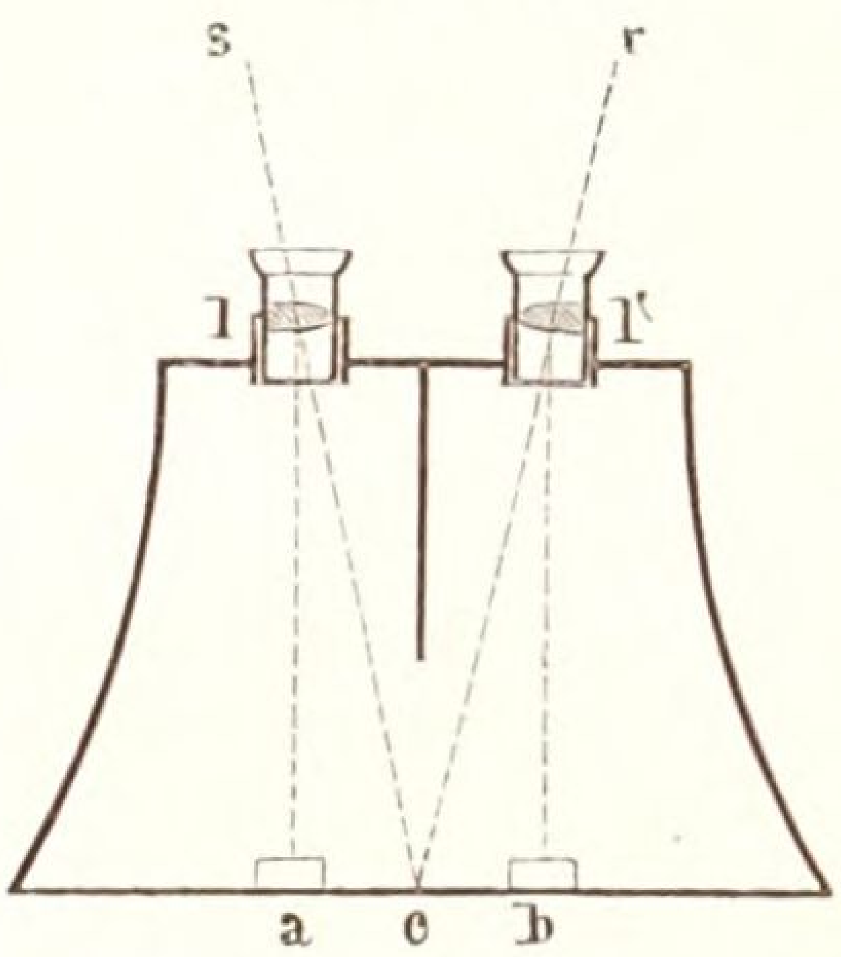
Fig. 201.



In dem Brewster'schen Stereoskop Fig. 202 betrachtet man die beiden Bilder durch zwei Röhren, welche in dem Abstande der Augen auf dem Deckel eines Kästchens angebracht sind, auf dessen Boden die zu betrachtenden Bilder hingelegt werden, und dessen eine Wand zur Beleuchtung der Bilder zum Theil geöffnet werden kann. Von dem Deckel

reicht eine Scheidewand ziemlich tief in das Kästchen hinab, die den Zweck hat jedem Auge das für das andere Auge bestimmte Bild unsichtbar zu machen. In den Röhren sind die Hälften einer in der Mitte durchschnittenen Linse, resp. symmetrische kreisförmige Ausschnitte aus diesen Hälften einer Linse von etwa 15 Centm. Brennweite so angebracht, dass die Randseite der Linsen gegen einander, die dickere Schnittfläche also nach aussen gewandt ist. Die Linsen dienen dazu, bequemer die Augen accommodiren zu können, und zugleich, um die Bilder ein wenig nach der Mitte zu verschieben, indem in den beiden Linsenhälften die von a und b ausgesandten Lichtstrahlen wie in flachen Prismen ein wenig nach aussen abgelenkt werden, so dass sie nach dem Austritt nach c convergiren. Die in die Röhren hineinblickenden Augen sehen also auch hier die beiden Bilder an derselben Stelle, sie combiniren sich daher zu einem einzigen Eindruck, wie wenn man die dargestellten Körper selbst sähe.

Fig. 202.



Vielfach verwendet man die Stereoskope auch zum räumlichen Sehen von Landschaften, so dass man glauben könnte, dass man auch ferne Gegenstände in dieser Weise räumlich sähe. Indess bei einiger Aufmerksamkeit erkennt man doch, dass diese stereoskopischen Landschaftsbilder nicht den Eindruck der Landschaft selbst, sondern den einer in der deutlichen Sehweite befindlichen plastischen Darstellung der Landschaft machen. Es beweist das wiederum, dass wir nur dem Auge nahe Gegenstände durch das Gefühl der Convergenz der Sehaxen und die doppelten Bilder wirklich nach der dritten Dimension ausgedehnt sehen. Bei entferntern ist dieses Mittel zur Unterstützung unseres Urtheils nicht vorhanden, dort wird dasselbe nur durch die verschiedene Deutlichkeit der feinern Contouren unterstützt.

§. 162.

Das Mikroskop. Wie wir vorhin sahen, ist im Allgemeinen für uns ein Gegenstand nur sichtbar, wenn sein Sehwinkel nicht unter 30″ beträgt; die Grösse dieses Sehwinkels oder die scheinbare Grösse eines Körpers ist, wie wir weiter sahen, dem Quotienten aus der wahren Grösse des Körpers und dessen Abstand von dem Knotenpunkte des Auges proportional. Der Sehwinkel kann also sowohl dadurch zu klein werden, dass die Entfernung eines Gegenstandes zu gross, als auch dadurch, dass die wahre Grösse desselben zu klein wird. Letztern Umstand könnte man nun allerdings dadurch unschädlich machen, dass man den Abstand des Gegenstandes vom Auge hinreichend klein macht. Indess ist dieser Annäherung doch dadurch eine Grenze gesteckt, dass unser Auge für zu nahe Gegenstände nicht mehr accommodiren kann, das heisst, dass es die Bilder nicht mehr auf der Netzhaut entwerfen kann. Sehr viel näher als die deutliche Sehweite beträgt, darf man zum deutlichen Sehen die Gegenstände dem Auge nicht bringen. Zum deutlichen Sehen sehr naher Gegenstände muss man deshalb optische Hülfsmittel anwenden.

Das einfachste Mittel ist die Lupe oder das einfache Mikroskop; das-

selbe ist eine Sammellinse oder eine Combination mehrerer Linsen, die als eine Sammellinse wirkt. Man hält dieselbe über den zu betrachtenden Gegenstand, so dass derselbe von der Linse etwas weniger als die Brennweite entfernt ist. Die Linse entwirft dann ein aufrecht stehendes virtuelles Bild des Gegenstandes, dessen Abstand von der Linse

$$f = \frac{a\,F}{a - F}$$

ist, wenn F die Brennweite und a den Abstand des Gegenstandes von der Linse bedeutet. Man wählt nun den Abstand a so, dass der Abstand des Bildes von der Linse, die wir uns unmittelbar vor dem Auge denken, gleich der deutlichen Sehweite d wird, oder dass $f = -d$ wird. Der Werth von a ergibt sich dann

$$-d = \frac{a\,F}{a - F} \qquad a = \frac{d\,F}{d + F}.$$

Die Vergrösserung, die wir mit der Lupe erhalten, ist gleich dem Verhältniss der scheinbaren Grösse des Bildes und der scheinbaren Grösse des ebenfalls in die deutliche Sehweite gebrachten Gegenstandes, somit gleich dem Verhältniss der wahren Grösse y des Bildes zur wahren Grösse des Gegenstandes. Das Verhältniss wird, indem wir für f den Werth $-d$ einsetzen, nach der allgemeinen Gleichung

$$\frac{y}{Y} = -\frac{f}{a} = \frac{d}{a} = \frac{d + F}{F}.$$

Die Vergrösserung wächst demnach, da d constant ist, um so mehr, je kleiner F, die Brennweite der Lupe ist, somit, da diese um so kleiner ist, je kleiner der Krümmungsradius der Linse ist, um so mehr, je stärker die Linse gekrümmt ist. Da nun bei stark gekrümmten Linsen, sobald man sich nicht auf centrale Strahlen beschränkt, die sphärische Abweichung sehr störend wirkt, so kann man eine einfache Linse im Allgemeinen nur für kleine Vergrösserungen benutzen, wenn man sich nicht auf ein sehr kleines Gesichtsfeld beschränken will. Durch die Combination mehrerer Linsen grösserer Brennweite zu einer kann man nach §. 148 das Gesichtsfeld bei gleicher Vergrösserung etwas grösser erhalten.

Die Lupe kann indess immer nur bei relativ kleinen Vergrösserungen benutzt werden, weil die Bilder bei starker Vergrösserung zu lichtschwach werden, man benutzt daher zur Beobachtung mit starken Vergrösserungen das zusammengesetzte Mikroskop.

Das zusammengesezte Mikroskop, in der Regel einfach als Mikroskop bezeichnet, besteht aus einer Sammellinse o Fig. 203, welche dem Objecte so nahe gebracht wird, dass sie von demselben ein vergrössertes reelles Bild BA entwirft; dieses vergrösserte reelle Bild wird dann durch eine Lupe p betrachtet, die also wieder ein vergrössertes virtuelles Bild des reellen Bildes BA entwirft. Die Linse o, welche das reelle Bild entwirft, ist das Objectiv, die Lupe p das Ocular des Mikroskopes. Wie man sieht, ist die Vergrösserung hier eine doppelte, sowohl durch das Objectiv als durch das Ocular, so dass die wirkliche Vergrösserung das Product beider ist. Würde also das Objectiv ein Bild BA liefern, welches 20 mal so gross ist als der Gegenstand ab, würde dann das Ocular als Lupe eine

zehnfache Vergrösserung geben, so würde das Mikroskop eine 200fache Vergrösserung geben, das heisst man sieht jede lineare Dimension des Gegenstandes *ab* 200mal grösser, als wenn der Gegenstand selbst in die deutliche Sehweite gebracht wäre. Die Anordnung des Mikroskopes zeigt Fig. 204. Das Objectiv *o* ist in das untere Ende einer Röhre gefasst,

Fig. 203.

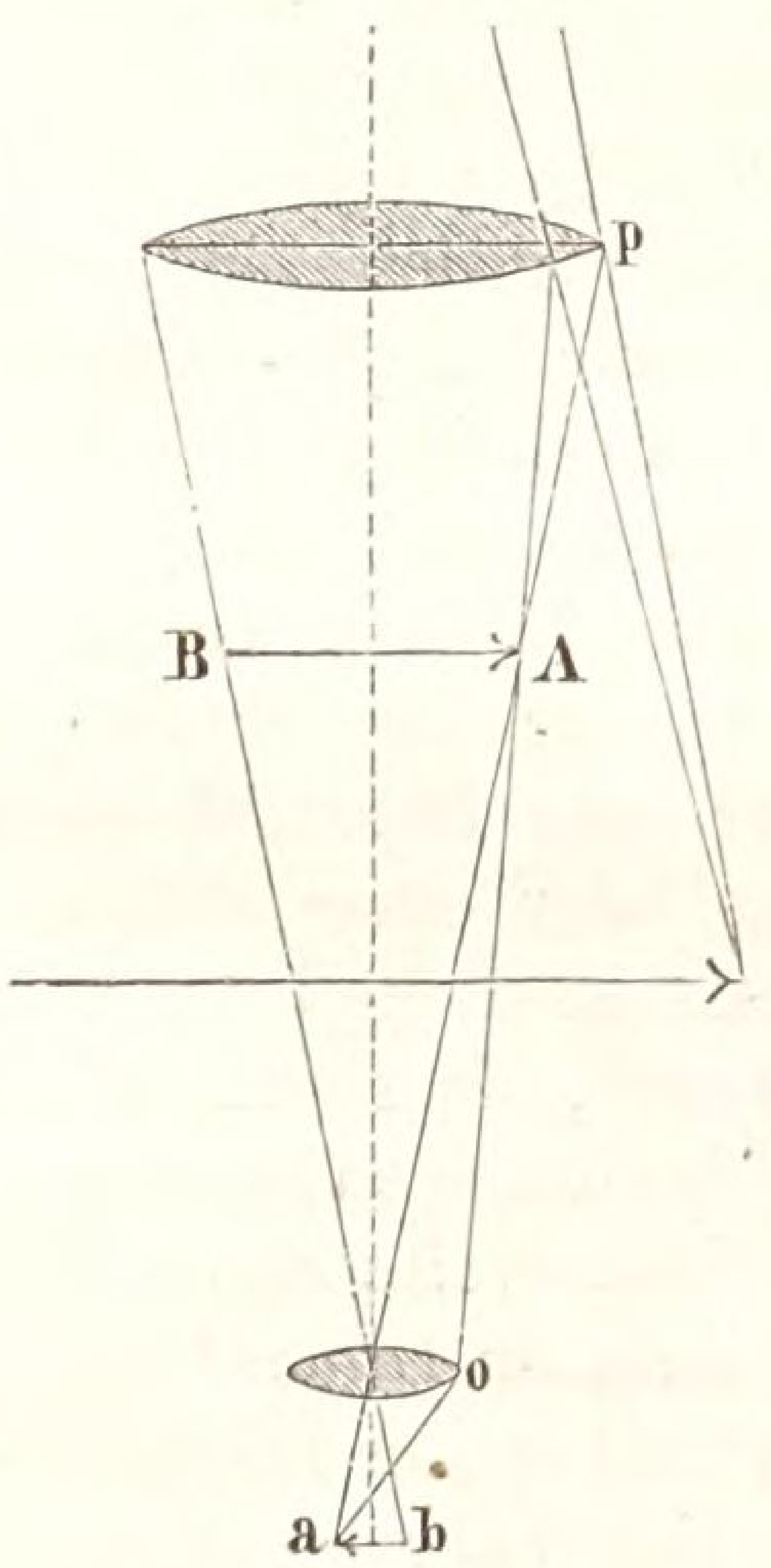
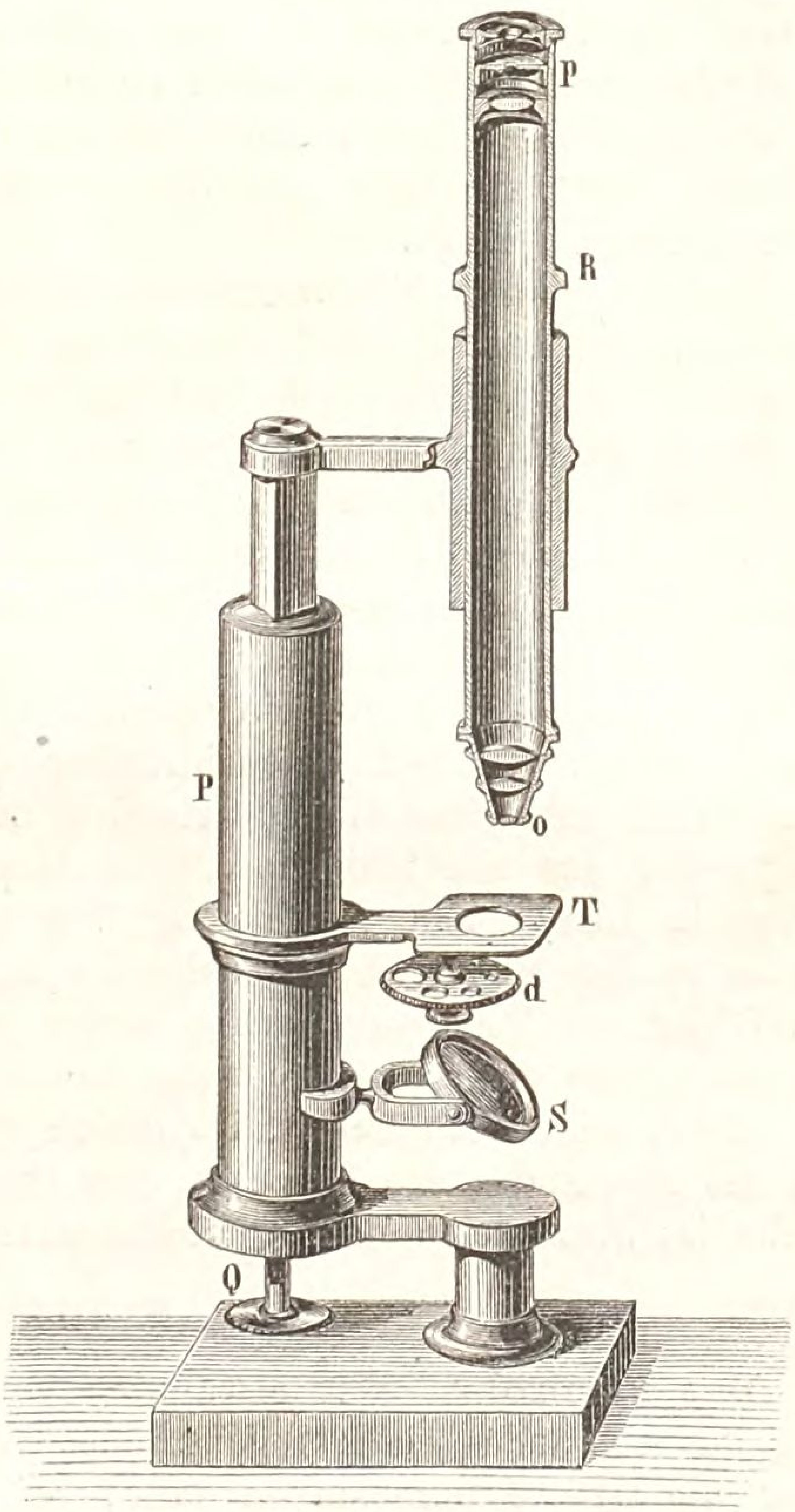


Fig. 204.



in deren oberes Ende das in eine kürzere Röhre gefasste Ocular eingesteckt werden kann. Die Röhre ist an einer prismatischen Stange befestigt, welche in der hohlen Säule *P* mittels der Schraube *Q* zur feinen Einstellung auf und nieder bewegt werden kann. Unterhalb der Röhre ist an der Säule *P* eine durchbohrte Metallplatte, der Objecttisch *T* angebracht, auf welchen das zu betrachtende Object zwischen zwei Glasplättchen eingeschlossen gelegt wird. Die Oeffnung des Tisches ist in der Verlängerung der Mikroskopaxe, so dass das betreffende Object gerade über der Oeffnung zu liegen kommt. Unterhalb des Tisches ist der Beleuchtungsspiegel *S*, ein kleiner Hohlspiegel angebracht, der so gegen ein Fenster gestellt wird, oder auch gegen eine künstliche Lichtquelle, dass das Licht gerade auf das zu betrachtende Object concentrirt wird. Das

mit mehreren Oeffnungen versehene Diaphragma *d* hat den Zweck, mehr oder weniger Licht zum Object zu lassen, resp. das Nebenlicht abzuhalten.

Als Objectivlinsen werden Linsen von sehr kleiner Brennweite angewandt, und um die sphärische Aberration möglichst klein zu machen, eine Combination mehrerer Linsen; dadurch wird die Vergrösserung wesentlich durch das Objectiv bewirkt. Der Zweck dieser Einrichtung ist der, dem Ocular eine grössere Ausdehnung geben zu können und so ein grösseres Gesichtsfeld zu erhalten. Denn wie Fig. 203 erkennen lässt, sind alle das Ocular treffenden Strahlen in einem Kegel eingeschlossen, dessen Basis das Ocular, dessen Spitze die Mitte des Objectives ist. Das Gesichtsfeld ist somit der Oeffnung dieses Kegels resp. der Basis des Kegels in der Objectebene *ab* gleich.

Auf die genauere Einrichtung der Mikroskope können wir hier nicht eingehen; dieselbe ist in den letzten Jahrzehnten, wegen der grossen Wichtigkeit des Mikroskopes in allen Zweigen der Physiologie, der Botanik etc. Gegenstand eines eingehenden Studiums geworden, so dass die Mikroskopie fast ein besonderer Zweig der Naturwissenschaften geworden ist.

Von den eben beschriebenen Mikroskopen unterscheidet sich das objective Mikroskop, welches den Zweck hat, für Demonstrationen sehr stark vergrösserte reelle Bilder der Objecte auf Schirmen zu entwerfen; wir können dasselbe kurz als ein Mikroskop ohne Ocular bezeichnen. Man bringt das durch einen Beleuchtungsspiegel oder eine Beleuchtungslinse, welche sehr intensives Licht, wie das der Sonne oder einer elektrischen Lampe auf das abzubildende Object concentriren, sehr hell beleuchtete Object in eine solche Entfernung vor das Objectiv, dass ein möglichst grosses reelles Bild des Gegenstandes auf dem Schirme entworfen wird. Das Object wird also um wenig weiter als die Brennweite des Objectivs von demselben entfernt. Die Vergrösserung der linearen Dimensionen, die ein solches Mikroskop liefert, ist gleich dem Quotienten des Bildabstandes und des Abstandes des Objectes vom Objectiv. Die Vergrösserung einer Fläche ist also gleich dem Quadrate dieses Quotienten.

§. 163.

Das Fernrohr. Wir erwähnten vorhin, dass auch durch Vergrösserung des Abstandes eines Gegenstandes vom Auge der Sehwinkel desselben unter die Grösse herabsinken kann, bei welcher der Gegenstand wahrnehmbar ist. Zur Sichtbarmachung solcher Gegenstände dient das Fernrohr. Die Aufgabe des Fernrohrs ist somit, von zu fernen Gegenständen in der deutlichen Sehweite Bilder zu entwerfen und diese zugleich so zu vergrössern, dass sie deutlich sichtbar werden.

Jedes Fernrohr besteht daher, wie das zusammengesetzte Mikroskop aus zwei Theilen, dem Objectiv, welches von dem zu betrachtenden Gegenstande in der Nähe des Auges ein Bild entwirft und dem Ocular, welches dasselbe in die deutliche Sehweite versetzt. Nach der Art des Objectivs unterscheiden sich die Fernrohre in dioptrische und katoptrische, nach Art des Oculars in astronomische und terrestrische, die astronomischen geben umgekehrte, die terrestrischen aufrechtstehende Bilder.

Das dioptrische Objectiv besteht aus einer achromatischen Sammellinse von ziemlich grosser Brennweite und einem so grossen Durchmesser,

wie es die Brennweite des Objectivs resp. die dadurch bedingte Krümmung der Linsen gestattet. Die Grösse des Objectivs ist bedingend für die Helligkeit der Bilder, denn je grösser das Objectiv ist, um so mehr Licht dringt von den betrachteten Objecten in das Fernrohr hinein. Den zu astronomischen Beobachtungen dienenden Fernrohren gibt man daher Oeffnungen bis zu 40 Centim., dem entsprechend dann auch sehr grosse Brennweiten, um die sphärische Aberration unschädlich zu machen.

Bei den astronomischen Fernrohren wird dann das von dem Objectiv erzeugte Bild durch ein einfaches Mikroskop als Ocular betrachtet; das Ocular besteht aus einer oder aus einer Combination von Sammellinsen, die als eine Linse wirkt, dasselbe befindet sich in einem solchen Abstande vom Objectiv, dass das von dem letztern entworfene Bild innerhalb der Brennweite des Oculars liegt an einer solchen Stelle, dass das Ocular von diesem reellen Bilde in der deutlichen Sehweite des in das Ocular blickenden Auges ein vergrössertes virtuelles Bild entwirft. Da der Abstand des Bildes vom Objectiv für verschieden entfernte Gegenstände etwas verschieden ist, macht man das Ocular, um immer die angegebene Bedingung erfüllen zu können, etwas verstellbar.

Wegen der immer gegenüber den grossen Entfernungen kleinen Dimensionen des Fernrohrs dürfen wir die scheinbare Grösse des Gegenstandes gleich derjenigen setzen, welche sie sein würde, wenn das Auge sich an der Stelle des Objectivs befände; ist die Grösse des Gegenstandes Y, der Abstand vom Objectiv a, so ist die scheinbare Grösse

$$g = \frac{Y}{a}.$$

Nennen wir den Abstand des Bildes vom Objectiv f und die Grösse des Bildes y, so ist

$$y = -\frac{f}{a} \cdot Y,$$

somit auch

$$-\frac{y}{f} = \frac{Y}{a} = g.$$

Nennen wir nun den Abstand des Bildes vom Ocular f_1, so ist vom Ocular aus gesehen die scheinbare Grösse dieses Bildes

$$g' = \frac{y}{f'}$$

und dies ist auch, wie wir vorhin sahen, die scheinbare Grösse des in der deutlichen Sehweite durch das Ocular entworfenen virtuellen Bildes. Das Verhältniss dieser beiden scheinbaren Grössen ist deshalb die von dem Fernrohr gelieferte Vergrösserung, da das dem unbewaffneten Auge unter dem Sehwinkel g erscheinende Object dem mit dem Fernrohr bewaffneten unter dem Sehwinkel g' erscheint. Wir erhalten somit

$$\frac{g'}{g} = -\frac{f}{f'}.$$

Da die mit dem Fernrohr betrachteten Gegenstände sich immer in grossen Entfernungen befinden, können wir ohne merklichen Fehler für f, den Abstand des Bildes vom Objectiv, die Hauptbrennweite F desselben einsetzen.

Der Abstand f_1 ist dadurch bestimmt, dass das virtuelle Bild in der deutlichen Sehweite entworfen wird. Ist F_1 die Hauptbrennweite des Oculars, so ist nach dem vorigen §. wie bei der Lupe

$$f_1 = \frac{d F_1}{d + F_1},$$

somit wird die Vergrösserung

$$\frac{g'}{g} = - \frac{F(d + F_1)}{F_1 d}.$$

Da die Brennweite des Oculars immer sehr klein gewählt wird, so ist $d + F_1$ immer nur sehr wenig von d verschieden, somit der Quotient dieser beiden Grössen sehr nahe gleich 1, dann erkennt man, dass die von einem Fernrohr gelieferte Vergrösserung sehr nahe gleich ist dem Quotienten aus der Hauptbrennweite des Objectivs und jener des Oculars. Das negative Vorzeichen in dem Ausdrucke für die Vergrösserung zeigt, dass das Bild ein umgekehrtes ist.

Die Grösse des Gesichtsfeldes ist bei dem Fernrohr, wie bei dem Mikroskop ein Kegel, dessen Spitze die Mitte des Objectivs, dessen Basis das Ocular ist.

Um das Fernrohr auf einen ganz bestimmten Punkt einstellen zu können, das heisst das Bild eines bestimmten Punktes gerade in die Axe des Fernrohrs bringen zu können, was erforderlich ist, wenn das Fernrohr wie bei dem Spectrometer und ähnlichen Apparaten zu Winkelmessungen benutzt werden soll, wird an der Stelle, wo das reelle Bild vom Objective entworfen wird, ein Fadenkreuz ausgespannt, zwei meist rechtwinklig sich kreuzende sehr feine Fäden, deren Kreuzungspunkt auf der Axe des Fernrohrs liegt. Da das Fadenkreuz immer an derselben Stelle liegen soll, wo das reelle Bild entsteht, so muss es mit dem Ocular fest verbunden, und in dem vorher mit f_1 bezeichneten Abstande von demselben angebracht sein.

Bei dem astronomischen Fernrohr sieht man das Bild umgekehrt; da das in manchen Fällen unbequem ist, hat man in dem terrestrischen Fernrohr mit dem Objective ein zusammengesetztes Ocular verbunden, welches als schwaches Mikroskop wirkt. In der einfachsten Form würde es aus zwei Linsen bestehen, deren erste von dem durch das Objectiv gelieferten Bilde ein reelles Bild entwirft, welches man durch die zweite betrachtet.

Bei dem Galilei'schen Fernrohr wird das Aufrechtsehen der betrachteten Gegenstände dadurch bewirkt, dass als Ocular eine concave Linse von kurzer Zerstreuungsweite verwandt wird. Dieselbe p Fig. 205 wird in eine solche Entfernung vom Objectiv gebracht, dass das von dem Objective entworfene Bild rs in einem solchen Abstande ab hinter dem Ocular entstehen würde, dass anstatt dessen ein virtuelles Bild $r's'$ in der deutlichen Sehweite des unmittelbar am Ocular befindlichen Auges entsteht. Nach §. 147 ist, wenn $-F_1$ die Zerstreuungsweite der Linse, a der Abstand des Objectes ist, dessen Strahlen die Linse treffen, der Abstand des Bildes

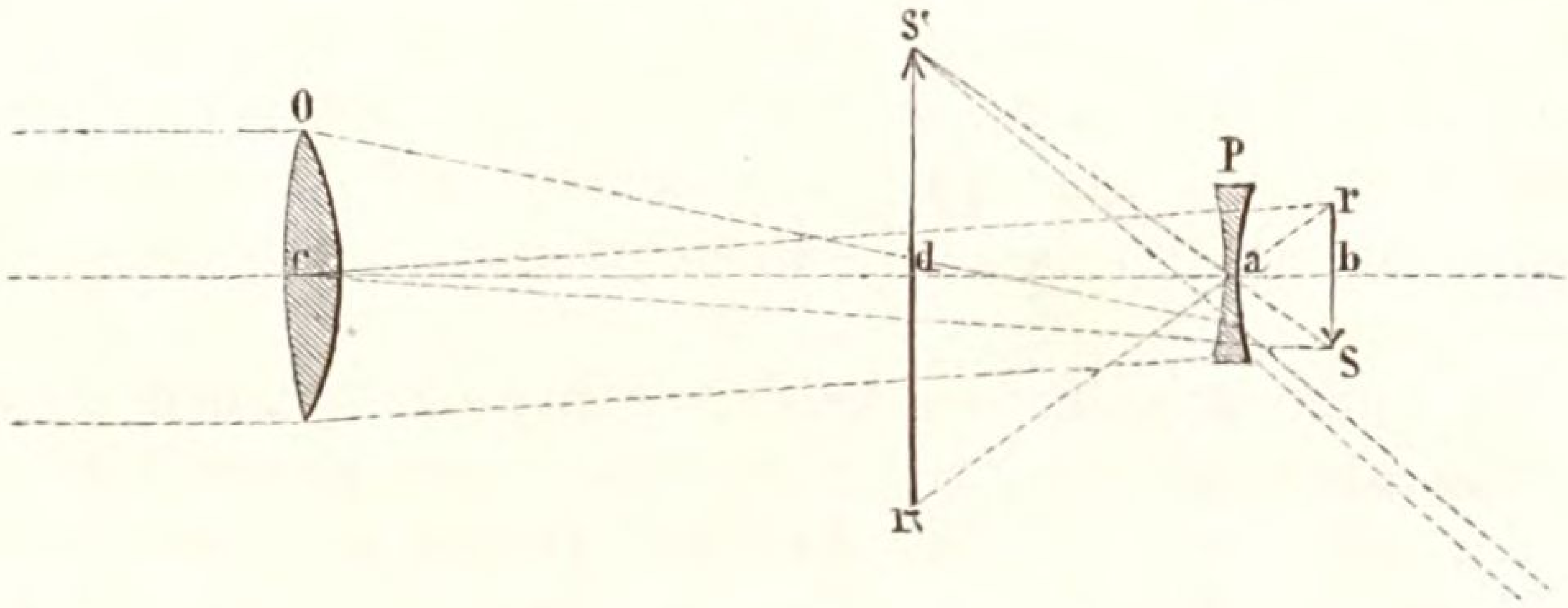
$$f = - \frac{a F_1}{a + F_1};$$

soll nun $f = -d$ werden, so muss

$$a = -\frac{F_1 d}{d - F_1},$$

also ab etwas grösser als F_1 sein. Die Figur lässt erkennen, wie durch den Gang der Strahlen das virtuelle Bild zu Stande kommt.

Fig. 205.



Für die Vergrösserung erhält man leicht denselben Ausdruck wie für das astronomische Fernrohr. Das Gesichtsfeld ist bei diesem Fernrohr bedeutend kleiner, da die Strahlen nach dem Durchtritt des Oculars sofort divergiren. Nimmt man an, dass das Auge sich unmittelbar am Ocular befindet, so kann man als solches einen Kegel betrachten, dessen Spitze die Mitte des Objectives, dessen Basis die Pupille des Auges ist. Man verwendet deshalb diese Fernrohre nur dort, wo es nicht bedeutender Vergrösserungen bedarf, man wendet also Objective mit kleinen Brennweiten an; die Theaterperspective, die sogenannten Feldstecher sind Fernrohre dieser Art.

Die katoptrischen Fernrohre haben an Stelle der Objectivlinse einen concaven Spiegel, durch welchen von dem zu betrachtenden Gegenstande ein reelles Bild entworfen wird, das durch ein passendes Ocular betrachtet wird. Dieselben wurden früher zu grossen Fernrohren verwandt, als die Technik noch nicht Objective von solcher Grösse herstellen konnte, wie sie zur Erzielung bedeutender Vergrösserungen nöthig sind. Denn wie schon vorher erwähnt wurde, ist die Lichtstärke der Bilder annähernd dem Durchmesser der Objective proportional zu setzen.

Auf das Speciellere der Einrichtung, wie überhaupt auch auf die speciellere Einrichtung der dioptrischen Fernröhre können wir hier nicht eingehen.

Zweiter Abschnitt.

Theoretische Optik.

Erstes Kapitel.

Interferenz und Beugung des Lichtes.

§. 164.

Fresnel's Interferenzversuch. Schon in dem vorigen Abschnitte haben wir eine Reihe von Beweisen dafür kennen gelernt, dass von den

beiden zur Erklärung der Lichterscheinungen aufgestellten Theorien jene, welche das Licht als eine schwingende Bewegung auffasst, in der That zur Erklärung der Lichterscheinungen geeignet sei, während die zweite, die Emissionshypothese sich bei der genauern Untersuchung der Brechungserscheinungen als unhaltbar ergab.

Zur vollen Bestätigung der Richtigkeit der der Undulationstheorie zu Grunde liegenden Auffassung, dass das Licht eine schwingende Bewegung sei, müssen wir indess nachweisen, dass bei den Lichterscheinungen sich alle jene zeigen, die sich aus der Natur der schwingenden Bewegung ergeben und wenn das der Fall ist, müssen wir untersuchen, ob die Schwingungen, die wir im Lichte wahrnehmen, longitudinale oder transversale sind.

Als erste Folge aus der Natur der sich ausbreitenden schwingenden Bewegung erkannten wir im dritten Abschnitt des ersten Theiles die Abhängigkeit der aus dem Zusammenwirken zweier oder mehrerer Bewegungen resultirenden Schwingungen von der Phase, in welcher die Bewegungen zusammenkommen, so dass die resultirende Bewegung stärker oder schwächer sein kann, als jede der Theilbewegungen, oder dass sie sogar gleich Null sein kann. Kommen zu einem Punkte, der von dem Ursprung einer Bewegung um x, von dem andern um $x + \delta$ entfernt ist, zwei gleichgerichtete Bewegungen gleicher Periode, so dass die Verschiebungen des Punktes von der Gleichgewichtslage zur Zeit t in Folge jeder der beiden Bewegungen dargestellt werden durch die Gleichungen

$$y_1 = a_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right); \qquad y_2 = a_2 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x+\delta}{\lambda}\right),$$

so ist die resultirende Amplitude gegeben durch

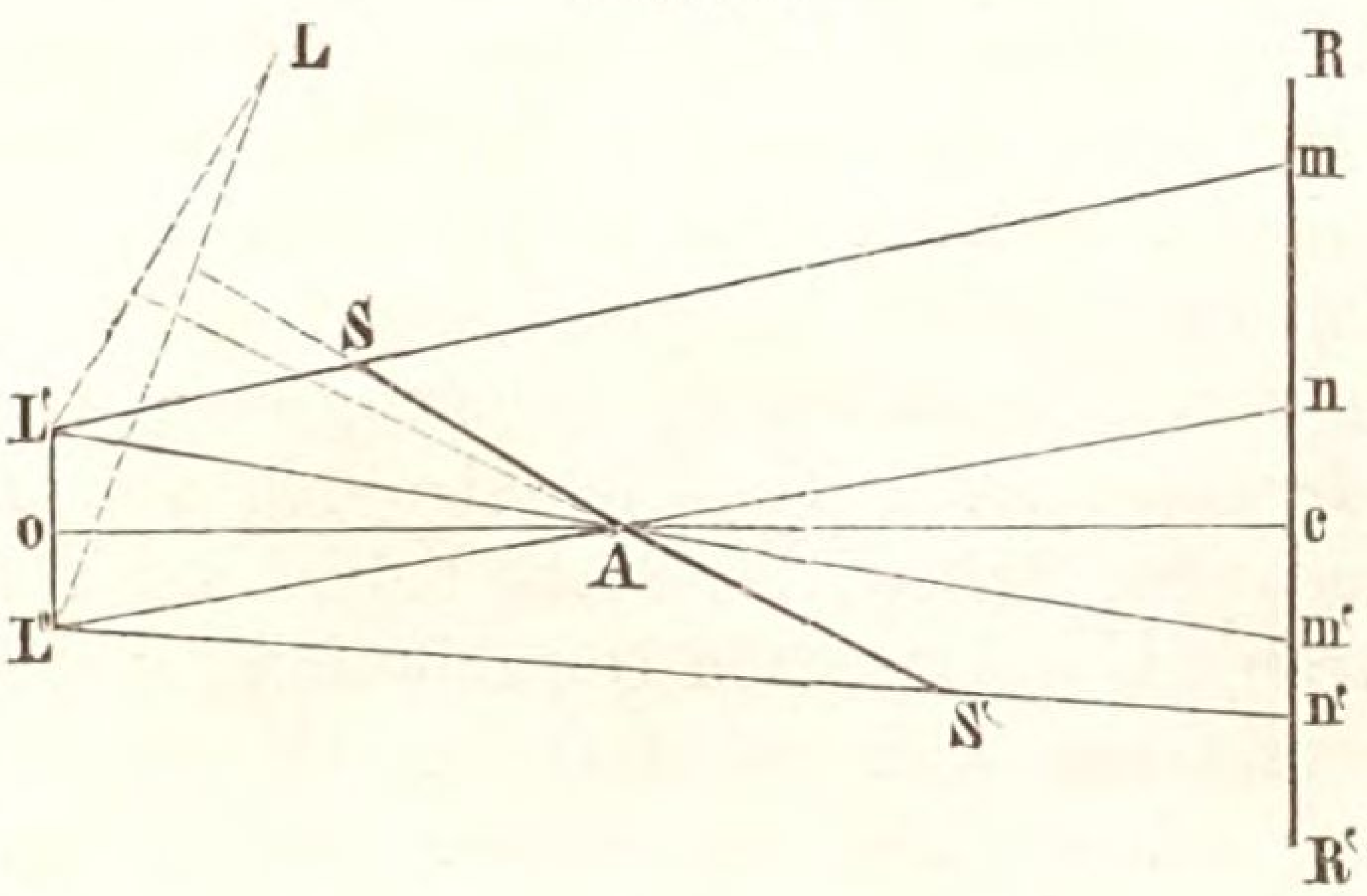
$$A^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2\, a_1\, a_2 \,.\, \cos 2\pi \frac{\delta}{\lambda}.$$

Es könnte allerdings zweifelhaft sein, wenn die Schwingungen, die wir als Licht wahrnehmen, transversale sind, ob dann dieser Satz über die Interferenz anwendbar ist, da derselbe nur für gleichgerichtete Schwingungen gültig war, während bei verschieden gerichteten Schwingungen nur die Form der Bahn der schwingenden Punkte von der Phasendifferenz der Theilbewegungen abhängig ist. Indess die in einem bestimmten Momente von ein und derselben Lichtquelle ausgehenden Schwingungen werden eine ganz bestimmte Richtung haben und auch wenn sie sich ausbreiten, stets gleichgerichtete Schwingungen erzeugen. Wenn wir deshalb die in einem bestimmten Momente von einer Lichtquelle ausgehende Bewegung theilen und nachdem sie verschiedene Wege durchlaufen, wieder zusammentreffen lassen, so muss für diese Lichtstrahlen das Interferenzgesetz gültig sein.

In dieser Weise hat in der That zuerst Fresnel die Gesetze der Interferenz als für das Licht gültig nachgewiesen, er hat gezeigt, dass durch das Zusammenwirken zweier Lichtstrahlen eine grössere oder geringere Helligkeit als durch jeden einzelnen, und dass selbst Dunkelheit entstehen kann. Fresnel stellte zu dem Zwecke zwei spiegelnde Platten von schwarzem Glase so auf, dass ihre spiegelnden Flächen vertical, dass, wie es der Durchschnitt Fig. 206 zeigt, ihre Flächen AS und AS' nur sehr wenig gegen einander geneigt waren, und dass sie in einer Kante

genau zusammenstiessen, ohne dass an der Berührungslinie ein Spiegel vor dem andern vorstand. Stellt man dann den beiden Spiegeln eine Lichtquelle L gegenüber, so erzeugt jeder von derselben ein Bild, und ein den Spiegeln gegenüber gestellter Schirm RR' wird von dem von den Spiegeln reflectirten Lichte so beleuchtet, als wären die beiden Bilder L' und L'' selbständige Lichtquellen. Das von dem Spiegel AS reflectirte Licht beleuchtet auf dem Schirme die Fläche mm', das von AS' herkommende den Raum nn'; der Raum nm' wird also zugleich von beiden Lichtquellen beleuchtet.

Fig. 206.



Wendet man nun als Lichtquelle L eine sehr schmale intensive verticale Lichtlinie an, etwa die Brennlinie, welche von den Sonnenstrahlen gebildet wird, welche eine Cylinderlinse durchsetzt haben, so erscheinen in dem Raume nm' an beiden Seiten der Mitte C eine Anzahl farbiger Streifen, welche den Lichtlinien L' und L'' parallel sind. In der Mitte C zeigt sich ein heller weisser Streifen, an der Stelle des Schirmes, welche genau gleich weit von L' und L'' entfernt ist. Von der Mitte aus nach jeder der Seiten fortschreitend zeigt sich folgende Farbenreihe: gelblich-roth, dann schwarzviolett, blau; weiter weiss, gelbroth, violett, blau; ferner grün, gelb, roth, bläulich-grün, dann noch roth, bläulich-grün, wieder roth, grün u. s. w., bis die Streifen schliesslich undeutlich werden.

Wendet man anstatt weissen Lichtes homogenes an, so sind nur helle und dunkle Streifen zu sehen; in der Mitte ist ein Maximum der Helligkeit, dieselbe nimmt nach beiden Seiten ab, wird in einer bestimmten Entfernung ein Minimum, wächst weiter wieder bis zu einem Maximum, nimmt wieder zu einem Minimum ab u. s. f. Vergleicht man die Abstände der einzelnen Maxima oder Minima, wenn man homogenes Licht verschiedener Farbe anwendet, so findet man die Abstände am grössten bei rothem Lichte, kleiner bei gelbem, am kleinsten bei violettem Lichte; die Abstände werden also um so kleiner, je näher das angewandte Licht dem violetten Ende des Spectrums ist. Daraus erklärt sich unmittelbar die Farbenerscheinung bei Anwendung des weissen Lichtes. Die Mitte ist bei allen Farben hell, sie muss also bei Anwendung weissen Lichtes weiss erscheinen; ausserhalb der weissen Mitte tritt zuerst das Minimum für violett, dann für blau, dann für grün auf, die weisse Mitte muss also zuerst in eine gelbe, dann in eine rothe Färbung übergehen. Dort, wo das Rothe sein erstes Minimum hat, sind alle Farben noch nicht sehr hell, es ist das Roth deshalb nach aussen durch einen dunklen Streif begrenzt, dann erreicht zuerst Violett und Blau sein erstes seitliches Maximum, auf den dunklen muss also ein blauer Streifen folgen u. s. f.

Der Abstand der Streifen von einander ändert sich bei Anwendung einer und derselben Farbe, wenn man die Neigung der Spiegel gegen einander ändert, er wird um so kleiner, je mehr die Spiegel gegen einander geneigt sind.

Bei constanter Neigung der Spiegel ergibt sich weiter, dass der Abstand der dunklen Streifen, die bei Anwendung homogenen Lichtes auftreten, um so grösser wird, je weiter der Schirm RR' von den Spiegeln entfernt wird.

In dem Auftreten der hellen und dunklen Streifen auf demjenigen Theile des Schirmes, der von beiden Spiegeln Licht erhält, sehen wir direkt die Erscheinung der Interferenz, die Beleuchtung des Schirmes an den verschiedenen Stellen ist verschieden je nach dem Wege, welchen die an den betreffenden Stellen zusammenwirkenden Lichtstrahlen von ihrem Ausgangspunkte aus durchlaufen haben. Die Mitte c, welche gleich weit von L' und L'' entfernt ist, zu der also auch die Lichtstrahlen von L aus genau den gleichen Weg durchlaufen haben, ist stets hell, zwei von derselben Lichtquelle ausgehende Strahlen, welche nach Durchlaufung gleich langer Wege zusammenkommen, verstärken sich somit stets. Gehen wir nun von c aus nach der einen oder andern Seite, so werden die von den Strahlen durchlaufenen Wege verschieden, der eine wird kürzer, der andere länger; wir sehen, dass die Helligkeit damit abnimmt, und hat die Wegedifferenz einen bestimmten Werth erreicht, so löschen die Strahlen sich gegenseitig aus. Wird die Wegedifferenz grösser, so gibt das Zusammenwirken wieder Helligkeit und für einen bestimmten grössern Werth wird die Helligkeit wieder ein Maximum u. s. f.

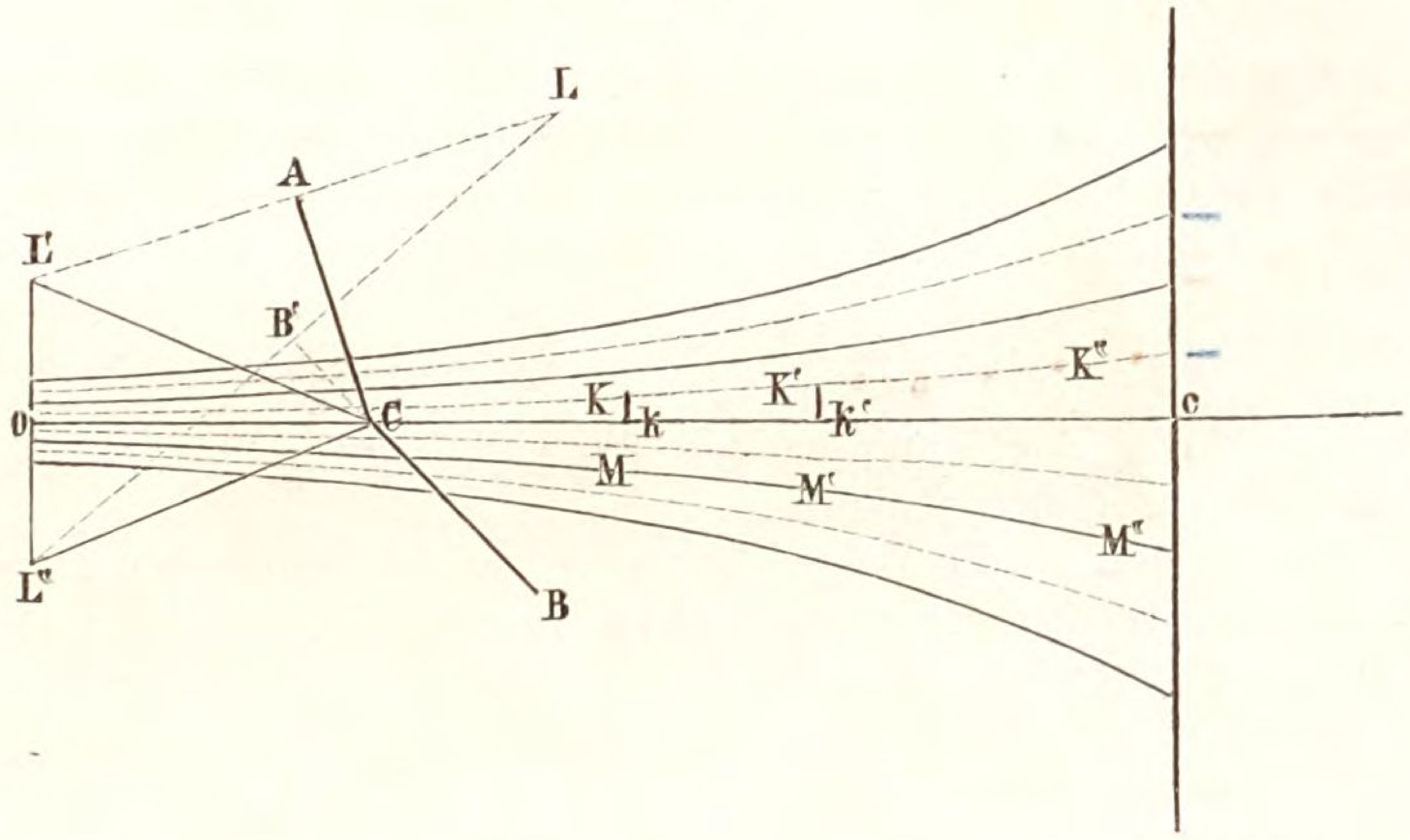
Es tritt also, wie es das Gesetz der Interferenz der schwingenden Bewegung verlangt, periodisch wechselnd eine Verstärkung und eine Schwächung des Lichtes auf. Nach dem Interferenzgesetze muss durch das Zusammenwirken zweier Schwingungen jedesmal dort ein Maximum auftreten, wo die Phasendifferenz, oder wenn wie hier der Phasenunterschied durch die Verschiedenheit des vom Ausgangspunkte aus durchlaufenen Weges bewirkt wird, wo der Wegeunterschied Null oder ein Vielfaches einer ganzen Wellenlänge ist; dagegen muss dort ein Minimum auftreten, wo der Wegeunterschied ein ungerades Vielfaches einer halben Wellenlänge ist. Nennen wir also den Wegeunterschied dort, wo für ein bestimmtes homogenes Licht der erste dunkle Streifen auftritt, d, so müssen die Maxima den Stellen entsprechen, an denen die Wegeunterschiede sind $0, 2d, 4d, 6d \ldots$ die Minima, wo dieselben sind $d, 3d, 5d \ldots$

Eine Messung der Lage der dunklen Streifen zeigt diesen Satz bestätigt. Misst man nämlich die Abstände der ersten, zweiten etc. dunklen Streifen von der Mitte c, indem man den Schirm RR in verschiedenen Entfernungen von den Spiegeln aufstellt, so ergibt sich, wie Fig. 207 als Durchschnitt der Erscheinung andeutet, dass die Abstände eines bestimmten Streifens von der Mitte c mit wachsender Entfernung des Schirmes von dem Spiegel so zunehmen, dass die in einem Horizontalschnitte liegenden Punkte des Streifens auf einer Hyperbel liegen, deren Brennpunkte die in demselben Horizontalschnitte liegenden Punkte der Bilder L' und L'' der Lichtlinie sind. So liegen also die Punkte des ersten dunklen Streifens, $K, K' \ldots$ auf einer Hyperbel; ebenfalls auf einer Hyperbel, aber mit andern Constanten liegen die Punkte $M, M' \ldots$ des ersten seitlichen Maximums u. s. f.

Die Hyperbel ist bekanntlich dadurch charakterisirt, dass die Differenz der Abstände eines zu ihr gehörigen Punktes von den beiden Brennpunkten eine constante Grösse, und zwar die grosse Axe der Hyperbel ist. Die

Messungen beweisen also zunächst, dass das Auftreten eines bestimmten Minimums oder auch eines bestimmten Maximums in verschiedenen Ent-

Fig 207.



fernungen von dem Spiegel dort stattfindet, wo die Wegedifferenz einen bestimmten Werth hat.

Aus den Messungen der Abstände eines bestimmten Streifens von der Mitte, an Punkten k, k', deren Abstände von der Mitte o der Verbindungslinie $L'L''$ man ebenfalls misst, lässt sich die grosse Axe der Hyperbel, somit auch die Wegedifferenz der in dem Streifen zusammenwirkenden Strahlen berechnen. Bezeichnen wir nämlich den Abstand eines Punktes K der Hyperbel von der Mittellinie oc mit x, den zugehörigen Abstand ko mit y, bezeichnen wir ferner den halben Abstand der beiden Brennpunkte, also oL' oder oL'' mit e und die halbe grosse Axe der Hyperbel mit a, so besteht für die zur Hyperbel gehörigen Punkte die Beziehung.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{e^2 - a^2} = 1.$$

Den Abstand x erhalten wir aus den Messungen direkt, am besten indem wir etwa den Abstand der beiden zu derselben Hyperbel gehörigen dunklen Streifen an beiden Seiten der Mitte messen, und von dem Abstande die Hälfte nehmen.

Von der Grösse $y = ko$ können wir ebenfalls direkt den Abstand $kc = w$ vom Spiegel messen, die Grösse co erhalten wir leicht aus dem Abstande $CL = f$ der leuchtenden Linie von der Kante, in der die Spiegel zusammenstossen und dem spitzen Winkel $ACB' = \alpha$, den die beiden Spiegelflächen mit einander bilden. Da nämlich C als Kante beiden Spiegeln angehört, folgt aus dem Reflexionsgesetz, dass $CL = CL' = CL''$, somit liegen $LL'L''$ auf einem Kreise, dessen Mittelpunkt C ist. Daraus folgt, dass der Winkel $L'CL''$ gleich dem Doppelten des Winkels $L'LL''$ ist. Da nun LL' die Verbindungslinie eines leuchtenden Punktes mit seinem Spiegelbilde senkrecht zur Spiegelfläche CA und aus demselben Grunde $LL'' \perp CB$, so folgt, $L'LL'' = \alpha$ und $L'CL'' = 2\alpha$. Nun ist

$$Co = CL' \,.\, \cos oCL' = f \,.\, \cos {}^1\!/_2\, L'CL'' = f \,.\, \cos \alpha\,.,$$

somit

$$y = kC + Co = w + f \cos \alpha.$$

Der Abstand der Brennpunkte $L'L''$ ist

$$L'L'' = 2\, L'o = 2\, CL' \,.\, \sin \alpha = 2\, f \,.\, \sin \alpha,$$

somit der halbe Abstand der Brennpunkte $c = f \,.\, \sin \alpha$.

Nennen wir nun noch den Abstand zweier in gleichem Abstande von der Mitte auf beiden Seiten der Mitte liegenden Streifen δ, so dass $x = {}^1\!/_2\, \delta$, so wird die Gleichung der Hyperbel

$$\frac{({}^1\!/_2\, \delta)^2}{a^2} - \frac{(w + f \,.\, \cos \alpha)^2}{(f \,.\, \sin \alpha)^2 - a^2} = 1,$$

aus der wir durch Auflösung nach a die halbe grosse Axe a, also auch die Wegedifferenz gleich $2\, a$ finden.

Bestimmt man so die Wegedifferenz für die verschiedenen Hyperbeln, und nennt dieselbe für die erste dunkle Hyperbel d, so ergibt sich dem Interferenzgesetz gemäss, dass für die dunklen Hyperbeln die Wegedifferenzen sind d, $3\, d$, $5\, d \ldots$, für die hellen $2\, d$, $4\, d \ldots$

Wir erkennen somit in der Grösse d die halbe Wellenlänge des angewandten Lichtes; somit erhalten wir in diesem Versuche nicht nur einen direkten Beweis dafür, dass das Licht eine schwingende Bewegung ist, sondern auch das erste Mittel, um die Wellenlängen des Lichtes zu messen. Für eine bestimmte rothe Lichtart, welche von einem bei seinen Versuchen zur homogenen Färbung des Lichtes benutzten Glase durchgelassen wurde, erhielt Fresnel so den Werth

$$\lambda = 0{,}000638 \text{ Mm. oder } \lambda = 6{,}38,$$

wenn wir die zehntausendstel Millimeter als Einheit wählen.

Für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes erhielten wir nach den Messungen von Foucault und Cornu 298500 Kilometer; die Anzahl Wellen des von Fresnel benutzten rothen Lichtes auf dieser Strecke, damit auch die Anzahl der Schwingungen des Aethers in der Secunde, die dieses rothe Licht liefern, ist darnach rund

$$N = 468 \,.\, 10^{12},$$

also 468 Billionen.

§. 165.

Allgemeine Bedingungen der Interferenz des Lichtes. Die äusserst geringe Grösse der Wellenlänge des Lichtes und die sich daraus ergebende äusserst geringe Dauer der Schwingungen lässt sofort den Grund erkennen, weshalb es besonderer Versuche bedarf, und wie die Versuche angeordnet sein müssen, um die Interferenz des Lichtes sichtbar zu machen. Bei der äusserst kleinen Dauer der Schwingungen ist die Interferenz einzelner Schwingungen, wie wir sie beim Schall in den Stössen erkennen können, nicht wahrnehmbar; es ist demnach nothwendig, dass wir an einer und derselben Stelle längere Zeit hindurch Schwingungen gleicher Richtung mit immer derselben Phasendifferenz zusammenführen. Bei dem Fresnel'schen Versuche ist das erreicht, da die gleichzeitig von einer und derselben Lichtquelle herrührenden Strahlen, nachdem sie genau unter denselben Umsänden reflectirt sind, an derselben Stelle wieder zusammentreffen, nachdem sie verschiedene Wege durchlaufen haben.

Das Wesentliche in dem Versuche von Fresnel ist die Verwendung einer und derselben Lichtquelle zur Herstellung der beiden interferirenden Wellen und zwar nicht nur aus dem im vorigen §. angegebenen Grunde, weil möglicherweise die von verschiedenen Lichtquellen herrührenden Schwingungen verschiedene Richtungen haben können, sondern allein schon deshalb, weil wir nur auf diese Weise die Schwingungen an einer Stelle mit constanter Phasendifferenz zusammenführen können. Wir können nämlich durchaus nicht annehmen, dass die Schwingungen der Körpertheilchen in den Lichtquellen, welche die Aetherschwingungen veranlassen, mit einer solchen Regelmässigkeit erfolgen, dass wir die von einem Punkte der Quelle ausgehenden Wellen eine messbare Zeit als zu demselben Wellenmittelpunkte gehörig ansehen können, so dass wir also in einem Abstande x von dem betrachteten Punkte die Bewegung durch die Gleichung

$$y = a \, . \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

darstellen können; wir müssen dieselbe vielmehr darstellen durch die Gleichung

$$y = a \, . \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x + d}{\lambda}\right),$$

worin d innerhalb jeder messbaren Zeit alle Werthe zwischen Null und λ annimmt, weil die Phase des erregenden Punktes durch die Einwirkung seiner Umgebung sich in jedem Momente ändert.

Die von einer zweiten Lichtquelle zu demselben Punkt hingelangende Bewegung können wir darstellen durch

$$y' = a' \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x' + d'}{\lambda}\right),$$

wenn x' der Abstand desselben Punktes von der zweiten Lichtquelle ist. Darin nimmt d' wieder innerhalb jeder messbaren Zeit alle Werthe zwischen Null und λ an.

Die Amplitude der resultirenden Bewegung ist dann gegeben durch

$$A^2 = a^2 + a'^2 + 2\, a\, a' \cos 2\pi \frac{x - x' + d - d'}{\lambda}.$$

Wenn hierin auch $x - x'$ constant ist, so erhält doch $d - d'$ in jedem Momente einen andern Werth und damit ist die resultirende Amplitude oder Intensität eine veränderliche. Da nun aber diese Veränderungen so rasch erfolgen, dass wir sie nicht wahrnehmen können, so nehmen wir innerhalb einer gewissen Zeit die während derselben vorhandene mittlere Intensität wahr. Ist nun in dem Zeitelement dt die Intensität constant und proportional A^2, so erhalten wir die mittlere Intensität, wenn wir alle die in den einzelnen Momenten dt vorhandenen Intensitäten summiren, und diese durch die Anzahl der die Zeit t ausmachenden Momente, also durch $\frac{t}{dt}$ dividiren. Wir erhalten somit die mittlere Intensität M

$$M = \frac{1}{t}\int_0^t (a^2 + a'^2)\, dt + \frac{1}{t}\int_0^t 2\, a\, a' \cos 2\pi \frac{x - x' + d - d'}{\lambda}\, dt.$$

Da in Folge der Veränderlichkeit von $d - d'$ der Bogen, dessen Cosinus im zweiten Gliede Factor von dt ist, innerhalb der Zeit t alle Werthe von 0 bis 2π annimmt, so erhält der Cosinus alle Werthe zwischen $+1$ und -1, die negativen ebenso oft als die positiven. Daraus folgt, dass die einzelnen Glieder dieser Summe ebenso oft und mit den gleichen Werthen positiv und negativ werden, diese Summe muss somit gleich Null sein. Wir erhalten deshalb für M

$$M = \frac{1}{t}\int_0^t (a^2 + a'^2)\,dt = \frac{a^2 + a'^2}{t}\int_0^t dt = a^2 + a'^2,$$

oder die mittlere Intensität ist einfach die Summe der Intensitäten des von beiden Lichtquellen ausgehenden Lichtes, welches auch die Lage des betrachteten Punktes zu den einzelnen Lichtquellen ist. Wir können deshalb niemals bei Anwendung zweier verschiedener Lichtquellen Interferenzen erwarten. Als verschiedene Quellen müssen wir da auch schon zwei einigermassen von einander entfernte Stellen einer ausgedehnteren Lichtquelle ansehen, wir müssen daher als Quelle eine schmale Lichtlinie oder eine kleine punktförmige Lichtfläche anwenden.

Auch wenn wir eine und dieselbe Lichtquelle anwenden, ist die ausgesandte Bewegung in der angegebenen Weise unregelmässig, wir erhalten aber hier die Interferenzen dadurch, dass wir die in einem bestimmten Momente oder in nur unmessbar kleine Zeiten von einander getrennten Momenten ausgehenden Bewegungen auf verschiedenen Wegen zusammenführen. Deshalb hat hier d immer für beide zusammentreffenden Bewegungen den gleichen Werth, wie variabel es sonst auch sein mag, und die Bewegung kommt zur Interferenz mit der durch den Wegeunterschied bedingten Phasendifferenz.

Ausser den von Fresnel angewandten Spiegeln lassen sich noch andere Vorrichtungen zu demselben Zwecke benutzen, alle solche, welche eine schmale Lichtquelle gewissermassen, wie es die beiden Spiegel thun, verdoppeln.

§. 166.

Farben dünner Blättchen. Eine der verbreitetsten und ohne besondere Versuchsanordnungen schon wahrzunehmende Interferenzerscheinung sind die Farben, welche dünne Schichten durchsichtiger farbloser Körper zeigen, sobald sie nur hinreichend dünn sind, wenn man sie in reflectirtem oder durchgehendem Lichte betrachtet. Das einfachste Mittel zur Erzeugung dieser Farben ist die Herstellung von Seifenblasen, man erhält an denselben die schönsten, je nach der Dicke der Schicht verschiedenen Färbungen.

Legt man auf eine Glasplatte eine Convexlinse von sehr schwacher Krümmung und betrachtet diese Combination in vom hellen Himmel reflectirten Lichte, so sieht man um einen dunklen Mittelpunkt eine Reihe concentrischer farbiger Ringe; betrachtet man die Erscheinung durch ein homogenes farbiges Glas, so legen sich um die dunkle Mitte abwechselnd helle und dunkle Ringe. Schon Newton hat durch eine Messung der Durchmesser dieser Ringe gezeigt, dass wenn man den Durchmesser des

ersten hellen Ringes als Einheit nimmt, die Duchmesser der hellen Ringe sich verhalten wie die Wurzeln aus den ungeraden Zahlen, jener der dunklen wie die Wurzeln der geraden Zahlen der natürlichen Zahlenreihe.

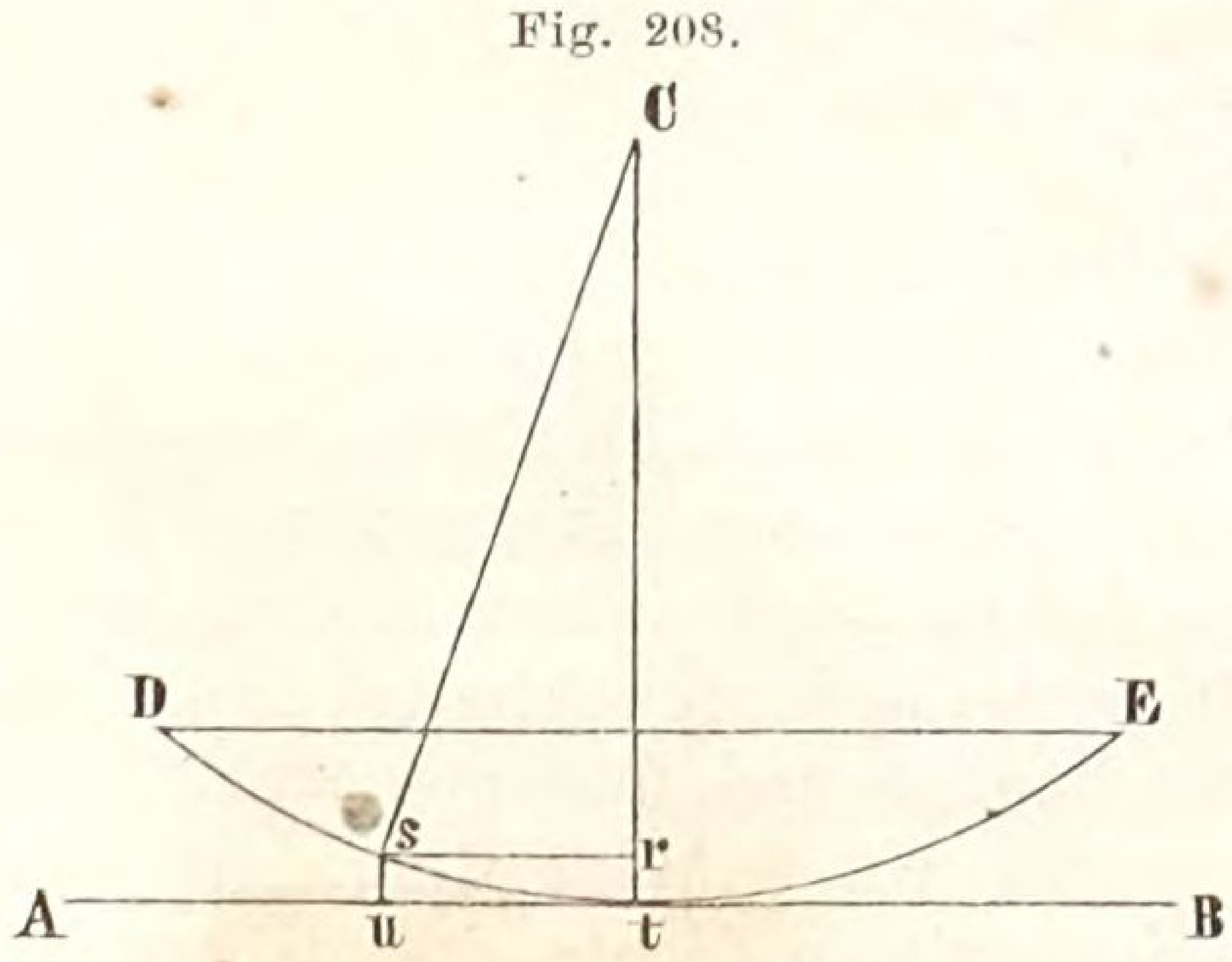
Die Ringdurchmesser hängen von der Farbe des angewandten Lichtes ab, sie sind am grössten bei rothem Lichte und werden um so kleiner, je mehr das Licht dem violetten Ende des Spectrums sich nähert. Daraus ergibt sich, dass bei Anwendung zusammengesetzten oder weissen Lichtes anstatt heller und dunkler farbige Ringe auftreten müssen, die Farben müssen die Mischfarben der an den einzelnen Stellen auftretenden Ringe homogenen Lichtes sein. Man erhält so eine Anzahl verschiedener Ringsysteme, deren Farbenreihe folgende ist:

I. Ordnung: dunkle Mitte, blassblau, weiss, gelb, orange, roth;
II. Ordnung: violett, blau, gelblich-grün, gelbroth;
III. Ordnung: purpur, tiefblau, grün, gelb, rosa, carmoisin;
IV. Ordnung: bläulich grün, gelblich roth, schwach roth;
V. Ordnung: schwach grün, weiss, roth;

weiterhin kann man noch einige schwache grüne und rothe Ringe erkennen.

Dass diese Ringe sich in dem Zwischenraume der beiden Gläser bilden, dass es also Farben dünner Blättchen sind, ergibt sich aus dem schon von Hooke und Newton geführten Nachweis, dass die Durchmesser der Ringe wesentlich von der zwischen den Gläsern eingeschlossenen Substanz abhängig sind, sie werden um so kleiner, je grösser das Brechungsvermögen dieser Substanz ist, und zwar verhalten sie sich umgekehrt wie die Quadratwurzeln der Brechungsexponenten. Weiter folgt es daraus, dass die Durchmesser der Ringe von der Krümmung der obern Linse abhängen, sie werden mit stärkerer Krümmung kleiner. Kennt man den Krümmungsradius der Linse, so lässt sich aus dem gemessenen Ringdurchmesser die Dicke der zwischen den Gläsern eingeschlossenen Schicht berechnen, an der Stelle, an welcher ein bestimmter Ring erscheint. Erscheint z. B. Fig. 208 bei senkrechtem Hinabsehen auf die Combination bei s ein Ring, dessen Radius $sr = \varrho$ sei, und ist C der Krümmungsmittelpunkt der convexen Linsenfläche, deren Radius $CS = R$ sei, so ergibt sich die Dicke $us = d$ an der Stelle des Ringes s folgendermassen. Da der Mittelpunkt des Ringsystems in dem Berührungspunkte t der Linse und der Platte AB liegt, so ist Ct senkrecht zu AB und ebenso zu rs. Es ist demnach $rt = su = d$, somit

Fig. 208.



$$Cs^2 = rs^2 + Cr^2; \quad R^2 = \varrho^2 + (R - d)^2 = \varrho^2 + R^2 - 2\,Rd + d^2;$$

ziehen wir auf beiden Seiten R^2 ab, so wird

$$2\,Rd = \varrho^2 + d^2$$

$$d = \frac{\varrho^2}{2\,R} + \frac{d^2}{2\,R}.$$

Da nun d gegen $2R$ immer sehr klein ist, so können wir das zweite Glied der rechten Seite vernachlässigen, und erhalten

$$d = \frac{\varrho^2}{2R}.$$

Derartige Messungen zeigen nun, dass ein bestimmter Ring bei Anwendung derselben Substanz zwischen den Gläsern immer an der Stelle erscheint, wo die Dicke der Schicht einen bestimmten Werth hat, dass also bei einer stärker gekrümmten Linse, bei der die Dicken der Schicht bei wachsendem Abstande von der Mitte rascher wachsen, die Ringdurchmesser in dem Maasse kleiner werden, dass immer an den Stellen gleicher Ringe auch dieselbe Dicke vorhanden ist.

Da die Dicken, an denen die Ringe bei senkrechtem Herabsehen auf die Combination auftreten, dem Quadrate der Ringdurchmesser proportional sind, letztere aber den Quadratwurzeln der Zahlen der natürlichen Zahlenreihe proportional sind, so folgt, dass die Dicken der Schicht, wo die hellen Ringe erscheinen,

$$d_n = 1,\ 3,\ 5,\ 7$$

der Reihe der ungeraden Zahlen, diejenigen der dunklen

$$d_d = 0,\ 2,\ 4,\ 6\,..$$

der Reihe der geraden Zahlen entsprechen.

Sieht man anstatt senkrecht in geneigter Richtung auf die Platten hinab, so werden die Durchmesser der Ringe grösser. Nach den Messungen von Newton schon, welche später von De la Provostaye und Desains bestätigt sind, ergibt sich aus der Aenderung der Ringdurchmesser, dass wenn für einen bestimmten Ring die Dicke der Schicht bei senkrechtem Hinabsehen auf die Platte gleich d ist, dass dann die Dicke $\varDelta$, wenn wir schief auf die Platte sehen, so dass im Innern der Schicht das Licht mit dem Einfallsloth den Winkel i' bildet, für denselben Ring gegeben ist durch

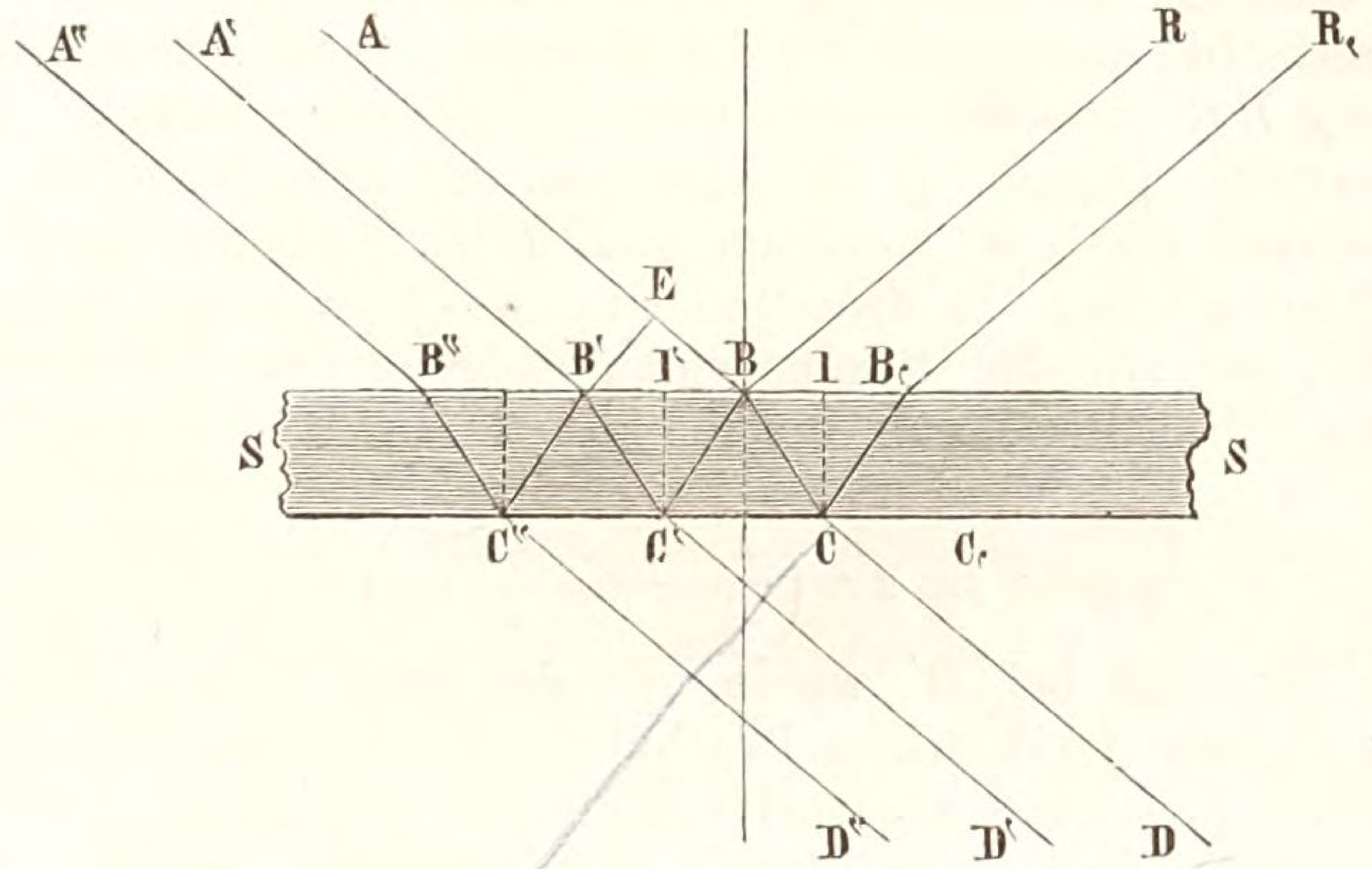
$$\varDelta = \frac{d}{\cos i'}.$$

Wir erwähnten schon, dass auch im durchgehenden Lichte sich die Farben dünner Blättchen zeigen; sieht man durch die Combination von Linse und Platte, so erscheinen farbige Ringe, welche denen im reflectirten gleich, nur weniger intensiv und brillant sind, und welche bis auf einen Punkt ganz denselben Gesetzen folgen. Der Unterschied zwischen den beiden Ringsystemen ist der, dass bei den Ringen im durchgehenden Licht jene hell sind, welche im reflectirten Lichte dunkel sind und umgekehrt. Die Mitte ist hell, um die helle Mitte legt sich ein dunkler Ring, um diese ein heller u. s. f. Die farbigen Ringe im weissen Lichte sind daher complementär zu denen, welche bei reflectirtem Lichte sich zeigen.

Die Ableitung dieser Erscheinung aus der Interferenz der Schwingungen, in welche jede an der Grenze einer Schicht ankommende Welle sich theilt, haben schon Fresnel und Thomas Young gegeben. Betrachten wir zunächst die Ringe im reflectirten Lichte. Wir nehmen an, es treffe auf die obere Grenze der von parallelen Flächen begrenzten Schicht SS Fig. 209 in der Richtung AB eine ebene Welle, so dass die einzelnen

Wellenstrahlen AB, $A'B'$. . einander parallel sind, und suchen die Bewegung, welche nach BR zurückgeworfen wird. Der in B die Grenzfläche treffende Wellenstrahl wird direkt in der Richtung BR reflectirt.

Fig. 209.



Ist x der Abstand des Punktes B von der Lichtquelle, und nennen wir r den Coefficienten, mit welchem wir die ankommende Amplitude multipliciren müssen, um die reflectirte Amplitude zu erhalten, so können wir die Bewegung in einem Punkte des reflectirten Strahles, der um x' von B entfernt ist, darstellen durch

$$y = r\,a\,.\,\sin 2\,\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x + x'}{\lambda}\right),$$

wenn λ die Wellenlänge, T die Schwingungsdauer des angewandten Lichtes ist. Wie wir im §. 83 bei Besprechung der Reflexion der Wellen sahen, kann unter Umständen bei dieser Reflexion der Verlust einer halben Wellenlänge eintreten, nämlich dann, wenn das zweite Mittel dichter ist als das erste Mittel. Während nämlich, wenn das zweite Mittel eine kleinere Dichtigkeit hat als das erste, die Schwingungen in einem Abstande x' von der Reflexionsstelle dieselbe Richtung haben, als wenn die ankommende Bewegung sich um die Strecke x' fortgepflanzt hätte, ist die Schwingungsrichtung gerade die entgegengesetzte, wenn das zweite Mittel dichter ist; sie ist also dieselbe, wie wenn das Licht von B aus nicht die Strecke x', sondern $x' + {}^1/_2\,\lambda$ zurückgelegt hätte. Da aber $\sin(\varphi + \pi) = -\sin\varphi$ ist, tragen wir dieser Möglichkeit Rechnung, indem wir das Vorzeichen von r unbestimmt lassen, uns vorbehaltend r positiv oder negativ zu setzen, je nachdem das die Schicht S bildende Mittel eine geringere oder grössere Dichtigkeit hat als das angrenzende Mittel.

Wie wir nun wissen, tritt an jeder Grenze zweier Medien eine Theilung der ankommenden Bewegung ein, ein Theil der Bewegung pflanzt sich nach BC in der Schicht fort. Bei C tritt dann eine neue Theilung der Bewegung ein, ein Theil pflanzt sich nach D fort, ein Theil wird bei C nach B_1 hin reflectirt, und nach einer nochmaligen Theilung tritt ein Theil nach $B_1\,R_1$ aus. Ganz dieselbe Theilung erfährt nun aber ein bei B' in einem Abstande $BB' = BB_1$ von B die Grenzfläche treffender Strahl,

und der nach der Brechung bei B' der Reflexion bei C' und der Theilung bei B übrig bleibende Theil der Bewegung pflanzt sich in derselben Richtung BR fort, wie der direkt bei B reflectirte Strahl. Die in dem reflectirten Strahle BR vorhandene Bewegung ist daher ausser von der direkt bei B reflectirten auch abhängig von dem von dem Strahle $A'B'$ herkommenden Antheile. Die Gleichung für die Bewegung eines um x' von B nach der Richtung BR entfernten Punktes in Folge dieses Antheils ergibt sich folgendermassen. Der Punkt B' wird von der ankommenden Welle getroffen, während die Bewegung, um nach B zu gelangen, noch den Weg BE zurücklegen muss. In dem Momente, wo B' von der Bewegung getroffen wird, hat also die ankommende Bewegung erst den Weg $x - BE$ zurückgelegt. Die Bewegung im Punkte B' zur Zeit t wird also dargestellt durch

$$y = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x - BE}{\lambda}\right).$$

Durch die Theilung bei B' werde nun die nach C sich fortpflanzende Amplitude da, wo d ein ächter Bruch ist; mit der Amplitude da durchläuft dann die Bewegung zunächst die Strecke $B'C'$, hat auf dieser aber eine andere Wellenlänge λ' wie im ersten Mittel, da, wie wir sahen, die Wellenlänge in den verschiedenen Medien sich verhält wie die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in denselben. Eine Aenderung der Phase findet bei der Brechung nicht statt. Bei C' tritt durch die Reflexion eine neue Schwächung ein; nennen wir den Schwächungscoefficienten ϱ, so wird die Amplitude $\varrho d a$. Die Reflexion an C' findet aber, wenn wir voraussetzen, dass die Schicht auf beiden Seiten von demselben Medium begrenzt wird, unter entgegengesetzten Umständen statt wie bei B, das heisst, ist die Schicht S dichter als die Umgebung, so findet bei C' kein Verlust einer halben Wellenlänge statt, wenn bei B ein solcher eintritt, ist dagegen die Schicht weniger dicht, so findet bei B kein, dagegen bei C' der Verlust einer halben Wellenlänge statt. Die an der untern Grenze reflectirte Bewegung hat also jedenfalls in gleichen Abständen von der Reflexionsstelle die entgegengesetzte Richtung als die an B reflectirte; wenn wir deshalb r in die Gleichung mit positivem Vorzeichen eingeführt haben, müssen wir ϱ mit negativem einführen, wir müssen also nach der Reflexion bei C' die Amplitude $- \varrho d a$ setzen. Mit dieser Amplitude durchläuft die Bewegung die Strecke $C'B$, auf der sie noch die Wellenlänge λ' hat, und tritt dann bei B in der Richtung BR aus. Die Brechung bei B schwächt die Amplitude schliesslich auf $- \delta \varrho d a$, wenn wir δ den Schwächungscoefficienten bei dem Austritt aus der Schicht nennen. Mit dieser Amplitude pflanzt sich dann die Bewegung schliesslich in BR fort, und hat dort wieder die Wellenlänge λ.

Die Bewegung in einem um x' von B in der Richtung BR entfernten Punkte ist demnach zur Zeit t

$$y_1 = - \delta \varrho d a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x - BE}{\lambda} - \frac{B'C' + C'B}{\lambda'} - \frac{x'}{\lambda}\right),$$

oder da $B'C' = BC'$, wenn wir gleichzeitig passend ordnen

$$y_1 = - \delta \varrho d a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x + x'}{\lambda} - \left(\frac{2\,BC'}{\lambda'} - \frac{BE}{\lambda}\right)\right).$$

Von einem dritten Strahle $A''B''$, der in dem Abstande $B'B'' = BB'$ von B' die Grenze trifft, kommt ebenfalls noch ein Antheil nach BR. Die von diesem durchlaufenen Wege ergeben sich unmittelbar zu $x - 2\,BE + 4\,BC' + x'$, und die Amplitude durch die Brechung bei B'' zu da, die Reflexion bei C'' zu $-\varrho da$, die Reflexion bei B' zu $\varrho^2 da$, bei C' zu $-\varrho^3 da$, die Brechung bei B zu $-\delta\varrho^3 da$, die Gleichung der von diesem Antheil in BR herrührenden Bewegung ist somit

$$y_2 = -\,\delta\varrho^3 da \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x - x'}{\lambda} - 2\left(\frac{2\,BC'}{\lambda} - \frac{BE}{\lambda}\right)\right).$$

In derselben Weise kommt noch ein vierter, fünfter etc. Antheil nach BR, worin jeder folgende sich von dem vorhergehenden dadurch unterscheidet, dass er zwei Reflexionen mehr erfahren und den Weg $2\,B'C' - BE$ mehr zurückgelegt hat. Für den n. Antheil erhalten wir somit

$$y_n = -\,\delta\,\varrho^{2n-1} da \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x + x'}{\lambda} - n\left(\frac{2\,BC'}{\lambda'} - \frac{BE}{\lambda}\right)\right).$$

Die resultirende Bewegung des betrachteten Punktes auf BR ist nun die Summe aller ankommenden, also

$$Y = y + y_1 + y_2 + \cdots y_n.$$

Wir begnügen uns hier die resultirende Bewegung der beiden ersten Bewegungen abzuleiten, da sie qualitativ uns die Erscheinungen schon darstellt, weil diese beiden Antheile der Bewegung die stärksten sind. Dann wird

$$Y = y + y_1 = ra \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x + x'}{\lambda}\right) - \varrho d\delta a \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x - x'}{\lambda} - \eta\right),$$

wenn wir

$$\frac{2\,BC'}{\lambda'} - \frac{BE}{\lambda} = \eta$$

setzen; somit auch

$$Y = (ra - \varrho d\delta a \,.\, \cos 2\pi\eta)\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x - x'}{\lambda}\right)$$
$$+\ \varrho d\delta a \sin 2\pi\eta \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x - x'}{\lambda}\right).$$

Durch diese Zerlegung haben wir die beiden gegebenen Antheile der Bewegung ausgedrückt durch zwei Bewegungen, welche die Phasendifferenz von $^1/_4\,\lambda$ haben, denn

$$\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x + x'}{\lambda}\right) = \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x - x' - {}^1/_4\,\lambda}{\lambda}\right).$$

Nach §. 77 ist aber in dem Falle das Quadrat der resultirenden Amplitude gleich der Summe der Quadrate der Theilamplituden, somit

$$R^2 = r^2 a^2 + (\varrho d\delta a)^2 - 2\,r\varrho d\delta a^2 \cos 2\pi\eta,$$

ein Ausdruck, der sofort erkennen lässt, dass die resultirende Amplitude, also auch die resultirende Intensität je nach dem Werthe von η eine periodisch wechselnde, und zwar je nachdem $\cos 2\pi\eta = \mp 1$ zwischen

$$R^2 = a^2 (r + \varrho d\delta)^2 \text{ und } R^2 = a^2 (r - \varrho d\delta)^2$$

periodisch wechselt.

In Betreff der Werthe von ϱ, d und δ werden wir im nächsten Kapitel nachweisen, dass

$$\varrho = r; \qquad d\delta = 1 - r^2.$$

Setzen wir diese Werthe ein, so wird

$$R^2 = a^2 r^2 \{ 1 + (1 - r^2)^2 - 2(1 - r^2) \cos 2\pi\eta \}$$

$$R^2 = a^2 r^2 \{ 1 + (1 - r^2)^2 - 2(1 - r^2) + 4(1 - r^2) \sin^2 \pi\eta \}$$

$$R^2 = a^2 r^2 \{ r^4 + 4(1 - r^2) \sin^2 \pi\eta \}.$$

Vernachlässigen wir nun hierin die Glieder, welche vierte und höhere Potenzen von r enthalten, so wird

$$R^2 = 4\, a^2 r^2 \sin^2 \pi\eta.$$

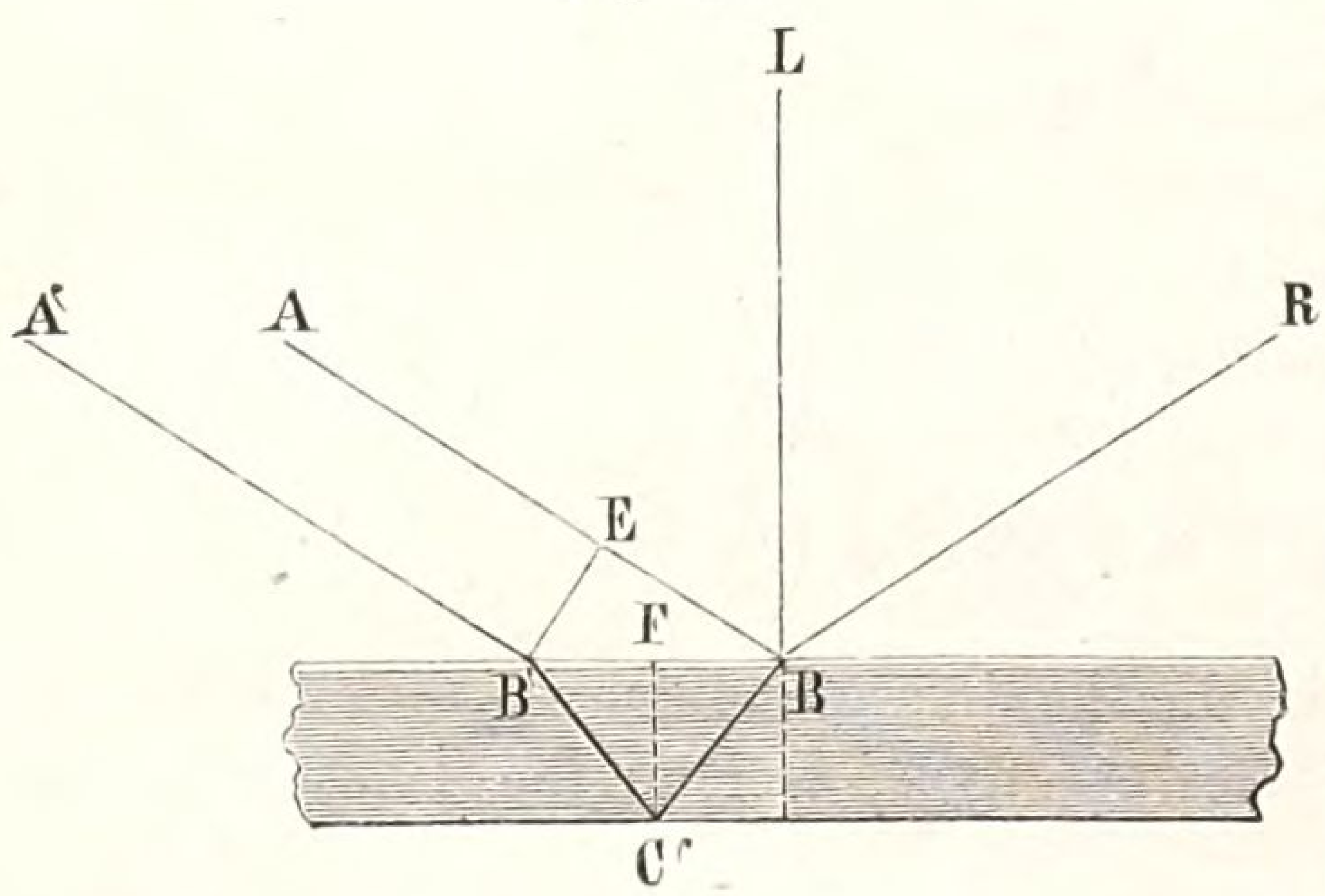
Würden wir sämmtliche nach der Richtung BR sich fortpflanzenden Antheile in Betracht gezogen haben, so würde der Ausdruck für R^2

$$R^2 = \frac{4\, a^2 r^2 \sin^2 \pi\eta}{(1 - r^2)^2 + 4 r^2 \sin^2 \pi\eta}.$$

Wie man sieht, unterscheidet sich das genauere Resultat von unserm angenäherten nur wenig; beide Ausdrücke liefern für $\sin \pi\eta$ gleich Null für R^2 den Werth Null; dagegen wird für $\sin \pi\eta = 1$ der genaue Ausdruck nicht $4\, a^2 r^2$, sondern

$$R^2 = \frac{4\, a^2 r^2}{(1 + r^2)^2}; \qquad R = \frac{2\, a r}{1 + r}.$$

Fig. 210.



Um nun die Abhängigkeit der Intensität von der Dicke der Schicht zu erkennen, müssen wir η durch dieselbe ausdrücken. Es ist Fig. 210

$$\eta = \frac{2\, BC'}{\lambda'} - \frac{BE}{\lambda}.$$

Nennen wir nun den Winkel, den die Lichtstrahlen im Innern der Schicht mit dem Einfallsloth bilden, also $FC'B = i'$, und die Dicke der Schicht $FC' = \varDelta$, so ist

$$BC' = \frac{\varDelta}{\cos i'}.$$

Nennen wir den Einfallswinkel des Lichtes im ersten Medium i, so ist $B'BA = 90 - i$ und

$$BE = BB' \sin B'BE = BB' \sin i,$$

ferner ist

$$BB' = 2\, BF = 2\, FC' \operatorname{tang} i' = 2\, \varDelta \operatorname{tang} i',$$

$$BE = 2\, \varDelta \operatorname{tang} i' \sin i.$$

Nach dem Brechungsgesetz ist dann

$$\sin i : \sin i' = \lambda : \lambda'$$

$$\frac{BE}{\lambda} = \frac{2\,\varDelta \operatorname{tang} i' \sin i}{\lambda} = \frac{2\,\varDelta \operatorname{tang} i' \sin i'}{\lambda'},$$

somit

$$\eta = \frac{2\,BC'}{\lambda'} - \frac{BE}{\lambda} = \frac{2\,\varDelta}{\cos i'}\left(\frac{1}{\lambda'} - \frac{\sin^2 i'}{\lambda'}\right) = \frac{2\,\varDelta \cos i'}{\lambda'}.$$

Die resultirende Intensität wird darnach, wenn wir unsern angenäherten Ausdruck beibehalten,

$$R^2 = 4\,a^2 r^2 \sin^2 2\pi \frac{\varDelta \cos i'}{\lambda'}.$$

Dieselbe ist somit gleich 0, wenn

$$\sin 2\pi \frac{\varDelta \cos i'}{\lambda'} = 0; \quad 2\pi \frac{\varDelta \cos i'}{\lambda} = n\pi; \quad \varDelta \cos i' = n \frac{\lambda'}{2}.$$

Bei senkrechter Incidenz ist $i' = 0$, $\cos i' = 1$, es folgt somit, dass das Licht von der Wellenlänge λ' dort ausgelöscht wird, wo die Dicke der Schicht gleich Null oder irgend ein Vielfaches einer halben Wellenlänge ist, wo somit, da der zweite Strahl die doppelte Dicke der Schicht mehr durchlaufen hat als der erste, die Wegedifferenz irgend ein Vielfaches einer ganzen Wellenlänge oder Null ist.

Die Intensität wird ein Maximum, $R^2 = 4\,a^2 r^2$, wenn

$$\sin 2\pi \frac{\varDelta \cos i'}{\lambda} = 1; \quad 2\pi \frac{\varDelta \cos i'}{\lambda'} = (2n+1)\frac{\pi}{2}; \quad \varDelta \cos i' = (2n+1)\frac{\lambda'}{4}.$$

Die Intensität wird somit bei senkrechter Incidenz ein Maximum, die hellen Ringe müssen dort auftreten, wo die Dicke der Schicht ein ungerades Vielfaches einer viertel Wellenlänge, die Wegedifferenz somit ein ungerades Vielfaches einer halben Wellenlänge ist.

Dass die Lage der Maxima und Minima hierdurch bestimmt ist, lässt sich auch ohne Rechnung erkennen, denn wenn die Wegedifferenz ein ungerades Vielfaches einer halben Wellenlänge ist, ist die Phasendifferenz gleich Null, da zur Wegedifferenz noch der jedenfalls bei einer der beiden Reflexionen stattfindende Verlust einer halben Wellenlänge hinzukommt. Aus demselben Grunde ist die Phasendifferenz eine halbe Wellenlänge, die beiden Bewegungen sind in entgegengesetzter Phase, wenn die Wegedifferenz ein Vielfaches einer ganzen Wellenlänge ist.

Dass die gefundenen Ausdrücke die vorher beschriebene Erscheinung genau darstellen, ergibt sich unmittelbar. Dort, wo sich Linse und Platte berühren, ist die Dicke 0, es muss dort Dunkelheit sein; der erste helle Ring erscheint dort, wo die Dicke der Schicht $\frac{\lambda'}{4}$ ist, die folgenden dort, wo die Dicke 3, 5, 7 $\cdots \frac{\lambda'}{4}$ ist. Die Dicken dort, wo die hellen Ringe sich zeigen, müssen sich also verhalten wie die Reihe der ungeraden Zahlen. Dazwischen liegen die dunklen Ringe, an deren Stellen die Dicken gerade Vielfache von $\frac{\lambda'}{4}$ sein müssen, die Dicken sich also verhalten müssen wie die Reihe der geraden Zahlen.

Bei Anwendung verschiedener Farben müssen sich die Schichtdicken verhalten, wie die Wellenlängen der verschiedenen Farben, sie müssen

somit für das rothe Licht am grössten sein und um so kleiner werden, je mehr die Farbe sich dem violetten Ende des Spectrums nähert. Bei Anwendung weissen Lichtes müssen somit die verschiedenfarbigen Ringe neben einander fallen, statt der hellen und dunklen müssen farbige Ringe auftreten.

Bringt man zwischen die Gläser verschiedene Substanzen, so müssen die Dicken der Schicht sich verhalten, wie die Wellenlängen in den verschiedenen Substanzen, und da diese sich umgekehrt wie die Brechungsexponenten der Substanzen verhalten, so müssen die Schichtdicken diesen Brechungsexponenten, somit die Ringdurchmesser den Quadratwurzeln aus den Brechungsexponenten umgekehrt proportional sein.

Fällt das Licht nicht senkrecht auf unsere Combination, so tritt an Stelle der Schichtdicke das Product $\varDelta \, . \cos i'$. Während also bei senkrechter Incidenz ein bestimmter heller Ring bei der Dicke d auftritt, so dass

$$d = (2n + 1) \frac{\lambda}{4},$$

tritt er bei schiefer Incidenz bei einer solchen Dicke $\varDelta$ auf, dass

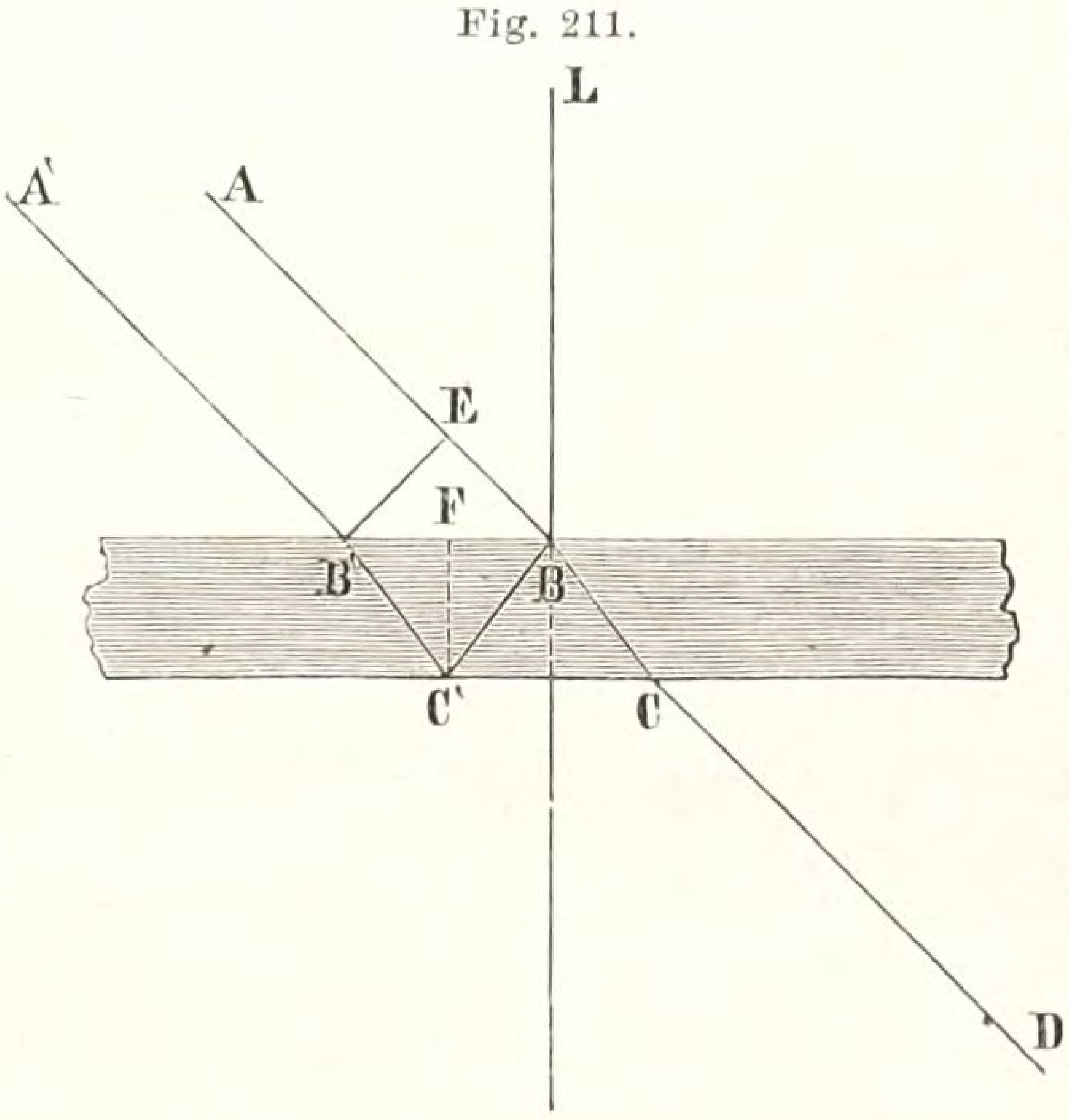
$$\varDelta \, . \cos i' = (2n + 1) \frac{\lambda}{4},$$

es ist somit für gleiche Ringe

$$\varDelta = \frac{d}{\cos i'},$$

wie es die Messungen von De la Provostaye und Desains bestätigt haben.

Fig. 211.



Wie man sieht, ergibt sich die Erscheinung der Farben dünner Schichten im reflectirten Lichte in allen ihren Einzelnheiten aus der Undulationstheorie. Ganz dasselbe erhalten wir für die Farben im durchgehenden Licht. Wir begnügen uns auch hier damit, das Zusammenwirken zweier nach der Richtung CD Fig. 211 austretender Strahlen zu betrachten, um zu zeigen, dass im durchgehenden Licht dort Dunkelheit sein muss, wo im reflectirten Helligkeit ist, dass also die Ringe im weissen Licht complementär zu den reflectirten gefärbt sein müssen.

Der erste Strahl ist der direkt durchgehende $ABCD$; seine Bewegung zur Zeit t im Abstande x' in der Richtung CD von D wird dargestellt durch die Gleichung

$$y_1 = d\,\delta\,a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} - \frac{BC}{\lambda'} - \frac{x'}{\lambda} \right).$$

Der zweite Strahl ist $A'B'C'BCD$, seine Gleichung ist

$$y_2 = d\varrho^2\,\delta\,a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x - BE}{\lambda} - \frac{B'C' + C'B + BC}{\lambda'} - \frac{x'}{\lambda} \right),$$

oder

$$y_2 = d\varrho^2 \delta a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} - \frac{BC}{\lambda'} - \frac{x'}{\lambda} - \left(\frac{2\,BC'}{\lambda'} - \frac{BE}{\lambda}\right)\right).$$

Da hier die Reflexion zweimal unter denselben Umständen erfolgt, ist das Vorzeichen des Ausdruckes für y_2 dasselbe wie für y_1. Mit Anwendung derselben Bezeichnung wie vorhin wird

$$Y = (d\delta a + d\varrho^2 \delta a \,.\, \cos 2\pi\eta) \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x + x'}{\lambda} - \frac{BC}{\lambda'}\right)$$

$$- d\varrho^2 \delta a \,.\, \sin 2\pi\eta \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x + x'}{\lambda} - \frac{BC}{\lambda'}\right),$$

somit die resultirende Intensität

$$R^2 = (d\delta a)^2 + (d\varrho^2 \delta a)^2 + 2\,(d\delta\varrho a)^2 \cos 2\pi\eta$$

$$R^2 = (d\delta a)^2 \left\{ 1 + \varrho^4 + 2\,\varrho^2 \cos 2\pi\eta \right\}$$

$$R^2 = (d\delta a)^2 \left\{ (1 + \varrho^2)^2 - 4\,\varrho^2 \sin^2 \pi\eta \right\}.$$

Setzen wir hierin $d\delta = 1 - \varrho^2 = 1 - r^2$, führen dann die angedeuteten Multiplicationen aus und vernachlässigen alle Glieder mit vierter und höhern Potenzen von r, so wird

$$R^2 = a^2 (1 - 4\,r^2 \sin^2 \pi\eta),$$

somit, da η hier denselben Werth wie vorhin hat,

$$R^2 = a^2 \left(1 - 4\,r^2 \sin^2 2\pi \frac{\varDelta \cos i'}{\lambda'}\right).$$

Die Intensität wird ein Maximum $R^2 = a^2$, wenn

$$\sin 2\pi \frac{\varDelta \cos i'}{\lambda'} = 0 \qquad 2\pi \frac{\varDelta \cos i'}{\lambda'} = n\pi; \qquad \varDelta \cos i' = n \frac{\lambda}{2},$$

sie wird ein Minimum, $R^2 = a^2 - 4\,a^2 r^2$, wenn

$$\sin 2\pi \frac{\varDelta \cos i'}{\lambda'} = 1 \quad 2\pi \frac{\varDelta \cos i'}{\lambda'} = (2\,n + 1) \frac{\pi}{2}; \quad \varDelta \cos i' = (2n + 1) \frac{\lambda}{4}.$$

Es liegen also hier die hellen Ringe dort, wo im reflectirten die dunklen Ringe liegen, im weissen Lichte muss an derselben Stelle, welche bei Betrachtung im reflectirten Lichte eine bestimmte Farbe zeigt, im durchgehenden Lichte die complementäre Farbe auftreten, das Ringsystem muss complementär gefärbt sein. Den Grund dieses Unterschiedes erkennt man auch ohne Rechnung, er ist der, dass hier die Phasendifferenz nur von der Wegedifferenz abhängt.

Wir erwähnten vorhin, dass die Ringerscheinung im durchgehenden Lichte weniger brillant erscheine; dieser Unterschied beruht nur auf subjectiver Empfindung, denn der Helligkeitsunterschied zwischen den hellen und dunklen Ringen ist in beiden Fällen derselbe, nämlich $4\,a^2\,r^2$. Im reflectirten Lichte sind aber die dunklen Ringe ganz dunkel, die hellen haben die Intensität $4\,a^2\,r^2$, im durchgehenden Lichte sind die dunklen nur weniger und zwar um $4\,a^2\,r^2$ weniger hell als die hellen. Der Contrast zwischen ganz dunkel und einer gewissen Helligkeit erscheint uns aber, wie wir sahen, grösser als zwischen zwei Lichtmengen, von denen die eine um denselben Betrag weniger hell ist, als die andere. Dieser

Contrast bedingt die scheinbar grössere Helligkeit oder Brillanz der reflectirten Ringe.

§. 167.

Interferenz bei grossem Gangunterschiede. Bei allen den bisher besprochenen Interferenzerscheinungen haben wir die Interferenzen immer nur bei einem Gangunterschiede der interferirenden Wellen von einer geringen Anzahl von Wellenlängen wahrgenommen; bei den Farben dünner Blättchen im weissen Licht lassen sich selten mehr als etwa sieben Ringsysteme erkennen, in einer nicht sehr grossen Entfernung von der dunklen Mitte verschwinden die Ringe und machen einer gleichmässigen Beleuchtung Platz. Bei der Theorie der Newton'schen Farbenringe erhielten wir aber als Ausdruck der Intensität im reflectirten Lichte

$$R^2 = 4\,a^2\,r^2 \sin^2 2\,\pi \frac{\varDelta \cos i'}{\lambda'},$$

ein Ausdruck, der periodisch bleibt, wie gross in demselben auch $\varDelta$ werden mag.

Der Grund dieser Abweichung der Theorie von der Erfahrung liegt darin, dass das zu den Versuchen benutzte Licht, selbst wenn wir scheinbar homogenes Licht dazu nehmen, doch nicht aus Licht von nur einer Wellenlänge besteht; es ist vielmehr aus Licht zusammengesetzt, dessen Wellenlänge zwischen λ und $\lambda + d\lambda$ liegt, worin $d\lambda$ wohl klein, aber in der Regel von Null verschieden ist. Ist nun bei den Farbenringen etwa $\varDelta$ ein nur kleines Vielfaches von $^1/_4\,\lambda$, so ist es auch noch ein Vielfaches eines Viertel der Länge $\lambda + d\lambda$. Die Wellen gleicher Farbe werden sich noch gleichzeitig auslöschen und gleichzeitig verstärken. Wird aber $\varDelta = m\,\frac{\lambda}{4}$, worin m einen grossen Werth hat, so wird auch $m\,\frac{d\lambda}{4}$ einen merklichen Werth haben, und die Dicke $\varDelta$ wird ein anderes Vielfaches von $\frac{\lambda + d\lambda}{4}$, als von $\frac{\lambda}{4}$. Es kann deshalb $\varDelta$ ein gerades Vielfaches von $\frac{\lambda}{4}$, aber gleichzeitig ein ungerades von $\frac{\lambda + d\lambda}{4}$ sein, so dass die Wellen der einen Länge an der betreffenden Stelle sich auslöschen, die andern dagegen an derselben Stelle ihr Maximum haben. An nebenliegenden Stellen tritt das Umgekehrte ein, so dass an allen Stellen Wellen, welche auf das Auge denselben Eindruck machen, ihr Maximum haben. Der Unterschied zwischen hell und dunkel muss deshalb aufhören, es können sich keine Ringe mehr zeigen.

Die Richtigkeit dieser Erklärung ergibt sich daraus, dass bei allen Interferenzerscheinungen die Zahl der erkennbaren Maxima und Minima grösser wird, wenn man zu ihrer Erzeugung einfarbiges Licht anwendet, oder wenn man die Interferenzerscheinungen durch ein farbiges Glas betrachtet. Bei Anwendung wirklich homogenen Lichtes kann man die Interferenzen bei einem Gangunterschiede von vielen 1000 Wellenlängen erkennen, wie das von Fizeau und Foucault gezeigt worden ist. Entwirft man z. B. die mit den Fresnel'schen Spiegeln erzeugten Interferenzstreifen auf einen mit einem Spalt versehenen Schirm, und lässt den äussersten Theil des von beiden Lichtquellen beleuchteten Feldes auf den Spalt fallen, fängt das von dem Spalt durchgelassene Licht mit dem Prisma auf, und

beobachtet das Spectrum dieses Lichtes, so sind in demselben die Interferenzen wieder deutlich zu erkennen. In dem Spectrum fehlen alle die Farben, für welche die Wegedifferenz an dieser Stelle ein ungerades Vielfaches einer ganzen Wellenlänge ist. Indem der eine der beiden Spiegel genau parallel mit sich selbst verschiebbar gemacht wurde, konnte so eine Wegedifferenz von 4000 Wellenlängen erzeugt und die Interferenz bei derselben beobachtet werden.

Fizeau hat später mit Hülfe einer durch Natrium gelb gefärbten Alkoholflamme die Newton'schen Farbenringe noch bei einer Wegedifferenz von 50000 Wellenlängen erhalten. Eine solche Lampe gibt nur Licht der beiden Wellenlängen, welche der Doppellinie D entsprechen, die nur sehr wenig verschieden sind. Die Ringe müssen also so lange sichtbar sein, bis

$$\varDelta = m \frac{\lambda}{4} = (m + 1) \frac{\lambda'}{4},$$

wenn λ die grössere, λ' die kleinere Wellenlänge ist, denn erst dann fallen die Maxima und Minima beider Wellen zusammen. Bei wachsender Dicke müssen dann aber die Ringe immer deutlicher werdend wieder auftreten; dieselben müssen wieder dieselbe Schärfe haben wie bei sehr kleiner Dicke der Schicht, wenn

$$\varDelta = 2m \frac{\lambda}{4} = 2\,(m + 1) \frac{\lambda'}{4},$$

denn dann fallen die Maxima und Minima beider Wellen wieder auf dieselbe Stelle, da die Dicke gleichzeitig für beide Wellen ein gerades und ungerades Vielfaches einer viertel Wellenlänge ist. Bei noch weiterer Zunahme muss sich dann die Erscheinung gerade so wiederholen, wie wenn die Dicke $\varDelta$ von Null an wächst, und bei einer Dicke

$$\varDelta = 3\,m \frac{\lambda}{4} = 3\,(m + 1) \frac{\lambda'}{4}$$

muss sie wieder verschwunden sein, da, wenn $3\,m$ gerade ist, $3\,m + 3$ ungerade ist, dagegen wenn $3\,m$ ungerade ist, $3\,m + 3$ gerade ist.

Fizeau benutzte zur Darstellung der Newton'schen Farbenringe eine Glasplatte und eine schwach convexe Linse, welche mit einer Mikrometerschraube parallel der Axe der Linse von der Glasplatte entfernt werden konnte. Die Vorrichtung wurde beleuchtet mit einer Flamme, welche ein Gemisch von 4 Theilen rectificirten käuflichen Methylalkohols, mit einem Theil absoluten Alkohols lieferte; der Docht wurde nicht besonders mit Kochsalz eingerieben, da die geringe Menge des in beiden vorhandenen Kochsalzes die Flamme am reinsten gelb färbte. Sieht man dann durch eine Lupe grosser Brennweite, welche auf ein kleines an der Linse angebrachtes Merkzeichen eingestellt ist, auf die Combination hinab, wenn zunächst Linse und Platte sich berühren, so sieht man die ganze Fläche der Linse mit hellen und dunklen Kreisen von grösster Schärfe bedeckt. Wenn man dann durch die Mikrometerschraube die Linse entfernt, so sieht man die Ringe gegen die Mitte hinwandern und dort verschwinden, während von dem Rande her immer neue Ringe herankommen. Diese Erscheinung ergibt sich aus der Theorie der Ringe unmittelbar. Denn nehmen wir z. B. an, dass in einem bestimmten Momente an dem Merkzeichen

ein dunkler Ring gesehen wird, der einer Schichtdicke $2\,n\,\frac{\lambda}{4}$ entspricht. Wird nun die Linse weiter entfernt, so erhält ein der Mitte näher liegender Kreis der Mittelschicht diese selbe Dicke, der Ring muss also der Mitte näher rücken und diese erreichen, wenn in der Mitte der Abstand von Linse und Platte $2\,n\,\frac{\lambda}{4}$ geworden ist. Wächst dann der Abstand der Linse und Platte in der Mitte auf $(2\,n + 1)\,\frac{\lambda}{4}$, so muss dort wieder ein Maximum auftreten, der zur Mitte gewanderte Ring ist verschwunden. Jedesmal, wenn an dem Merkzeichen an die Stelle eines dunklen Ringes der nächstfolgende getreten ist, hat die Dicke der Schicht um eine halbe Wellenlänge zugenommen.

Der Versuch ergab nun, dass, wenn an dem Merkzeichen 400 Ringe vorüber gewandert waren, die Ringe anfingen undeutlicher zu werden, dass sie, nachdem etwa 500 vorübergegangen, vollständig verschwinden, dann bei 600 wieder deutlich und bei 1000 wieder ganz scharf werden, in der Nähe von 1500 wieder verschwinden u. s. f. Man konnte so 52 mal das volle Verschwinden und Wiederauftreten der Ringe verfolgen. Die Vergrösserung des Abstandes zwischen einem vollen Verschwinden und dem nächstfolgenden war nach mehrfachen Messungen gleich 0,28945 Mm., während die Wellenlänge λ des gelben Lichtes gleich 0,000588 Mm. ist. Da nun die Dicken bei dem ersten Verschwinden nach den vorigen Entwicklungen $m\,\frac{\lambda}{4}$, bei dem zweiten $3\,m\,\frac{\lambda}{4}$, so folgt

$$\Delta_2 - \Delta_1 = 2\,m\,\frac{\lambda}{4}\,; \quad m = \frac{2(\Delta_2 - \Delta_1)}{\lambda} = 983$$

Da nun weiter

$$2\,m\,\frac{\lambda}{4} = 2\,(m + 1)\,\frac{\lambda'}{4}\,; \quad \frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{m+1}{m} = \frac{984}{983},$$

so folgt, dass $\lambda = 1{,}00102\,\lambda$ ist. Da ferner die Wegedifferenz immer die doppelte Schichtdicke ist, so folgt, dass von einem Verschwinden zum andern die Wegedifferenz 983 Wellenlängen, somit nach 52maligem Verschwinden die Wegedifferenz mehr als 51000 Wellenlängen ist.

Ganz ebenso erhält man bei Glasplatten und andern durchsichtigen Körpern von erheblicher Dicke nach Fizeau's Versuchen diese Interferenzen, Fizeau konnte deshalb, wie wir im dritten Theile sehen werden, diese Erscheinung zur Messung der Ausdehnung der Körper benutzen.

Die Versuche Fizeau's beweisen somit, dass die Grösse der Wegedifferenzen bei Anwendung von homogenem Lichte ganz entsprechend der Theorie auf die Interferenzen ohne Einfluss sind, somit auch, dass nach den Entwicklungen von §. 164 viele tausende von Wellen von einer Lichtquelle auf einander folgen, ohne dass eine Aenderung der Phase eintritt.

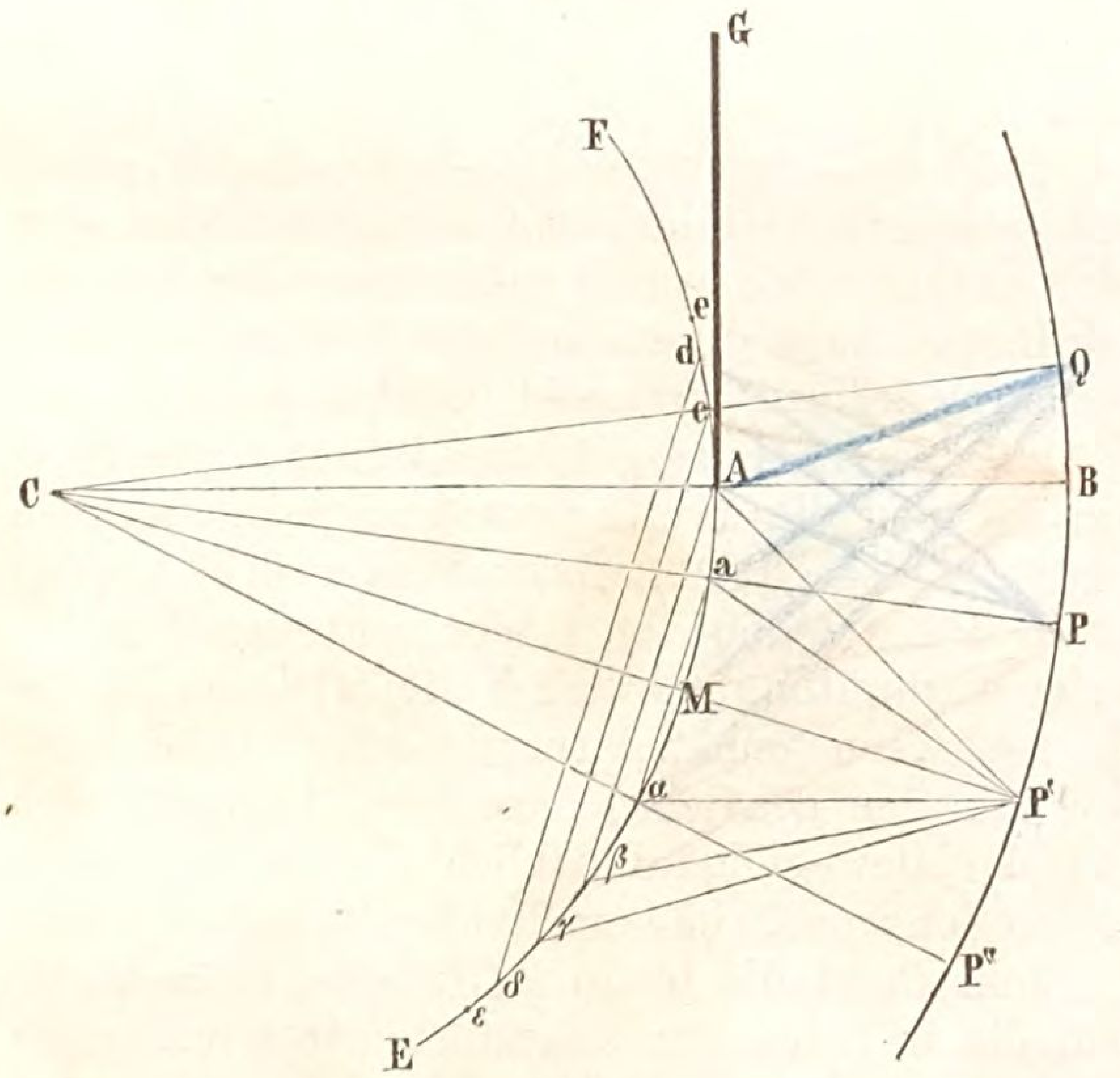
§. 168.

Beugung des Lichtes. Bei der Betrachtung der Ausbreitung einer schwingenden Bewegung in einem isotropen Punktsystem (§. 82) haben wir nach dem Huyghens'schen Princip den Nachweis geliefert, dass bei ungestörter Ausbreitung einer Welle die Bewegung sich geradlinig aus-

breitet, wie wenn sie sich einfach auf den Radien der kugelförmigen Wellen fortpflanzte, weil die von andern Stellen der Welle in einer frühern Lage zu einem ausserhalb derselben liegenden Punkte hinkommenden Bewegungen durch Interferenz sich aufheben. Wir theilten zum Nachweise dessen die Wellen in lauter einzelne Zonen, so dass die von dem betrachteten Punkte aus zu den Rändern der benachbarten Zonen gezogenen Geraden sich immer um eine halbe Wellenlänge der betrachteten Bewegung unterschieden. Wir sahen dann, dass die von den verschiedenen Zonen zu dem betrachteten Punkte kommenden Bewegungen sich aufheben, so dass nur die Bewegung der halben centralen Zone, das heisst der um die Verbindungslinie des betrachteten Punktes mit dem Mittelpunkte der Welle herum liegenden Zone in dem betrachteten Punkte eine Bewegung erzeugt.

Aus dieser Entwicklung folgt, dass die einfache geradlinige Ausbreitung einer Welle nur dann stattfinden kann, wenn die Welle sich ganz ungehindert ausbreiten kann, dass die Erscheinungen andere werden müssen, wenn ein Theil der Welle an der Ausbreitung gehindert wird.

Fig. 212.



Halten wir einen Theil der Welle FE Fig. 212 durch einen Schirm AG, durch den die Bewegung nicht hindurchdringen kann, auf, so muss die Bewegung an der Seite des Schirmes eine andere werden, wie wenn dieselbe ungehindert dorthin gelangte und gleichzeitig muss Bewegung hinter den Schirm, in den Schatten desselben eindringen. Betrachten wir z. B. die Bewegung des Punktes P'. Seien die Zonen $a\alpha$, $A\beta$, $c\gamma$ etc. die Zonen, welche bei der Theilung der Welle in Bezug auf den Punkt P' entstehen, so dass also

$$aP' - MP' = \alpha P' - MP' = AP' - aP' = \beta P' - \alpha P' \ldots . = \tfrac{1}{2}\lambda.$$

Bei ungestörter Ausbreitung der Welle würde in P' die Bewegung von der halben centralen Zone $aM\alpha$ bewirkt werden. Ist nun der Schirm AG vorgestellt, so fängt derselbe ungefähr die Hälfte der Bewegung aller Zonen, von der dritten angefangen, auf. Es folgt somit, dass die Bewegung, welche von der zweiten Zone $aA\alpha\beta$ ausgeht, nicht zur Hälfte von der dritten Zone aufgehoben wird, während die folgenden alle nahezu zur Hälfte fortgenommenen Zonen alle ihre Bewegungen gerade so aufheben, wie wenn der Schirm nicht vorhanden wäre. Der übrig bleibende

Theil der Zone $aA\alpha\beta$ wird daher mehr als die halbe Zone αMa compensiren, oder die Bewegung muss in P' schwächer sein, als wenn die Bewegung sich frei hätte ausbreiten können. Beschränken wir uns zur deutlichen Uebersicht auf den in der Abbildung gezeichneten Durchschnitt der Welle, so sieht man, dass die Bewegung, welche herrührt von den Bögen

$\alpha\beta$, vernichtet wird von der halben Summe $M\alpha + \beta\gamma$
γd, „ „ „ „ „ „ $\beta\gamma + \delta\varepsilon$

und so nach unten hin ins Unendliche fort. Es bleibt also hier die Bewegung von $\frac{1}{2}\, M\alpha$, also einem Viertel der centralen Zone übrig. Dagegen wird von dem Bogen Aa nichts durch eine folgende Zone fortgenommen. Da nun jede folgende von Aa nach P' gelangende Welle in Ma eine entsprechende hat, welche gegenüber derselben eine Phasendifferenz von einer halben Wellenlänge hat, weil $\alpha P' - MP' = AP' - aP' = \frac{1}{2}\,\lambda$, so wird die von Ma herkommende Bewegung durch die von aA herkommende aufgehoben. Es kommt daher zu P' anstatt der Bewegung von der halben centralen Zone nur die von einem Viertel derselben, sie ist also schwächer als bei ungehinderter Ausbreitung.

Anders ist es für den Punkt P, der dem geometrischen Schatten AB des Schirmes näher liegt. Haben jetzt die Punkte A, c, d; M, α, β ... die Lage, dass

$$AP - aP = cP - AP = MP - aP = \alpha P - MP \ldots = \tfrac{1}{2}\,\lambda,$$

so sind jetzt nach der einen Seite von a alle Zonen ausser der centralen Zone fortgenommen. An der untern Seite von a interferiren die von den einzelnen Bögen ausgehenden Bewegungen gerade so, wie wenn kein Schirm da wäre, es bleibt also als Bewegung in P erregend die Hälfte des Bogens Ma wirksam. Die von dem Bogen aA ausgehende Bewegung erfährt aber gar keine Schwächung, da oben die zweite Zone ganz fortgenommen ist. Es bleibt somit $aA + \frac{1}{2}\, Ma = \frac{3}{4}\, MA$ wirksam oder in Folge des vorgesetzten Schirmes wird in P Bewegung von $\frac{3}{4}$ der centralen Zone bewirkt, wärend bei ungestörter Ausbreitung nur die Hälfte wirksam ist, die Bewegung in P ist stärker, als wenn kein Schirm da wäre. Rückt der Punkt P dem geometrischen Schatten des Schirmes näher, also mehr nach B hin, so muss die Stärke der Bewegung allmählich abnehmen, indem die obere Hälfte der centralen Zone nach und nach über A hinaus hinter den Schirm tritt; für den Punkt B ist die obere Hälfte ganz verschwunden, es bleibt für denselben die in Folge der ungestörten Interferenz der untern Hälfte der Welle nicht aufgehobene Hälfte der halben centralen Zone Aa wirksam, oder es gelangt zu dem Punkte B ebenso viel Bewegung als zu dem Punkte P'. Von dieser bei A übrig bleibenden halben Zone Aa pflanzt sich dann ebenso gut aber auch Bewegung in dem Schatten fort; die Nothwendigkeit dieser Ausbreitung der Bewegung in den Schatten hinein erkennt man leicht folgendermassen. Man denke sich QA gezogen und theile dann von A aus den nicht vom Schirm aufgefangenen Theil der Welle derart in Zonen, dass die von Q an die auf einander folgenden Zonenränder gezogenen Geraden um eine halbe Wellenlänge von einander verschieden sind. Es bleibt dann jedesmal, wo auch Q liegt, die Hälfte der letzten an der Grenze liegenden Zone übrig. Die in den Schatten eindringende Bewegung kann also keine Maxima und

Minima zeigen, sie muss vielmehr stetig schwächer werden, je weiter der Punkt Q im Schatten von der Grenze B entfernt ist.

Es muss somit, wenn man in der Richtung $ABPP'$ allmählich fortschreitet, zunächst die Bewegung stetig wachsen bis zu einem Maximum bei P, dann muss sie wieder abnehmen und bei P' wieder gerade so stark sein, wie in der geometrischen Grenze des Schattens. Geht man über P' hinaus nach P'', so muss sie wieder wachsen und in P'' muss sie dieselbe Stärke haben wie in P, dann muss sie wieder abnehmen, wieder wachsen u. s. f., kurz, es müssen ausserhalb des Schattens eine Anzahl der Schirmgrenze parallele Maxima und Minima der Bewegung auftreten.

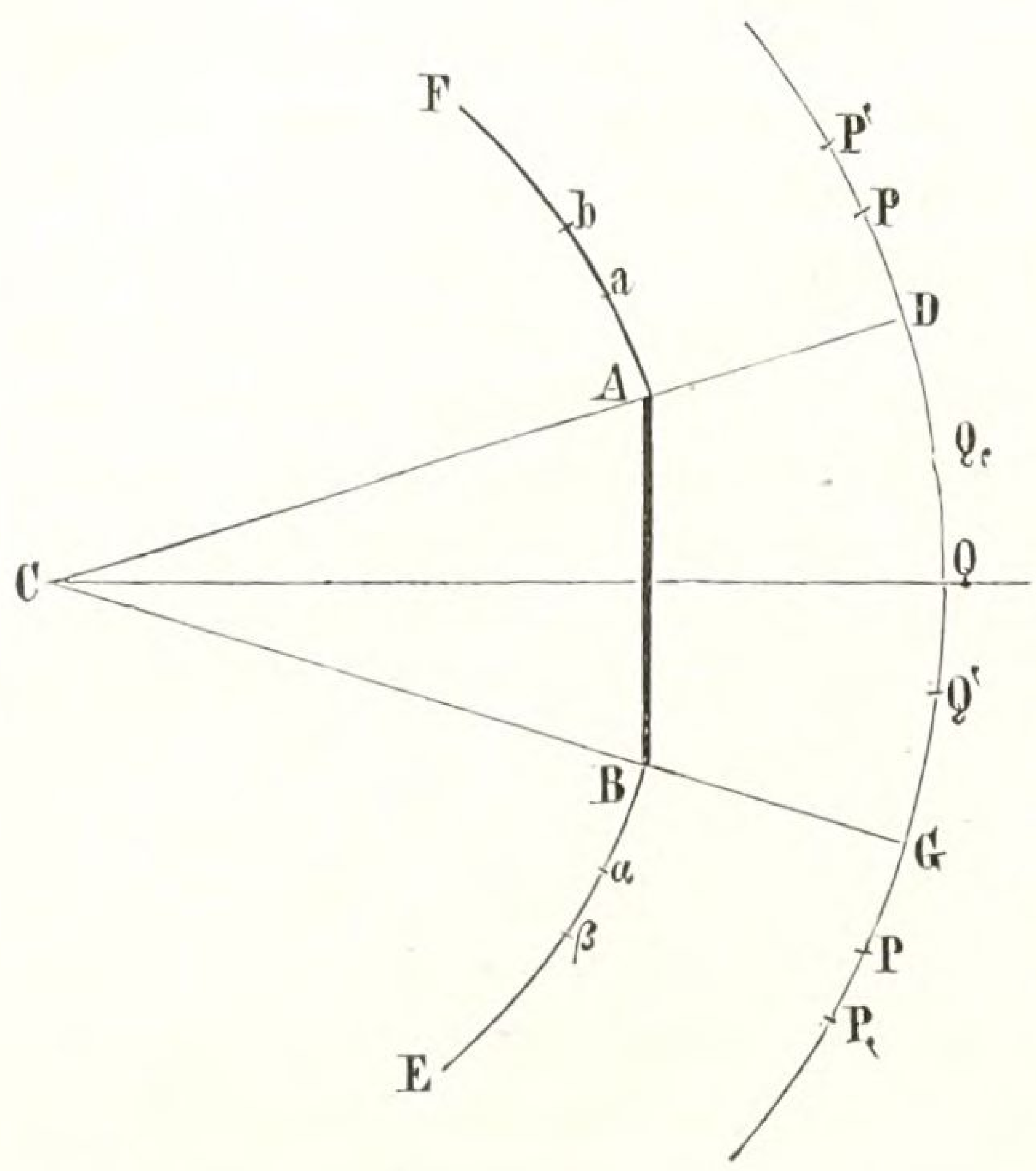
Um diese Folgerung der Undulationstheorie an den Lichterscheinungen zu prüfen, lässt man durch einen Spalt ein schmales Bündel von Lichtstrahlen hindurchgehen, und schiebt von der Seite einen Schirm mit scharfer, der Spaltöffnung paralleler Kante in das Strahlenbündel hinein. Ist das Lichtbündel intensiv genug, so erhält man auf einem in passender Entfernung hinter dem schattenwerfenden Körper aufgestellten Schirme bei Anwendung homogenen Lichtes neben dem Schatten eine Anzahl heller und dunkler Streifen. Die Intensität des Lichtes wächst von dem Schatten aus bis zu einem Maximum, nimmt ab zu einem Minimum, wächst zu einem Maximum u. s. f. Ist das Licht, wie bei Lampenlicht zur objectiven Darstellung nicht intensiv genug, so kann man die Erscheinung mit einer mit Fadenkreuz versehenen Lupe beobachten, man sieht dann die hellen und dunklen Streifen am Fadenkreuz erscheinen. Ersetzt man das Fadenkreuz durch eine mit einer Theilung versehene Glasplatte, so erscheinen die Streifen zwischen den Theilstrichen, und man kann ihre Abstände messen. In dieser Weise hat Fresnel dieselben beobachtet; indem er dann gleichzeitig die Lage derselben auf Grund der obigen Betrachtungen durch Rechnung bestimmte, ergab sich eine vollständige Uebereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung.

Wendet man anstatt homogenen Lichtes zusammengesetztes an, so fallen den verschiedenen Wellenlängen der verschiedenfarbigen Wellen entsprechend die verschiedenfarbigen Maxima und Minima neben einander und dem entsprechend gehen die hellen und dunklen Streifen in farbige Streifen über.

Eine zweite Form der Beugungserscheinungen, welche die Beugung des Lichtes in den Schatten hinein noch deutlicher zeigt als die soeben betrachtete erhält man, wenn man, wie Fig. 212 andeutet, durch einen schmalen Schirm aus einer Welle ein Stück herausschneidet, so dass an beiden Seiten des Schirmes die Bewegung sich ungestört ausbreiten kann. Ist AB Fig. 213 ein solcher Schirm, so wird die Bewegung in G, P, P_1 ebenso an der andern Seite des Schirmes in D, P, P' ganz die eben abgeleitete sein, da die an der einen Seite des Schirmes vorübergehende Bewegung durch die an der andern Seite vorübergehende nicht gestört werden kann. In den Raum aber, in welchen durch den Schirm die Bewegung direkt sich fortzupflanzen gehindert ist, also in den Raum DG, gelangen jetzt Bewegungen von der halben Zone Aa und der halben Zone Ba. Die erstere erzeugt eine von D nach G, die letztere eine von G nach D abnehmende Bewegung. Die in irgend einem Punkte Q' dieses Raumes stattfindende Bewegung muss daher die aus den beiden dorthin gelangen-

den resultirende sein. Da nun die Phase der von beiden Randzonen ausgehenden Bewegungen die gleiche ist, so hängt die resultirende nur ab von der Differenz der Abstände des Punktes Q' von den beiden Rändern des Schirmes. In der Mitte des Raumes DG in Q sind diese Abstände gleich, die Bewegungen treffen also dort in gleicher Phase zusammen, sie verstärken sich somit dort zu einem Maximum. Ausserhalb der Mitte sind diese Abstände verschieden, es gibt deshalb an beiden Seiten von Q einen Punkt Q', wo die Differenz der Abstände eine halbe Wellenlänge beträgt, wo also die Bewegungen sich gegenseitig aufheben müssen. Neben dem mittlern Maximum muss also an beiden Seiten ein Minimum liegen, auf dieses wieder ein Maximum folgen u. s. f., bis die von der einen Seite kommende Bewegung zu schwach wird, um die mit der Annäherung an den Rand des Schattens stärker werdende Bewegung von der andern Seite merklich zu alteriren.

Fig. 213.

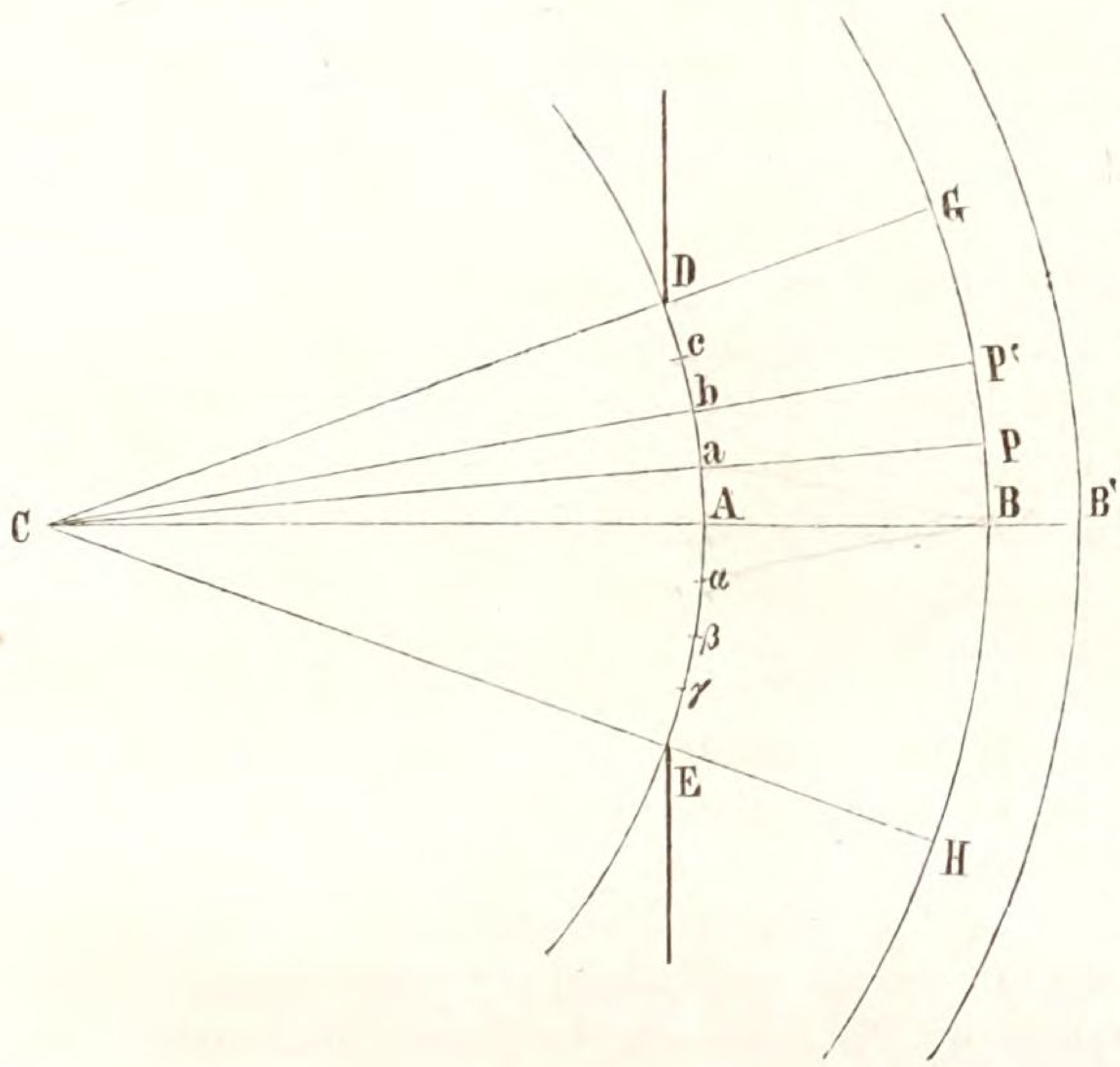


In der That zeigt sich diese durch Maxima und Minima ausgezeichnete Beleuchtung des Schattens, wenn man in das durch einen schmalen Spalt hindurchdringende Strahlenbündel einen schmalen Schirm, etwa ein ausgespanntes Haar oder eine feine Nadel dem Spalt parallel hineinstellt. In der Mitte des Spaltes erscheint ein heller Streifen, daneben zwei dunkle und daneben kann man, wenn das Haar nur fein genug ist, noch zwei helle Streifen, an jeder Seite der Mitte einen erkennen. In den dann folgenden Theilen des Schattens sieht man gewöhnlich nur mehr eine gegen die Grenze desselben und über diese hinaus bis zum ersten Maximum wachsende Helligkeit.

Noch eine dritte Art Beugungserscheinungen erhält man, wenn man von der primären Welle nur einen schmalen Theil sich fortpflanzen lässt, wenn man also die durch einen schmalen Spalt hindurchtretende Lichtwelle nochmals durch einen schmalen Spalt DE Fig. 214 hindurchgehen lässt. Betrachten wir zunächst die Bewegung im Punkte B, dessen Verbindungslinie BC mit dem Mittelpunkte C der Welle durch die Mitte A des Spaltes geht. Die Bewegung kann dort, je nach der Spaltbreite und dem Abstande BA oder AC ein Maximum oder ein Minimum sein. Wir theilen in Bezug auf den Punkt B die durch den Spalt dringende Welle EAD in die betreffenden Zonen. Zerfällt bei dieser Theilung dieselbe in eine ungerade Anzahl von Zonen, so ist die Bewegung ein Maximum, zerfällt sie in eine gerade Anzahl von Zonen, so ist die Bewegung in B ein Minimum. Lässt der Spalt nur die erste Zone durch, ist also $DB - AB = \frac{1}{2}\lambda$, so kommt die ganze centrale Zone zur Wirkung, die Bewegung in B muss also stärker sein, wie wenn kein Spalt vorhanden wäre, da

dann nur die halbe centrale Zone in B zur Wirksamkeit käme. Ist $BD - AB = \lambda$, so zerfällt die durch die Oeffnung dringende Welle in zwei Zonen und die von der centralen Zone in B bewirkte Bewegung wird durch jene der zweiten Zone aufgehoben. Ist $DB - AB = {}^3/_2\,\lambda$, so zerfällt die Welle in drei Zonen, die Bewegung der zweiten wird von der der halben centralen und der halben dritten aufgehoben, es bleiben die halbe centrale und die halbe dritte wirksam, die Bewegung in B muss wieder ein Maximum sein.

Fig. 214.



Die Anzahl Zonen, in welche die durch die Oeffnung dringende Welle zerfällt, hängt erstens ab von der Breite der Oeffnung, zweitens von dem Abstande des Wellenmittelpunktes C, denn je näher derselbe am Schirm DE sich befindet, um so stärker ist die Welle gekrümmt, um so näher rücken also die Punkte b, a zusammen und an A, deren Verbindungslinien mit B einen Unterschied von einer halben Wellenlänge haben. Schliesslich hängt die Zonenzahl ab von dem Abstande des Punktes B von DE. Denn je näher B an A liegt, um so grösser ist der Unterschied zwischen den Verbindungslinien eines bestimmten Punktes a mit B und des Punktes A mit B, um so näher muss also der Punkt a an A rücken, für den $aB - AB$ eine halbe Wellenlänge ist. Bezeichnen wir den Winkel aBA mit φ, so können wir mit grosser Annäherung setzen

$$AB = aB\,.\cos\varphi\,; \qquad aB - AB = aB\,(1 - \cos\varphi),$$

je weiter B entfernt wird, um so kleiner wird φ, um so mehr nähert sich der Cosinus dem Werthe 1, um so geringer wird die Zahl der Zonen. Wird AB unendlich, so wird $\varphi = o$, der Cosinus gleich 1, es entspricht die Oeffnung, wie gross sie auch sei, der centralen Zone, resp. deren centralsten Theile.

Liegt B so, dass dort ein Maximum entsteht, so entsteht an beiden Seiten neben B, etwa in P, ein Minimum, ist in B ein Minimum, so entsteht in P ein Maximum, wie sich aus einer Betrachtung der wirksamen Zonen ergibt; ebenso erhält man leicht, dass nach beiden Seiten allmählich schwächer werdend sich Maxima und Minima folgen müssen.

Auch diese Erscheinungen erhält man leicht, wenn man, wie erwähnt, in das durch einen schmalen Spalt, der die Stelle des Wellenmittelpunktes spielt, dringende Lichtbündel einen schmalen Spalt bringt. Beobachtet

man in einem bestimmten Punkte B, so bleibt, wenn man den Spalt allmählich erweitert, die Mitte so lange hell, bis $DB - AB$ eine Wellenlänge wird, und von da ab wechselt bei weiterer Verbreiterung des Spaltes Dunkelheit und Helligkeit ab, und ebenso sieht man die seitlichen Maxima und Minima auftreten. Beobachtet man mit einer Lupe mit Fadenkreuz oder Glastheilung, so kann man leicht bei constanter Spaltbreite den Wechsel der Maxima und Minima erkennen, wenn man die Lupe weiter vom Spalt entfernt, ebenso bei verschiedener Entfernung des lichtdurchlassenden Spaltes.

Es ist selbstverständlich, dass auch hier, wenn man nicht homogenes Licht anwendet, die hellen und dunklen Streifen in farbige übergehen.

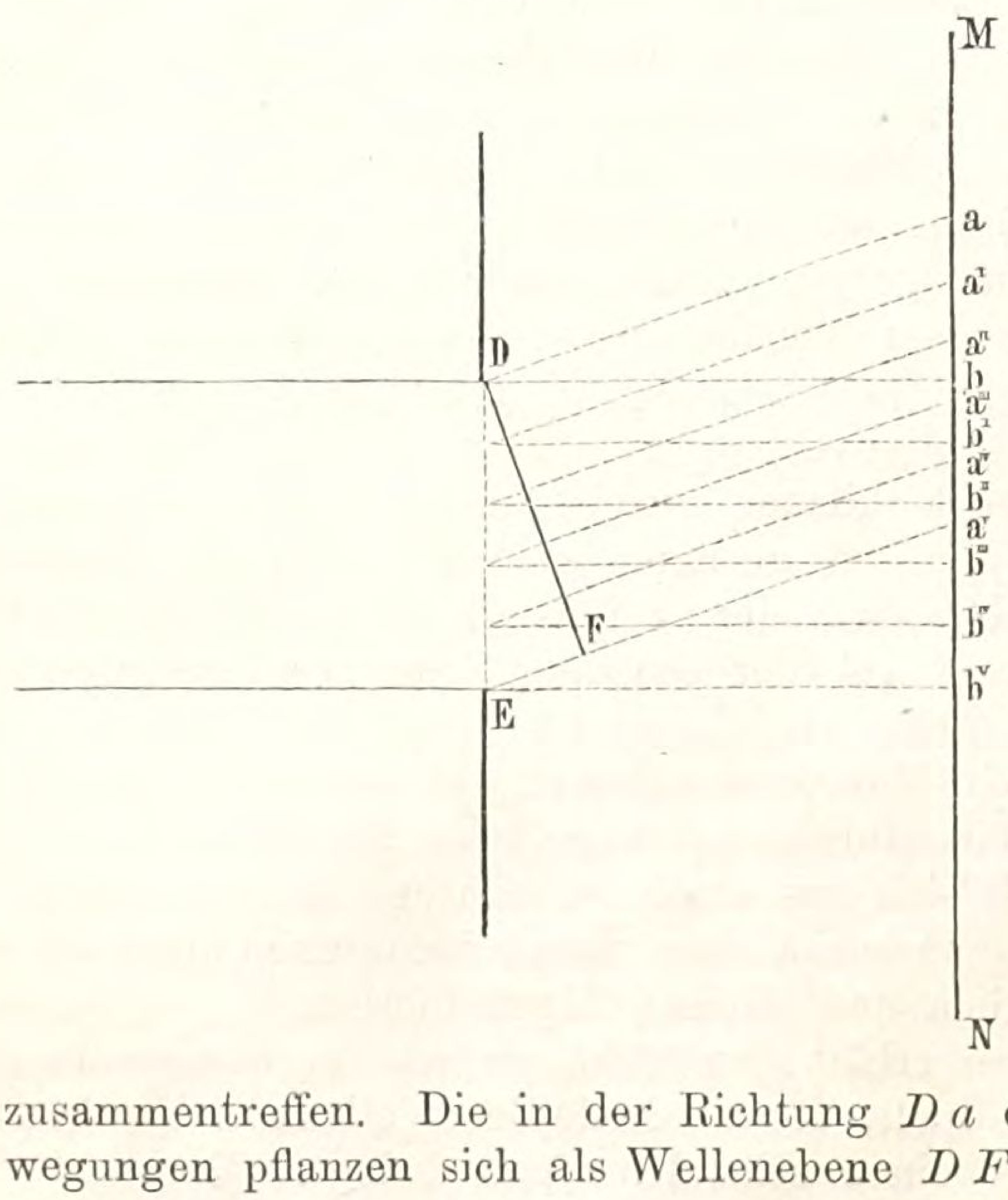
Auch diese Beugungserscheinungen hat Fresnel rechnend verfolgt und durch Messung der Lage der hellen und dunklen Streifen die Uebereinstimmung der Beobachtung mit der Theorie in allen ihren Einzelnheiten nachgewiesen.

§. 169.

Fraunhofer'sche Beugungserscheinungen. Wir erwähnten im vorigen §., dass bei der dritten Form der Beugungserscheinungen die Mitte B nicht mehr dunkel werden könne, wenn B unendlich weit vom Schirme entfernt sei, da dann der Winkel φ gleich Null werde. In unendlicher Entfernung vom Schirme, wo nur parallele Strahlen zusammentreffen, treffen die parallel CA, also parallel der Fortpflanzungsrichtung der ankommenden Welle sich fortpflanzenden Bewegungen stets ohne Phasendifferenz zusammen, sie müssen sich also stets verstärken.

Anders ist es aber mit den seitlichen Maximis und Minimis der Bewegung, diese bleiben auch in unendlicher Entfernung von der beugenden Oeffnung bestehen. Stellt DE Fig. 215 eine schmale Oeffnung dar, und nehmen wir an, wir lassen senkrecht zur Spaltebene ein paralleles Strahlenbündel in den Spalt eintreten, so dass in dem Momente, in welchem das Licht in den Spalt eintritt, die Punkte des Spaltes eine Wellenebene bilden, so werden die senkrecht zum Spalt, also parallel der Richtung des einfallenden Lichtes sich fortpflanzenden Bewegungen auf einem in unendlicher Entfernung gedachten Schirme MM ohne Phasendifferenz zusammentreffen. Die in der Richtung Da dagegen fortschreitenden Bewegungen pflanzen sich als Wellenebene DF fort, die nach der Richtung

Fig. 215.



Da parallel mit sich selbst ebenso fortschreitet, wie die Wellenebene DE in der Richtung nach Db. In der Wellenebene DF sind aber die Bewegungen nicht gleicher Phase, da sie von der Ebene DE, wo sie gleicher Phase waren, verschiedene Strecken durchlaufen haben, um in die Ebene DF einzutreten. An einem Orte somit, wo die in dieser Wellenebene vorhandene Bewegung vereinigt wird, wie es auf dem in unendlicher Entfernung gedachten Schirme MM sein würde, hängt die resultirende Bewegung ab von der Phasendifferenz der in der Wellenebene vorhandenen Bewegung.

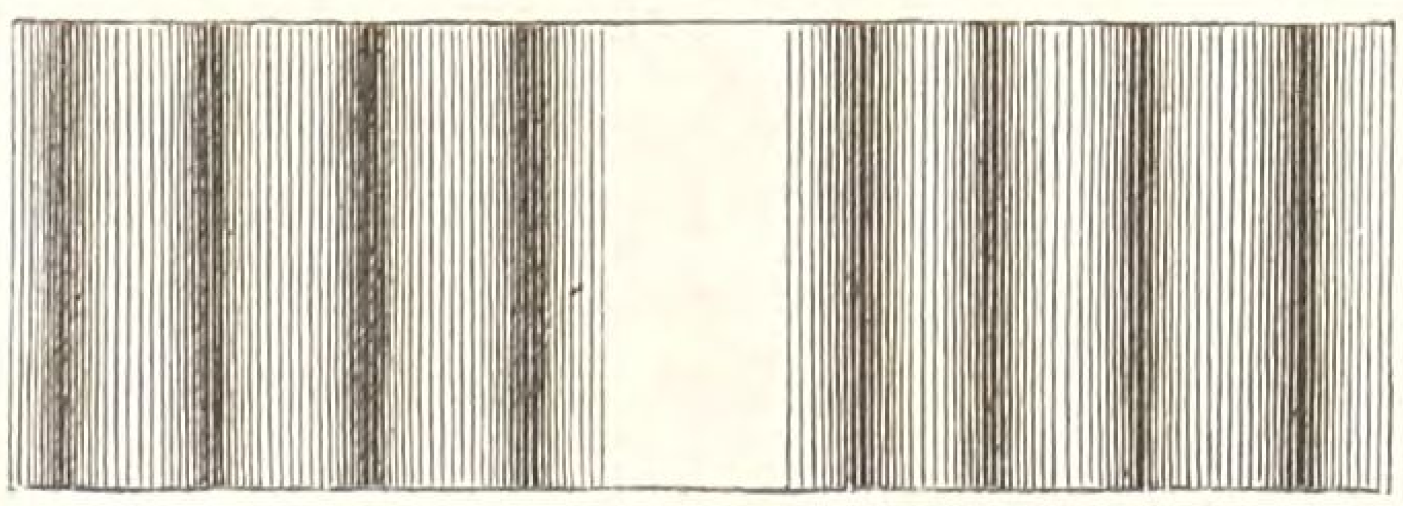
Diese Interferenz der parallel nach einer Richtung sich fortpflanzenden Bewegungen, wie sie in unendlicher Entfernung stattfinden würde, können wir nun wirklich herstellen, wenn wir hinter den Spalt eine Linse aufstellen, so dass die durch den Spalt hindurchtretenden Lichtwellen sofort auf die Linse treffen. Wie wir im zweiten Kapitel des vorigen Abschnitts bewiesen haben, wird ein paralleles Strahlenbündel in der Brennebene vereinigt und zwar liegen die Punkte, wo die betreffenden Strahlen vereinigt werden, wenn vor und hinter der Linse dasselbe Medium ist, dort, wo der durch den zweiten Hauptpunkt den einfallenden Strahlen parallel gelegte Strahl die Brennebene schneidet. Es wirken daher in den einzelnen hinter der Linse liegenden Vereinigungspunkten nur die einander parallelen Strahlen zusammen; es entsteht somit in der Brennebene der Linse ein reelles Beugungsbild, dessen auf der Hauptaxe liegende Theile von den der Hauptaxe, dessen auf den einzelnen Nebenaxen liegende Theile von den parallel diesen Nebenaxen gebeugten Strahlen gebildet werden. Dieses objective Beugungsbild kann man dann durch eine Lupe betrachten.

Am bequemsten verfährt man so, dass man ein Fernrohr auf einen weit entfernten Lichtpunkt oder eine Lichtlinie einstellt, und dann die beugende Oeffnung unmittelbar vor das Objectiv des Fernrohrs bringt. Anstatt des Lichtpunktes oder der Lichtlinie sieht dann das in das Fernrohr blickende Auge das betreffende Beugungsbild. In dieser Weise sind die Beugungserscheinungen zuerst von Fraunhofer beobachtet und näher untersucht worden. Sie sind deshalb von hervorragender Wichtigkeit, weil sie das genaueste Mittel zur Messung der Wellenlängen des Lichtes sind, da die Lage der Maxima und Minima in sehr einfacher Weise mit der Wellenlänge zusammenhängt.

Wir wollen die Untersuchung der Erscheinung, welche ein schmaler Spalt zeigt, durchführen, da gerade diese, indem man eine Anzahl schmaler Spalten zu einem sogenannten Gitter zusammenstellt, zur Messung der Wellenlängen benutzt werden.

Befestigt man vor dem Objective des Fernrohrs einen verticalen engen Spalt und färbt dann das Licht homogen, so erhält man das Beugungsbild Fig. 215; ist das einfallende Licht der Fernrohraxe parallel, so sieht man in der Mitte ein breites, nach den Seiten sich verdunkelndes helles Feld, welches an beiden Seiten von einem verticalen dunklen Streifen begrenzt wird. Auf diese dunklen Streifen folgen wieder helle Felder, die indess weniger

Fig. 216.



hell und nur halb so breit sind als das mittlere Feld; dann wieder dunkle Streifen und helle Felder abwechselnd. Die seitlichen hellen Felder haben alle gleiche Breite, ihre Helligkeit nimmt aber mit dem Abstande von der Mitte rasch ab.

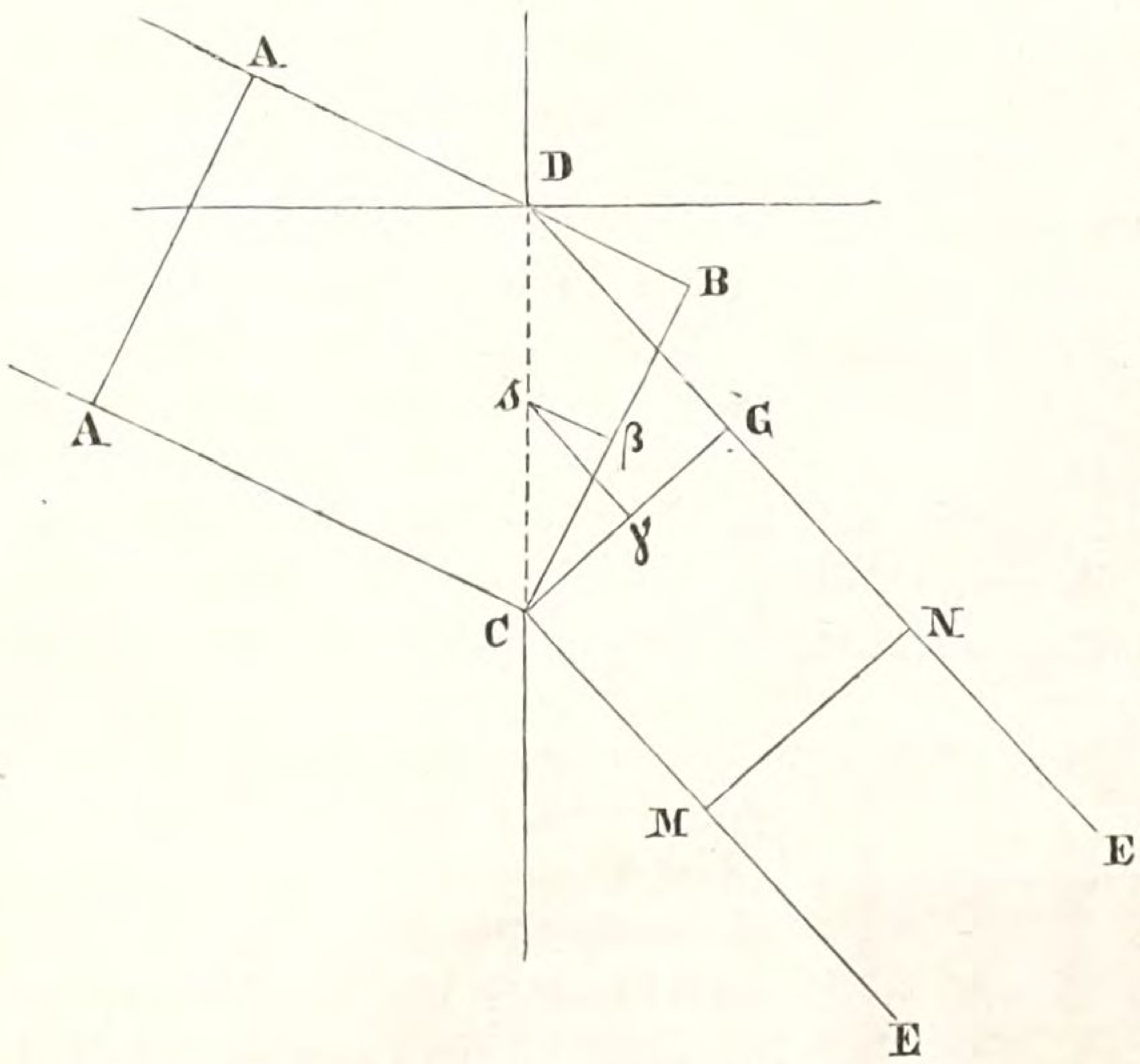
Die Breite der hellen Felder oder die Abstände der dunklen Streifen ändern sich mit der Wellenlänge, für rothes Licht sind sie am grössten, sie werden um so kleiner, je kleiner die Wellenlänge des angewandten Lichtes ist. Im weissen Lichte ist deshalb nur die Mitte der Erscheinung weiss, das mittlere Feld wird nach den Rändern farbig und anstatt der hellen und dunklen Streifen erscheinen farbige Spectralstreifen, deren Farbenfolge jener der Newton'schen Farbenringe im reflectirten Lichte gleich ist.

Die Breite der hellen Felder ändert sich mit der Spaltbreite, sie wird um so kleiner, je breiter der Spalt ist; hat derselbe eine Breite von einigen Millimetern, so sieht man im Fernrohr nur mehr das Bild der Lichtquelle, auf welche das Fernrohr eingestellt ist. Eben deshalb tritt auch bei Anwendung eines verticalen Spaltes von einiger Länge in verticaler Richtung gar keine Beugung ein, das Licht wird nur in horizontaler Richtung um die Ränder des Spaltes gebeugt.

Um diese Erscheinungen im Einzelnen abzuleiten, haben wir nach den vorhin gemachten Bemerkungen die resultirende Bewegung der in der gebeugten Wellenebene DF Fig. 214 sich fortpflanzenden Bewegungen zu berechnen, da diese in der betreffenden Stelle des Beugungsbildes vereinigt werden.

Es stelle AA Fig. 217 eine gegen den Spalt sich fortpflanzende ebene Welle dar, deren Normale, also die Richtung der einfallenden Strahlen AD mit der zur Spaltöffnung senkrechten Richtung den Winkel α bilde; wir untersuchen die Intensität des Lichtes, welches nach der Richtung DE gebeugt wird, welche mit der zur Spaltöffnung senkrechten Richtung den Winkel α' bilde. Um die Summe der in der gebeugten Wellenebene CG vorhandenen Bewegung zu erhalten, betrachten wir als Ausgangspunkt der Bewegung in der gebeugten Welle die Bewegung in der Spaltöffnung in dem Momente, in welchem die ankommende Lichtwelle den Spalt passirt. Wir denken uns dann bei s einen so schmalen Theil des Spaltes, dass in demselben die Bewegungen gleicher Phase sind. Der Abstand des Streifens vom Rande C der Oeffnung sei x und die

Fig. 217.



Breite des Streifens sei dx. Nennen wir dann die Länge des Spaltes a, so ist der Flächeninhalt des Streifens adx. Die in dem Streifen s vorhandene Bewegung erregt nun in dem Streifen γ der gebeugten Welle, den wir dadurch finden, dass wir $s\gamma$ parallel der Richtung der gebeugten Strahlen ziehen, Schwingungen, die wir zunächst nach Amplitude und Phase bestimmen müssen. Da wir voraussetzen, dass im Streifen s alle Bewegungen gleicher Phase sind, sind sie es auch im Streifen γ.

Nennen wir nun die Amplitude, welche die Flächeneinheit der Welle in der Spaltöffnung, vorausgesetzt, dass in derselben die Schwingungen alle gleicher Phase wären, in CG erregen würden, k, so ist die durch den Streifen adx in CG, also bei γ bewirkte Amplitude der Schwingungen $kadx$. Rechnen wir nun die Zeit t von dem Momente an, in welchem die ankommende Welle bei AA sich befindet, so hat die Bewegung, um bis zu γ zu gelangen, die Strecke $AC - s\beta + s\gamma$ durchlaufen, wir können sie also zur Zeit t darstellen durch die Gleichung

$$y = kadx \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{AC - s\beta + s\gamma}{\lambda}\right).$$

Jedem Streifen s der Spaltöffnung entspricht nun ein solcher Streifen γ der gebeugten Welle, und die gesammte Bewegung der gebeugten Welle ist die Summe der Bewegung aller einzelnen Streifen γ. Die Lage der verschiedenen Streifen γ und ihre Bewegung erhalten wir, wenn wir für $s\beta$ und $s\gamma$ die den verschiedenen Lagen entsprechenden Werthe einsetzen, oder da

$$s\beta = Cs \,.\, \sin BCD = x \,.\, \sin\alpha; \qquad s\gamma = Cs \,.\, \sin GCs = x \,.\, \sin\alpha',$$

wenn wir in die Gleichung für y diese Werthe und in denselben den jedem innerhalb der Breite b der Oeffnung vorhandenen Streifen s entsprechenden Werth von x einsetzen. Die Summe aller der so erhaltenen y ist dann die resultirende Bewegung in der resultirenden Welle, oder

$$Y = \int\limits_{x=o}^{x=b} kadx \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{AC}{\lambda} - \frac{x(\sin\alpha' - \sin\alpha)}{\lambda}\right).$$

Diese Summe können wir sofort in bekannter Weise in zwei Theile zerlegen und schreiben

$$Y = \int\limits_{o}^{b} kadx \cos 2\pi \frac{x(\sin\alpha' - \sin\alpha)}{\lambda} \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{AC}{\lambda}\right)$$

$$- \int\limits_{o}^{b} kadx \sin 2\pi \frac{x(\sin\alpha' - \sin\alpha)}{\lambda} \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{AC}{\lambda}\right).$$

In diesen Summen sind die letzten Faktoren, welche die Phase der einzelnen Bewegungen zur Zeit t geben, für alle einzelnen Glieder dieselben, denn ausser der Zeit t enthalten sie nur das für alle einzelnen Streifen constante AC. Es folgt somit, dass wir alle einzelnen Bewegungen auf diese Weise durch zwei andere ersetzt haben mit für jede der beiden constanter Phase, die unter einander um eine viertel Wellenlänge verschieden sind. Die Amplitude jeder dieser beiden Bewegungen ist, da die

einzelnen sie bildenden Bewegungen alle gleicher Phase sind, die Summe aller einzelnen Amplituden, oder nennen wir die Amplitude der ersten Bewegung A, die der zweiten B, so dass

$$Y = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{AC}{\lambda}\right) - B \,.\, \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{AC}{\lambda}\right),$$

so ist

$$A = \int_o^b k a dx \cos 2\pi \frac{x(\sin\alpha' - \sin\alpha)}{\lambda}; \quad B = \int_o^b k a dx \sin 2\pi \frac{x(\sin\alpha' - \sin\alpha)}{\lambda}.$$

Die resultirende Amplitude aus zwei Bewegungen, welche die Phasendifferenz von einer viertel Wellenlänge haben, ist nun dadurch gegeben, dass ihr Quadrat gleich der Summe der Quadrate der Amplituden der einzelnen Bewegungen ist, oder es ist

$$R^2 = A^2 + B^2.$$

Wir haben demnach zur Bestimmung von R nur mehr die beiden Summen A und B auszuwerthen, also wenn wir

$$2\pi \frac{\sin\alpha' - \sin\alpha}{\lambda} = m$$

setzen, die beiden Summen

$$A = \int_o^b k a dx \cos mx \qquad B = \int_o^b k a dx \sin mx.$$

Nun ist, weil dx eine äusserst kleine Grösse ist, so dass $\cos m dx = 1$, $\sin m dx = m dx$

$$dx \cos m dx = \frac{1}{m} \left\{\sin m(x + dx) - \sin mx\right\},$$

somit da ka constant ist,

$$A = \frac{ka}{m} (\sin mb - \sin m \,.\, o) = \frac{ka}{m} \sin mb;$$

ferner

$$dx \sin m dx = -\frac{1}{m} \left\{\cos m(x + dx) - \cos mx\right\},$$

somit

$$B = -\frac{ka}{m} \left\{\cos mb - \cos mo\right\} = \frac{ka}{m} (1 - \cos mb).$$

Daraus folgt

$$R^2 = A^2 + B^2 = \frac{k^2 a^2}{m^2} (2 + 2\cos mb) = 4 \frac{k^2 a^2 b^2}{m^2 b^2} \sin^2 \frac{mb}{2},$$

oder schliesslich

$$R^2 = k^2 a^2 b^2 \left(\frac{\sin \frac{mb}{2}}{\frac{mb}{2}}\right)^2 = k^2 a^2 b^2 \left(\frac{\sin \pi \frac{b(\sin\alpha' - \sin\alpha)}{\lambda}}{\pi \frac{b(\sin\alpha' - \sin a)}{\lambda}}\right)^2.$$

Da nun die Intensität des Lichtes dem Quadrate der resultirenden Amplitude proportional zu setzen ist, so gibt uns dieser Ausdruck auch die Intensität des in der Richtung α' gebeugten Lichtes. Um zu zeigen, dass derselbe die Erscheinung so wiedergibt, wie wir sie vorher beschrieben

haben, wollen wir voraussetzen, das Licht fiele normal zur Spaltebene ein, es sei also $\alpha = 0$.

Für die in der Richtung der ankommenden sich fortpflanzenden Strahlen, für welche also α' gleich Null ist, erhält unser Ausdruck für die Intensität die Form

$$R^2 = k^2 a^2 b^2 \frac{0}{0} \cdot$$

Den Werth des Quotienten Null durch Null erhalten wir durch die Erwägung, dass der Sinus eines Bogens um so genauer dem Bogen gleich ist, je kleiner der Bogen ist, er ist ihm deshalb gleich zu setzen, wenn der Bogen im Begriffe ist, gleich Null zu werden, und damit wird der Werth des Quotienten gleich 1, die Intensität in der Mitte ist also

$$R^2 = k^2 a^2 b^2.$$

Wächst nun α' von 0 ab, so nimmt die Intensität erst langsam, dann rascher ab, und sie wird an beiden Seiten gleich Null, wenn

$$\frac{b \sin \alpha'}{\lambda} = 1; \qquad \sin \alpha' = \frac{\lambda}{b} \cdot$$

Bei weiterm Wachsen von α' wächst R^2 wieder und wird

$$\frac{b \sin \alpha'}{\lambda} = {}^3/_2 \;\Big/\; \sin \alpha' = {}^3/_2 \frac{\lambda}{b},$$

so wird der Zähler des Ausdruckes 1, somit, da der Nenner mit wachsendem α' stetig wächst, die Intensität ein Maximum, sie wird

$$R^2 = k^2 a^2 b^2 \left(\frac{1}{3 \frac{\pi}{2}}\right)^2 = \frac{k^2 a^2 b^2}{9 \,.\, 2{,}467} \cdot$$

Wächst α' weiter, so nimmt R^2 wieder ab und wird Null für

$$\sin \alpha' = 2 \frac{\lambda}{b} \cdot$$

Die folgenden Maxima entsprechen den Werthen

$$\sin \alpha' = {}^5/_2 \frac{\lambda}{b}, \quad {}^7/_2 \frac{\lambda}{b}, \quad {}^9/_2 \frac{\lambda}{b} \cdots$$

die Intensität derselben nimmt ab wie die Quadrate der ungeraden Zahlen; die folgenden Minima, in denen die Intensitäten gleich Null sind, liegen dort, wo

$$\sin \alpha' = 3 \frac{\lambda}{b}, \quad 4 \frac{\lambda}{b} \cdots .$$

Da das mittlere Feld nach beiden Seiten von 0 bis $\sin \alpha' = \frac{\lambda}{b}$ reicht, während die seitlichen hellen Felder nur von $\sin \alpha' = n \frac{\lambda}{b}$ bis $\sin \alpha' = (n + 1) \frac{\lambda}{b}$ reichen, so folgt, da wir hier stets noch die Sinus den Bögen proportional setzen können, dass das mittlere helle Feld doppelt so breit ist als die an Intensität rasch abnehmenden seitlichen Felder; es folgt weiter entsprechend unserer vorigen Beschreibung, dass die Abstände der dunklen Streifen von einander und von der Mitte den Wellenlängen proportional sind, somit, dass bei Anwendung weissen Lichtes die Erscheinung in der

angegebenen Weise farbig werden muss. Schliesslich folgt, dass die Abstände der dunklen Streifen der Breite der Oeffnung umgekehrt proportional sein müssen. So z. B. würde bei einer Spaltöffnung von 2 Mm. Breite und Anwendung des rothen Lichtes, dessen Wellenlänge Fresnel zu 0,000638 Mm. bestimmte, das fünfte Minimum einem Beugungswinkel von nur 18 Minuten entsprechen, die ganze Erscheinung also schon sehr schmal sein.

Hiernach liegen die Maxima dort, wo

$$b \,.\, \sin \alpha' = 0,\ {}^3\!/_2\,\lambda,\quad {}^5\!/_2\,\lambda,\quad {}^7\!/_2\,\lambda \ldots$$

Die Minima dort, wo

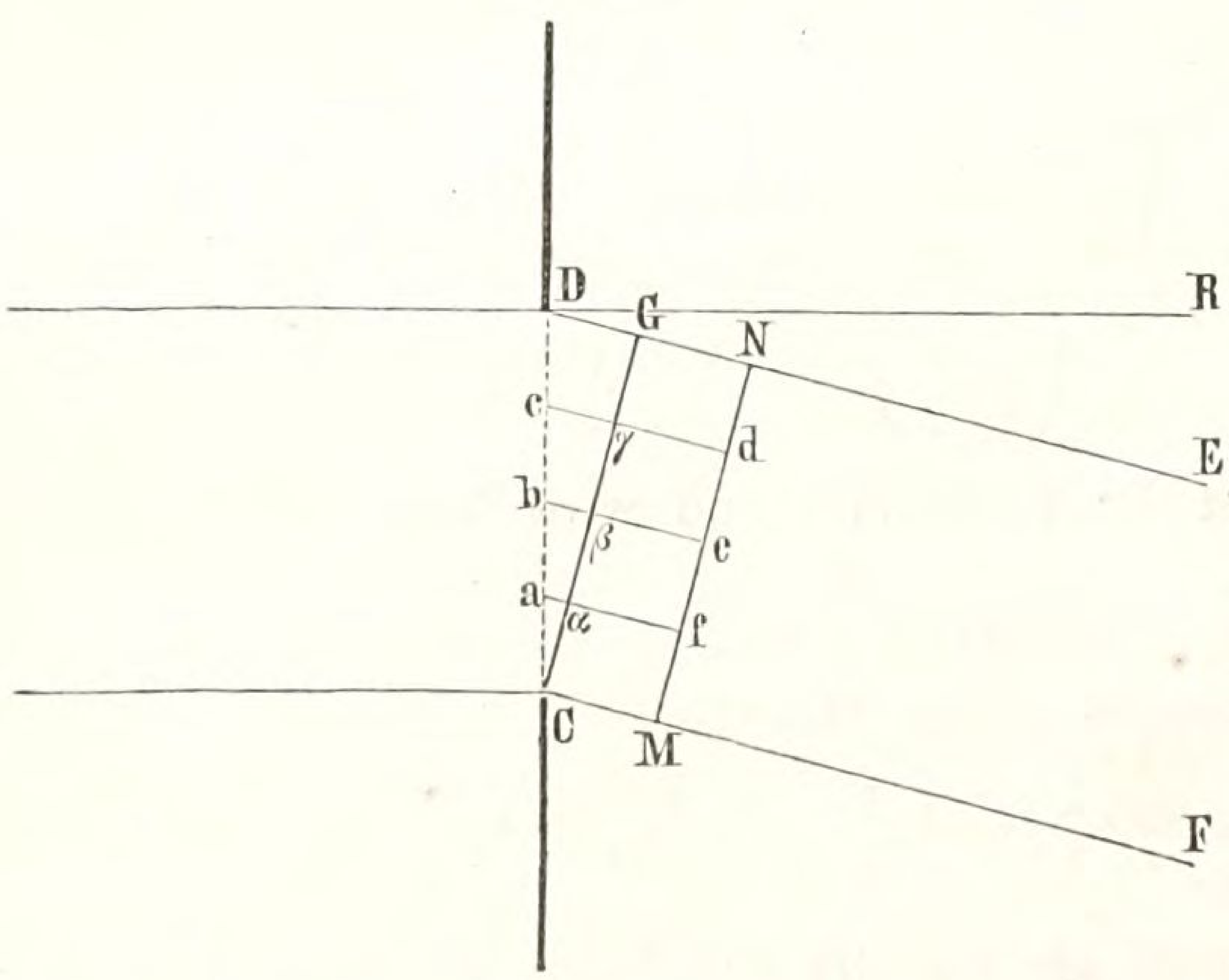
$$b \sin \alpha' = \lambda,\quad 2\,\lambda,\quad 3\,\lambda \ldots.$$

Dass die Lage der Maxima und Minima hierdurch gegeben ist, lässt sich mit Anwendung des Huyghens'schen Princips schon ohne Rechnung erkennen. Denn ist CG Fig. 218 die gebeugte Welle, so bildet dieselbe mit der Ebene der Spaltöffnung den Winkel α', es ist somit

$$DG = CD \,.\, \sin GCD = b \,.\, \sin \alpha'.$$

Da wir voraussetzen, dass die eintretende Welle der Spaltöffnung parallel ist, so ist DG die Wegedifferenz oder die Phasendifferenz der die Ränder der beugenden Oeffnung streifenden Strahlen, der sogenannten Randstrahlen. Die Lage der Maxima und Minima können wir also dahin definiren, dass die Minima dort liegen, wo die Phasendifferenz der Randstrahlen ein Vielfaches einer Wellenlänge, die Maxima dort, wo sie ein ungerades Vielfaches einer halben Wellenlänge ist.

Fig. 218.



Theilen wir nun die einfallende Welle parallel der Längsausdehnung der Spaltöffnung in eine Anzahl Streifen, deren Durchschnitte durch die Ebene der Zeichnung Ca, ab, bc . . sind, so dass die Wegeunterschiede der von den Rändern dieser Streifen in die Wellenebenen des gebeugten Lichtes gezogenen Strahlen, also

$$a\alpha - 0 = b\beta - a\alpha = c\gamma - b\beta \ldots = {}^1\!/_2\,\lambda$$

ist, so entstehen so viele Streifen von gleicher Breite, als DG ein Vielfaches von ${}^1\!/_2\,\lambda$ ist. Dass diese Streifen gleiche Breite haben, ergibt sich direkt aus der Aehnlichkeit der Dreiecke $b\beta C$, $a\alpha C$ etc., denn darnach ist

$$bC : aC = b\beta : a\alpha;$$

da nun $b\beta = 2\,a\alpha$, so ist auch $bC = 2\,aC$ oder $ab = aC$, und so für alle Streifen.

In Folge der gleichen Breite sendet jeder der Streifen in die gebeugte Welle genau dasselbe Quantum Bewegung; da nun aber jeder Strahl des ersten Streifens einen entsprechend liegenden im zweiten hat, der mit ihm die Phasendifferenz einer halben Wellenlänge hat, so folgt, dass die von einem Streifen in der gebeugten Welle erregte Bewegung mit der von dem benachbarten Streifen erregten Bewegung in entgegengesetzter Phase ist. Bei dem Zusammenwirken der Bewegungen heben sich somit die Wirkungen benachbarter Streifen auf. Zerfällt demnach auf diese Weise die Spaltöffnung in eine gerade Anzahl von Streifen, so löschen sich je zwei aus, die Gesammtwirkung muss Null sein. Da nun die Anzahl der Streifen gleich der Anzahl der halben Wellenlängen in der Differenz der Randstrahlen ist, folgt, dass die Minima dort liegen, wo die Phasendifferenz der Randstrahlen eine gerade Anzahl halber Wellenlängen ist.

Ist die Zahl der Streifen eine ungerade, so bleibt einer der Streifen übrig und die Intensität an der betreffenden Stelle ist gleich der von dem betreffenden Streifen erregten. Diese Intensität ist ein Maximum, da, wenn die Phasendifferenz der Randstrahlen etwas kleiner oder etwas grösser ist als ein ungerades Vielfaches einer halben Wellenlänge, nur ein Stück eines solchen Streifens übrig bleibt.

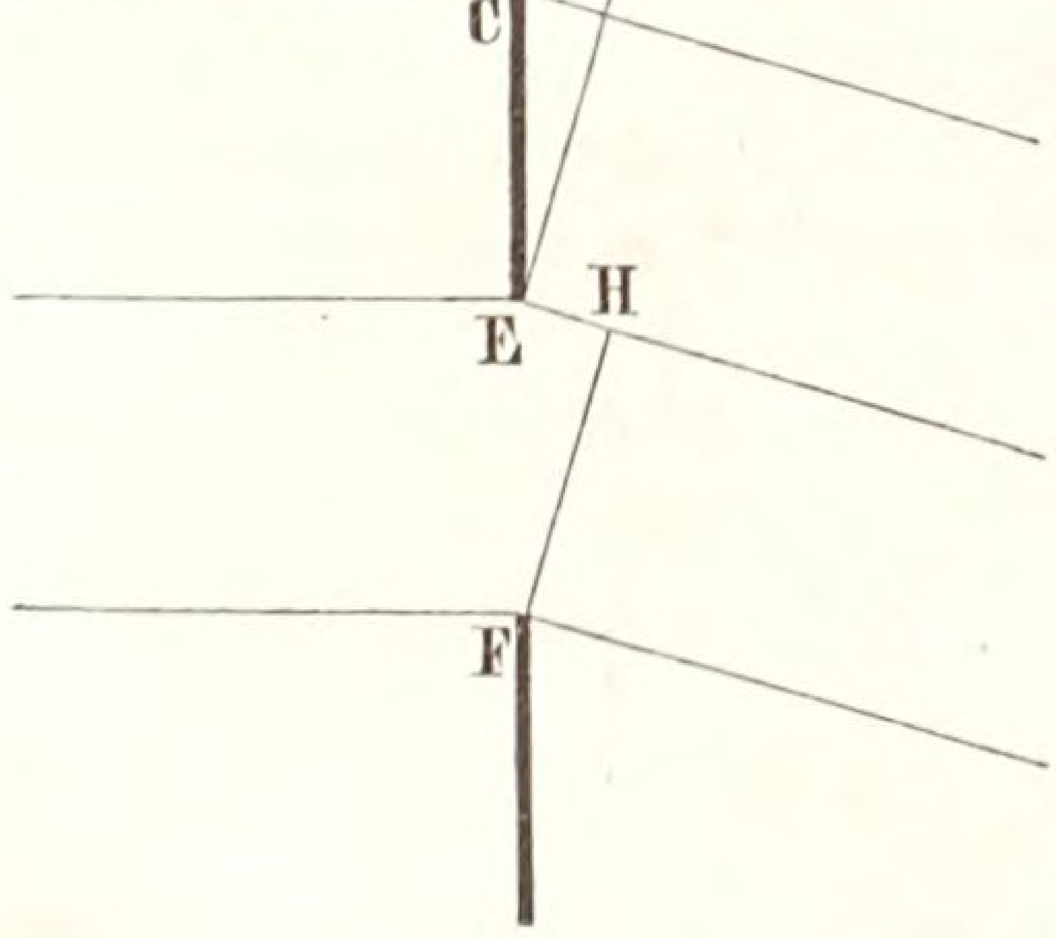
Das im Vorigen abgeleitete Beugungsbild ist in Bezug auf die Richtung der ungebeugten Strahlen nur symmetrisch, wenn die einfallenden Strahlen senkrecht zur Spaltöffnung sind, wenn $\alpha = 0$ ist. Man erkennt das direkt daran, dass, wenn das nicht der Fall ist, in den Ausdrücken für die Intensität anstatt $\sin \alpha'$ der Ausdruck $\sin \alpha' - \sin \alpha$ tritt.

Wir setzen auch im Folgenden voraus, dass die Strahlen senkrecht zum Spalt ankommen.

§. 170.

Beugungserscheinungen durch mehrere Spalten; Gitter. Wenn man vor das Objectiv des Fernrohrs zur Beobachtung der Beugungserscheinungen nach der Methode von Fraunhofer einen Schirm bringt, welcher mehrere parallele Spaltöffnungen gleicher Breite besitzt, so unterscheidet sich das Beugungsbild von dem, welches ein Spalt liefert, dadurch, dass die Helligkeitsmaxima eine grössere Intensität haben, und dass neue Minima zwischen denen, welche schon bei einer Oeffnung vorhanden sind, auftreten.

Fig. 219.



Sind FE und CD zwei Oeffnungen von gleicher Breite b, die einander parallel und so weit von einander entfernt sind, dass der Abstand der homologen Kanten also $FC = c$ ist, Fig. 219, so ergibt sich zunächst, dass die Minima, welche jede Oeffnung liefert, auch bei Anwendung von 2 Spalten bleiben, es bleiben also die vorher abgeleiteten Minima, wo

$$b \,.\, \sin \alpha' = \lambda, 2\,\lambda, 3\,\lambda \ldots$$

nach wie vor bestehen. Es können aber jetzt ausserdem auch die resultirenden Bewegungen der einen und der andern Oeffnung in entgegengesetzter Phase sein, und dann müssen dieselben bei ihrem Zusammenwirken sich aufheben, wie gross auch die Intensität der von jeder einzelnen Oeffnung gelieferten Bewegung sein mag. Wie man unmittelbar erkennt, ist das der Fall, wenn die Phasendifferenz der homologen Randstrahlen, also DK ein ungerades Vielfaches einer halben Wellenlänge ist, denn in dem Falle ist jeder Wellenstrahl der Wellenebene, welche der einen Oeffnung angehört, gegen einen entsprechend liegenden der andern Welle um $\frac{1}{2}\lambda$ verschoben, somit die Resultirende der einen Oeffnung in entgegengesetzter Phase derjenigen der andern Oeffnung. Bezeichnen wir den Beugungswinkel KED mit α, so liegen diese neuen Minima solchen Werthen von α entsprechend, wo

$$DK = DE \, . \sin KED = e \, . \sin \alpha = \tfrac{1}{2}\lambda,\ \tfrac{3}{2}\lambda \ldots (2n - 1)\frac{\lambda}{2}.$$

Ist dagegen die Phasendifferenz der Randstrahlen DK ein beliebiges Vielfaches einer ganzen Wellenlänge, so sind die durch beide Oeffnungen dringenden Bewegungen gleicher Phase, die resultirende Amplitude ist also doppelt so gross, die resultirende Intensität ist viermal so gross, als wenn nur eine Oeffnung vorhanden wäre.

Da somit durch das Anbringen der zweiten Oeffnung dort, wo

$$e \sin \alpha = \lambda,\ 2\lambda,\ 3\lambda \ldots n\lambda$$

die Intensität die vierfache von derjenigen einer Oeffnung ist, während an allen andern Stellen die Intensität durch das Zusammenwirken des durch beide Oeffnungen dringenden Lichtes nicht in dem Maasse gestärkt oder gar geschwächt wird, folgt auch, dass an diesen Stellen die Helligkeit am grössten ist, dass dort die Maxima der Lichtstärke sein müssen. Von diesen Maximis fallen aber jene aus, für deren Stelle jede Oeffnung für sich ein Minimum liefert, wo also

$$b \, . \sin \alpha = \lambda,\ 2\lambda \ldots m\lambda.$$

Ist $e = p \, . \, b$, so fallen alle jene Maxima aus, für welche $e \sin \alpha$ ein solches Vielfaches n von λ ist, dass $\frac{n}{p}$ eine ganze Zahl ist. Setzen wir z. B. voraus, dass $e = 2b$ ist, so erhalten wir für die ersten Maxima und Minima folgende Lagen, verglichen mit denen einer Oeffnung, für welche wir die Intensität in der Mitte gleich 1 setzen. Die Intensitäten sind für

eine Oeffnung bei

$b \, . \sin \alpha =$	0	λ	$3\frac{\lambda}{2}$	2λ
	1	0	$\frac{1}{22,2}$	0

zwei Oeffnungen bei

$b \sin \alpha = \frac{e}{2} \sin \alpha =$	0	$\frac{\lambda}{4}$	$2\frac{\lambda}{4}$	$3\frac{\lambda}{4}$	$4\frac{\lambda}{4}$	$5\frac{\lambda}{4}$	$6\frac{\lambda}{4}$	$7\frac{\lambda}{4}$	$8\frac{\lambda}{4}$
	4	0	1,62	0	0	0	$\frac{1}{5,55}$	0	0

Es fällt also das zweite, vierte etc. Maximum in diesem Falle aus; wäre $e = 4b$, so würde erst das vierte, achte etc. Maximum ausfallen.

Man sieht, während bei einer Oeffnung das mittlere helle Feld von $b \,.\, \sin\alpha = 0$ bis λ reicht, hat bei zwei Oeffnungen das mittlere helle Feld eine viel geringere Breite, und zwar wenn $e = 2\,b$, nur ein Viertel dieser Breite; dasselbe gilt für die seitlichen hellen Felder, deren Zahl jetzt grösser geworden ist, da bei $b \sin\alpha = \frac{1}{2}\lambda$ jetzt ebenfalls ein von beiden Seiten durch einen dunklen Streifen begrenztes helles Feld vorhanden ist. Diese so auftretenden hellen Felder, die allgemein den Stellen

$$e \sin\alpha = n\,\lambda$$

entsprechen, nennt Fraunhofer zum Unterschied von den breiten hellen Feldern bei einer Oeffnung Maxima zweiter Klasse. Ausser diesen Maximis zweiter Klasse tritt noch eine zweite Art Maxima auf, welche Fraunhofer Maxima dritter Klasse nennt.

In dem oben hingeschriebenen Schema der Intensitätsvertheilung ist die Intensität 0 bei $b \,.\, \sin\alpha = 3\,\frac{\lambda}{4},\ 4\,\frac{\lambda}{4},\ 5\,\frac{\lambda}{4}.$ Zwischen diesen Punkten ist Licht vorhanden, welches von der Intensität Null bis zu einem in der Mitte zwischen den Stellen, wo die Intensität Null ist, liegenden Maximum anwächst und wieder zu Null abnimmt. Die Breite dieser hellen Felder ist nur halb so gross als die der Maxima zweiter Klasse, und ihre Helligkeit ist sehr gering, da sie in der Nähe der Stelle liegen, wo das durch jede einzelne Oeffnung dringende Licht sich auslöscht. Fraunhofer nennt diese Maxima solche dritter Klasse.

Wird die Zahl der Spaltöffnungen vermehrt, so wächst die Zahl der Minima und jene der Maxima dritter Ordnung, die Zahl der Maxima zweiter Ordnung wird nicht vermehrt, aber die Helligkeit derselben wächst proportional dem Quadrate der Zahl der Oeffnungen. Es ergibt sich das unmittelbar daraus, dass zu den Minimis, welche schon durch zwei Oeffnungen bedingt werden, jetzt solche hinzukommen, die durch das Zusammenwirken der zwei mit den übrigen Oeffnungen bedingt werden. Nehmen wir z. B. vier Oeffnungen. Bei zwei Oeffnungen, sahen wir, tritt das erste Minimum auf, wo die Differenz der homologen Randstrahlen $e \sin\alpha$ eine halbe Wellenlänge ist, bei vier Oeffnungen dort, wo die Differenz der homologen Randstrahlen der ersten und zweiten Oeffnung eine viertel Wellenlänge ist, denn dann haben die Bewegungen der ersten und dritten, der zweiten und vierten Oeffnung entgegengesetzte Phase, die durch die beiden ersten Oeffnungen dringenden Bewegungen werden also durch jene, welche durch die beiden folgenden kommt, aufgehoben. Ist die Phasendifferenz $e \sin\alpha = \frac{1}{2}\lambda$, so heben sich die Bewegungen der ersten und zweiten und diejenigen der dritten und vierten für sich auf; ist $e \sin\alpha = \frac{3}{4}\lambda$, so wird wieder die Bewegung der ersten durch die der dritten, die der zweiten durch die der vierten aufgehoben. Ist $e \sin\alpha = \lambda$, so entsteht das erste seitliche Maximum zweiter Klasse, da dann die Bewegungen aller vier Oeffnungen gleicher Phase sind. Durch eine Fortsetzung dieser Betrachtungen ergibt sich, dass die neuen Minima dort liegen, wo

$$e \sin\alpha = \tfrac{1}{4}\lambda,\ \tfrac{3}{4}\lambda,\ \tfrac{5}{4}\lambda,\ \tfrac{7}{4}\lambda \ldots . (2n - 1)\,\frac{\lambda}{4}$$

ist, und dass die Maxima zweiter Klasse nach wie vor an den Stellen sind, wo

$$e \sin\alpha = n\,\lambda;$$

von diesen fallen nur jene aus, wo die einzelnen Oeffnungen für sich Dunkelheit geben.

Zur Uebersicht sind in folgenden beiden Reihen für die ersten Maxima und Minima die Lagen und Intensitäten zusammengestellt für zwei Oeffnungen und für vier Oeffnungen, wobei wir, damit nicht schon für zwei Oeffnungen das zweite Maximum ausfällt, jetzt $c = 4\,b$ voraussetzen wollen. Es sind die Intensitäten bei

zwei Oeffnungen

	4	0	3,24	0	1,62	0	0,36	0	0
$c \sin \alpha =$	0	$^1/_2\,\lambda$	λ	$^3/_2\,\lambda$	$2\,\lambda$	$^5/_2\,\lambda$	$3\,\lambda$	$^7/_2\,\lambda$	$4\,\lambda$

vier Oeffnungen

	16	0	0	0	12,96	0	0	0	6,48	0	0	0	1,44	0
$c \sin \alpha =$	0	$^1/_4\,\lambda$	$^1/_2\,\lambda$	$^3/_4\,\lambda$	λ	$^5/_4\,\lambda$	$^3/_2\,\lambda$	$^7/_4\,\lambda$	$2\,\lambda$	$^9/_4\,\lambda$	$^5/_2\,\lambda$	$^{11}/_4\,\lambda$	$3\,\lambda$	$^{13}/_4\,\lambda \ldots$

Man sieht, die Maxima zweiter Klasse werden halb so breit und viermal so hell, dagegen tritt zwischen jedem neuen Minimum und dem schon bei zwei Oeffnungen vorhandenen Minimum ein neues Maximum dritter Klasse auf, dessen Breite halb so gross als die der Maxima zweiter Klasse ist, und deren Intensität sehr klein ist, weil sie sehr nahe bei dem schon durch zwei Oeffnungen bewirkten Minimum liegen.

Die so aus diesen Entwicklungen sich ergebenden Resultate lassen sich leicht durch die Berechnung der resultirenden Intensität strenge ableiten, wir wollen die Rechnung für zwei Oeffnungen durchführen, da man so schon das Resultat für beliebig viele Oeffnungen übersehen kann.

Durch genau dieselben Entwicklungen wie im vorigen §. erhalten wir auch jetzt die resultirende Bewegung in der gebeugten Wellenebene als die Summe aller in den einzelnen Streifen γ Fig. 217 erregten Bewegungen. Wir haben aber hier nicht nur die Summe aller Streifen γ, die der ersten Oeffnung, also den Werthen von $x = 0$ bis $x = b$ entsprechen, zu bilden, sondern zu dieser Summe noch jene der Streifen γ für die zweite Oeffnung hinzuzufügen, welche dem Werthe x von $x = c$ bis $x = c + b$ entsprechen. Wir haben also nur in der Gleichung für die resultirende Bewegung

$$Y = A \,.\, \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{AC}{\lambda}\right) - B \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{AC}{\lambda}\right)$$

für A und B folgende beiden Summen zu setzen

$$A = \int_0^b k\, a\, d\, x \cos m\, x + \int_c^{c+b} k\, a\, d\, x \cos m\, x$$

$$B = \int_0^b k\, a\, d\, x \sin m\, x + \int_c^{c+b} k\, a\, d\, x \sin m\, x.$$

Dann ist auch hier

$$R^2_2 = A^2 + B^2,$$

wenn R_2 die Resultirende für beide Oeffnungen bedeutet. Diese beiden Summen sind nach dem vorigen §.

$$A = \frac{k\,a}{m} \sin m\,b + \frac{k\,a}{m} \sin m\,(e + b) - \frac{k\,a}{m} \sin m\,e$$

$$B = \frac{k\,a}{m} (1 - \cos m\,b) + \frac{k\,a}{m} \cos m\,e - \frac{k\,a}{m} \cos m\,(e + b)$$

Ausdrücke, denen man leicht folgende Form geben kann:

$$A = \frac{k\,a}{m} \sin m\,b\,(1 + \cos m\,e) - \frac{k\,a}{m} (1 - \cos m\,b) \sin m\,e$$

$$B = \frac{k\,a}{m} (1 - \cos m\,b)\,(1 + \cos m\,e) + \frac{k\,a}{m} \sin m\,b\,.\,\sin m\,e.$$

Setzen wir nun, da das die Werthe von A und B für eine Oeffnung sind,

$$\frac{k\,a}{m} \sin m\,b = A_1 \qquad \frac{k\,a}{m} (1 - \cos m\,b) = B_1,$$

so wird

$$A = A_1\,(1 + \cos m\,e) - B_1 \sin m\,e$$

$$B = B_1\,(1 + \cos m\,e) + A_1 \sin m\,e,$$

und daraus

$$R_2^2 = A^2 + B^2 = 2\,(A_1^2 + B_1)^2\,(1 + \cos m\,e),$$

oder bezeichnen wir die Resultirende für eine Oeffnung mit R_1,

$$R_2^2 = 2\,R_1^2\,(1 + \cos m\,e).$$

Wir können nun schreiben

$$1 + \cos m\,e = \cos^2 \frac{m\,e}{2} = 1/2\, \frac{\sin^2 m\,e}{\sin^2 \frac{m\,e}{2}},$$

somit auch

$$R_2^2 = 4\,R_1^2 \left(\frac{\sin m\,e}{2 \sin \frac{m\,e}{2}} \right)^2.$$

Setzen wir nun voraus, dass die Strahlen normal zur Spaltöffnung einfallen, so wird, wenn wir den Beugungswinkel mit α bezeichnen,

$$m = 2\,\pi \frac{\sin \alpha}{\lambda},$$

somit

$$R_2^2 = (2\,R_1)^2 \left(\frac{\sin 2 \frac{\pi\,.\,\sin \alpha\,.\,e}{\lambda}}{2 \sin \frac{\pi\,.\,\sin\,.\,\alpha\,e}{\lambda}} \right)^2.$$

Wir erhalten also die resultirende Amplitude für zwei Oeffnungen, indem wir diejenige für eine Oeffnung mit zwei und mit einem Factor multipliciren, der im Zähler den Sinus eines doppelten Bogens, im Nenner den doppelten Sinus des einfachen Bogens hat. Haben wir anstatt zwei eine beliebige Zahl von n Oeffnungen, so haben wir in obigem Ausdruck nur überall statt zwei die Zahl n einzusetzen, wie sich durch ganz ähnliche Rechnungen ergibt. Für eine beliebige Zahl von n Oeffnungen ist somit

$$R_n^2 = (n\,R_1)^2 \left(\frac{\sin n \frac{\pi \sin \alpha\,.\,e}{\lambda}}{n \sin \frac{\pi \sin \alpha\,.\,e}{\lambda}} \right)^2.$$

Dass dieser Ausdruck die Erscheinung, wie wir sie vorhin abgeleitet, wieder gibt, lässt sich leicht zeigen. Wir wissen, dass sobald ein Bogen einen endlichen Werth hat, der Sinus des nfachen Bogens immer kleiner ist als der nfache Sinus des einfachen Bogens. Ist der Bogen aber so klein, dass auch der nfache Bogen noch einen verschwindend kleinen Werth hat, dann ist der Sinus des nfachen Bogens dem nfachen Sinus des Bogens gleich zu setzen, und um so genauer, je kleiner der Bogen ist. Der zweite Factor erhält also seinen grössten Werth 1, wenn er die Form $\frac{0}{0}$ annimmt, und das ist der Fall, wenn

$$\sin \frac{\pi \sin \alpha . e}{\lambda} = 0; \qquad \frac{\pi \sin \alpha . e}{\lambda} = m \pi; \qquad \sin \alpha . e = m \lambda.$$

Die Maxima zweiter Klasse liegen also dort, wo die homologen Randstrahlen benachbarter Oeffnungen eine Phasendifferenz von einer beliebigen Anzahl ganzer Wellenlängen haben, wie wir es auch vorhin ableiteten. Ihre Lage ist also stets dieselbe, wie gross auch die Zahl der Oeffnungen ist, nur ist ihre Intensität die n^2fache von derjenigen, welche an der Stelle derselben bei einer Oeffnung vorhanden ist, und gleichzeitig werden sie immer schmaler, weil die Minima einander immer näher rücken.

Die Minima liegen nämlich dort, wo der Zähler 0 ist ohne den Nenner, und selbstverständlich wo $R_1 = 0$ ist. Ersteres ist der Fall, wo

$$\sin n \frac{\pi \sin \alpha . e}{\lambda} = 0; \qquad \sin \alpha . e = m \frac{\lambda}{n},$$

wenn m jede Zahl der natürlichen Zahlenreihe sein kann; nur die Minima fallen aus, wo m ein Vielfaches von n ist; dort liegen die Maxima zweiter Klasse, deren Breite also $2 \frac{\lambda}{n}$ entspricht, da z. B. das erste Maximum zweiter Klasse $m = n$ durch die Minima begrenzt ist

$$e \sin \alpha = (n - 1) \frac{\lambda}{n} \text{ und } e \sin \alpha = (n + 1) \frac{\lambda}{n}.$$

Die Distanz der Minima ist sonst $\frac{\lambda}{n}$, und zwischen diesen liegen die Maxima dritter Klasse, dort wo der Zähler des letzen Factors gleich 1 ist. Denn von einem Minimum zum nächstfolgenden wächst der Zähler von 0 bis 1 und nimmt wieder bis 0 ab, während der Nenner stetig wächst oder bei Annäherung an ein Maximum zweiter Klasse viel langsamer abnimmt als der Zähler. Daraus ergibt sich dann, wie wir es auch vorhin sahen, dass die Maxima dritter Klasse sehr lichtschwach sein müssen.

Aus dieser Gleichung für die Intensität des gebeugten Lichtes ergibt sich nun, dass wenn man eine sehr grosse Zahl sehr enger Oeffnungen nimmt, das Beugungsbild ein ganz anderes wird als bei einer geringen Zahl von Oeffnungen. Das Beugungsbild besteht dann, bei Anwendung homogenen Lichtes, aus einer Anzahl schmaler heller Linien von der Breite der angewandten Lichtlinie, und bei Anwendung weissen Lichtes aus einigen vollständigen Spectren, in welchen ebenso wie in einem reinen, mit einem Prisma entworfenen Spectrum die Fraunhofer'schen Linien sichtbar sind.

Denn nehmen wir eine grosse Zahl sehr enger Oeffnungen, so bleiben nur die Maxima zweiter Klasse sichtbar, deren Lage gegeben ist durch

$$e \sin \alpha = \lambda; \quad 2\lambda, \quad 3\lambda \ldots m\lambda;$$

die zwischen denselben liegenden Maxima dritter Klasse, welche von den Minimis

$$e \sin \alpha = \frac{\lambda}{n} \quad 2\frac{\lambda}{n} \cdots m\frac{\lambda}{n}$$

eingeschlossen sind, die also nur halb so breit sind als die Maxima zweiter Klasse, sind zu lichtschwach, als dass sie wahrgenommen werden können.

Die Lage der einzelnen, als helle Linien erscheinenden Maxima zweiter Klasse hängt nach der Gleichung für dieselben nicht von der Breite der einzelnen Oeffnungen ab, sondern von dem Abstande e der homologen Ränder; man bezeichnet deshalb bei einem System solcher Spalten, die man Gitter nennt, gewöhnlich die Grösse e als die Spaltbreite.

Der Winkel α, um welchen ein bestimmtes Maximum abgelenkt wird, hängt nun aber wesentlich von der Wellenlänge des angewandten Lichtes ab, $\sin \alpha$ ist dieser Wellenlänge direkt proportional. Daraus folgt, dass bei Anwendung weissen Lichtes die den einzelnen Wellenlängen entsprechenden Maxima neben einander fallen müssen, dass wir also Spectra erhalten müssen, deren violettes Ende der Mitte zugewandt sein muss; denn da das violette Licht die kleinsten Wellenlängen hat, so ist der Winkel α für das violette Licht am kleinsten.

Nennen wir die Wellenlänge des violetten Lichtes λ_v, die des rothen λ_r, so reicht das erste Seitenspectrum von

$$\sin \alpha = \frac{\lambda_v}{e} \text{ bis } \sin \alpha = \frac{\lambda_r}{e},$$

die folgenden von

$$\sin \alpha = 2\frac{\lambda_v}{e} \text{ bis } \sin \alpha = 2\frac{\lambda_r}{e}; \qquad \sin \alpha = 3\frac{\lambda_v}{e} \text{ bis } \sin \alpha = 3\frac{\lambda_r}{e}$$

u. s. f. Da nun $2\lambda_v > \lambda_r$, so ist das erste Seitenspectrum durch einen dunklen Zwischenraum von dem zweiten getrennt; da indess $2\lambda_r > 3\lambda_v$, so reicht das Roth des zweiten schon in das Violett des dritten hinein und noch mehr das Roth des dritten in das vierte Spectrum etc.

Die Farbenvertheilung ist im Beugungsspectrum eine etwas andere als in dem prismatischen; in letztern ist die Ausdehnung der brechbarern Strahlen eine relativ grössere, indem die Brechbarkeit mit abnehmender Wellenlänge immer rascher wächst, während hier die Ausdehnung der einzelnen Farben ihren Wellenlängen proportional ist; die Strahlen der mittlern Wellenlängen liegen in der Mitte des Spectrums.

Da die Beugungsspectra auch die Fraunhofer'schen Linien zeigen, so ist die Messung ihrer Ablenkung das genaueste Verfahren zur Bestimmung der Wellenlänge; wenn α_1, α_2 . . die Ablenkung des Lichtes von der Wellenlänge λ im ersten, zweiten . . Seitenspectrum ist, so ergibt sich

$$\lambda = e \sin \alpha_1 = {}^1\!/_2\, e \sin \alpha_2 \ldots$$

wir erhalten somit durch Messung in mehreren Spectren sich gegenseitig controlirende Werthe von λ. Es bedarf dazu nur der Kenntniss der Spaltbreite e, die man erhält, indem man die Breite des Gitters misst und dieselbe durch die Anzahl der Spalten dividirt.

In dieser Weise haben Fraunhofer, Ångström, van der Willigen u. a. die Wellenlängen des Lichtes gemessen; die im §. 141 bereits angegebenen Wellenlängen der hauptsächlichsten Strahlen sind das Mittel dieser Messungen.

Zweites Kapitel.

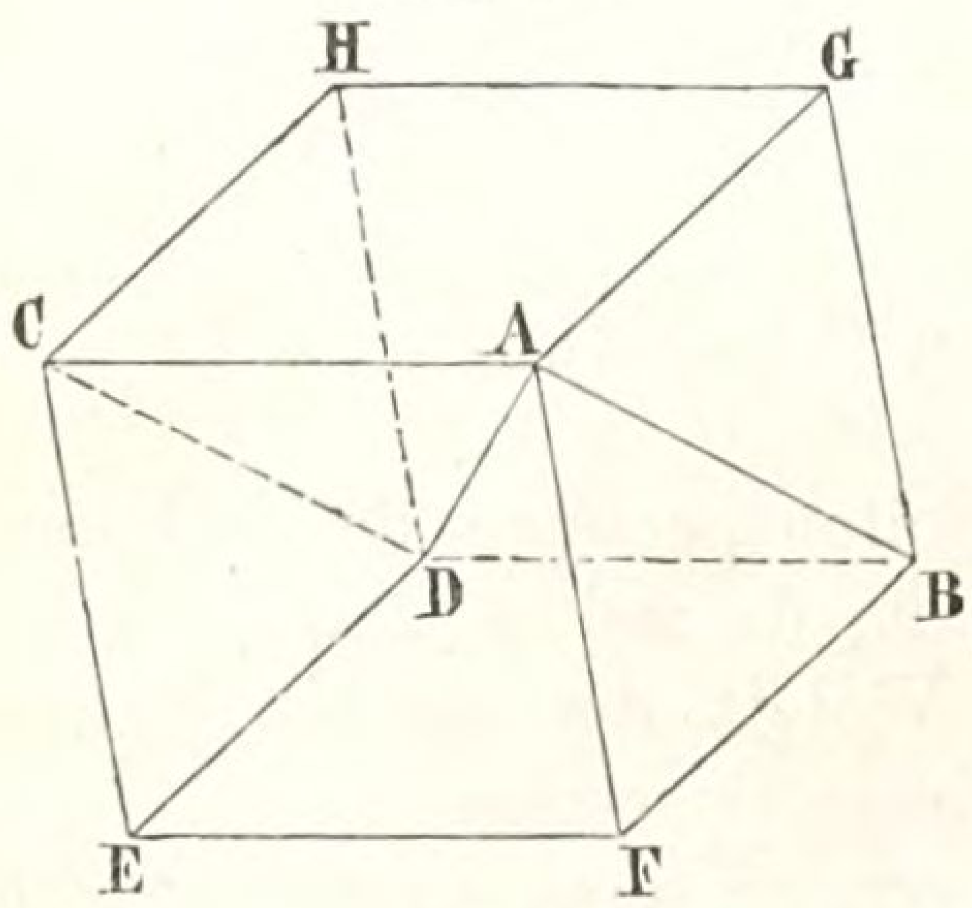
Die Polarisation des Lichtes.

§. 171.

Polarisation des Lichtes. Die Erscheinungen der Interferenz und Beugung des Lichtes liefern uns den direkten Beweis, dass das Licht eine schwingende Bewegung ist, sie geben uns aber noch keinen Aufschluss darüber, ob die Schwingungen wie beim Schall longitudinale, oder ob sie transversale sind; die Entscheidung über diese Frage liefern uns die zuerst von Huyghens beobachteten Polarisationserscheinungen, die Erscheinung nämlich, dass Lichtstrahlen, welche durch einen Kalkspathkrystall hindurchgegangen sind, an ihren verschiedenen Seiten verschiedene Eigenschaften haben.

Aus den natürlich vorkommenden, farblos durchsichtigen Kalkspathkrystallen lassen sich leicht Rhomboeder herstellen, wie Fig. 220 darstellt, welche von sechs Rhomben begrenzt sind, deren stumpfe Winkel $101^0\ 53'$, deren spitze $78^0\ 7$ betragen. Das Rhomboeder ist eine Hemiedrie der doppelt sechsseitigen Pyramide, und die krystallographische Hauptaxe geht durch die beiden Ecken A und D, in welchen drei stumpfe Winkel zusammenstossen. Legt man daher durch die kurzen Diagonalen zweier gegenüberstehender Rhomben, z. B. AB und CD, eine Ebene, so nimmt diese die Axe des Krystalles in sich auf; eine solche Ebene und alle mit ihr parallelen nennt man einen Hauptschnitt des Krystalles, denn alle diese Ebenen nehmen, da die krystallische Hauptaxe nicht eine Linie, sondern eine Richtung ist, diese Hauptaxe in sich auf. In optischer Beziehung nennen wir nun vorzüglich jene die krystallographische Axe enthaltende Ebene einen Hauptschnitt, welche gleichzeitig das Einfallsloth eines eintretenden Lichtstrahls in sich enthält, also eine Ebene, deren Lage durch das Einfallsloth und die Richtung der Hauptaxe bestimmt ist.

Fig. 220.



Lässt man nun durch einen solchen Krystall einen Lichtstrahl hindurchtreten, so findet man, dass derselbe im Allgemeinen in zwei zerlegt wird, nur dann, wenn der Strahl parallel der Richtung der Hauptaxe durch den Krystall hindurchgeht, wird er nicht in zwei zerlegt. Schleifen wir also an den Krystall zwei Flächen senkrecht zu AD an, und lassen dann senkrecht zu diesen ein Lichtbündel durch den Krystall hindurchgehen, so wird dasselbe nicht in zwei zerlegt.

Lassen wir aber auf die natürlichen Grenzflächen des Krystalls und

zwar der Einfachheit wegen unter senkrechter Incidenz ein Strahlenbündel fallen, so zerfällt es bei seinem Eintritte in den Krystall in zwei; das eine geht den gewöhnlichen Brechungsgesetzen gemäss ungebrochen durch den Krystall hindurch, es ist der sogenannte ordentliche Strahl, das andere wird abgelenkt und zwar im Hauptschnitte gegen den ordentlichen Strahl verschoben. Die Grösse der Verschiebung ist der Dicke des Krystalls proportional, bei seinem Austritte wird der verschobene Strahl dem ordentlichen wieder parallel. Man nennt diesen Strahl den ausserordentlich gebrochenen.

Die Erscheinung der Doppelbrechung werden wir im nächsten Kapitel besprechen, hier beschäftigen wir uns mit den Eigenschaften dieser beiden durch die Doppelbrechung entstandenen Lichtwellen. Dieselben sind andere als die des natürlichen Lichtes. Lassen wir den ordentlichen Strahl auf einen zweiten Krystall fallen, und zwar wieder auf eine natürliche Begrenzungsfläche unter senkrechter Incidenz, so wird das Licht in dem zweiten Krystall nicht mehr unter allen Umständen doppelt gebrochen, und nur unter ganz bestimmten Umständen in zwei Strahlen gleicher Helligkeit zerlegt. Wird der zweite Krystall so gestellt, dass sein Hauptschnitt dem des ersten parallel ist, so wird der Strahl nicht in zwei zerlegt, er geht einfach den gewöhnlichen Brechungsgesetzen gemäss ungebrochen und ohne Ablenkung, somit als ordentlicher Strahl durch den zweiten Krystall hindurch. Wird dann aber der zweite Krystall um den einfallenden Strahl als Axe gedreht, so tritt, sobald der Hauptschnitt des zweiten mit dem des ersten einen Winkel bildet, der ausserordentliche Strahl neben dem ordentlichen auf, und die Helligkeit des ordentlichen wird kleiner. Je grösser der Winkel der beiden Hauptschnitte wird, um so mehr wächst die Intensität des ausserordentlichen, vermindert sich jene des ordentlichen, und bilden die Hauptschnitte einen Winkel von 45^0, so sind die Intensitäten beider Strahlen gleich. Wird der Winkel noch grösser, so überwiegt die Intensität des ausserordentlichen Strahles, bis wenn der zweite Hauptschnitt senkrecht zum ersten ist, der ordentliche Strahl ganz verschwunden, und nur mehr der ausserordentliche Strahl vorhanden ist. Es tritt also auch dann keine Doppelbrechung ein, aber der im ersten Krystall ordentlich gebrochene Strahl wird dann in dem zweiten nur ausserordentlich gebrochen. Dreht man den zweiten Krystall weiter, so treten wieder zwei Strahlen auf und mit wachsendem Winkel wächst wieder die Intensität des ordentlichen, nimmt die des ausserordentlichen ab, so dass, wenn die beiden Hauptschnitte einen Winkel von 135^0 bilden, beide Strahlen wieder gleiche Intensität haben. Dann überwiegt bei weiterem Drehen wieder die Intensität des ordentlichen, und bilden die beiden Flächen einen Winkel von 180^0, ist der ausserordentliche verschwunden und nur mehr der ordentliche Strahl vorhanden. Dreht man von dieser Stellung an weiter, so wiederholen sich zwischen 180^0 und 360^0 ganz genau dieselben Erscheinungen in ganz derselben Reihenfolge.

Nach den photometrischen Messungen von Malus ist die Intensität des aus dem zweiten Krystall austretenden ordentlichen Strahles, wenn man den ordentlichen Strahl des ersten Krystalles auf den zweiten fallen lässt, während die Hauptschnitte den Winkel α bilden,

$$J_{oo} = J_o \cos^2 \alpha,$$

wenn J_o die Intensität des auf den zweiten Krystall fallenden ordentlichen Strahles bezeichnet; die Intensität des in dem zweiten Krystall entstehenden ausserordentlichen Strahles ist

$$J_{oe} = J_o \sin^2 \alpha.$$

Die Summe beider

$$J_{oo} + J_{oe} = J_o$$

ist gleich der Intensität des einfallenden Lichtes.

Lässt man auf den zweiten Krystall den ausserordentlichen Strahl fallen, so sind die Erscheinungen bis auf einen Punkt ganz dieselben, der Unterschied ist nur der, dass jetzt in dem zweiten Krystall der ausserordentliche Strahl dann auftritt, wenn vorher der ordentliche auftrat und umgekehrt. Ist $\alpha = 0$, so tritt jetzt nur der ausserordentliche Strahl auf, ist $\alpha = 45^0$, haben beide Strahlen die gleiche Intensität, ist $\alpha = 90^0$, so tritt nur der ordentliche auf. Drehen wir von dieser senkrechten Stellung weiter, so wiederholen sich genau dieselben Erscheinungen, wie vorher von paralleler Stellung aus. Oder lassen wir den ausserordentlichen Strahl des ersten Krystalles durch den zweiten Krystall treten, so sind die Erscheinungen dieselben wie im vorigen Falle, jedesmal wenn die Lage des Hauptschnittes des zweiten Krystalles senkrecht ist zu der Lage, die er bei Anwendung des ordentlichen Strahles hatte. Das zeigen auch die Messungen von Malus, der für die Intensität des ordentlichen Strahles in diesem Falle

$$J_{eo} = J_e \sin^2 \alpha,$$

und für die des ausserordentlichen

$$J_{ee} = J_e \cos^2 \alpha$$

fand.

Diese Beobachtungen ergeben somit, dass das natürliche Licht in einem Kalkspathkrystalle in zwei Strahlen zerlegt wird, welche andere Eigenschaften haben als das natürliche Licht, man nennt das Licht polarisirt.

Die neue Eigenschaft des polarisirten Lichtes lässt sich gegenüber dem natürlichen Lichte am besten dahin charakterisiren, dass während ein Strahl des letztern rings um die Richtung der Fortpflanzung nach allen Seiten gleich beschaffen ist, ein polarisirter Strahl an seinen verschiedenen Seiten verschiedene Eigenschaften hat, so dass an ihm ein Oben und Unten oder Rechts und Links zu unterscheiden ist. Denken wir uns durch den den ersten Krystall verlassenden ordentlichen Strahl eine dem Hauptschnitte des ersten Krystalls parallele Ebene gelegt, so ist diese für den Strahl charakteristisch. Ist der Hauptschnitt des zweiten Krystalls dieser Ebene parallel, so wird der Strahl nur ordentlich, ist er zu ihr senkrecht, so wird der Strahl nur ausserordentlich gebrochen, in allen andern Neigungen des Hauptschnitts gegen diese Ebene wird er doppelt gebrochen, und die Intensität der beiden entstehenden Strahlen hängt nur von der Neigung des Hauptschnittes gegen diese feste, durch den Strahl gelegte Ebene ab; man nennt deshalb diese feste Ebene die Polarisationsebene, und den aus einem Krystall austretenden ordentlichen Strahl im Hauptschnitte polarisirt.

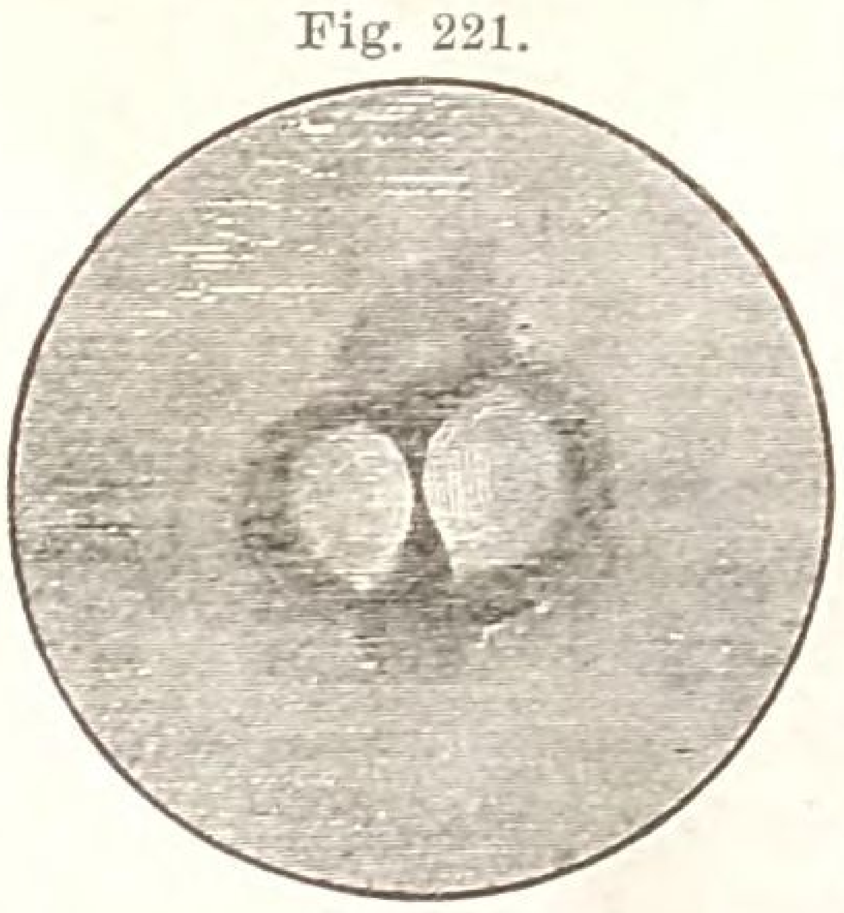
Für den ausserordentlichen Strahl, sahen wir, sind die Erscheinungen genau dieselben wie für den ordentlichen Strahl, wenn wir von der zum

Hauptschnitt senkrechten Ebene ausgehen, die zum Hauptschnitt des ersten Krystalls senkrecht durch den Strahl gelegte Ebene hat also für den ausserordentlichen Strahl dieselben Eigenschaften, wie die dem Hauptschnitt parallele Ebene für den ordentlichen Strahl. Die Polarisationsebene des ausserordentlichen Strahles ist also die zum Hauptschnitt senkrechte Ebene, man nennt deshalb den Strahl senkrecht zum Hauptschnitt polarisirt.

Das durch einen Kalkspath dringende Licht zerfällt demnach in zwei zu einander senkrecht polarisirte Strahlen gleicher Intensität.

Das polarisirte Licht unterscheidet sich für das Auge kaum merkbar von dem natürlichen Licht, indess hat zuerst Haidinger beobachtet, dass es doch an den sogenannten Polarisationsbüscheln als solches zu erkennen ist. Sieht man durch einen Kalkspathkrystall, dessen ausserordentlicher Strahl abgeblendet ist, so dass nur der ordentliche Strahl in das Auge dringt, nach einer hellen Wolke, so erscheinen im Fixationspunkte die sogenannten Haidinger'schen Büschel; Fig. 221 zeigt dieselben nach der Zeichnung von Helmholtz für eine vertical gehaltene Polarisationsebene. Parallel der Polarisationsebene erscheint eine gelblich gefärbte, 8förmige Figur, welche dunkler ist als die Umgebung, senkrecht zu derselben eine bläulich gefärbte, die heller ist als die Umgebung. Die Erscheinung dauert bei ruhiger Haltung des Kalkspathes nur wenige Secunden; um sie wieder hervorzurufen muss man die Polarisationsebene etwas drehen. Die Erscheinung ist wenig markirt und wird deshalb leicht übersehen, hat man sie aber einmal wahrgenommen, so sieht man sie jedesmal wieder.

Fig. 221.



Wegen der kurzen Dauer dieser Erscheinung und der daraus folgenden Unsicherheit derselben muss man zur Erkennung des polarisirten Lichtes einen Apparat anwenden, der selbst das Licht polarisirt, wie wir oben den zweiten Kalkspath benutzten. Wir erkennen in der Verschiedenheit der Intensität der beiden durch Doppelbrechung entstehenden Strahlen das Licht als polarisirt; die Polarisationsebene des Strahles ist jene, welcher wir den Hauptschnitt des Kalkspathkrystalles parallel stellen müssen, damit das eintretende Licht ohne Doppelbrechung nur als ordentlich gebrochener Strahl durch den Krystall hindurchgeht. Ist das angewandte Licht nicht polarisirt, so zerfällt es im Kalkspath stets in zwei Strahlen gleicher Helligkeit.

§. 172.

Erklärung der Polarisation; Nachweis der Querschwingungen. Die Polarisation, die wir einem Lichtstrahl ertheilen können, beweist, dass die Lichtschwingungen nicht longitudinale sein können, denn in dem Falle ist keine Modification der Bewegung denkbar, durch welche der Strahl eine bestimmte Seitlichkeit erhalten könnte. Macht man dagegen die Annahme, dass die Schwingungen des Lichtes transversale sind, so ist, wie Fresnel und Th. Young sofort nach Wiederentdeckung der länger als ein Jahrhundert unbeachtet gelassenen Polarisationserscheinungen durch Malus, erkannten, die Erscheinung der Polarisation leicht verständlich.

In dem natürlichen Lichte gehen die zur Fortpflanzungsrichtung senkrechten Schwingungen ganz gleichmässig, respective ganz unregelmässig nach allen zur Fortpflanzungsrichtung senkrechten Richtungen, keine dieser Richtungen ist vor der andern bevorzugt. Ein solcher Strahl kann deshalb nach keiner Seite verschiedene Eigenschaften haben, denn in jeder zum Strahle senkrechten Richtung bewegen sich die Aethertheilchen eine Zeitlang hin und her, eine unmessbar kurze Zeit später dagegen bewegen sie sich nach irgend einer andern Richtung.

Für das polarisirte Licht haben wir dann nur anzunehmen, dass die Schwingungen des Aethers in einer bestimmten, durch die Fortpflanzungsrichtung des Strahles gelegten Ebene senkrecht zum Strahl erfolgen; dann ist sowohl diese Ebene als eine zu ihr senkrechte durch den Strahl gelegte Ebene vor allen andern ausgezeichnet, die erstere dadurch, dass die Aethertheilchen sich ganz in ihr bewegen, die letztere dadurch, dass die Aethertheilchen sich abwechselnd nach der einen, abwechselnd nach der andern von ihr entfernen. Eine dieser beiden Ebenen wird dann die Polarisationsebene sein, entweder jene, welche die Bewegung des Aethers ganz in sich aufnimmt, oder die zu der Bewegungsrichtung senkrechte. Fresnel nahm auf Grund einer speciellen Voraussetzung über die Beschaffenheit der Krystalle, die wir im nächsten Kapitel kennen lernen werden, an, dass die Schwingungen des polarisirten Lichtes senkrecht zur Polarisationsebene erfolgen, eine Annahme, die andere Physiker, so besonders Neumann, nicht theilen. Man kennt bisher keine Erscheinung, die über diese beiden Annahmen eine Entscheidung liefert, da sich alle Erscheinungen des polarisirten Lichtes sowohl aus der einen wie aus der andern ableiten lassen. Wir wollen im Folgenden die Annahme von Fresnel beibehalten.

Der Act der Polarisation bestände nun darin, dass die im natürlichen Lichte nach allen Richtungen ohne Unterschied vor sich gehenden Schwingungen nach zwei zu einander senkrechten Richtungen zerlegt werden. Durch den Doppelspath würde alsdann nur Licht hindurchgehen können, dessen Schwingungen entweder senkrecht zum Hauptschnitt oder demselben parallel wären. Die ankommenden Schwingungen, nach welcher Richtung sie auch geschähen, würden dann in zwei zu einander senkrechte Componenten zerlegt, deren eine parallel dem Hauptschnitte, deren andere dazu senkrecht ist, und welche sich dann getrennt von einander im Krystall fortpflanzen. Deshalb zerfällt dann auch das polarisirte Licht im Krystall nur dann in zwei Strahlen, wenn der Hauptschnitt mit der Polarisationsebene einen Winkel bildet. Ist der Hauptschnitt derselben parallel oder zu ihr senkrecht, so sind schon sämmtliche Schwingungen zu demselben senkrecht oder ihm parallel, es kann deshalb keine Zerlegung stattfinden. Bildet aber die Polarisationsebene mit dem Hauptschnitte einen Winkel α, so müssen beide Componenten auftreten, und dieselben müssen sich wie $\cos \alpha$ und $\sin \alpha$, die Intensitäten also wie $\cos^2 \alpha$ und $\sin^2 \alpha$ verhalten, wie es Malus gefunden hat.

Es gelang nun Fresnel sehr bald mit Hülfe der beiden ersten von ihm und Arago aufgefundenen Gesetze der Interferenz des polarisirten Lichtes den direkten Beweis für die Richtigkeit seiner Annahme zu führen, dass die Lichtschwingungen transversale seien und dass sie im polarisirten Lichte alle parallel einer und derselben Richtung erfolgen.

Die beiden Fresnel-Arago'schen Gesetze der Interferenz des polarisirten Lichtes sind folgende:

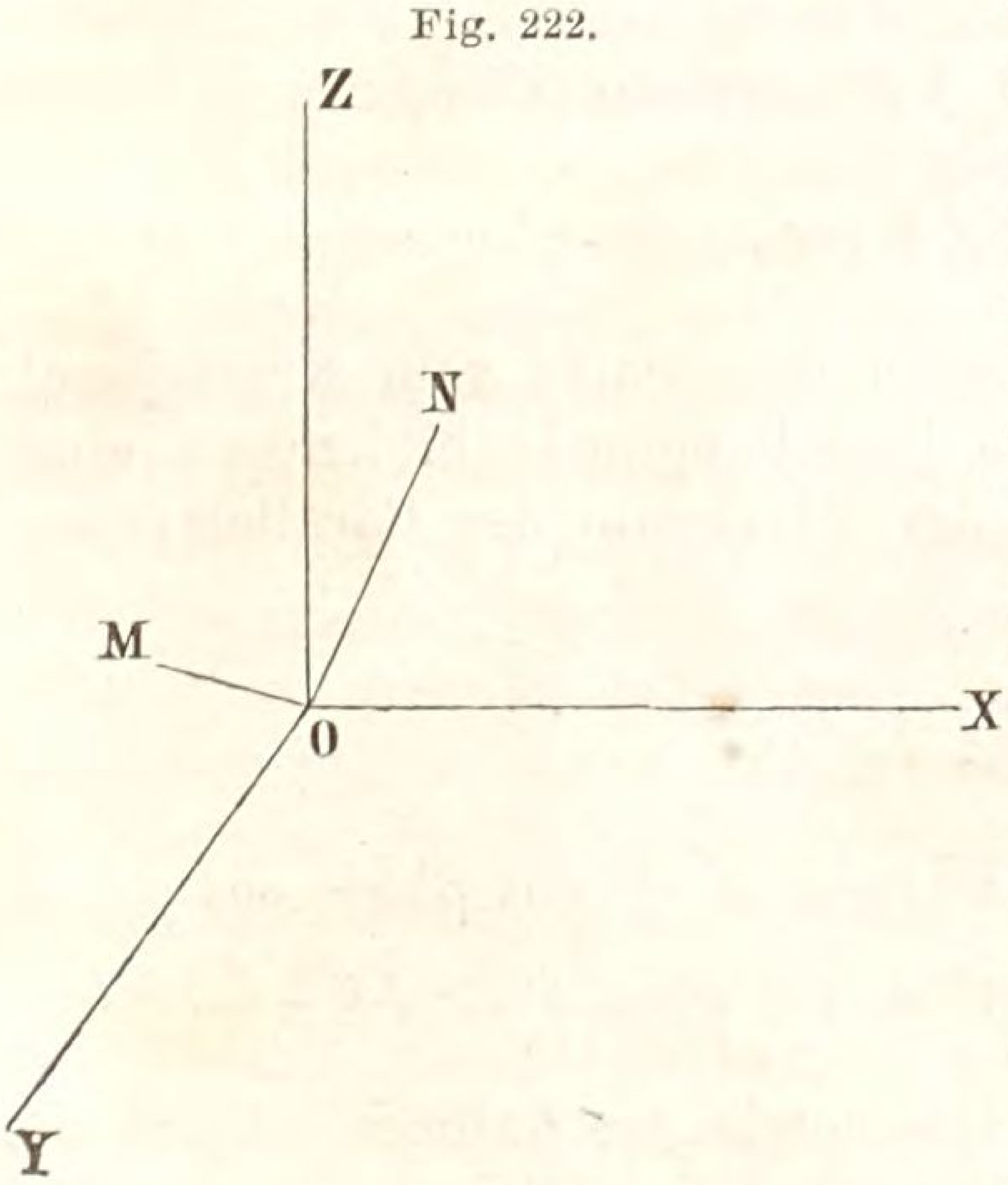
1) Zwei polarisirte Lichtstrahlen, deren Polarisationsebenen parallel sind, geben dieselben Interferenzerscheinungen, wie natürliches Licht.

2) Zwei polarisirte Strahlen, deren Polarisationsebenen zu einander senkrecht sind, zeigen gar keine Interferenzerscheinungen, sie geben bei ihrem Zusammenwirken immer dieselbe Helligkeit, welche Phasendifferenz sie auch haben mögen.

Der Nachweis der Richtigkeit des ersten Gesetzes lässt sich in der einfachsten Weise führen; man hat nur die früher besprochenen Interferenzerscheinungen mit polarisirtem Lichte hervorzurufen, man findet dieselben genau so, wie wir sie bisher kennen gelernt haben.

Das zweite Gesetz lässt sich am bequemsten durch die von zwei parallelen Spalten hervorgebrachten Beugungserscheinungen hervorrufen. Ein Turmalinkrystall polarisirt das Licht wie ein Kalkspath, hat aber dabei die Eigenthümlichkeit, den ordentlichen Strahl vollständig zu absorbiren und nur den ausserordentlichen hindurchzulassen. Man schneidet nun aus einem Krystall eine Platte parallel der Krystallaxe und theilt diese in zwei Stücke, deren eines man vor den einen, deren anderes man vor den zweiten der einander parallelen Spalten bringt. Sind die Platten so vor den Spalten angebracht, dass die Krystallaxen zu einander senkrecht sind, so sind auch die Polarisationsebenen der durch sie hindurchgehenden Strahlen zu einander senkrecht; man sieht dann die Beugungserscheinungen gerade so, wie wenn man nur eine beugende Oeffnung hätte, die Minima, welche durch das Zusammenwirken der durch die verschiedenen Oeffnungen dringenden Strahlen bedingt werden, sind vollständig verschwunden. Wenn man dann aber vor dem einen Spalte den Krystall dreht, so dass die Axen parallel werden, erscheint das Beugungsbild zweier Spalten, wie im natürlichen Licht. Das Verschwinden der durch das Zusammenwirken beider Oeffnungen bewirkten Minima, wenn das durch dieselben dringende Licht senkrecht zu einander polarisirt ist, beweist, dass zwei senkrecht zu einander polarisirte Strahlen sich stets zu constanter Helligkeit zusammensetzen, welches auch ihre Phasendifferenz ist.

Fig. 222.



Um daraus den Nachweis zu liefern, dass die Schwingungen senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung sein müssen, sei OX Fig. 222 die Fortpflanzungsrichtung zweier zu einander senkrecht polarisirter Strahlen, deren Schwingungsrichtungen OM und ON seien. Sei OZ senkrecht zu OX und OY senkrecht zu der Ebene ZOX. Wir bezeichnen die Winkel, welche OM mit OX bildet, mit α, $MOY = \beta$, $MOZ = \gamma$, und setzen $NOX = \alpha'$, $NOY = \beta'$, $NOZ = \gamma'$. Nun seien die Gleichungen der beiden Strahlen

$$V = A \,.\, \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right); \qquad V' = B \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} - \frac{\delta}{\lambda}\right).$$

Um die aus dem Zusammenwirken dieser beiden Bewegungen sich ergebende Resultirende zu erhalten, zerlegen wir zunächst jede in ihre drei zu einander senkrechten Componenten nach OY, OZ und OX. Diese Componenten sind für den ersten Strahl

$$C_x = V \cos\alpha = A \,.\, \cos\alpha \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

$$C_y = A \,.\, \cos\beta \,.\, \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right); \qquad C_z = A \,.\, \cos\gamma \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right);$$

für den zweiten ganz entsprechend

$$C_x' = B \cos\alpha' \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} - \frac{\delta}{\lambda}\right); \qquad C'_y = B \,.\, \cos\beta' \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} - \frac{\delta}{\lambda}\right)$$

$$C'_z = B \cos\gamma' \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} - \frac{\delta}{\lambda}\right).$$

Nach den Gesetzen der Interferenz erhalten wir nun die resultirende Bewegung parallel jeder der drei Axen, indem wir einfach die Summe der beiden einander parallelen Bewegungen bilden. Ist also X die resultirende Bewegung parallel X, so ist

$$X = A \,.\, \cos\alpha \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + B \,.\, \cos\alpha' \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} - \frac{\delta}{\lambda}\right).$$

Nennen wir nun die resultirende Amplitude dieser der Richtung X parallelen Bewegung D_x, so ist ebenfalls nach dem Gesetze der Interferenz zweier paralleler Schwingungen

$$D^2_x = A^2 \cos^2\alpha + B^2 \cos^2\alpha' + 2AB \cos\alpha \cos\alpha' \,.\, \cos 2\pi \frac{\delta}{\lambda}.$$

Ganz in derselben Weise erhalten wir für die resultirenden beiden andern Componenten

$$D^2_y = A^2 \cos^2\beta + B^2 \cos^2\beta' + 2AB \cos\beta \cos\beta' \cos 2\pi \frac{\delta}{\lambda}$$

$$D^2_z = A^2 \cos^2\gamma + B^2 \cos^2\gamma' + 2AB \,.\, \cos\gamma \cos\gamma' \cos 2\pi \frac{\delta}{\lambda}$$

Diese drei Amplituden setzen sich nun nach dem Satze vom Kräfteparallelogramm, da sie die drei Seiten eines Parallelepipeds bilden, zu einer Resultirenden zusammen, welche gleich der Diagonale des Parallelepipeds ist, also, wenn R die Resultirende ist,

$$R^2 = D^2_x + D^2_y + D^2_z;$$

es ist somit

$$R^2 = A^2 (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) + B^2 (\cos^2\alpha' + \cos\beta' + \cos\gamma') +$$
$$+ 2AB (\cos\alpha \cos\alpha' + \cos\beta \cos\beta' + \cos\gamma \cos\gamma') \cos 2\pi \frac{\delta}{\lambda}.$$

Nach einem Satze der analytischen Geometrie des Raumes ist nun die Summe der Quadrate der Cosinus der drei Winkel, welche eine und dieselbe Richtung mit den drei zu einander senkrechten Richtungen OX, OY, OZ bildet, immer gleich 1, es ist somit

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 = \cos^2 \alpha' + \cos^2 \beta' + \cos^2 \gamma'.$$

Bezeichnen wir ferner den Winkel, den die Richtung OM mit ON bildet, mit φ, so ist nach einem weitern Satze der analytischen Geometrie

$$\cos \alpha \cos \alpha' + \cos \beta \cos \beta' + \cos \gamma \cos \gamma' = \cos \varphi.$$

Setzen wir diese Werthe ein, so wird

$$R^2 = A^2 + B^2 + 2\,AB \cos \varphi \,.\, \cos 2\,\pi\,\frac{\delta}{\lambda}.$$

Nach dem zweiten Fresnel-Arago'schen Gesetze ist nun, welches auch der Werth von δ ist,

$$R^2 = \text{const.};$$

das ist aber nur möglich, wenn das dritte Glied des Ausdruckes für R^2 gleich Null ist, und das ist für jeden Werth von δ nur möglich, wenn $\cos \varphi = 0$ ist. Daraus folgt aber, dass der Winkel $\varphi = MON$ ein rechter ist, also dass die Schwingungen der beiden senkrecht zu einander polarisirten Strahlen zu einander senkrecht sind.

Daraus und aus dem ersten Gesetze folgt dann auch, dass die Schwingungen senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung sind. Denn drehen wir die Polarisationsebene des einen Strahls um 90^0, so dass die beiden Polarisationsebenen einander parallel werden, so interferiren die Strahlen wie gewöhnliches Licht. Die resultirende Intensität ist dann aber, wie wir wissen,

$$R^2 = A^2 + B^2 + 2\,A\,B \,.\, \cos 2\,\pi\,\frac{\delta}{\lambda},$$

es muss also dann $\cos \varphi = 1$, also $\varphi = 0$ sein. Da wir nun aber vorhin sahen, dass wir die Polarisationsebene eines Strahles dadurch drehen, dass wir den Strahl um sich selbst als Axe drehen, so folgt, dass dadurch, dass wir den einen Strahl um OX als Axe um 90^0 drehen, der Winkel $\varphi = 0$, die Schwingungen parallel werden. Das ist aber nur möglich, wenn OM und ON in einer zu OX senkrechten Ebene liegen, somit wenn die Schwingungen transversale sind.

Es folgt somit aus diesen beiden Gesetzen, dass im polarisirten Lichte nur Schwingungen vorhanden sein können, welche zur Fortpflanzungsrichtung senkrecht sind, und weiter da die in senkrecht zu einander polarisirten Strahlen vorhandenen Schwingungen stets zu einander senkrecht sind, dass in jedem die Schwingungen einander parallel sein, also in einer durch den Strahl gelegten Ebene geschehen müssen. Nach der Fresnel'schen Annahme ist diese Ebene senkrecht zur Polarisationsebene.

Wenn nun im polarisirten Lichte nur transversale Schwingungen vorhanden sind, so muss dasselbe auch für das natürliche Licht gelten; denn da dasselbe im Kalkspath in zwei polarisirte Strahlen zerfällt, so müssten, wenn im natürlichen Licht noch longitudinale Schwingungen vorhanden wären, diese im Kalkspath absorbirt werden. Das müsste aber eine Schwächung des Lichtes zur Folge haben, was erfahrungsgemäss nicht der Fall ist. Denn führt man die beiden polarisirten Strahlen zusammen, so geben sie, bis auf das bei dem Eintritt und Austritt aus dem Krystall reflectirte Licht, dieselbe Intensität wie das eintretende Licht. Wir müssen demnach auch im unpolarisirten Lichte nur transversale Schwingungen annehmen,

dasselbe also als aus einer Anhäufung oder sehr raschen Aufeinanderfolge einer grossen Menge von nach allen Azimuthen polarisirten Wellen bestehend ansehen.

§. 173.

Polarisation des Lichtes durch Reflexion und Brechung. Die Doppelbrechung in einem Krystalle ist nicht das einzige Mittel zur Herstellung polarisirten Lichtes; nach den Beobachtungen von Malus ergibt sich nämlich zunächst, dass auch durch Reflexion von durchsichtigen Körpern das Licht polarisirt werden kann. Lässt man natürliches Licht unter einem gewissen Winkel, der für jede durchsichtige Substanz einen bestimmten Werth hat und den man den Polarisationswinkel nennt, reflectiren, so ist das reflectirte Licht in der Einfallsebene polarisirt. Denn lässt man das Licht durch einen Kalkspathkrystall gehen, so wird dasselbe, wenn der Hauptschnitt des Krystalls der Einfallsebene parallel ist, nur einfach und zwar ordentlich gebrochen; es treten erst zwei Strahlen auf, wenn der Krystallhauptschnitt mit der Einfallsebene einen Winkel α bildet, und die Intensitäten des ordentlichen und ausserordentlichen dann auftretenden Strahles verhalten sich wie $\cos^2 \alpha$ und $\sin^2 \alpha$. Der reflectirte Strahl hat also in Bezug auf die Einfallsebene ganz dieselben Eigenschaften wie der ordentliche, aus einem Kalkspath austretende Strahl in Bezug auf den Hauptschnitt, er ist somit parallel der Einfallsebene polarisirt.

Für den Polarisationswinkel fand Brewster, dass es derjenige Einfallswinkel ist, dessen Tangente gleich ist dem Brechungsexponenten des Lichtes bei dem Uebertritt aus Luft in die betreffende Substanz, oder was daraus folgt jener Einfallswinkel, für welchen der reflectirte Strahl senkrecht ist zum gebrochenen. Denn ist p der Polarisationswinkel, p' der zu ihm gehörige Brechungswinkel, so ist nach dem Brewster'schen Gesetze

$$\tang p = \frac{\sin p}{\cos p} = n = \frac{\sin p}{\sin p'},$$

somit auch

$$\cos p = \sin p',$$

oder der Einfallswinkel und Brechungswinkel ergänzen sich zu 90^0. Dann aber steht der reflectirte Strahl senkrecht zu dem gebrochenen.

Wenn das Licht bei Reflexion unter dem Polarisationswinkel parallel der Einfallsebene polarisirt wird, so folgt, dass unter diesem Einfallswinkel nur die zur Einfallsebene senkrechte Componente der Schwingungen reflectirt wird. Daraus folgt, dass wenn wir polarisirtes Licht unter dem Polarisationswinkel reflectiren lassen, die Intensität des reflectirten Lichtes nach der Lage der Polarisationsebene des einfallenden Lichtes gegenüber der Einfallsebene verschieden sein muss. Die Intensität des reflectirten Lichtes muss am grössten sein, wenn die Polarisationsebene mit der Einfallsebene zusammenfällt; bildet dagegen die Polarisationsebene mit der Einfallsebene den Winkel α, so kann nur die der Einfallsebene parallel polarisirte Componente der Schwingungen, welche proportional $\cos \alpha$ ist, reflectirt werden, die Intensität des reflectirten Lichtes muss somit proportional $\cos^2 \alpha$ sein.

Die Messungen von Malus haben diese Folgerungen bestätigt; lässt man das von einem Glasspiegel unter dem Polarisationswinkel reflectirte

Licht ebenfalls unter dem Polarisationswinkel auf einen zweiten Spiegel fallen, und ist die Intensität des reflectirten Lichtes gleich J, wenn die Einfallsebenen der beiden Spiegel zusammenfallen, so ist die Intensität des reflectirten Lichtes $J \cos^2 \alpha$, wenn die zweite Einfallsebene mit der ersten den Winkel α bildet, die Intensität des reflectirten Lichtes wird gleich Null, wenn die beiden Einfallsebenen zu einander senkrecht sind.

Es folgt daraus, dass wir ebenso wie durch die Doppelbrechung im Kalkspath das polarisirte Licht als solches und die Lage der Polarisationsebene erkennen können, wenn wir das Licht von einem Spiegel unter dem Polarisationswinkel reflectiren lassen.

Da wir sahen, dass der Akt der Polarisation darin besteht, dass die Schwingungen des unpolarisirten Lichtes in ihre zwei zu einander senkrechten Componenten zerlegt werden, folgt, dass bei der Polarisation durch Reflexion auch ein senkrecht zur Einfallsebene polarisirter Antheil entstehen muss. Malus hat auch das nachgewiesen, indem er zeigte, dass das gebrochene Licht in dem Falle theilweise senkrecht zur Einfallsebene polarisirt sei, das heisst, dass nicht alle Schwingungen in einer Ebene erfolgen, sondern, dass nur ein grösserer Antheil derselben einer, und zwar hier der Einfallsebene parallel ist als den übrigen Ebenen. Das gebrochene Licht ist eben eine Mischung polarisirten Lichtes und natürlichen Lichtes, da die Menge des reflectirten Lichtes bei durchsichtigen Körpern stets kleiner ist als die des gebrochenen und in dem gebrochenen Licht stets nur eine der des polarisirt reflectirten Lichtes gleiche Menge polarisirten Lichtes sein kann, ein Satz, den Versuche von Arago bestätigt haben.

Wenn ein durch eine Glasplatte hindurchgegangener und dadurch theilweise polarisirter Strahl unter dem Polarisationswinkel auf eine zweite Glasplatte fällt, so wird die Menge des in dem dann gebrochenen Lichte vorhandenen polarisirten Lichtes vermehrt, da dort wieder ein Antheil des nach der ersten Brechung noch vorhandenen natürlichen Lichtes in seine beiden Componenten zerlegt und deren eine reflectirt wird. Dasselbe geschieht, wenn man eine Anzahl Glasplatten, einen sogenannten Glassatz anwendet, bei jeder Platte, so dass man bei Anwendung einer hinreichenden Plattenzahl auch durch Brechung vollständig polarisirtes Licht erhält, dessen Polarisationsebene senkrecht zur Einfallsebene ist.

Lässt man Licht unter einem andern als dem Polarisationswinkel reflectiren, so erhält man auch dann theilweise polarisirtes Licht, also ein Gemenge von polarisirtem und natürlichem Lichte.

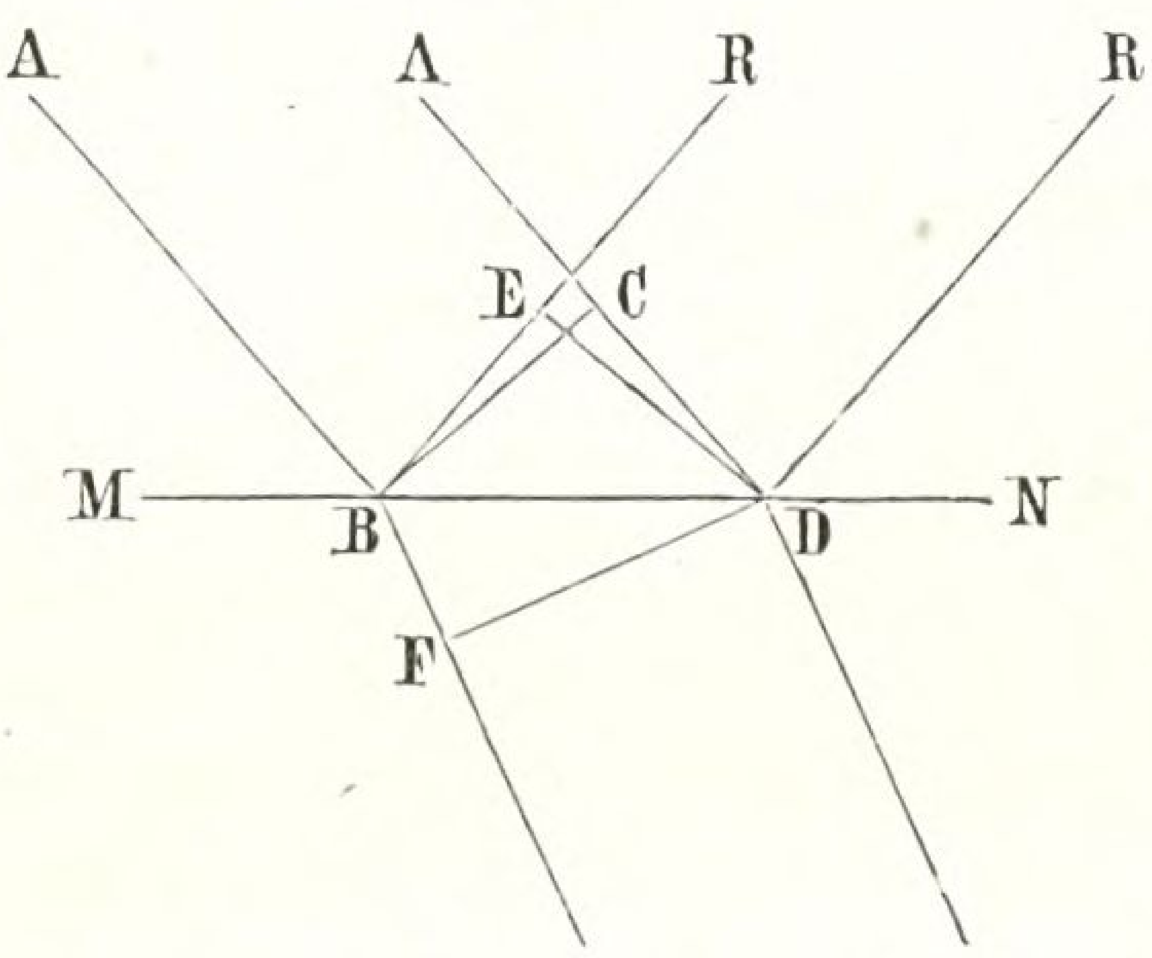
§. 174.

Reflexion des polarisirten Lichtes. Die von Malus gefundenen experimentellen Resultate über die Polarisation durch Reflexion und das Brewster'sche Gesetz gelang es Fresnel bald aus der Undulationstheorie abzuleiten. Wir bemerken indess gleich, dass die Beobachtungen von Malus, sowie die Fresnel'sche Theorie nur annähernd richtig sind, auf die Ergänzung sowohl der Beobachtungen als der Theorie kommen wir im §. 176 zurück.

Fresnel nimmt an, wie wir schon früher erwähnten, dass die Ursache der Reflexion und Brechung eine verschiedene Dichtigkeit des Aethers in

den verschiedenen Medien sei, während die Elasticität des Aethers überall die gleiche sei. Er nimmt dann weiter an, dass der Uebergang aus der Dichtigkeit im ersten zu der im zweiten Medium ein plötzlicher sei und in der Grenzschicht stattfinde, so dass diese Grenzschicht, in der die Reflexion und Brechung stattfindet, als die letzte Schicht des ersten und als die erste Schicht des zweiten Mittels anzusehen ist. Wenn dann an der Grenze zweier Medien eine Wellenbewegung ankommt, so ist die schwingende Bewegung in der Grenzschicht als die letzte der ankommenden Welle, als die erste der reflectirten Welle und da die Grenzschicht auch dem zweiten Medium angehört, als die erste der gebrochenen Welle anzusehen. Ist daher BC Fig. 223 eine an der Grenze zweier Medien ankommende Welle, so sind die mit MN parallelen Componenten der in derselben stattfindenden Schwingungen gleichzeitig die derselben parallelen Componenten der reflectirten Welle DE und der gebrochenen Welle FD. Daraus folgt dann, dass die algebraische Summe der in der Grenzfläche stattfindenden Verschiebungen, jede natürlich mit ihren Vorzeichen genommen, welche dem einfallenden und dem reflectirten Lichte angehören, gleich sein muss der augenblicklichen Verschiebung parallel der Grenzfläche in dem gebrochenen Lichte. Was nun von den augenblicklichen Verschiebungen gilt, dasselbe gilt auch von den Amplituden der drei Wellen, so dass ebenso die der brechenden Fläche parallelen Componenten der Amplituden der einfallenden und reflectirten Welle gleich sein müssen der der Grenzfläche parallelen Componente der Amplitude der gebrochenen Welle.

Fig. 223.



Diese, zunächst für die Grenze geltende Gleichheit muss, wenn wir ebene Wellen voraussetzen, ganz allgemein gelten, da die Amplituden ebener Wellen sich nicht ändern, weil dieselben sich ohne Ausbreitung parallel mit sich selbst fortpflanzen.

Diese Entwicklung Fresnel's liefert uns sofort eine Gleichung zwischen den Amplituden des einfallenden reflectirten und gebrochenen Lichtes. Nehmen wir zuerst an, das Licht sei parallel der Einfallsebene polarisirt, so sind im einfallenden, reflectirten und gebrochenen Lichte die Schwingungen immer senkrecht zur Einfallsebene, somit parallel der brechenden Fläche. Ist somit die Amplitude des einfallenden Lichtes gleich 1, die des reflectirten gleich u, die des gebrochenen gleich v, so erhalten wir als erste Gleichung in dem Falle

$$1 + u = v \ldots . \text{(I)}.$$

Diese eine Gleichung genügt nicht zur Bestimmung der beiden gesuchten Grössen; um eine zweite Gleichung zu erhalten, geht Fresnel davon aus, dass das einfallende Licht sich in das reflectirte und gebrochene theilt, was, wenn wir MN als vollkommene Ebene voraussetzen, so dass keine Zerstreuung des Lichtes stattfindet, der Fall ist. Dann muss die Intensität des einfallenden Lichtes gleich sein der Summe der Intensitäten

des reflectirten und gebrochenen Lichtes. Oder auch, es muss die lebendige Kraft der einfallenden Lichtwelle gleich sein der Summe der lebendigen Kräfte der aus derselben entstehenden reflectirten und gebrochenen Welle; dass heisst es muss das Product aus dem Quadrate der Oscillationsgeschwindigkeit, wenn die Theilchen die Gleichgewichtslage passiren, oder der ihr proportionalen Amplitude und den gleichzeitig in der einfallenden und in den beiden andern Wellen bewegten Aethermengen gleich sein. Während nun die einfallende Welle sich von BC bis BD fortpflanzt, entsteht aus ihr der prismatische Theil BDE der reflectirten und DFB der gebrochenen Welle. Es muss somit das Product aus dem Quadrate der Amplitude und der in dem prismatischen Raume BDC eingeschlossenen Aethermenge gleich sein der Summe des Productes aus dem Quadrate der Amplitude des reflectirten Lichtes und der in BDE und des Productes aus dem Quadrate der Amplitude des gebrochenen Lichtes und der in dem Raume BDF eingeschlossenen Aethermenge. Sind diese drei Aethermengen m, m', μ, so muss also

$$m \,.\, 1^2 = m = m' u^2 + \mu v^2.$$

Die Aethermengen sind gleich dem Producte aus dem Volumen der bewegten Aethermengen und der Dichtigkeit des Aethers in den betreffenden Mitteln.

Welches nun auch die Gestalt der einfallenden Welle sein mag, das Volumen der in dem Raume BCD bewegten Aethermenge können wir setzen

$$V = a \,.\, BC \,.\, DC,$$

worin a eine von der Gestalt der Wellenebene, von der BC ein Durchschnitt ist, abhängige Constante ist. Für die beiden andern Wellen erhalten wir ebenso

$$V' = a\, BE \,.\, DE; \quad V'' = a BF \,.\, FD.$$

Setzen wir den Einfallswinkel i, den Brechungswinkel r, so wird

$$V = a\, BD^2 \,.\, \cos i \sin i; \quad V' = a\, BD^2 \cos i \sin i; \quad V'' = a\, BD^2 \cos r \sin r.$$

Nennen wir nun d die Dichtigkeit des Aethers im ersten, d' die im zweiten, so ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes in beiden Medien gegeben durch

$$c^2 = \alpha \frac{e}{d} \qquad c'^2 = \alpha \frac{e}{d'},$$

somit

$$d' = \frac{c^2}{c'^2} d = \frac{\sin^2 i}{\sin^2 r} d,$$

da der Brechungsexponent gleich ist dem Quotienten der beiden Geschwindigkeiten c und c'. Die Gleichung der lebendigen Kräfte wird demnach

$$a\, BD^2 \cos i \sin i \,.\, d = a\, BD^2 \cos i \sin i \,.\, d \,.\, u^2 + a\, BD^2 \cos r \sin r \frac{\sin^2 i}{\sin^2 r} d \,.\, v^2$$

oder

$$\sin r \cos i = \sin r \cos i \,.\, u^2 + \cos r \sin i \,.\, v^2 \,.\,.\, (II)$$

Dividiren wir Gleichung (II), nachdem wir ihr die Form gegeben

$$\sin r \cos i \,(1 - u^2) = \cos r \sin .\, i \,.\, v^2,$$

durch Gleichung (I), so wird

$$\sin r \cos i\,(1 - u) = \cos r \sin i \,.\, v = \cos r \sin i\,(1 + u)$$

und

$$u = \frac{\sin r \cos i - \cos r \sin i}{\sin r \cos i + \cos r \sin i} = -\frac{\sin(i - r)}{\sin(i + r)} \ldots (A).$$

Für die gebrochene Amplitude v erhalten wir, da nach (I)

$$v = u + 1,$$

$$v = \frac{2 \sin r \cos i}{\sin(i + r)} \ldots (A')$$

Ist das Licht senkrecht zur Einfallsebene polarisirt, so finden die Schwingungen im einfallenden Lichte parallel BC, in der Einfallsebene und parallel der Welle statt, im reflectirten parallel DE und im gebrochenen parallel FD. Um hier die der Grenzfläche parallelen Componenten der Amplituden zu erhalten, haben wir die Amplitude jeder Welle mit dem Cosinus des Winkels zu multipliciren, den die Richtung der Schwingung mit der Grenzfläche bildet. Wir haben den Einfallswinkel i genannt, denselben Winkel bildet die einfallende Welle mit der Grenzfläche. Den Reflexionswinkel müssen wir dann, um anzudeuten, dass der reflectirte Strahl an der andern Seite des Einfallslothes liegt, mit $-i$ bezeichnen; das ist dann auch der Winkel, den die reflectirte Welle mit der Grenzschicht bildet. Der Winkel, den die gebrochene Welle mit der Grenzschicht bildet, ist gleich r. Die Gleichung (I) wird daher in diesem Falle

$$\cos i + u \cos(-i) = v \,.\, \cos r = (1 + u) \cos i \ldots . (\mathrm{I}\,a).$$

Als zweite Gleichung benutzt Fresnel wieder die Gleichung (II), welche indess in diesem Falle nur angenähert richtig ist, da die Schwingungen der einfallenden Welle in diesem Falle nicht nur transversale, sondern auch longitudinale Schwingungen erregen, welche eine gewisse lebendige Kraft beanspruchen. Fresnel liess dieselben ausser Acht. Verbinden wir (I a) mit (II), so wird zunächst

$$\sin r\,(1 - u) = \sin i \,.\, v = \frac{\sin i \cos i}{\cos r}(1 + u)$$

$$u = -\frac{\sin i \cos i - \sin r \cos r}{\sin i \cos i + \sin r \cos r}$$

und daraus, wie sich leicht ableiten lässt,

$$u = -\frac{\operatorname{tang}(i - r)}{\operatorname{tang}(i + r)} \ldots . (B)$$

Für v erhalten wir, indem wir in (I a) den Werth von u einsetzen,

$$v = \frac{2 \sin r \cos i}{\sin i \cos i + \sin r \cos r} \ldots\ldots (B').$$

Aus den Amplituden der reflectirten und gebrochenen Wellen erhalten wir auch sofort die Intensitäten des reflectirten und gebrochenen Lichtes. Setzen wir die Intensität des einfallenden Lichtes gleich 1, so sind die Intensitäten des reflectirten Lichtes, da die Schwingungen desselben in dem gleichen Mittel stattfinden, proportional u^2. Um die Intensität des

gebrochenen Lichtes mit der des einfallenden Lichtes zu vergleichen, ist zu beachten, dass die Dichtigkeit im zweiten Mittel eine andere ist als im ersten. Wir müssen, da die Intensität der lebendigen Kraft des bewegten Aethers proportional ist, das Quadrat der Amplitude mit dem Quotienten der gleichzeitig in beiden Wellen bewegten Aethermengen, also

$$\frac{\mu}{m} = \frac{\sin i \cos r}{\sin r \cos i}$$

multipliciren, und erhalten dann aus (A') für die Intensität des gebrochenen parallel der Einfallsebene polarisirten Lichtes

$$J_d = \frac{\sin 2\,i \sin 2\,r}{\sin^2 (i + r)},$$

ferner aus (B') für die Intensität des gebrochenen, senkrecht zur Einfallsebene polarisirten Lichtes

$$J'_d = \frac{\sin 2\,i \sin 2\,r}{(\sin i \cos i + \sin r \cos r)^2}.$$

Lassen wir nun anstatt polarisirten Lichtes natürliches Licht einfallen, welches wir nach dem Frühern als in unmessbar kleiner Zeit nach allen Azimuthen polarisirtes Licht betrachten müssen, so können wir das ansehen als bestehend aus zwei gleichen Mengen von Licht, deren eine in der Einfallsebene, deren andere senkrecht zur Einfallsebene polarisirt ist. Denn denken wir uns jede ankommende Schwingung in zwei Componenten zerlegt, deren eine parallel der Einfallsebene, deren andere senkrecht zur Einfallsebene polarisirt ist, so erhalten wir, da in dem natürlichen Lichte alle Schwingungsrichtungen gleichmässig vertreten sind, nach beiden Richtungen genau gleiche Componenten. Ist also die Intensität des einfallenden Lichtes gleich 1, so ist jede dieser beiden Componenten gleich $1/2$. Jede derselben wird nun nach den eben entwickelten Gesetzen reflectirt und gebrochen. Wir erhalten somit für die reflectirten Intensitäten der beiden Componenten aus A und B

$$1/2\,\frac{\sin^2 (i - r)}{\sin^2 (i + r)} \text{ und } 1/2\,\frac{\tang^2 (i - r)}{\tang^2 (i + r)},$$

somit, da die gesammte Intensität des reflectirten Lichtes gleich der Summe dieser beiden reflectirten Componenten ist,

$$R = 1/2 \left(\frac{\sin^2 (i - r)}{\sin^2 (i + r)} + \frac{\tang^2 (i - r)}{\tang^2 (i + r)}\right).$$

Ganz in derselben Weise können wir auch die Intensität D des gebrochenen Lichtes berechnen; noch einfacher gelangen wir indess zu derselben durch den Satz, dass die Summe des reflectirten und gebrochenen Lichtes gleich dem einfallenden Licht sein muss, also

$$D + R = 1 \qquad D = 1 - R$$

$$D = 1 - 1/2 \left(\frac{\sin^2 (i - r)}{\sin^2 (i + r)} + \frac{\tang^2 (i - r)}{\tang^2 (i + r)}\right).$$

Diese Gleichungen schliessen die im vorigen §. als experimentelle Erfahrungen über die Polarisation durch Reflexion gegebenen Sätze in sich.

Lassen wir natürliches Licht auf die Grenze zweier Medien fallen, so

wird das reflectirte Licht vollständig in der Einfallsebene polarisirt, wenn der senkrecht zur Einfallsebene polarisirte Antheil gleich Null ist. Das ist nun erstens der Fall, wenn tang $(i - r)$ gleich Null ist, also

$$i - r = 0 \qquad i = r.$$

Dann ist aber auch der parallel der Einfallsebene polarisirte Antheil gleich Null, es wird also gar kein Licht reflectirt. Wir erhalten also hier den strengen Beweis für den schon oft erwähnten Satz, dass eine Reflexion nur an der Grenze zweier verschiedener Medien stattfindet, dass in einem und demselben Medium eine schwingende Bewegung niemals zurückkehrt.

Ausserdem wird aber im reflectirten Lichte der senkrecht zur Einfallsebene polarisirte Antheil gleich Null, wenn

$$\text{tang}\,(i + r) = \infty;\ i + r = 90^0$$

und diese Gleichung ist das Brewster'sche Gesetz, nach welchem der Polarisationswinkel jener ist, dessen Tangente dem Brechungsexponenten gleich ist.

Lässt man polarisirtes Licht auf eine spiegelnde Fläche unter dem Polarisationswinkel auffallen, dessen Polarisationsebene mit dem Einfallslothe den Winkel α bildet, so wird auch dann nur die der Einfallsebene parallel polarisirte Componente reflectirt; ist die Intensität des einfallenden Lichtes 1, so ist die des reflectirten

$$\cos^2\alpha\,\frac{\sin^2(i - r)}{\sin^2(i + r)},$$

entsprechend den im vorigen §. erwähnten Messungen von Malus.

Wir erwähnten weiter, dass das nicht unter dem Polarisationswinkel reflectirte Licht stets theilweise nach der Einfallsebene polarisirt ist. Die reflectirte Lichtmenge ist in unserm Ausdrucke für R dargestellt durch einen nach der Einfallsebene und einen senkrecht zu derselben polarisirten Antheil. Da wir nun natürliches Licht durch gleiche Mengen zu einander senkrecht polarisirten Lichtes darstellen können, ist theilweis polarisirtes Licht solches, in welchem der eine Bestandtheil überwiegt; das Maass der theilweisen Polarisation wird also die Differenz der beiden senkrecht zu einander reflectirten Antheile sein; im reflectirten Lichte ist somit die Menge des polarisirten Lichtes

$$\tfrac{1}{2}\,\frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)} - \tfrac{1}{2}\,\frac{\text{tang}^2(i-r)}{\text{tang}^2(i+r)} = \tfrac{1}{2}\,\frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)}\left(1 - \frac{\cos^2(i+r)}{\cos^2(i-r)}\right).$$

Da nun der Quotient der beiden Cosinus immer, sobald i und r von Null verschieden sind, kleiner ist als 1, so folgt, dass immer, ausser bei senkrechter Incidenz, ein Ueberschuss von Licht nach der Einfallsebene polarisirt, somit, dass das reflectirte Licht theilweise nach der Einfallsebene polarisirt ist. Ganz genau denselben Ueberschuss erhalten wir für das senkrecht zur Einfallsebene polarisirte Licht in dem gebrochenen Lichte, denn der Ausdruck für D zeigt, dass die Differenz zwischen dem senkrecht zur Einfallsebene und parallel derselben polarisirten Lichte in dem gebrochenen Lichte gleich ist

$$1 - \tfrac{1}{2}\,\frac{\text{tang}^2(i-r)}{\text{tang}^2(i+r)} - 1 + \tfrac{1}{2}\,\frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)} = \tfrac{1}{2}\,\frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)} - \tfrac{1}{2}\,\frac{\text{tang}^2(i-r)}{\text{tang}^2(i+r)}.$$

Die Gleichungen liefern also direkt den Arago'schen Satz, dass die Menge des senkrecht zur Einfallsebene polarisirten Lichtes in dem gebrochenen genau gleich ist der Menge des der Einfallsebene parallel polarisirten im natürlichen Lichte.

Schliesslich sei darauf hingewiesen, dass diese Ausdrücke auch den Beweis des schon oft und zuletzt bei Ableitung der Newton'schen Ringe angewandten Satzes einschliessen, wonach die Reflexion an dichtern Mitteln mit Verlust einer halben Wellenlänge eintritt, an dünnern ohne eine solche. Es folgt das daraus, dass das Vorzeichen der Amplitude ein anderes ist, wenn die Reflexion an dichtern Medien stattfindet, als wenn sie an weniger dichten geschieht. Sei das einfallende Licht parallel der Einfallsebene polarisirt und sei seine Gleichung an der reflectirenden Fläche gegeben durch

$$y = \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right),$$

so ist die Gleichung des reflectirten Lichtes

$$y = -\frac{\sin(i-r)}{\sin(i+r)} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x+x'}{\lambda}\right).$$

Ist nun $i > r$, das zweite Mittel also dichter, so ist das Vorzeichen dieses Ausdruckes negativ, und das ist dasselbe wie

$$y = \frac{\sin(i-r)}{\sin(i+r)} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x+x'+{}^1/_2\lambda}{\lambda}\right),$$

während wenn $i < r$ ist, der Ausdruck positiv ist, also die Verschiebungen dieselbe Phase haben, wie wenn das Licht sich ohne Reflexion um dieselbe Strecke x' fortgepflanzt hätte.

Für das senkrecht zur Einfallsebene polarisirte Licht ändern sich diese Verhältnisse bei dem Polarisationswinkel; auch dort tritt Verlust einer halben Wellenlänge an dichtern Medien ein, wenn i kleiner als der Polarisationswinkel ist, dagegen an dünnern Medien, wenn i grösser ist. Denn für dieses ist der Reflexionscoefficient

$$u = -\frac{\operatorname{tang}(i-r)}{\operatorname{tang}(i+r)}.$$

Wird nun $i + r > 90^0$, so wird der Nenner negativ, somit, wenn $i > r$, erhält u das positive, wenn $i < r$, das negative Vorzeichen.

Diesen Wechsel des Phasenverlustes kann man bei den Newton'schen Farbenringen sichtbar machen, wenn man dieselben mit senkrecht zur Einfallsebene polarisirtem Licht hervorruft, und die beiden Medien, welche die dünne Luftschicht einschliessen, von verschiedenen Brechungsvermögen wählt. Nehmen wir z. B. eine Crownglaslinse, deren Brechungsexponent 1,5 sei und legen dieselbe auf eine Flintglasplatte vom Brechungsexponent 1,7. Der Polarisationswinkel für das erste Glas, auch wenn das Licht im Glase an Luft reflectirt wird, ist $56^0\ 19'$, für das zweite $59^0\ 32'$. So lange nun der Einfallswinkel des Lichtes in der Schicht kleiner ist als $56^0\ 19'$, erscheinen die Ringe im reflectirten Licht mit schwarzer Mitte wie gewöhnlich. Wird der Winkel $56^0\ 19'$, so wird an der obern Grenze nichts reflectirt, die Ringe verschwinden und machen einer schwachen gleichmässigen Beleuchtung Platz. Liegt dann der Einfallswinkel zwischen

56^0 19′ und 59^0 32′, so findet sowohl an der obern als an der untern Grenze der Schicht der Verlust einer halben Wellenlänge statt, die Interferenzen hängen nur von den Differenzen der durchlaufenen Wege ab, die Ringe erscheinen mit weisser Mitte und den Farben, in welchen sonst die Ringe im durchgelassenen Lichte erscheinen. Wird der Einfallswinkel 59^0 32′, so wird nur an der obern Grenze reflectirt, die Ringe verschwinden wieder; wächst der Einfallswinkel wieder über 59^0 32′, so tritt jetzt nur an der obern, nicht an der untern Grenze der Verlust einer halben Wellenlänge ein, die Ringe erscheinen wieder wie gewöhnlich.

Man sieht, die Ringe mit heller Mitte treten so lange auf, als der Einfallswinkel zwischen den Polarisationswinkeln der beiden Grenzmittel liegt. Ist daher die Schicht an beiden Seiten von demselben Mittel begrenzt, so erscheinen die Ringe immer in der gewöhnlichen Weise.

§. 175.

Totale Reflexion; elliptisch polarisirtes Licht. Wir sahen früher, dass wenn das Licht in einem dichtern Medium an die Grenzfläche unter einem Winkel einfällt, der grösser ist als der Grenzwinkel der totalen Reflexion, dasselbe stets total reflectirt wird. Auch dieses gibt die Fresnel'sche Reflexionstheorie zu erkennen, und gleichzeitig, dass das reflectirte Licht dann eine ganz eigenthümliche Beschaffenheit haben muss, die Fresnel dann auch experimentell nachweisen konnte. Nennen wir den Brechungsexponenten des Lichtes bei dem Uebertritt aus dem dichtern in das dünnere Medium n, wo dann immer $n < 1$, so tritt also totale Reflexion ein, immer, wenn

$$\sin i > n.$$

Nehmen wir nun an, es komme an der Grenze des dichtern und dünnern Mediums Licht an, das unter einem Winkel α gegen die Einfallsebene polarisirt sei, so ist die Componente $\cos \alpha$ parallel der Einfallsebene polarisirt und die Componente $\sin \alpha$ senkrecht zu derselben. Die Insensität des reflectirten Lichtes ist somit

$$R_\alpha = \cos^2 \alpha \frac{\sin^2 (i-r)}{\sin^2 (i+r)} + \sin^2 \alpha \frac{\tang^2 (i-r)}{\tang^2 (i+r)}.$$

Wir können nun schreiben

$$-\frac{\sin (i-r)}{\sin (i+r)} = -\frac{\sin i \cos r - \cos i \sin r}{\sin i \cos r + \cos i \sin r} = -\frac{n \cos r - \cos i}{n \cos r + \cos i};$$

da nun

$$n \cos r = \sqrt{n^2 - n^2 \sin^2 r} = \sqrt{n^2 - \sin^2 i},$$

so wird

$$-\frac{\sin (i-r)}{\sin (i+r)} = -\frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 i} - \cos i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i} + \cos i}.$$

Durch eine ganz ähnliche Umformung erhält man leicht

$$-\frac{\tang (i-r)}{\tang (i+r)} = \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 i} - n^2 \cos i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i} + n^2 \cos i},$$

und indem wir diese umgeformten Ausdrücke einsetzen

$$R_\alpha = \cos^2\alpha\left(\frac{\sqrt{n^2-\sin^2 i}-\cos i}{\sqrt{n^2-\sin^2 i}+\cos i}\right)^2 + \sin^2\alpha\left(\frac{\sqrt{n^2-\sin^2 i}-n^2\cos i}{\sqrt{n^2-\sin^2 i}+n^2\cos i}\right)^2.$$

Wird nun zunächst $\sin i = n$, so erhalten wir

$$R_\alpha = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1,$$

die Intensität des reflectirten Lichtes ist gleich der des einfallenden, das Licht wird also auch nach der Theorie total reflectirt.

Wird aber nun $\sin i > n$, wo erfahrungsgemäss auch totale Reflexion eintritt, dann werden die unter den Wurzelzeichen stehenden Ausdrücke negativ, die Ausdrücke werden also imaginär. Die einzelnen Theile unseres Ausdruckes für R, die wir mit u und u_1 bezeichnen wollen, erhalten dann die Form

$$u = \frac{\cos i - \sqrt{\sin^2 i - n^2}\,.\sqrt{-1}}{\cos i + \sqrt{\sin^2 i - n^2}\;\sqrt{-1}}$$

$$u_1 = -\frac{n^2\cos i - \sqrt{\sin^2 i - n^2}\,\sqrt{-1}}{n^2\cos i + \sqrt{\sin^2 i - n^2}\,\sqrt{-1}}$$

oder auch, indem wir Zähler und Nenner jedes Ausdruckes mit den betreffenden Zählern multipliciren,

$$u = \frac{1+n^2-2\sin^2 i}{1-n^2} - \frac{2\cos i\sqrt{\sin^2 i - n^2}}{1-n^2}\sqrt{-1} = p - q\sqrt{-1}$$

$$u_1 = \frac{\sin^2 i - n^2(1+n^2\cos^2 i)}{\sin^2 i - n^2(1-n^2\cos^2 i)} + \frac{2n^2\cos i\sqrt{\sin^2 i - n^2}}{\sin^2 i - n^2(1-n^2\cos^2 i)}\sqrt{-1} = r + s\sqrt{-1}.$$

Jeder dieser beiden Ausdrücke besteht somit aus einem reellen und imaginären Theile, es wird deshalb auch der aus denselben sich ergebende Ausdruck für R_α aus einem reellen und einem imaginären Theil zusammengesetzt. Die Summe des reellen Theils ist, wie man leicht ausrechnet, für alle Werthe $\sin i > n$ kleiner als 1. Da nun aber erfahrungsgemäss alles Licht reflectirt wird, die reflectirte Intensität also gleich 1 ist, so muss auch der imaginäre Theil unseres Ausdruckes eine gewisse Lichtmenge ausdrücken, welche mit der durch den reellen Theil gegebenen zusammen die gesammte Menge des reflectirten Lichtes liefert. Was bedeutet dann das Imaginärwerden dieses Theiles?

Fresnel deutete dasselbe sofort dahin, dass jeder der beiden Antheile des reflectirten Lichtes aus zwei Theilen besteht, von denen der eine gegen den andern um eine viertel Wellenlänge verschoben ist, so dass der eine dieser Theile in der Grenzfläche, der andere eine viertel Wellenlänge unter derselben reflectirt ist. Bei der Verzögerung um eine halbe Wellenlänge erhalten nämlich die Verschiebungen im reflectirten Lichte das entgegengesetzte Vorzeichen, unsere Gleichung gibt das wieder, wenn wir anstatt die Phase um $\frac{1}{2}\lambda$ zu verschieben, die Gleichung mit -1 multipliciren. Die Verschiebung um $\frac{1}{2}\lambda$ können wir durch zwei Verschiebungen von $\frac{1}{4}\lambda$ entstehen lassen und dann auch die jedesmalige Verschiebung durch einen Coefficienten darstellen, mit dem wir die Gleichung für die Lichtbewegung multipliciren. Dieser Coefficient, er sei m, ist dann, weil eine zweimalige Verschiebung um $\frac{1}{4}\lambda$ eine solche um $\frac{1}{2}\lambda$ ist, dadurch bestimmt, dass $m^2 = -1$, somit muss $m = \sqrt{-1}$ sein.

Es folgt somit, dass wenn wir den Coefficienten durch die betreffende Phasenverschiebung ersetzen, dass wir für die Verschiebung eines um x' von der reflectirten Fläche entfernten Aethertheilchens zur Zeit t folgende beiden Gleichungen erhalten:

1. parallel der Einfallsebene polarisirt

$$y = p \cos\alpha \,.\, \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x + x'}{\lambda}\right) - q \cos\alpha \,.\, \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x + x' + \frac{1}{4}\lambda}{\lambda}\right),$$

2. senkrecht zur Einfallsebene polarisirt

$$z = r \sin\alpha \,.\, \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x + x'}{\lambda}\right) + s \sin\alpha \,.\, \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x + x + \frac{1}{4}\lambda}{\lambda}\right).$$

Nach den Gesetzen der Interferenz ist nun die resultirende Amplitude dieser je zwei Wellen

$$\| y = \sqrt{(p^2 + q^2)\cos^2\alpha}; \qquad \| z = \sqrt{(r^2 + s^2)\sin^2\alpha},$$

somit die resultirende Intensität

$$R = (p^2 + q^2)\cos^2\alpha + (r^2 + s^2)\sin^2\alpha = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1,$$

wie man leicht durch Ausführung der Rechnung findet.

Die beiden Wellen setzen sich aber nicht mehr zu geradlinig polarisirtem Licht zusammen, da sie nicht gleicher Phase sind; wir können nämlich die beiden Bewegungen darstellen durch folgende Gleichungen

$$y = \sqrt{p^2 + q^2} \,.\, \cos\alpha \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x + x' + D}{\lambda}\right)$$

$$z = \sqrt{r^2 + s^2} \sin\alpha \,.\, \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x + x' + D'}{\lambda}\right)$$

wenn nach §. 77

$$\operatorname{tang} 2\pi \frac{D}{\lambda} = -\frac{q}{p} \qquad \operatorname{tang} 2\pi \frac{D'}{\lambda} = \frac{s}{r}.$$

Die Bewegungen haben somit eine Phasendifferenz $2\pi \frac{D - D'}{\lambda}$, für welche wir aus den beiden letzten Gleichungen erhalten

$$\cos 2\pi \frac{D - D'}{\lambda} = pr - qs = \frac{\sin^2 i\,(1 + n^2) - 2\sin^4 i - n^2}{\sin^2 i\,(1 + n^2) - n^2}.$$

Da der Ausdruck auf der rechten Seite allgemein weder gleich $+ 1$, noch gleich $- 1$ ist, so folgt, dass die Phasendifferenz der beiden Wellen im Allgemeinen weder 0 noch $\frac{1}{2}\lambda$ ist.

Zwei senkrecht zu einander gerichtete Schwingungen setzen sich nun nach §. 79, sobald ihre Phasendifferenz zwischen 0 und $\frac{\lambda}{2}$ ist, zu elliptischen Schwingungen zusammen; es müssen also die Bewegungen des Aethers in dem total reflectirten Lichte in elliptischen Bahnen erfolgen, das Licht muss elliptisch polarisirt sein. Nur an den beiden Grenzen der totalen Reflexion, wenn $\sin i = n$ und wenn $i = 90^0$, somit $\sin i = 1$, bleibt das Licht geradlinig polarisirt, denn in beiden Fällen ist

$$\cos 2\pi \frac{D - D'}{\lambda} = -1 \qquad D - D' = \frac{\lambda}{2}.$$

Untersucht man das total reflectirte Licht, sobald i keiner der beiden Grenzwinkel ist, mit einem Kalkspath, so erscheint dasselbe, wenn das einfallende Licht unter einem Winkel α gegen die Einfallsebene polarisirt war, in der That nicht mehr geradlinig polarisirt. Es verhält sich, wie theilweise polarisirtes Licht, indem es immer zwei Strahlen gibt, aber zwei Strahlen ungleicher Helligkeit, wie nothwendig daraus folgt, dass dasselbe aus zwei zu einander senkrechten Componenten besteht, die sich nicht zu einer geradlinigen Schwingung zusammensetzen können. Dass das Licht aber in der That elliptisch polarisirt ist, kann man dadurch beweisen, dass man den Winkel i so wählt, dass die Phasendifferenz ein bestimmter Bruchtheil einer halben Wellenlänge wird; geben wir z. B. der Phasendifferenz den Werth von $\frac{1}{12}\lambda$, so geben 6 Reflexionen dem Lichte die Phasendifferenz $\frac{1}{2}\lambda$, wir müssen also Licht erhalten, welches nach §. 79 wieder geradlinige Schwingungen vollführt, dessen Schwingungsebene aber gegen die des einfallenden Lichtes um 90^0 gedreht sein muss, nach 12 Reflexionen muss das Licht wieder geradlinig polarisirt sein und zwar muss die Polarisationsebene wieder die des einfallenden Lichtes sein u. s. f.

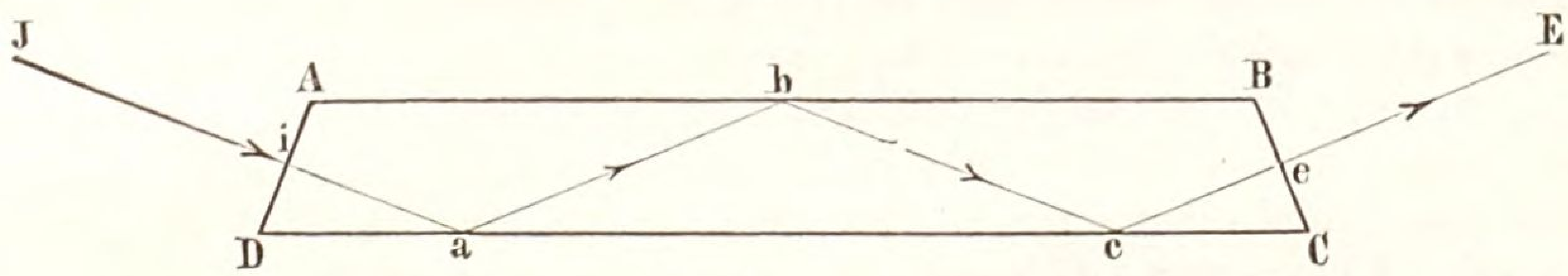
Fresnel hat auf diese Weise gezeigt, dass das total reflectirte Licht elliptisch polarisirt ist. Für Spiegelglas von St. Gobain, dessen Brechungsexponent für mittlere Strahlen gleich 1,51 ist, ergibt die Theorie, dass eine Reflexion unter einem Einfallswinkel von $69^0\ 12'\ 33$ eine Phasendifferenz von $\frac{1}{12}\lambda$ gibt; denn setzen wir in der Gleichung für die Phasendifferenz $\sin i = \sin 69^0\ 12', 33 = 0{,}935$, so wird

$$\cos 2\pi \frac{D - D'}{\lambda} = \sqrt{\tfrac{3}{4}} = \cos 30^0 = \cos \frac{\pi}{6} \cdot$$

$$D - D = \tfrac{1}{12}\lambda.$$

Fresnel liess nun aus solchem Glase mehrere Trapezoeder herstellen von der Form $ABCD$ Fig. 224, bei denen die Seiten AD und BC mit der Basis DC Winkel von $69^0\ 12'$ bildeten. Lässt man auf die Fläche AD

Fig. 224.



eines solchen Trapezoeders senkrecht Licht einfallen, so wird dasselbe bei passender Länge der Seite DC im Innern dreimal, bei a, b, c, unter dem verlangten Winkel total reflectirt und verlässt die Fläche BC normal zu derselben. Lässt man dann das Licht, nachdem es durch ein solches Trapezoeder hindurchgegangen und dadurch elliptisch polarisirt ist, noch durch ein zweites gehen, so tritt es aus demselben wieder geradlinig polarisirt, aber mit gedrehter Polarisationsebene hervor.

Wir sahen im §. 79, dass zwei senkrecht gegen einander gerichtete Schwingungen, wenn sie eine Phasendifferenz von $\frac{1}{4}\lambda$ und gleiche Amplituden besitzen, eine kreisförmige Bewegung geben. Lassen wir also linear polarisirtes Licht so in das Trapezoeder eintreten, dass seine Polarisationsebene um 45^0 gegen die Einfallsebene geneigt wird, wodurch $\cos\alpha = \cos 45^0 = \sin 45^0$

wird, somit die Amplituden beider Componenten gleich werden, so muss in dem austretenden Lichte der Aether sich in kreisförmigen Bahnen bewegen, das Licht muss circular polarisirt sein.

In der That ist das der Fall, denn mit dem Kalkspath untersucht, zerfällt es stets in zwei Strahlen gleicher Helligkeit, es verhält sich soweit wie natürliches Licht. Dass das kreisförmig polarisirte Licht so erscheinen muss, ergibt sich daraus, dass es durch zwei gleiche zu einander senkrechte Componenten gebildet wird; da nun im Kalkspath je nach der Lage des Hauptschnittes die gesammte Bewegung nach zwei zu einander senkrechten Richtungen zerlegt wird, so müssen unter allen Umständen die Componenten nach diesen beiden Richtungen gleich sein, wenn die beiden eindringenden Bewegungen gleich waren. Dass das Licht aber nicht natürliches, sondern circular polarisirtes Licht ist, zeigt sich, wenn man es durch ein zweites Trapezoeder gehen lässt. Es wird dann wieder geradlinig polarisirt.

§. 176.

Elliptische Polarisation bei gewöhnlicher Reflexion. Wir erwähnten schon bei Entwicklung der Fresnel'schen Theorie der Reflexion, dass die Ableitung der reflectirten Intensität für Licht, welches senkrecht zur Einfallsebene polarisirt ist, nur angenähert richtig sei, indem die aus den einfallenden entstehenden longitudinalen Schwingungen ausser Acht gelassen seien.

Schon Brewster fand auch bei seinen Untersuchungen über den Polarisationswinkel, dass bei stark brechenden Medien das unter dem Polarisationswinkel reflectirte Licht nicht vollständig der Einfallsebene parallel polarisirt werde, eine Beobachtung, welche später von A. Seebeck und Airy bestätigt und erweitert wurde. Airy fand, dass das vom Diamant in der Nähe des Polarisationswinkels reflectirte Licht elliptisch polarisirt sei. Diese elliptische Polarisation ist unmerklich, also die Phasendifferenz zwischen den parallel und senkrecht zur Einfallsebene polarisirt reflectirten Strahlen ist 0, so lange der Einfallswinkel merklich kleiner ist als der Polarisationswinkel; in der Nähe desselben wächst sie rasch von 0 auf $\frac{1}{4}\lambda$, welchen Werth sie bei dem Polarisationswinkel erreicht, bei welchem auch nicht, wie es die Fresnel'sche Theorie ergibt, die Intensität des senkrecht zur Einfallsebene polarisirt reflectirten Lichtes gleich Null, sondern nur sehr klein gegen diejenige des parallel der Einfallsebene polarisirten Lichtes ist. Deshalb bezeichnet auch Jamin den Polarisationswinkel als Haupteinfallswinkel. Wächst der Einfallswinkel über den Haupteinfallswinkel, so nimmt die Phasendifferenz sehr rasch von $\frac{1}{4}\lambda$ auf $\frac{1}{2}\lambda$ zu. Airy sprach schon die Vermuthung aus, dass alle durchsichtigen Substanzen ähnliche Erscheinungen zeigen.

Durch die Beobachtungen Airy's veranlasst, nahm später Cauchy die Theorie der Reflexion wieder auf und entwickelte die Gleichungen für die Intensität des reflectirten Lichtes ohne, wie Fresnel es that, die longitudinalen Schwingungen ausser Acht zu lassen. Er gelangte dann für das parallel der Einfallsebene polarisirte Licht zu demselben Resultate wie Fresnel, was ja auch nothwendig ist, da dort die Fresnel'schen Gleichungen strenge richtig sind. Für das senkrecht zur Einfallsebene polarisirte Licht

ergab sich indess ein anderer Ausdruck der Intensität des reflectirten Lichtes; die Rechnungen zeigten weiter, dass zwischen demselben und dem parallel reflectirten im Allgemeinen nach der Reflexion eine Phasendifferenz vorhanden ist.

Für die Intensität des senkrecht zur Einfallsebene polarisirt reflectirten Lichtes findet Cauchy

$$S^2 = \frac{\operatorname{tang}^2(i-r) + \varepsilon^2 \sin^2 i \,.\, \operatorname{tang}^2(i-r)\operatorname{tang}^2(i+r)}{\operatorname{tang}^2(i+r) + \varepsilon^2 \sin^2 i \,.\, \operatorname{tang}^2(i-r)\operatorname{tang}^2(i+r)}.$$

Der Ausdruck unterscheidet sich von dem Fresnel'schen nur durch die mit der Constante ε behafteten Glieder; diese Constante nennt Cauchy den Ellipticitätscoefficienten, welcher von der Natur der reflectirten Substanz abhängig ist. Wird ε gleich Null gesetzt, so wird der Ausdruck dem Fresnel'schen gleich.

Ist δ der Gangunterschied zwischen den reflectirten parallel und senkrecht zur Einfallsebene polarisirten Strahlen, so wird die Phasendifferenz gegeben durch

$$\operatorname{tang} 2\pi \frac{\delta}{\lambda} = \varepsilon \frac{\sin i \,\{\operatorname{tang}(i+r) - \operatorname{tang}(i-r)\}}{1 - \varepsilon^2 \sin^2 i \operatorname{tang}(i+r)\operatorname{tang}(i-r)},$$

so dass also die Phasendifferenz wesentlich von dem Ellipticitätscoefficienten ε abhängt.

Jamin und später Quincke haben dann gezeigt, dass, wie es schon Airy vermuthete, bei allen durchsichtigen Körpern die Reflexionserscheinungen, der Cauchy'schen Theorie entsprechend, ähnliche sind wie bei dem Diamant, dass indess ε im Allgemeinen einen sehr kleinen Werth hat. Lässt man daher unter einem Azimuth α polarisirtes Licht einfallen, so ist nur in der Nähe des Haupteinfallswinkels die elliptische Polarisation merkbar; um sie wahrzunehmen ist dann, weil S^2 bei diesen Einfallswinkeln sehr klein ist, sehr intensives Licht anzuwenden. Um ein Bild von dem Verlaufe der Erscheinungen zu geben, theilen wir in folgender Tabelle eine Beobachtungsreihe von Jamin mit, verglichen mit den sich nach den Cauchy'schen Gleichungen ergebenden Werthen. Die beiden letzten Columnen geben das Verhältniss der Amplituden des senkrecht zur Einfallsebene polarisirt reflectirten Lichtes S und des parallel polarisirten P, in der mit berechnet überschriebenen Columne ist S nach der oben angegebenen Cauchy'schen Gleichung berechnet.

Das zu den Versuchen benutzte Flintglas hatte den Brechungsexponenten 1,714, der Haupteinfallswinkel ist somit *arc* (tang = 1,714) = 59°45′. Für ε ergab sich aus den Beobachtungen $\varepsilon = 0{,}0170$. Die Differenz δ ist in Bruchtheilen einer halben Wellenlänge ausgedrückt.

i	δ		$\frac{S}{P}$	
	beob.	ber.	beob.	ber.
53°	0,026	0,027	0,1778	0,1781
57°	0,064	0,071	0,0708	0,0749
59°	0,217	0,223	0,0262	0,0262
59°30′	0,401	0,382	0,0186	0,0183
60°	0,640	0,623	0,0213	0,0183
61°	0,877	0,842	0,0480	0,0378
65°15′	0,959	0,965	0,1453	0,1497.

In welcher Weise diese Messungen gemacht werden, darauf einzugehen, würde uns zu weit führen; die Zahlen zeigen, dass in Uebereinstimmung mit der Theorie die Aenderung der Phase von 0 bis $^1/_2\,\lambda$ innerhalb 12^0, 6^0 unter und 6^0 über dem Polarisationswinkel erfolgt, und weiter, dass wenn S bei dem Haupteinfallswinkel auch nicht Null, doch so klein ist, dass die Fresnel'sche Theorie nur sehr wenig von der Erfahrung abweicht.

§. 177.

Reflexion an Metallen. Die Erscheinungen der Reflexion an Metallen stehen gewissermassen zwischen denen der gewöhnlichen Reflexion an durchsichtigen Körpern und der totalen Reflexion. Die Untersuchungen von Brewster, Neumann, Jamin und Quincke haben ergeben, dass bei der Reflexion polarisirten Lichtes oder auch natürlichen Lichtes, mit Ausnahme der senkrechten Incidenz, die senkrecht zur Einfallsebene polarisirte Componente immer in geringerm Maasse reflectirt wird als die der Einfallsebene parallele Componente, und dass ebenso wie bei der Reflexion an durchsichtigen Medien für einen bestimmten Einfallswinkel der Antheil des senkrecht zur Einfallsebene polarisirt reflectirten Lichtes ein Minimum ist. Dieser Winkel wird, wie bei den durchsichtigen Körpern, der Haupteinfallswinkel genannt. So findet Jamin z. B. für Stahl folgende Verhältnisse k zwischen den Amplituden S des senkrecht und P des parallel der Einfallsebene polarisirten Lichtes nach der Reflexion, wenn die Polarisationsebene des einfallenden Lichtes mit der Einfallsebene einen Winkel von 45^0 bildete, die Componenten vor der Reflexion also gleich waren.

i	S	P	k
20^0	0,770	0,780	0,988
60^0	0,630	0,897	0,703
70^0	0,545	0,915	0,595
80^0	0,547	0,945	0,578
85^0	0,719	0,951	0,756.

Hier würde also der Haupteinfallswinkel zwischen 70^0 und 80^0 liegen.

Bei den durchsichtigen Körpern nimmt nach dem Brewster'schen Gesetze, nach welchem

$$\text{tang}\, H = n,$$

die Tangente des Haupteinfallswinkels gleich dem Brechungsexponenten ist, der Haupteinfallswinkel mit abnehmender Wellenlänge stetig zu, bei den Metallen nimmt er ab, je mehr man sich dem violetten Ende des Spectrums nähert. So erhält Jamin z. B. für Stahl und die Fraunhofer'schen Linien

	C	D	E	F	H
$H =$	$77^0 4'$	$76^0 40'$	$75^0 47'$	$75^0 8'$	$74^0 32.$

Nimmt man an, dass für Metalle auch das Brewster'sche Gesetz gültig ist, so würde daraus folgen, dass bei denselben, wie bei anomal dispergirenden Körpern, die Brechungsexponenten mit abnehmender Wellenlänge kleiner werden, was bei dem innigen Zusammenhang zwischen Brechung und Absorption nicht auffallend sein kann, da die Metalle im Allgemeinen

die wenigst durchsichtigen Körper sind. Bei Stahl würden die Brechungsexponenten von 4,35 für Roth bis 3,61 für Violett abnehmen.

In Bezug auf die Phasendifferenz der beiden reflectirten Componenten kommen die Verhältnisse bei Metallen denen der totalen Reflexion näher, das Licht ist ausser bei senkrechter Incidenz stets elliptisch polarisirt; die Phasendifferenz wächst stetig von 0 bis $^1/_4\,\lambda$, welcher Werth dem Haupteinfallswinkel entspricht, und von da bis $^1/_2\,\lambda$, welcher Werth bei streifender Incidenz erreicht wird.

Folgende von Quincke für Silber erhaltenen Zahlen geben ein Bild des Verlaufes, die Gangunterschiede δ sind in $^1/_4\,\lambda$ gegeben.

i	k	δ
25^0	1,023	0,039
45^0	0,957	0,248
65^0	0,957	0,619
$74^0 50'$	0,943	1
85^0	1,008	1,621.

Man sieht, bei Silber ist k immer so nahe der Einheit gleich, dass das Licht dort fast wie bei totaler Reflexion reflectirt wird, der Verlauf der Werthe δ lässt das stetige Wachsen der Phasendifferenz deutlich erkennen.

Auch die Reflexionserscheinungen an Metallen sind mehrfach von Neumann und Cauchy theoretisch behandelt, wir gehen auf die Theorie hier nicht ein, da sie noch keineswegs abgeschlossen ist.

Drittes Kapitel.

Doppelbrechung des Lichtes.

§. 178.

Doppelbrechung des Lichtes im Kalkspath. Im §. 171 erkannten wir schon, dass ein in einen Kalkspath eintretender Strahl im Allgemeinen in zwei zu einander senkrecht polarisirte zerlegt wird, der eine, der bei der damals von uns vorausgesetzten senkrechten Incidenz ungebrochen weiter ging, war im Hauptschnitt polarisirt, die Schwingungen erfolgten also senkrecht zum Hauptschnitte, somit auch senkrecht zur Axe des Krystalles. Der andere Strahl wurde im Hauptschnitte abgelenkt, er war senkrecht zum Hauptschnitt polarisirt, seine Schwingungen geschehen im Hauptschnitt und bilden mit der Axe einen Winkel, der gleich ist dem Winkel, den die sich fortpflanzende Welle mit der Axe bildet. Das in den Krystall eindringende Licht wurde also in zwei zu einander senkrecht polarisirte Componenten zerlegt, von denen die eine, soweit der damalige Versuch erkennen liess, dem gewöhnlichen Brechungsgesetz folgte, die andere, die im Hauptschnitt polarisirte Componente, die wir schon als aussergewöhnlichen Strahl bezeichneten, aber nicht.

Lassen wir das Licht unter anderer als senkrechter Incidenz eintreten, so zeigt sich die Erscheinung der Doppelbrechung gerade so, auch dann zerfällt das Licht in zwei senkrecht polarisirte Strahlen, von denen der

eine den gewöhnlichen Brechungsgesetzen folgt, der andere in doppelter Weise von denselben abweicht. Zunächst ergibt sich aus einer Messung der Brechungsexponenten, dass dieselben keineswegs für alle Einfallswinkel gleich sind, dass sie vielmehr wesentlich abhängig sind von dem Winkel, den das im Krystall sich fortpflanzende Licht mit der Krystallaxe bildet. Zweitens aber zeigt sich, dass der gebrochene Strahl nur unter ganz bestimmten Umständen in der Einfallsebene liegt, dass er im Allgemeinen aus der Einfallsebene heraustritt. Der gebrochene Strahl liegt nur dann in der Einfallsebene, wenn die Axe in derselben liegt, die Einfallsebene also ein Hauptschnitt des Krystalles ist, und wenn die Axe des Krystalles zur Einfallsebene senkrecht ist.

Dass der Brechungsexponent des einen der beiden Strahlen je nach der Richtung, den die Fortpflanzungsrichtung des Lichtes mit der Axe bildet, einen verschiedenen, der des andern dagegen immer denselben Werth hat, lässt sich am besten erkennen, wenn man aus Kalkspathkrystallen verschiedene Prismen schleift, deren brechende Kanten verschieden gegen die Axe orientirt sind. Man findet dann für den Brechungsexponenten des ordentlichen, parallel dem Hauptschnitt polarisirten, also stets senkrecht zur Axe schwingenden Strahls immer denselben Werth, nämlich 1,6543; für den andern Strahl, der senkrecht zum Hauptschnitt polarisirt ist, ergibt sich, dass wenn derselbe parallel der Axe durchgeht, dessen Brechungsexponent ebenfalls 1,6543 ist, denn wenn das Licht sich im Krystall parallel der Axe fortpflanzt, findet keine Doppelbrechung statt. Wenn dagegen der ausserordentliche Strahl sich senkrecht zur Axe des Krystalls fortpflanzt, so ist sein Brechungsexponent gleich 1,4833. Bildet der Strahl mit der Axe einen andern Winkel, so liegt der Brechungsexponent zwischen diesen äussersten Werthen.

Das Gesetz, nach welchem das Licht im Kalkspath gebrochen wird, ist darnach ein ziemlich verwickeltes; es gelang indess schon Huyghens bald nach Entdeckung der Doppelbrechung eine Construction anzugeben, welche die Richtung beider Strahlen in allen Fällen zu bestimmen gestattet.

Was zunächst den ordentlichen Strahl angeht, so erhält man die Richtung desselben nach den gewöhnlichen Brechungsgesetzen, also auch nach der schon mehrfach besprochenen Construction für die gebrochenen Wellen. Da der Brechungsexponent constant und gleich 1,6543, so folgt, dass zwischen der Fortpflanzungsgeschwindigkeit c in Luft und derjenigen ω des ordentlichen Strahles die Beziehung besteht

$$\frac{c}{\omega} = 1{,}6543; \qquad \omega = \frac{c}{1{,}6543}.$$

Wir haben demnach mit den hiernach sich ergebenden Radien kugelförmige Elementarwellen im Kalkspath zu construiren, und die Tangentialebene an diesen Wellen ist die gebrochene Welle; der gebrochene Strahl ist die Verbindungslinie des Mittelpunktes jeder Elementarwelle mit dem Punkte, wo sie von der Tangentialebene berührt wird.

Für den ausserordentlichen Strahl ist der Brechungsexponent verschieden je nach dem Winkel, den der Strahl mit der Axe bildet. Da auch für diesen der Brechungsexponent in jedem Falle der Quotient aus der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes in Luft und des ausser-

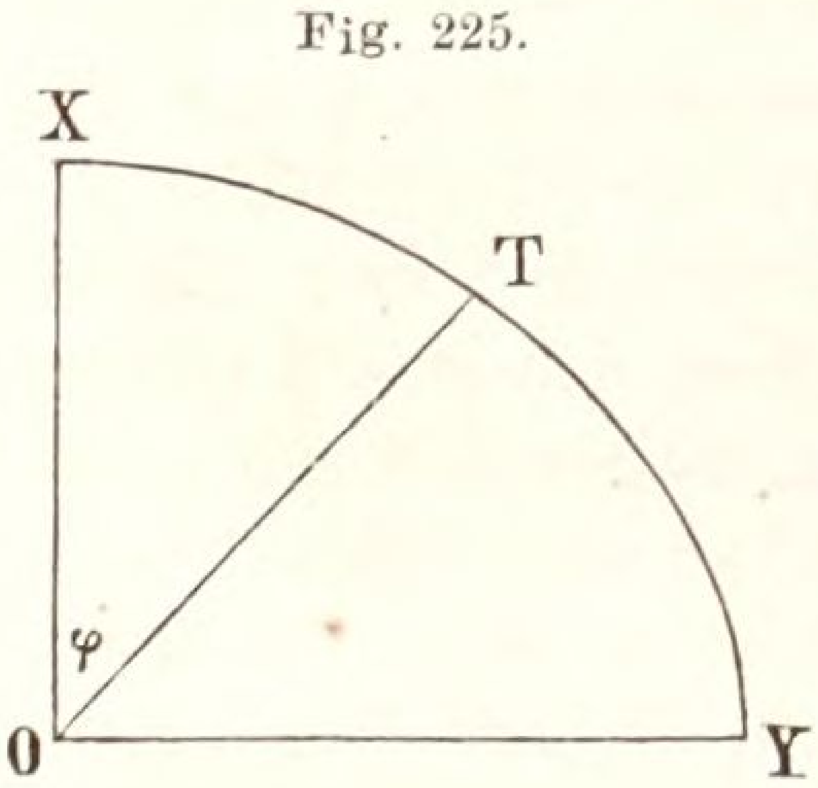
ordentlichen Strahles im Krystall ist, so folgt, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit desselben verschieden ist je nach dem Winkel, den derselbe mit der Axe des Krystalles bildet. Hieraus ergibt sich dann, dass für den ausserordentlichen Strahl die Form der Elementarwellen, welche uns ja die Grenze geben, bis zu welcher nach den verschiedenen Richtungen die Bewegung sich fortgepflanzt hat, nicht eine Kugel, sondern eine anders geformte Fläche sein muss. Aus einer Vergleichung der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten und der Neigung der Strahlen gegen die Krystallaxe erkannte nun schon Huyghens, dass wenn die Strecke, durch welche ein Strahl parallel der Axe sich fortpflanzt, gleich ω, durch welche er in derselben Zeit senkrecht zur Axe sich fortpflanzt, gleich ε ist, dass er dann nach einer Richtung, welche mit der Krystallaxe den Winkel φ bildet, sich in derselben Zeit durch eine Strecke fortpflanzt, welche durch die Gleichung gegeben ist

$$v^2 = \frac{\omega^2 \varepsilon^2}{\varepsilon^2 \cos^2 \varphi + \omega^2 \sin^2 \varphi}.$$

Daraus folgt, dass die Wellenfläche, also die Grenze, bis zu welcher sich die Bewegung gleichzeitig fortpflanzt, wenn im Innern des Krystalls in irgend einem Punkte O eine Lichtbewegung erzeugt wird, ein Rotationsellipsoid ist, dessen Axe parallel der Axe des Krystalles gleich ω und dessen Aequatorialradius senkrecht zur Axe des Krystalles gleich ε ist.

Zunächst, dass die Fläche eine Rotationsfläche ist, folgt daraus, dass die Strecke v für alle Richtungen, welche mit der Axe den gleichen Winkel φ bilden, denselben Werth hat; die Endpunkte dieser Strecken bilden also die Basis eines geraden Kreiskegels, dessen Axe die Axe des Krystalles ist, oder alle zur Axe senkrechten Schnitte der Wellenfläche sind Kreise. Das beweist, dass die Wellenfläche eine Rotationsfläche ist.

Fig. 225.



Um den Charakter der Rotationsfläche zu erkennen, haben wir dann nur nöthig, einen durch die Axe derselben gelegten Durchschnitt zu betrachten. Ist XOY Fig. 225 ein Quadrant eines solchen Duchschnittes, und ist OX, parallel der Axe des Krystalls gleich ω, OY senkrecht zu derselben gleich ε, so ist

$$v^2 = OT^2 = \frac{\omega^2 \varepsilon^2}{\varepsilon^2 \cos^2 \varphi + \omega^2 \sin^2 \varphi}$$

$$\frac{OT^2 \cos^2 \varphi}{\omega^2} + \frac{OT^2 \sin^2 \varphi}{\varepsilon^2} = 1.$$

Wenden wir nun OX und OY als Coordinaten an und zwar OX als Axe der X, OY als Axe der Y, so ist

$$OT \cos \varphi = x \qquad OT \sin \varphi = y,$$

und die Gleichung der von den Endpunkten T gebildeten Curve wird

$$\frac{x^2}{\omega^2} + \frac{y^2}{\varepsilon^2} = 1$$

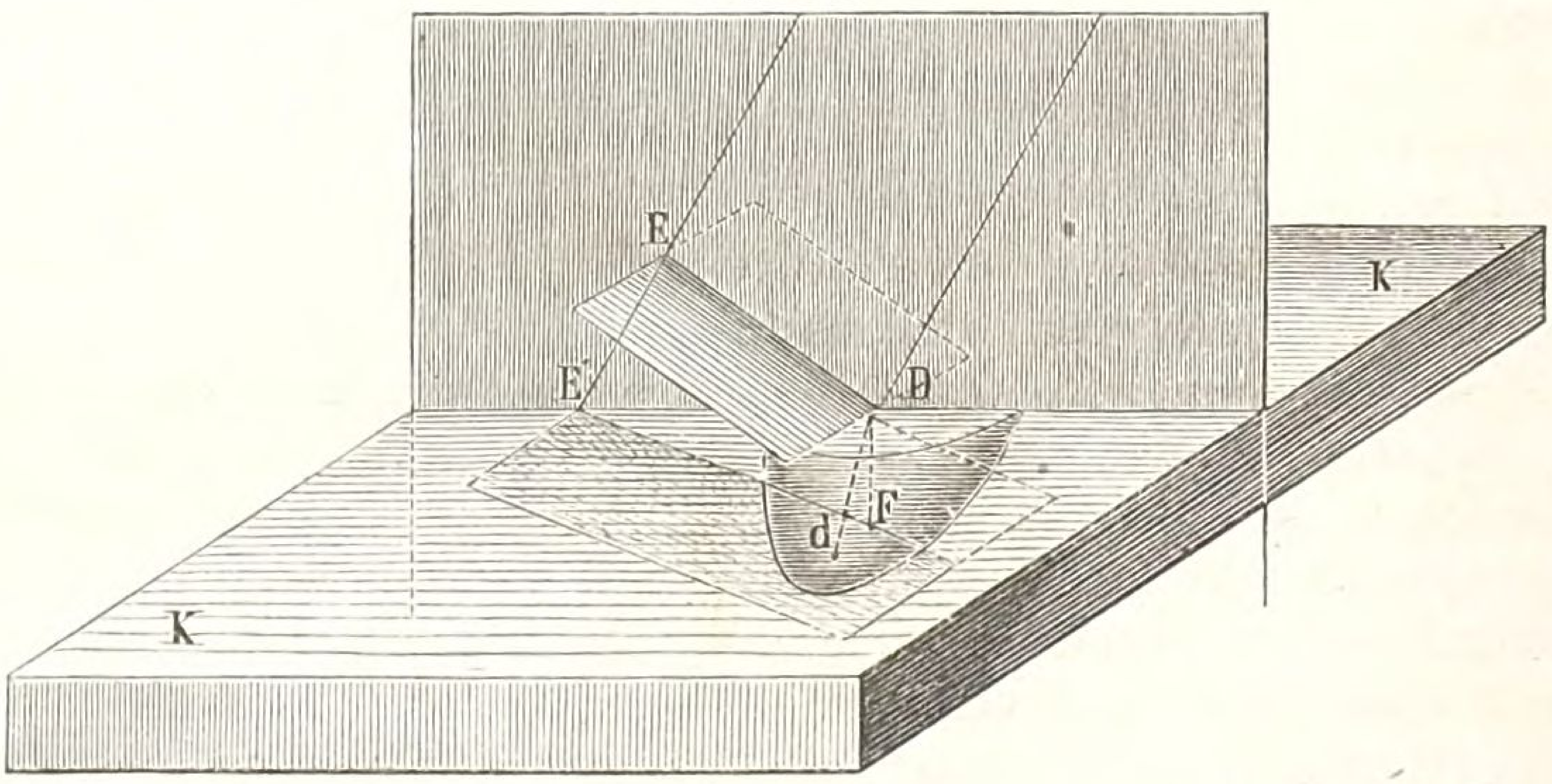
die bekannte Gleichung der Ellipse, deren Axen ω und ε sind.

Wenn so die Grenze, bis zu welcher die Bewegung im Innern des Krystalls nach den verschiedenen Richtungen hin sich ausbreitet, wenn

in einem Punkte desselben eine Lichtbewegung erregt wird, ein Ellipsoid ist, so folgt, dass wenn eine Lichtbewegung an der Grenze des Krystalls ankommt, zur Construction der gebrochenen ausserordentlichen Lichtwelle, anstatt der halbkugelförmigen Elementarwellen, welche zur Construction der ordentlich gebrochenen Lichtwellen verwandt wurden, halbe Ellipsoide der eben bestimmten Form angewandt werden müssen, deren Axe mit der Axe des Krystalls zusammenfällt. Die gebrochene Welle ist dann die alle die Elementarellipsoide berührende Tangentialebene, gerade so, wie die ordentlich gebrochene Welle die an die halbkugelförmigen Elementarwellen gelegte Tangentialebene ist.

Ist demnach DE Fig. 226 die Wellenfläche eines den Kalkspath KK treffenden Strahlencylinders, und tritt die Axe des Krystalls nach vorn

Fig. 226.



aus der Einfallsebene heraus, so construiren wir um den zuerst von der Lichtwelle in der Einfallsebene getroffenen Punkt D der Grenzfläche die Wellenfläche F des Krystalls in der angegebenen Weise mit den Dimensionen, wie sie der Zeit entsprechen, während welcher sich das Licht in dem ersten Mittel von E bis zur Grenzfläche fortpflanzt. Nennen wir diese Zeit t, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit längs der Axe ω, senkrecht zur Axe ε, so ist die Rotationsaxe des um die Krystallaxe zu legenden Rotationsellipsoides gleich ωt, der zur Axe senkrechte Aequatorialradius gleich εt. Wir legen dann durch den Punkt E' der Einfallsebene eine zur Einfallsebene senkrechte Tangentialebene und diese ist dann die gebrochene Lichtwelle, welche sich selbst parallel bleibend in dem Krystall sich fortpflanzt.

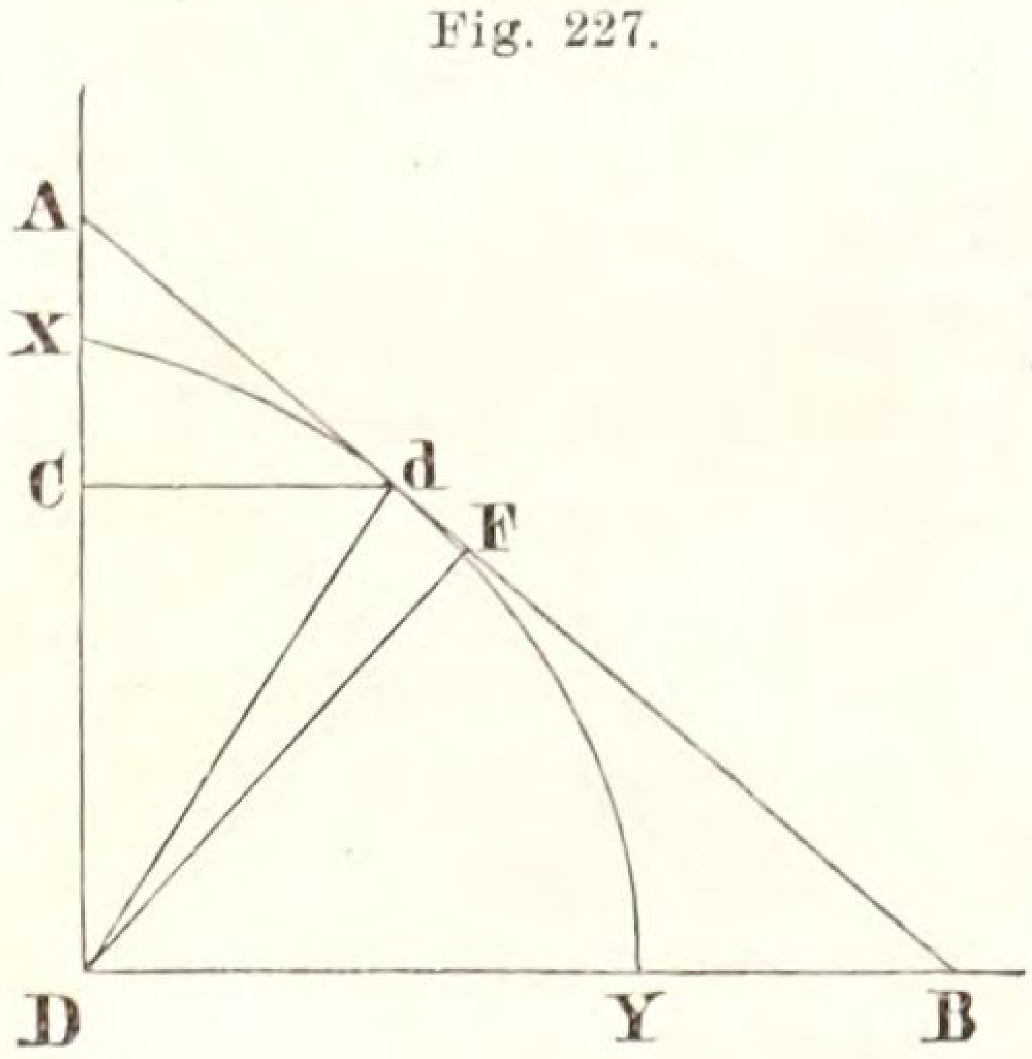
Die Richtung des gebrochenen Strahls ist nun nach dem Huyghens'schen Principe gegeben durch die Verbindungslinie des Mittelpunktes der elementaren Welle mit dem Punkte, in welchem dieselbe durch die sämmtliche Elementarwellen umhüllende Fläche oder berührende Ebene tangirt wird; die Axe des gebrochenen Strahlenbündels, und somit dieses selbst, ist demnach der Verbindungslinie des Mittelpunktes D mit dem Berührungspunkte d parallel.

Diese Verbindungslinie fällt nun im Allgemeinen nicht in die Einfallsebene und ist auch nicht zur gebrochenen Welle senkrecht, da bekanntlich der Halbmesser des Ellipsoides nicht auf der durch seinen Endpunkt gelegten Tangentialebene senkrecht ist. Ziehen wir aber von dem Mittelpunkte D die Richtung DF senkrecht zur Welle, so folgt, da wir

die Tangentialebene senkrecht zur Einfallsebene gelegt haben, dass diese Senkrechte, die Normale der Welle in der Einfallsebene liegt. Der Halbmesser Dd liegt dann in der Ebene, welche wir durch die Normale der gebrochenen Welle und die Axe legen, denn führen wir einen Schnitt durch die Normale einer an ein Ellipsoid gelegten Tangentialebene und die Axe des Ellipsoides, so geht dieser Schnitt auch durch den Tangirungspunkt, es muss deshalb der Halbmesser ganz in diesem Schnitt liegen. Die Lage des Schnittes, somit die Lage der Ebene, in welcher der gebrochene Strahl liegt, hängt somit wesentlich von der Lage der Krystallaxe gegen die Einfallsebene ab.

Es ergibt sich also, dass für das ausserordentlich gebrochene Licht Strahl und Wellennormale von einander verschieden sind, somit auch, da die Welle sich parallel der Wellennormale fortpflanzt, dass der Strahl nach einer andern Richtung fortschreitet als die Welle. Ist die Welle ganz in den Krystall übergetreten, so bekommen wir die fortgepflanzte Wellenebene, indem wir im Krystall die gebrochene Welle parallel sich selbst verschieben, der gebrochene Strahl ist aber die Verlängerung von Dd, indem das zur Construction der Welle angewandte Elementarellipsoid um D sich gewissermassen mit wachsender Zeit vergrössert, so dass es immer sich ähnlich bleibt, der Tangirungspunkt d rückt dadurch einfach auf der Linie Dd weiter. Daraus ergibt sich dann auch, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle eine andere ist, als die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Strahles. Denn die Strecke, um welche die Welle sich innerhalb einer gewissen Zeit fortpflanzt, ist der senkrechte Abstand der Wellenebene in ihren beiden Lagen am Anfange und am Ende der betrachteten Zeit, jene aber, um welche der Strahl sich fortgepflanzt hat, die gegen die Wellennormale geneigte Verbindungslinie der beiden Punkte, in denen die Wellenebene in den beiden Lagen das zur Construction der Welle verwandte Ellipsoid berührt. Oder auch von dem Momente, in welchem bei D die Welle in den Krystall eingetreten ist, bis zu dem Momente, in welchem sie bei E eintritt, hat die Welle sich durch die Strecke DF fortgepflanzt, der Strahl dagegen um die Strecke Dd. Kennen wir die Lage des fortgepflanzten Strahles, so können wir leicht die Lage und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle berechnen. Sei zu dem Ende DXY Fig. 227 der Quadrant des Durchschnitts des Ellipsoides, in welchem die Wellennormale DF und der Strahl Dd liegen, und sei der Winkel, den der Strahl mit der Axe bildet, $XDd = \varphi$, derjenige, welchen die Normale mit der Axe bildet, $XDF = \psi$, sei ferner AB der Durchschnitt der Tangentialebene, welcher die Tangente an die durch den Schnitt gegebene Ellipse im Punkte d ist. Dann ist, wie wir vorhin sahen, wenn wir die Zeit $t = 1$ setzen, während der die Welle in der Luft sich von E bis E' fortpflanzt,

Fig. 227.



$$Dd^2 = \frac{\omega^2 \varepsilon^2}{\varepsilon^2 \cos^2 \varphi + \omega^2 \sin^2 \varphi}.$$

Der Winkel ψ ist dann gleich dem Winkel ABD, unter welchem die

Tangente AB die Axe der y schneidet, denn da das Dreieck DFA bei F rechtwinklig ist, so ergänzt der Winkel FDA den Winkel FAD ebenso zu einem Rechten, wie den Winkel ABD.

Nennen wir nun die Coordinaten des Punktes d, in welchem die Tangente die Ellipse berührt, x' und y', so wird in der Lehre von der Ellipse bewiesen, dass die Gleichung der Tangente ist

$$\frac{x'}{\omega^2}\,x + \frac{y'}{\varepsilon^2}\,y = 1.$$

Nun ist DA der Abstand desjenigen Punktes A von D, in welchem die Tangente AB die XAxe schneidet, also der aus dieser Gleichung sich ergebende Werth x_0, der dem Werthe $y = 0$ entspricht; derselbe wird aus der Gleichung

$$\frac{x'}{\omega^2}\,x_0 = 1; \qquad x_0 = \frac{\omega^2}{x_1} = AD.$$

DB ist der Werth y_0, in welchem die Tangente die YAxe schneidet; er wird, indem wir in der Gleichung der Tangente $x = 0$ setzen,

$$\frac{y'}{\varepsilon^2}\,y_0 = 1; \qquad y_0 = \frac{\varepsilon^2}{y'} = DB.$$

Nun ist

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{AD}{DB} = \frac{\omega^2 y'}{\varepsilon^2 x'}.$$

Ziehen wir nun dC senkrecht zu DX, so ist $dC = y'$ $DC = x'$, somit

$$\frac{y'}{x'} = \operatorname{tang} dDC = \operatorname{tang}\varphi,$$

und daraus für den Winkel, den die Wellennormale mit der Axe bildet,

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{\omega^2}{\varepsilon^2}\operatorname{tang}\varphi.$$

Die Länge DF ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle, wenn Dd jene des Strahles ist. Wir erhalten dafür

$$DF = DA\,.\cos\varphi = \frac{\omega^2}{x'}\cos\psi \ldots \quad (a).$$

Um hierin x' durch ω, ε und ψ auszudrücken, haben wir die beiden Gleichungen

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{\omega^2 y'}{\varepsilon^2 x'}; \qquad \frac{\omega^2}{x'} = \frac{\varepsilon^2}{y'}\operatorname{tang}\psi \ldots \quad (b),$$

und aus der Gleichung der Tangente, indem wir $x = x'$, $y = y'$ setzen, wodurch der Punkt d der Tangente bestimmt wird,

$$\frac{x'^2}{\omega^2} + \frac{y'^2}{\varepsilon^2} = 1,$$

woraus sich ergibt

$$\frac{\varepsilon^2}{y'} = \sqrt{\frac{\omega^2\varepsilon^2}{\omega^2 - x'^2}}.$$

Setzen wir das in Gleichung (b), so wird

$$\frac{\omega^2}{x'} = \sqrt{\omega^2 + \varepsilon^2 \operatorname{tang}^2\psi},$$

und daraus

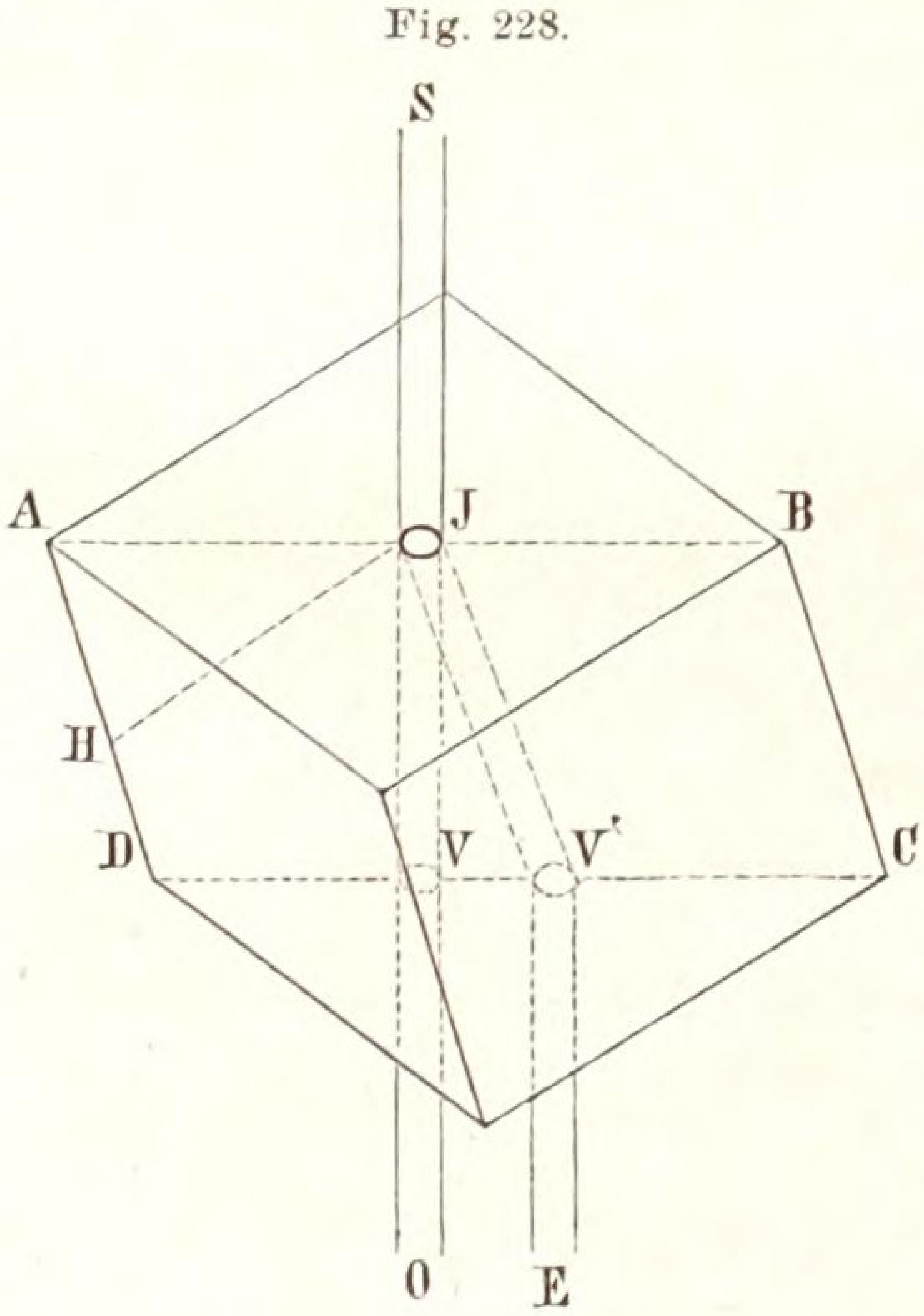
$$DF = \frac{\omega^2}{x'} \cdot \cos\psi = \sqrt{\omega^2 \cos^2\psi + \varepsilon^2 \sin^2\psi}.$$

Die Gleichung zeigt, dass im Allgemeinen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle eine ganz andere ist, dass beide nur dann gleich sind, wenn $\psi = \varphi$, gleich 0 oder 90^0, also wenn Strahl und Wellennormale zusammenfallen, was nur, wenn ψ und φ diese Werthe haben, der Fall ist.

§. 179.

Betrachtung einzelner Fälle. Um den aus der Huyghens'schen Construction sich ergebenden Gang der Lichtstrahlen im Kalkspath besser zu übersehen, wollen wir einige specielle Fälle näher ableiten, und zwar zunächst die Doppelbrechung in einem Kalkspathrhomboeder bei senkrechter Incidenz. Ist *SJ* Fig. 228 ein die Grenzfläche treffendes Strahlenbündel, so spaltet sich dasselbe in das ungebrochen weiter gehende Bündel *JVO* und in das ausserordentlich gebrochene Bündel *JV'*, welches in der Ebene *ABCD* verschoben ist, welche die Axe des Krystalls in sich enthält, und nach unserer frühern Definition, da sie auch das Einfallsloth in sich enthält, ein Hauptschnitt ist. Bei dem Austreten aus dem Krystall wird das Bündel *V'E* wieder seiner frühern Richtung parallel.

Fig. 228.



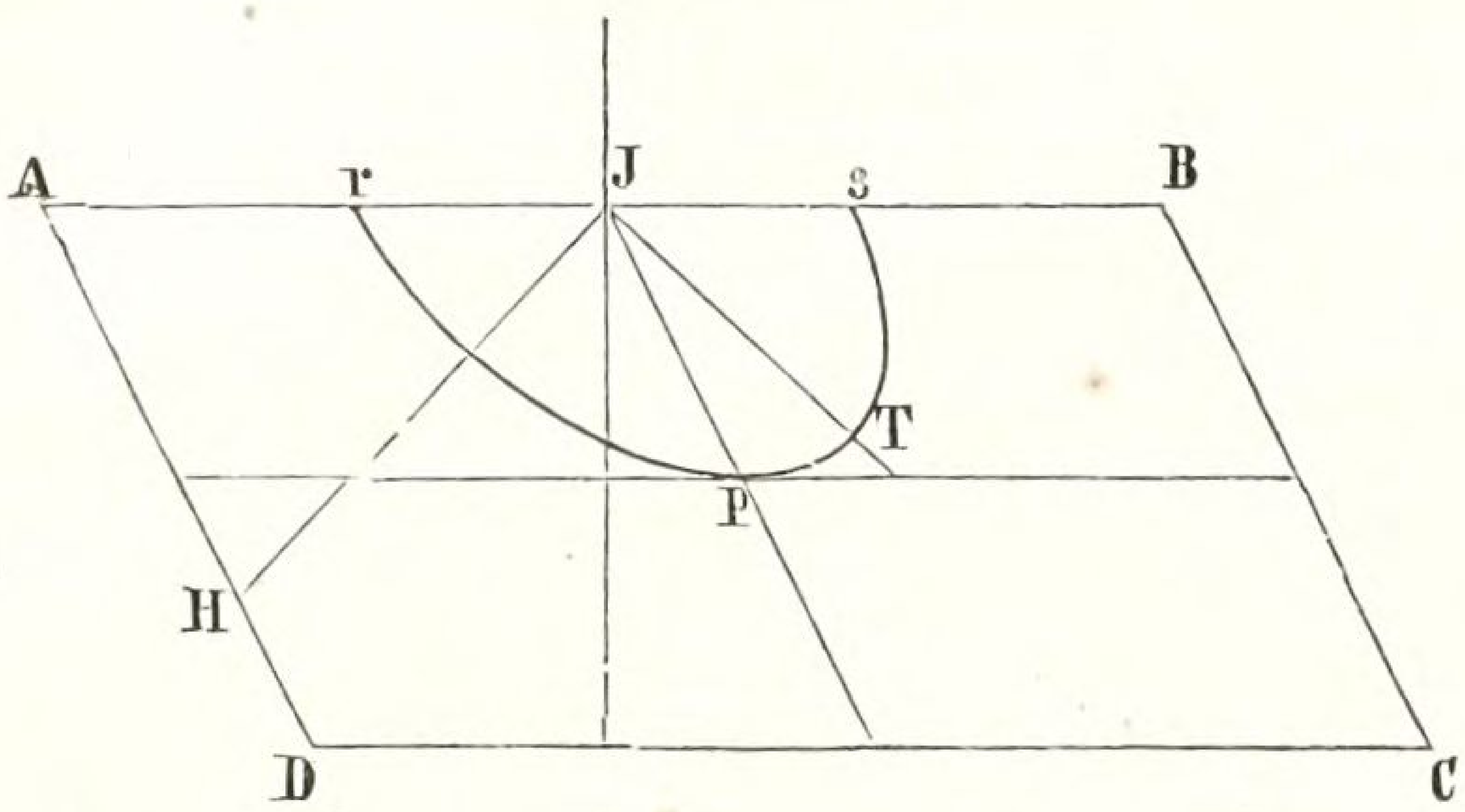
Dass das ordentliche Bündel ungebrochen weiter geht, ergibt sich aus den gewöhnlichen Brechungsgesetzen, nach denen, wenn der Einfallswinkel gleich Null ist, auch der Brechungswinkel denselben Werth hat.

Um den ausserordentlichen Strahl zu erhalten, legen wir um drei nicht in einer geraden Linie liegende Punkte der Grenzfläche, welche von der einfallenden Welle gleichzeitig getroffen werden, die in den Krystall fallende Hälfte der ellipsoidischen Wellenfläche und an diese eine gemeinsame Berührungsebene. Da diese drei Wellenflächen, welche ihren Mittelpunkt in der Grenzfläche haben, einander vollkommen gleich sind, so folgt, dass diese Berührungsebene der Grenzfläche parallel ist. Daraus folgt, dass die Normale der Welle, die von dem Mittelpunkte auf dieselbe gezogene Senkrechte mit dem Einfallsloth parallel ist. Da nun der gebrochene Strahl, die Verbindungslinie des Wellenmittelpunktes mit dem Berührungspunkte der gebrochenen Welle und der Wellenfläche, in der durch die Wellennormale und die Axe gelegten Ebene liegt, so folgt, dass der gebrochene Strahl in der Ebene *ABCD* liegen muss, welche durch das Einfallsloth und die Axe gelegt ist.

Um nun die Richtung des gebrochenen Strahles zu bestimmen, sei *ABCD* Fig. 229 jener Hauptschnitt und *J* einer der drei Punkte, um welchen wir das Wellenellipsoid construirt haben, und sei *rps* der Durchschnitt dieses Ellipsoides und des Hauptschnittes. Die Richtung der Axe ist *JH*, sie bildet mit *AB* einen Winkel *AJH* von $44^0 37'$. Da der Schnitt durch die

Axe des Rotationsellipsoides geht, ist rps eine Ellipse, deren Axen parallel JH und senkrecht zu JH, also JT sind. Letztere ist, weil der ausserordentliche Strahl im Kalkspath sich rascher fortpflanzt als der ordentliche, die grosse Axe der Ellipse. Die Ellipse wird im Punkte p von der Tangentialebene berührt, die Verbindungslinie Jp ist somit der ausserordentlich gebrochene Strahl. Da die Wellennormale mit dem Einfallsloth zusammenfällt, ist der im vorigen §. mit ψ bezeichnete Winkel gleich dem, welchen die Axe mit dem Einfallslothe bildet, also da AJH gleich $44^0 37'$ ist, gleich $45^0 23'$; der Winkel $pJH = \varphi$ ist dann gegeben durch

Fig. 229.



$$\tang \varphi = \frac{\varepsilon^2}{\omega^2} \tang \psi.$$

Setzen wir die Geschwindigkeit des Lichtes in Luft gleich 1, so ist ω die Geschwindigkeit des ordentlichen Strahles

$$\omega = \frac{1}{1{,}6543},$$

ε ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes, wenn es senkrecht zur Axe durch den Krystall geht. Da, wie wir gleich sehen werden, wenn das Licht senkrecht zur Axe des Krystalls sich fortpflanzt, Strahl und Wellennormale zusammenfallen, ist ε der reciproke Werth des Brechungsexponenten des ausserordentlichen, senkrecht zur Axe sich fortpflanzenden Strahles. Der Werth desselben ist, wie wir vorhin schon angaben, 1,4833. Daraus folgt

$$\tang \varphi = \left(\frac{1{,}6543}{1{,}4833}\right)^2 \tang 45^0 23' = \tang 51^0 35',$$

somit bildet der ausserordentlich gebrochene Strahl mit dem Einfallsloth einen Winkel von $6^0 12'$.

Da die Wellenebene der ausserordentlich gebrochenen Strahlen der Grenzfläche parallel bleibt, so werden, wenn die untere Grenzfläche der obern parallel ist, die Punkte derselben, welche überhaupt von der gebrochenen Welle getroffen werden, alle gleichzeitig getroffen, es pflanzen sich daher von allen diesen Punkten gleichzeitig Elementarwellen in das folgende Mittel fort, und die allen gemeinsame Berührungsebene ist der zweiten brechenden Fläche wieder parallel. Ist das zweite Mittel isotrop, etwa Luft, so dass Wellennormale und Strahl wieder identisch sind, so folgt, dass dann der austretende Strahl dem eintretenden wieder parallel ist. Die Verschiebung des ausserordentlichen Strahles ist somit der Dicke des Krystalls proportional, sie ist

$$V = D \,.\, \tang 6^0 12'.$$

Alle diese Folgerungen werden durch die Erfahrung bestätigt.

Die Huyghens'sche Construction der gebrochenen Welle ergibt, wie wir

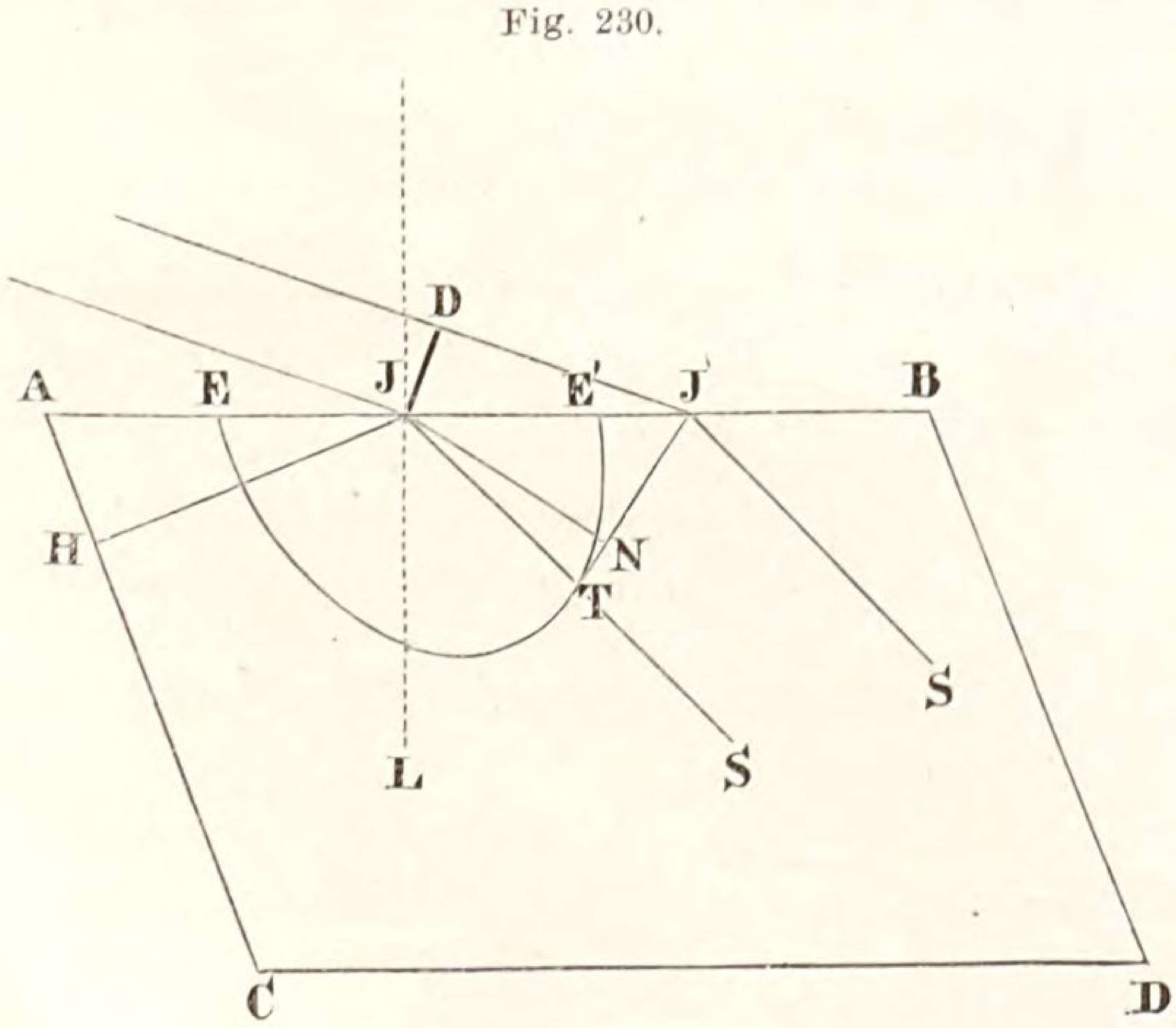
sahen, im Allgemeinen, dass der gebrochene Strahl aus der Einfallsebene heraustritt; in zwei Fällen indess ergibt sie, dass der gebrochene Strahl in der Einfallsebene bleibt, nämlich wenn die Axe in der Einfallsebene liegt und wenn die Axe zu derselben senkrecht ist. Es folgt das aus der vorhin schon gemachten Bemerkung, dass die Normale der Welle stets in der Einfallsebene liegt und dass der gebrochene Strahl in der durch diese Normale und die Axe des Krystalls gelegten Ebene liegt. Liegt nun die Axe in der Einfallsebene, so fällt die durch die Wellennormale und die Axe gelegte Ebene mit der Einfallsebene zusammen, ist die Axe zur Einfallsebene senkrecht, so fällt der Strahl mit der Wellennormale zusammen. Dass letzteres der Fall ist, folgt daraus, dass der zur Axe senkrechte Durchschnitt des Wellenellipsoides ein Kreis ist. Die gebrochene Wellenebene, welche immer senkrecht zur Einfallsebene ist, ist somit der Axe parallel, sie berührt deshalb das Wellenellipsoid in einem Aequatorialschnitt, also in einem durch den Mittelpunkt senkrecht zur Axe gelegten Schnitt. Da dieser Schnitt ein Kreis ist, so steht der von dem Mittelpunkte des Ellipsoides an den Berührungspunkt gezogene Halbmesser senkrecht zur Tangente und ist deshalb gleichzeitig Strahl und Wellennormale und liegt als solche in der Einfallsebene. Wenn die Axe des Krystalls senkrecht zur Einfallsebene ist, so ist der gebrochene Strahl immer auch senkrecht zur Axe, oder der vorhin mit φ bezeichnete Winkel ist ebenso wie $\psi = 90^0$.

Für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Strahles oder der Welle erhalten wir somit den constanten Werth ε, es muss deshalb dann der Brechungsexponent für jeden Einfallswinkel derselbe, und zwar

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{c}{\varepsilon} = 1{,}4833$$

sein, so dass wir die Richtung des gebrochenen Strahles nach dem gewöhnlichen Brechungsgesetz erhalten, weil der Strahl mit der Wellennormale zusammenfällt.

Fig. 230.



Wenn die Axe in der Einfallsebene liegt, ist die Richtung des gebrochenen Strahles ebenfalls leicht mit Hülfe des abgeleiteten Ausdruckes für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle zu erhalten. Sei Fig. 230 JD eine unter dem Winkel i einfallende Welle, JH die Axe, welche mit dem Einfallsloth den Winkel α bilde, ETE' das Wellenellipsoid des ausserordentlichen Strahles, welches in T von der durch J' gelegten Tangentialebene berührt werde, so dass JTS der ausserordentliche Strahl sei. JN sei die zur Welle gezogene Normale. Wir suchen den Winkel $LJT = r$. Bezeichnen

wir den Winkel TJH, den der Strahl mit der Axe bildet, mit φ, so ist $r = \varphi - \alpha$.

Zur Bestimmung von φ suchen wir zunächst den Winkel $NJH = \psi$, welchen die Wellennormale mit der Axe bildet, zwischen welchem und φ die im vorigen §. abgeleitete Beziehung besteht

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{\varepsilon^2}{\omega^2} \operatorname{tang} \psi.$$

Nennen wir den Winkel, den die Wellennormale mit dem Einfallslothe bildet, $NJL = \chi$, so dass $\chi = \psi - \alpha$, so ist auch der Winkel, den die gebrochene Welle mit der Grenzfläche bildet, $NJ'J = \chi$, somit

$$\sin \chi = \frac{JN}{JJ'}.$$

Für den Einfallswinkel i haben wir ebenso

$$\sin i = \frac{J'D}{JJ'},$$

somit

$$\frac{\sin i}{\sin \chi} = \frac{\sin i}{\sin (\psi - \alpha)} = \frac{J'D}{JN}.$$

JN ist die Strecke, welche die ausserordentliche Welle im Krystall zurücklegt, während die einfallende Welle die Strecke $J'D$ zurücklegt. Der Quotient beider ist also gleich dem Quotienten aus der Geschwindigkeit des Lichtes in Luft und jener der ausserordentlichen Welle im Krystall, deren Normale mit der Axe den Winkel ψ bildet. Somit ist

$$\frac{\sin i}{\sin (\psi - \alpha)} = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 \cos^2 \psi + \varepsilon^2 \sin^2 \psi}},$$

da nach dem vorigen §. der Nenner diese Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist, wenn wir jene in Luft gleich 1 setzen.

Lösen wir diese Gleichung nach ψ auf, so erhält man leicht

$$\operatorname{tang} \psi = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \varepsilon^2 \sin^2 i} \pm \sqrt{\frac{\omega^2 \sin^2 i - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - \varepsilon^2 \sin^2 i} + \frac{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{(\cos^2 \alpha - \varepsilon^2 \sin^2 i)^2}},$$

also den Winkel ψ in seiner Abhängigkeit von α und i. Aus diesem erhalten wir φ und daraus r. Setzen wir z. B. voraus, die Platte sei senkrecht zur Axe geschnitten, also $\alpha = 0$, so wird

$$\operatorname{tang} \psi = \pm \frac{\omega \,.\, \sin i}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 i}}.$$

Da dann jedenfalls $\psi < 90^0$, müssen wir dem Ausdrucke das positive Vorzeichen geben. Dann ist

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{\varepsilon^2}{\omega^2} \operatorname{tang} \psi = \frac{\varepsilon^2 \sin i}{\omega \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 i}} = \operatorname{tang} r,$$

da wenn $\alpha = 0$, auch $\varphi = r$ ist.

Nehmen wir an, die Platte sei parallel der Axe geschnitten, also $\alpha = 90^0$, so ist, da dann $\psi > 90^0$,

$$\tang \psi = - \frac{\sqrt{1 - \omega^2 \sin^2 i}}{\varepsilon \sin i}$$

$$\tang \varphi = - \frac{\varepsilon \sqrt{1 - \omega^2 \sin^2 i}}{\omega^2 \sin i},$$

und schliesslich

$$\tang r = \tang (\varphi - 90^0) = - \frac{1}{\tang \varphi} = \frac{\omega^2 \sin i}{\varepsilon \sqrt{1 - \omega^2 \sin^2 i}}.$$

Es genüge an der Betrachtung dieser Fälle; man kann die Resultate leicht durch Messung des Winkels r bestätigen. Wenn die Axe nicht in die Einfallsebene fällt und nicht zu ihr senkrecht ist, so liegt der gebrochene Strahl in einer andern als der Einfallsebene. Man hat dann zur Bestimmung der Richtung des gebrochenen Strahles erst die Lage dieser Ebene aus dem Satze abzuleiten, dass dieselbe die durch die Wellennormale und die Axe gelegte Ebene ist.

§. 180.

Einaxige Krystalle. Die Zerlegung des Lichtes in zwei Strahlen, deren einer den gewöhnlichen Brechungsgesetzen folgt, also ordentlich gebrochen wird, während der andere ausserordentlich gebrochen wird, wenn das Licht nicht parallel der Axe des Krystalles durch denselben hindurchtritt, findet nicht nur im Kalkspath statt, sondern in allen Krystallen, welche eine krystallographische Hauptaxe haben, also in allen Krystallen des quadratischen und hexagonalen Systems. Bei allen diesen ist auch die krystallographische Hauptaxe die optische Axe, also die Richtung, nach welcher das Licht im Krystall sich fortpflanzen muss, damit es nicht doppelt gebrochen wird. Bei allen diesen Krystallen wird ferner das gebrochene Licht durch die Huyghens'sche Construction gegeben, die Wellenfläche des ordentlichen Strahles ist eine Kugel, die des ausserordentlichen ein Ellipsoid, dessen Rotationsaxe gleich ist dem Radius der Kugel für den ordentlichen Strahl, dessen Aequatorialradius gleich ist der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes senkrecht zur Axe.

Die Wellenfläche des gebrochenen Lichtes besteht also immer aus zwei Theilen, Kugel und Rotationsellipsoid, die man zusammen die Wellenfläche in einaxigen Krystallen nennt.

In einer andern Beziehung zerfallen aber die einaxigen Krystalle in zwei Klassen, in die positiven und in die negativen. Der Kalkspath ist ein Repräsentant der negativen; man bezeichnet als solche jene Krystalle, in denen die ausserordentlichen Strahlen und Wellen stets eine grössere Fortpflanzungsgeschwindigkeit haben als die ordentlichen, bei denen also der Aequatorialradius des Wellenellipsoides grösser ist als die Rotationsaxe. Denken wir uns im Innern des Krystalls eine Lichtbewegung erregt, so pflanzen sich in einer gegebenen Zeit die den ordentlichen Strahlen entsprechenden Schwingungen rings bis zu einer Kugelfläche fort, die ausserordentlichen bis zu einem Rotationsellipsoid, dessen Rotationsaxe gleich ist dem Radius der Kugel, welches also an den Enden dieser Axe die Kugel berührt, welches aber im Uebrigen die Kugel vollständig einhüllt, da der Aequatorialradius grösser ist als der Radius der Kugel.

Bei der zweiten Klasse, den positiven Krystallen, ist das Umgekehrte

der Fall, dort ist der Radius der Kugel grösser als der Aequatorialradius, die Kugel berührt das Ellipsoid, dessen grosse Axe jetzt Rotationsaxe ist, im Endpunkte der Axe, und umhüllt sonst das Ellipsoid.

In den negativen Krystallen werden daher die ordentlichen, in den positiven die ausserordentlichen Strahlen stärker gebrochen.

Die Mehrzahl der einaxigen Krystalle sind negativ, von den häufiger angewandten gehört nur der Quarz, Bergkrystall, zu den positiven. Der Brechungsexponent der ordentlichen Strahlen ist 1,5471, derjenige der sich senkrecht zur Axe fortpflanzenden ausserordentlichen 1,5563.

§. 181.

Physikalische Erklärung der Doppelbrechung. Die Erscheinungen der Doppelbrechung können wir nach dem Bisherigen kurz dahin zusammenfassen, dass ein natürlicher Lichtstrahl bei seinem Eintritte in einen einaxigen Krystall in zwei senkrecht zu einander polarisirte Strahlen oder Wellen zerlegt wird, welche sich mit verschiedener Geschwindigkeit in dem Krystalle fortpflanzen. Die Polarisationsebene des ordentlichen Strahles ist ein Hauptschnitt des Krystalls, die Schwingungen in demselben geschehen stets senkrecht zur Axe, während die Schwingungen der ausserordentlichen Welle in der durch die Axe und die Wellennormale gelegten Ebene erfolgen, mit der Axe also einen Winkel bilden, welcher gleich ist dem Winkel, welchen die ausserordentliche Welle mit der Axe bildet. Die Zerlegung in die beiden senkrecht zu einander polarisirten Wellen tritt nur dann ein, wenn dieselben eine verschiedene Fortpflanzungsgeschwindigkeit haben. Ist, wenn das Licht parallel der Axe durch den Krystall hindurchgeht, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit beider Wellen dieselbe, so tritt auch die Zerlegung in zwei Wellen nicht ein.

Wir müssen daraus schliessen, dass der Aether in den Krystallen ein anisotropes Medium ist, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Schwingungen von der Richtung abhängt, nach welcher die Schwingungen stattfinden. Denn in dem Falle muss eine eintretende Welle, in welcher die Schwingungen nach allen in der Wellenebene vorhandenen Richtungen stattfinden, sich in zwei zerlegen, deren eine jene Schwingungen, resp. diejenige Componente aller Schwingungen aufnehmen muss, welche sich am schnellsten im Krystall fortpflanzen, während die andere jene Schwingungen und die denselben parallelen Componenten aller Schwingungen aufnimmt, welche sich am langsamsten im Krystall fortpflanzen. Eine solche Welle muss sich verhalten wie die Schwingungen des §. 94 betrachteten Stabes, der nach der einen Richtung dicker ist als nach der dazu senkrechten. Stossen wir den Stab parallel der dickern Richtung, so bleiben die Schwingungen linear und sich selbst parallel, stossen wir ihn nach der dünnern, so ist das Gleiche der Fall. Durch den Anstoss nach der einen Richtung wird dann aber eine grössere elastische Kraft geweckt als durch den Anstoss nach der zu dieser senkrechten Richtung. Stossen wir nun den Stab nach einer zwischen diesen beiden liegenden Richtung, so bleiben deshalb die Schwingungen nicht linear, diejenige Componente der Schwingungen, welche der grössern Elasticität entspricht, eilt der der kleinern Elasticität entsprechenden Componente vor, und wir erhalten nach und

nach die aus der so entstehenden Phasendifferenz sich ergebende Schwingungsfigur. Ganz dasselbe muss nun auch stattfinden, wenn eine ebene Welle in einen Krystall eindringt, in welchem durch die verschieden gerichteten Schwingungen eine verschiedene Elasticität geweckt wird, oder, wie man es kurz zu nennen pflegt, wenn die Elasticität nach den verschiedenen Richtungen eine verschiedene ist. Es ist dann jedenfalls in einer der der Wellenebene parallelen Richtungen die Elasticität die grösste, in einer andern die kleinste. Jede der Schwingungen, welche parallel der Wellenebene stattfindet, zerlegt sich dann in ihre Componente parallel der kleinsten und in jene parallel der Richtung der grössten Elasticität, und diese beiden Componenten pflanzen sich mit verschiedener Geschwindigkeit fort. Die Annahme allein, dass der Aether in den Krystallen anisotrop sei, erklärt also sofort die Zerlegung des eindringenden natürlichen Lichtes in zwei polarisirte Wellen und die Verschiedenheit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit derselben, also die Doppelbrechung. Die Annahme der Anisotropie des Aethers erkennt man aber sofort als berechtigt an, wenn man erwägt, dass der Krystall als solcher sich auch in anderer Beziehung als ein anisotroper Körper zeigt. Er hat nach den verschiedenen Richtungen eine verschiedene Härte, eine verschiedene Spaltbarkeit, Platten aus einem Krystall parallel der Hauptaxe geschnitten, zeigen nach den verschiedenen Richtungen eine verschiedene Elasticität u. s. f. Die Annahme, dass der Aether ein anisotropes Medium sei, setzt also nur voraus, dass der Aether an der Anisotropie der materiellen Moleküle theilnimmt, eine Voraussetzung, welche gewiss berechtigt ist.

Die Erscheinungen, wie sie in einaxigen Krystallen sich zeigen, ergeben sich, wie Fresnel gezeigt hat, einfach aus der Annahme, dass der Krystall in optischer Beziehung ein homogenes überall gleich dichtes Medium sei, dessen Elasticität nach verschiedenen Richtungen sich einfach aus den Componenten der Verschiebungen parallel zweien, zu einander senkrechten Axen nach dem Satze vom Kräfteparallelogramm berechnen lassen. Sei die Elasticität des Aethers, welche durch Schwingungen parallel der Axe des Krystalls geweckt wird, proportional β^2, und durch solche, welche senkrecht zur Axe des Krystalls geschehen, proportional α^2. Denken wir uns nun ein Aethertheilchen nach einer Richtung, welche mit der Axe den Winkel χ bildet, um die Längeneinheit verschoben, so sind die Componenten der Verschiebung parallel und senkrecht zur Axe $\cos\chi$ und $\sin\chi$. Die dadurch das Molekül parallel der Axe gegen die Gleichgewichtslage treibende Kraft ist dann $\beta^2 \cos\chi$ und die dasselbe in der Richtung senkrecht zur Axe zurücktreibende Kraft $\alpha^2 \sin\chi$. Die Voraussetzung nun, dass die durch jene Verschiebung geweckte Kraft die Resultirende dieser beiden Componenten sei, liefert für diese Resultirende

$$R^2 = \beta^4 \cos^2\chi + \alpha^4 \sin^2\chi.$$

Die Richtung dieser Resultirenden fällt dann aber nicht mit der Richtung der Verschiebung zusammen. Nennen wir den Winkel, den die Richtung der Resultirenden mit der Axe bildet, χ', so ist der Winkel χ' gegeben durch

$$\cos\chi' = \frac{\beta^2 \cos\chi}{R}; \qquad \sin\chi' = \frac{\alpha^2 \sin\chi}{R}.$$

Der Winkel $\chi - \chi'$, den die Richtung dieser Resultirenden mit der Richtung der Verschiebung bildet, ist gegeben durch

$$\cos(\chi - \chi') = \cos\chi \cos\chi' + \sin\chi \sin\chi' = \frac{\beta^2 \cos^2\chi + \alpha^2 \sin^2\chi}{R}.$$

Daraus ergibt sich für die der Verschiebungsrichtung parallele Componente der Resultirenden ϱ^2

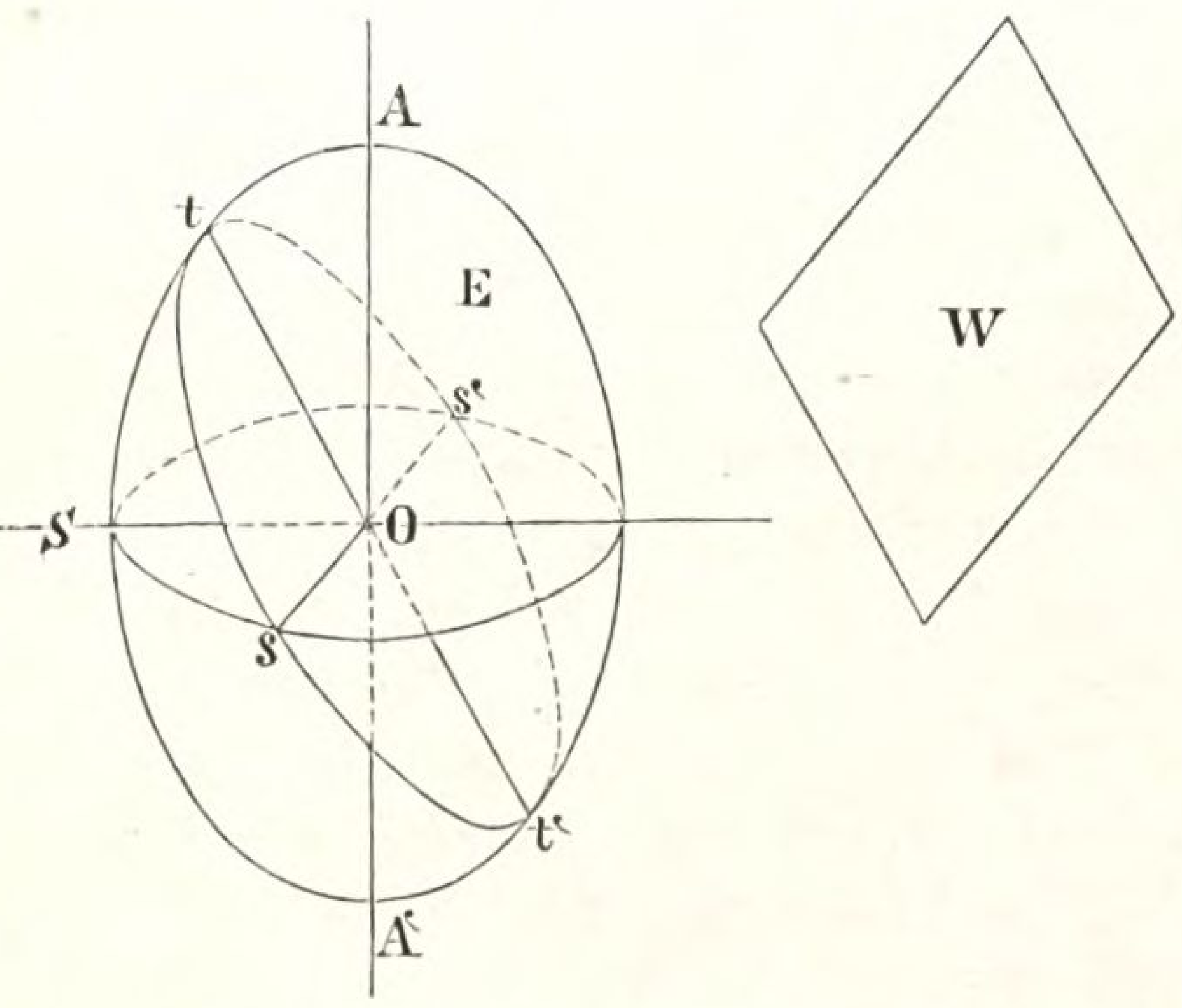
$$\varrho^2 = R\cos(\chi - \chi') = \beta^2 \cos^2\chi + \alpha^2 \sin^2\chi.$$

Die zur Verschiebungsrichtung senkrechte Componente der resultirenden Kraft brauchen wir nicht zu beachten, da diese nur longitudinale, zur Wellenebene senkrechte Schwingungen veranlasst, welche, wie wir wissen, bei den Lichtbewegungen nicht in Betracht kommen.

Die eben für ϱ^2 abgeleitete Gleichung gibt uns die Elasticität in jedem durch die Axe des Krystalls gelegten Schnitt, für eine Richtung, welche mit der Axe den Winkel χ bildet; die Gleichung zeigt, dass wir die Elasticität in einem solchen Schnitt durch eine rings geschlossene Curve darstellen können, so zwar, dass die Elasticität nach irgend einer Richtung dem Quadrate des Halbmessers dieser Curve proportional ist. Stellt $AtA't'$ Fig 231 die so construirte Curve dar, so dass, wenn tOA gleich χ und OA die Axe des Krystalls ist,

$$Ot^2 = AO^2 \cos^2\chi + OS^2 \sin^2\chi = \beta^2 \cos^2\chi + \alpha^2 \sin^2\chi,$$

Fig. 231.



so folgt aus dem Umstande, dass die Elasticität nur von dem Winkel χ abhängig ist, dass in jedem durch die Axe gelegten Schnitte die Elasticität durch eine ebensolche Curve dargestellt wird, dass somit die Elasticität, welche in dem Krystall durch Schwingungen nach irgend einer Richtung geweckt wird, durch den Halbmesser einer Fläche dargestellt wird, welche wir erhalten, wenn die Curve $AtA't'$ um die Axe AA' rotirt. Die dann von der Curve beschriebene Rotationsfläche nennt man deshalb die Elasticitätsfläche des Krystalls.

Pflanzt sich nun in einem Krystall eine Wellenebene W fort, so haben wir zu Bestimmung der Fortpflanzungsverhältnisse im Krystall uns die Elasticitätsfläche in demselben construirt zu denken und dieselbe durch einen der Wellenebene W parallelen, durch den Mittelpunkt 0 der Fläche geführten Schnitt geschnitten zu denken. Die Halbmesser dieses Schnittes geben uns dann die durch die in der Wellenebene stattfindenden Schwingungen geweckte Elasticität. Von den Halbmessern dieses Schnittes ist einer der grösste und einer der kleinste. Ist, wie es in der Figur angenommen, der Aequatorialradius der kleinste Halbmesser der Elasticitätsfläche, so ist derselbe auch der kleinste Halbmesser in dem der Wellenebene W parallelen Schnitte, da dieser als durch den Mittelpunkt gehend

jedenfalls den Aequatorialradius als Halbmesser enthält. Da in dem Falle der Halbmesser OA der grösste der Elasticitätsfläche ist, so folgt, dass derjenige Halbmesser des Schnittes, welcher der Axe am nächsten liegt, der grösste in dem Schnitte $ts t' s'$ ist; das ist aber der zu Os senkrechte Halbmesser Ot, welcher der Durchschnitt des die Axe OA senkrecht zu $ts t' s'$ gelegten Schnittes mit dem letztern ist. Derselbe bildet mit der Axe den Winkel $Ast = \chi$, wenn wir annehmen, dass die eindringende Wellenebene mit der Axe den Winkel χ, die Normale der Welle oder ihre Fortpflanzungsrichtung mit der Axe also den Winkel $\psi = 90 + \chi$ oder $90 - \chi$ bildet.

Da nun, wie wir sahen, jede Schwingung in ihre Componenten parallel der grössten und parallel der kleinsten Elasticität zerfällt, so muss die eindringende Welle natürlichen Lichtes stets in zwei senkrecht zu einander polarisirte Wellen zerfallen. Die Schwingungsrichtung der einen ist immer senkrecht zur Axe parallel dem Aequatorialradius; die der andern liegt stets in der durch die Wellennormale und die Axe gelegten Ebene, denn es ist immer Os entweder der kleinste oder der grösste und dann Ot der grösste oder der kleinste Halbmesser des Schnittes, wie wir denselben auch führen mögen, welche Lage somit auch die eindringende Wellenebene hat. Nur wenn die Welle senkrecht zu OA ist, dieselbe also parallel der Axe sich fortpflanzt, sind Os und Ot beide Radien des Aequatorialschnitts, die Elasticität ist nach diesen und somit nach allen Richtungen, nach welchen Schwingungen stattfinden, die gleiche. Es findet deshalb, der Erfahrung entsprechend, in dem Falle keine Zerlegung der Welle statt.

Die Zerlegung der Welle natürlichen Lichtes in zwei senkrecht zu einander polarisirte ergibt sich also aus der Fresnel'schen Theorie unmittelbar.

Ganz dasselbe ist auch für die Doppelbrechung der Fall. Für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der schwingenden Bewegungen erhielten wir früher ganz allgemein

$$c = A \sqrt{\frac{e}{d}},$$

wenn A eine Constante ist, welche nur von der Richtung der Schwingungen gegen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit abhängt, also für alle transversalen Schwingungen denselben Werth hat; wenn e das Maass der durch die Schwingungen geweckten Elasticität ist und d die Dichtigkeit des Mittels bedeutet.

Für die dem Aequatorialradius parallelen Schwingungen, also für die eine der beiden Wellen, nach welcher Richtung auch die Welle sich fortpflanzt, ist nun immer die Elasticität proportional α^2, somit ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit dieser Welle

$$\omega = A \frac{\alpha}{\sqrt{d}} = B\alpha.$$

Dieselbe ist somit für alle Fortpflanzungsrichtungen der Welle die gleiche, die Grenze, bis zu welcher sich die in einem Punkte des Krystalls erregten Schwingungen dieser Richtung fortpflanzen, ist also eine Kugel. Daraus folgt, dass bei dem Uebertritt in einen Krystall diese Schwingungen

den gewöhnlichen Brechungsgesetzen folgen, sie liefern die ordentlich gebrochene Welle oder den ordentlich gebrochenen Strahl.

Für die Schwingungen, welche mit der Axe den Winkel χ bilden, ist die Elasticität, welche durch die Schwingungen geweckt wird,

$$e = \alpha^2 \sin^2 \chi + \beta^2 \cos^2 \chi.$$

Daraus ergibt sich die Fortpflanzungsgeschwindigkeit dieser Welle

$$c = A \sqrt{\frac{\alpha^2 \sin^2 \chi + \beta^2 \cos^2 \chi}{d}} = B \sqrt{\alpha^2 \sin^2 \chi + \beta^2 \cos^2 \chi}.$$

Bezeichnen wir nun die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen, deren Schwingungen der Axe parallel sind, für welche also $\chi = 0$, mit ε, so wird

$$\varepsilon = B \beta$$

und somit

$$c = \sqrt{\omega^2 \sin^2 \chi + \varepsilon^2 \cos^2 \chi}.$$

Führen wir anstatt des Winkels, den die Richtung der Schwingungen mit der Axe bildet, den Winkel ψ ein, den die Wellennormale, also die Fortpflanzungsrichtung der Welle mit der Axe bildet, so dass $\psi = \chi + 90^0$ oder gleich $90^0 - \chi$ ist, so erhalten wir

$$c = \sqrt{\omega^2 \cos^2 \psi + \varepsilon^2 \sin^2 \psi}.$$

Das ist aber der Ausdruck für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der ausserordentlichen Wellen, zu welchem auch die aus der Erfahrung abgeleitete Construction von Huyghens uns führte, nach welcher die Wellenfläche des ausserordentlichen Strahles ein Rotationsellipsoid ist, dessen Axe gleich ω und dessen Aequatorialradius gleich ε war, wenn ω die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des ordentlichen Strahles, oder, da bei diesem Strahl und Wellennormale zusammenfallen, der ordentlichen Welle, und ε die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des ausserordentlichen Strahles senkrecht zur Axe ist. Da auch der senkrecht zur Axe sich fortpflanzende Strahl nach dem vorigen §. mit der Wellennormale zusammenfällt, ist ε gleichzeitig die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der ausserordentlichen senkrecht zur Axe fortschreitenden Welle.

Da somit die Fresnel'sche Theorie zu demselben Ausdrucke für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle führt, wie die Huyghens'sche Construction, folgt, dass diese Theorie die Erscheinungen der Doppelbrechung ganz so liefert, wie sie sich erfahrungsgemäss zeigen, dass diese Erscheinungen also eine nothwendige Folge der einfachen Fresnel'schen Annahme über die Anisotropie des Aethers in den einaxigen Krystallen sind.

§. 182.

Polarisationsapparate. Da die beiden aus einem einaxigen Krystall hervortretenden Strahlen vollständig polarisirt sind, so wendet man dieselben als das beste Mittel an, um vollständig linear polarisirtes Licht zu erhalten. In den meisten Fällen sind aber die doppelten Strahlen unbequem, man hat daher auf verschiedene Weise bewirkt, dass man nur einen Strahl erhält, dessen Polarisationsebene dann dadurch bestimmt ist, ob man den ordentlichen oder ausserordentlichen Strahl verwendet.

In sehr langen natürlichen Kalkspathkrystallen wird der ausserordentliche Strahl stark zur Seite abgelenkt, bedeckt man dann die Austrittsfläche mit einer Blende, so dass nur an der Stelle, wo der ordentliche Strahl austritt, eine kleine Oeffnung ist, so kann man den ausserordentlichen Strahl abhalten. Bequemer und mit kleinern Stücken von Kalkspath gelangt man zu demselben Ziele mit dem achromatisirten Kalkspathprisma. Dasselbe besteht entweder aus einem Kalkspathprisma und einem Glasprisma oder aus zwei Kalkspathprismen.

Im erstern Falle kittet man ein rechtwinkliges Kalkspathprisma, dessen Kanten der Krystallaxe parallel sind, mit einem ganz gleichen Glasprisma mit den Hypotenusenflächen zusammen, so dass dieselben ein Parallelepiped bilden. Als Kitt wendet man Kanadabalsam an, und das Glas wählt man so, dass sein mittlerer Brechungsexponent gleich dem mittlern der ausserordentlichen Strahlen ist. Lässt man nun in das Kalkspathprisma das Licht durch eine Kathetenfläche unter senkrechter Incidenz eintreten, so pflanzt sich dasselbe im Kalkspath senkrecht zur Axe fort, es wird also in den ordentlichen und ausserordentlichen Strahl zerlegt, die sich aber beide ungebrochen fortpflanzen. Da das Glas so gewählt ist, dass sein Brechungsexponent dem der ausserordentlichen Strahlen gleich ist, so geht der ausserordentliche Strahl auch ohne Brechung in das Glas über und tritt aus der Fläche, welche der Eintrittsfläche des Lichtes gegenüber liegt, normal aus; derselbe erfährt somit gar keine Ablenkung. Für den ordentlichen Strahl dagegen ist das Glas optisch weniger dicht als der Kalkspath, derselbe wird daher bei dem Uebertritt in das Glas gebrochen, und da er in Folge dieser Brechung nicht normal aus der Grenzfläche austritt, wird er bei dem Austreten nochmals in demselben Sinne abgelenkt. In Folge dieser doppelten Ablenkung des ordentlichen Strahles werden diese beiden Strahlen hinreichend weit getrennt.

Will man das achromatisirte Kalkspathprisma aus zwei Kalkspathprismen herstellen, so nimmt man zwei gleiche rechtwinklige Kalkspathprismen, die auch zu einem Parallelepiped zusammengekittet werden. Die Prismen sind so aus dem Krystall geschnitten, dass in einem die Axe den später sich gegenüberliegenden Kathetenflächen parallel, in dem andern die Axe zu diesen Flächen senkrecht ist. Lässt man das Licht in dem Prisma eintreten, in welchem die Axe zur Eintrittsfläche senkrecht ist, so wird in dem ersten Prisma das Licht nicht zerlegt, da es sich parallel der Axe fortpflanzt; bei dem Eintritte in das zweite Prisma, da dort die Axe senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung ist, tritt die Zerlegung ein, der ordentliche Strahl geht ungebrochen weiter, der ausserordentliche dagegen, dessen Fortpflanzungsgeschwindigkeit die grössere ist, wird bei dem Eintritt in das zweite Prisma und bei dem Austritte aus demselben zur Seite abgelenkt.

Noch bequemer als die achromatisirten Prismen ist das Nicol'sche, da aus diesem überhaupt nur der ausserordentlich gebrochene Strahl austritt. Man erhält dasselbe in folgender Weise. Man schleift an einen natürlichen Kalkspathkrystall (Fig. 232a) AG anstatt der natürlichen Grenzfläche $ABCD$ und der ihr parallelen, Flächen an, welche senkrecht zu dem Schnitte $ACGE$ des Krystalles sind, aber mit den Kanten K Winkel von 68^0 bilden. Darauf schneidet man den Kalkspath durch einen

Schnitt, der senkrecht ist zur Ebene $ACGE$ und zugleich senkrecht zu den neu angeschliffenen Flächen. Die Schnittflächen werden gut polirt und dann die Stücke in ihrer frühern Lage mit Kanadabalsam wieder zusammengekittet, wie es der Durchschnitt Fig. 232b zeigt. Bei dem Eintritt in den Krystall wird ein in der Richtung Ji ankommender Strahl zerlegt in den weniger stark gebrochenen ausserordentlichen id und den stärker gebrochenen ordentlichen io. Der ausserordentliche Strahl geht weiter nach de und tritt in eE parallel zu Ji aus, der ordentliche Strahl dagegen wird an der Balsamschicht total reflectirt. Denn der Brechungsexponent der ordentlichen Strahlen ist 1,654, der des Kanadabalsams, wenn Licht aus Luft in denselben übertritt, 1,536, der letztere ist also optisch weniger dicht als der Kalkspath für die ordentlichen Strahlen. Der relative Brechungsexponent der mittlern Strahlen bei dem Uebertritt aus Kalkspath in Kanadabalsam ist

$$n = \frac{1,536}{1,654} = 0,92863 = \sin 68^0.$$

Der Grenzwinkel, unter welchem der ordentliche Strahl noch aus Kalkspath in Kanadabalsam übertreten kann, ist demnach 68⁰. Da nun der Einfallswinkel, wenn das Licht parallel AE aufträfe, 68⁰ wäre, so folgt aus der Ablenkung des ordentlichen Strahles bei i, dass der Einfallswinkel bei o stets grösser ist als der Grenzwinkel, somit, dass die ordentlichen Strahlen immer total reflectirt werden.

Fig. 232 a.

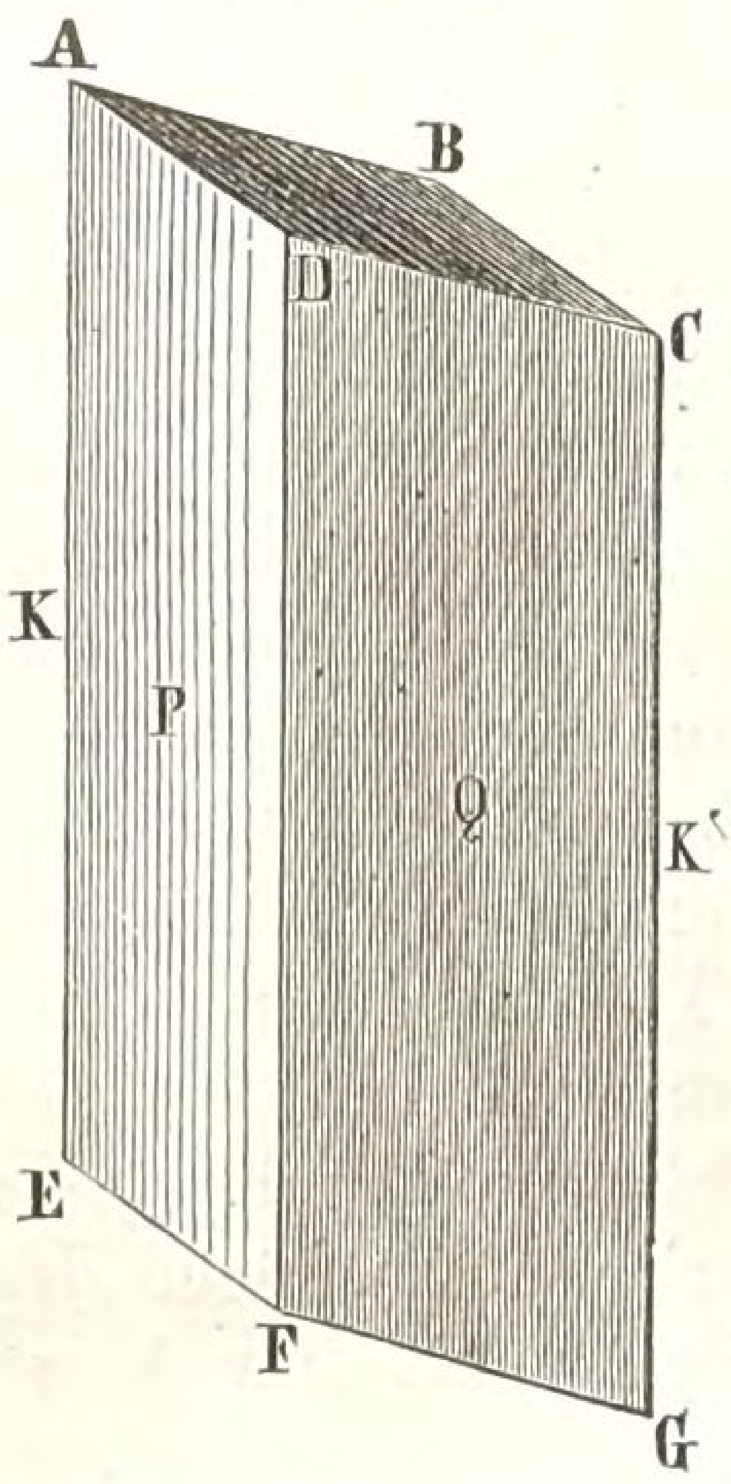
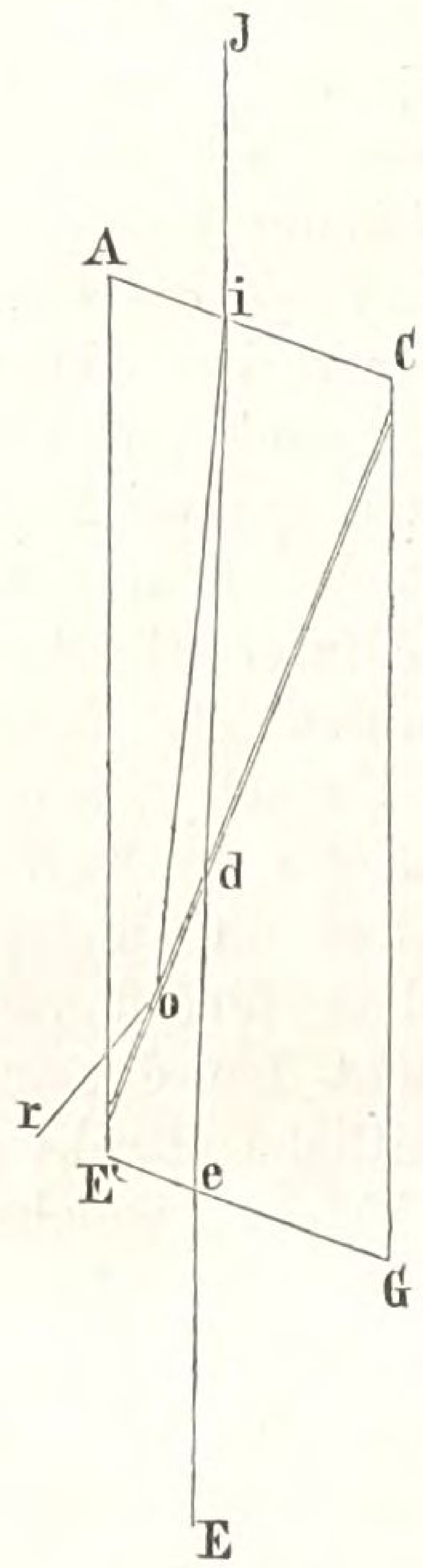


Fig. 232 b.



Da das Nicol'sche Prisma überhaupt nur einen vollständig polarisirten Strahl durchtreten lässt, wird es in den meisten Fällen als Polarisationsapparat benutzt.

Ausser dem Kalkspath wird noch der Turmalin angewandt, um nur einen polarisirten Strahl zu erhalten. Aus Turmalin parallel der Axe geschnittene planparallele Platten haben nämlich die Eigenthümlichkeit, die ordentlichen Strahlen vollständig zu absorbiren; man erhält also von dem eintretenden natürlichen Licht nur die senkrecht zum Hauptschnitte polarisirte Componente. So bequem in der Beziehung der Turmalin ist, so hat er gegenüber dem Kalkspath doch den Nachtheil einer geringern Durchsichtigkeit, auch für den ausserordentlichen Strahl; das durchtretende Licht ist deshalb schwach und ausserdem gefärbt.

§. 183.

Doppelbrechung in zweiaxigen Krystallen. Die Brechungserscheinungen in den Kystallen der andern drei Systeme mit ungleichen Axen, dem rhombischen, monoklinen und triklinen Systeme sind sehr viel verwickelter als in den einaxigen Krystallen. Auch in diesen zerfällt das Licht im Allgemeinen in zwei senkrecht zu einander polarisirte Wellen, von denen indess keine mehr ordentlich gebrochen ist; für beide Wellen hängt die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von der Richtung ab, in welcher sie den Krystall durchsetzen.

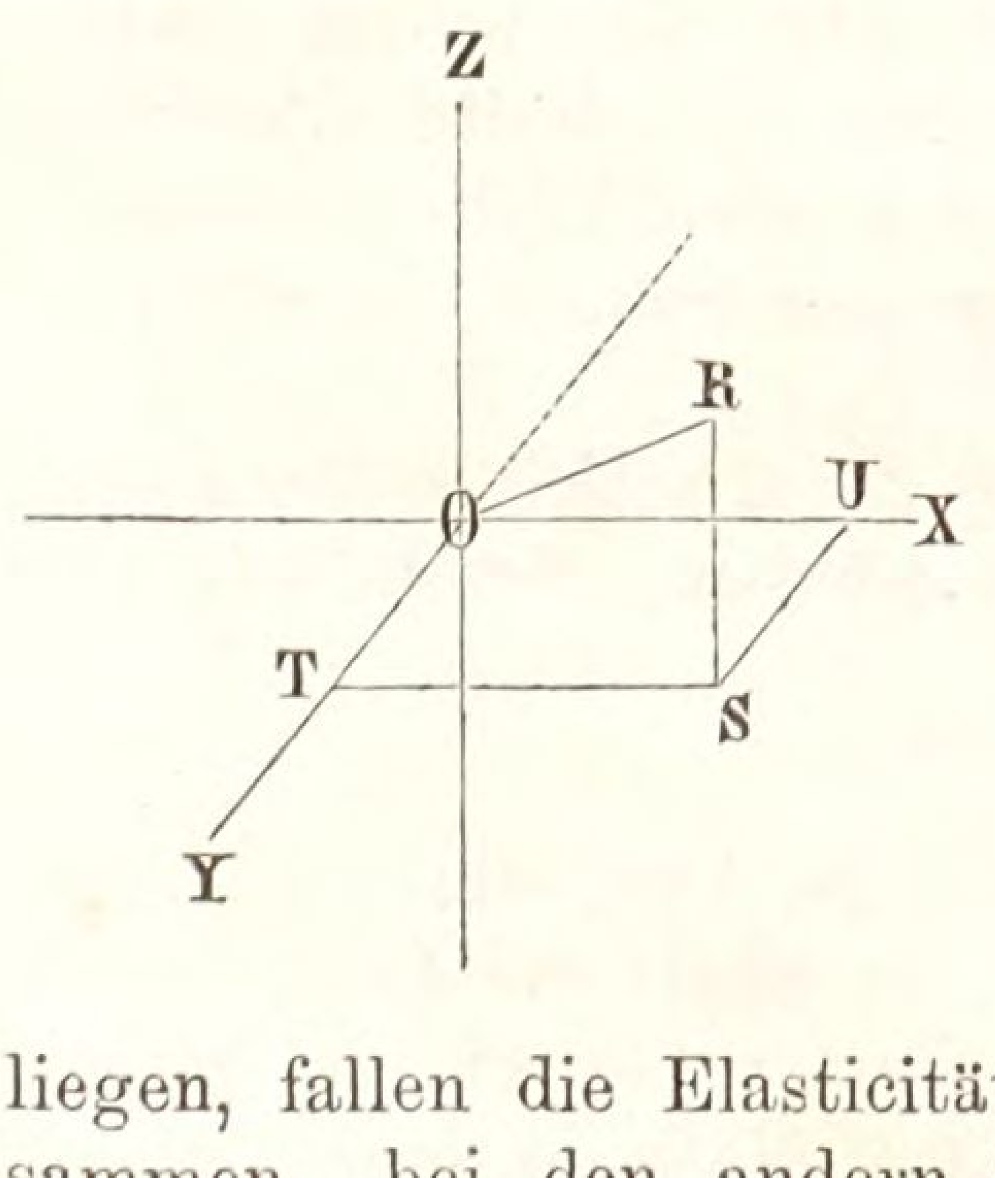
Bei diesen Krystallen gibt es ferner zwei Richtungen, nach denen eine Welle nicht doppelt gebrochen wird; da man optisch die Richtung eine Axe nennt, nach welcher fortschreitend eine Welle nicht in zwei zerfällt, so nennt man diese Krystalle, bei denen zwei solcher Richtungen vorhanden sind, optisch zweiaxig. Während aber bei den optisch einaxigen Krystallen der ungetheilt sich fortpflanzenden Welle nur ein Strahl entsprach, der mit der Wellennormale zusammenfiel, entsprechen in den zweiaxigen Krystallen dieser Welle eine unendliche Anzahl von Strahlen, welche auf dem Mantel eines Kegels liegen, und welche als ein Strahlencylinder eine planparallele Platte verlassen, wenn eine Welle dieselbe in der Richtung der optischen Axen durchläuft.

Ausser diesen gibt es noch zwei andere optische Axen, die sogenannten secundären Axen, nach deren Richtung sich durch den Krystall nur ein einziger Strahl fortpflanzt, der indess einer unendlichen Zahl von Wellen angehört. Beim Austritt aus dem Krystall zertheilt sich deshalb dieser Strahl in einen Strahlenkegel, dessen Spitze an der Austrittsstelle des Strahles sich befindet.

Wir begnügen uns hier damit, die Grundlage der von Fresnel gegebenen Theorie der Doppelbrechung in diesen Krystallen anzudeuten, und die Verhältnisse der zwei Paare optischer Axen abzuleiten.

Fresnel nimmt an, dass die Anisotropie des Aethers in den zweiaxigen Krystallen den allgemeinsten Fall der Anisotropie darstelle, dass also die Elasticität nach allen durch einen Punkt gelegten Richtungen verschieden sei. Die Elasticitätsfläche ist deshalb nicht mehr eine Rotationsfläche, sondern eine Fläche, welche auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem bezogen, drei ungleiche Axen hat. Die durch Verschiebungen nach irgend einer Richtung geweckte Elasticität lässt sich bei diesen Krystallen indess gerade so durch jene Elasticität, welche die den Axen parallelen Componenten der Verschiebungen hervorrufen, darstellen, wie bei den einaxigen Krystallen. Diese drei Axen sind dann die Elasticitätsaxen des Krystalls. Bei dem rhombischen Krystallsystem, dem auch krystallographisch drei zu einander senkrechte Axen zu Grunde liegen, fallen die Elasticitätsaxen mit den krystallographischen Axen zusammen, bei den andern Systemen lässt sich die Lage der Axen nicht allgemein angeben.

Fig. 233.



Sind Fig. 233 OX, OY, OZ die drei Axen und ist die durch eine der Einheit gleiche Verschiebung geweckte Elasticität parallel OX gleich a^2, parallel OY gleich b^2 und parallel OZ gleich c^2, so ist die durch eine der Einheit gleiche Verschiebung parallel OR, welche mit den Axen die Winkel φ, χ, ψ bildet, geweckte resultirende Elasticität gegeben durch

$$R^2 = a^4 \cos^2 \varphi + b^4 \cos^2 \chi + c^4 \cos^2 \psi,$$

da die Verschiebung von der Länge eins nach X, Y, Z die Componenten $\cos \varphi$, $\cos \chi$ und $\cos \psi$ hat. Die Richtung dieser Resultirenden ist wieder gegeben durch

$$\cos \varphi' = \frac{a^2 \cos \varphi}{R}, \quad \cos \chi' = \frac{b^2 \cos \chi}{R}, \quad \cos \psi' = \frac{c^2 \cos \psi}{R}.$$

Nennen wir den Winkel, den die Richtung der Resultirenden mit der Richtung der Verschiebung macht, δ, so ist nach einem bekannten Satze der analytischen Geometrie

$$\cos \delta = \cos \varphi \cos \varphi' + \cos \chi \cos \chi' + \cos \psi \cos \psi',$$

somit ist die in die Richtung der Verschiebung fallende Componente der geweckten elastischen Kraft

$$\varrho^2 = R \cos \delta = a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \cos^2 \chi + c^2 \cos^2 \psi$$

ganz analog, wie wir sie bei einaxigen Krystallen erhielten. Die Durchschnitte dieser Fläche sind gerade solche Curven, wie bei den einaxigen Krystallen. Während aber dort alle durch die Axe gelegten Schnitte einander gleich waren, sind hier die verschiedenen durch eine der Axe gelegten Schnitte verschieden. Legen wir einen Schnitt durch X und Z, so ist $\chi = 90^0$, $\cos \chi = 0$, $\psi = 90^0 - \varphi$, $\cos \psi = \sin \varphi$, die Gleichung dieses Schnittes wird

$$\varrho^2 = a^2 \cos^2 \varphi + c^2 \sin^2 \varphi,$$

für einen Schnitt durch Z und Y erhalten wir gerade so

$$\varrho^2 = b^2 \cos^2 \chi + c^2 \sin^2 \chi.$$

Alle durch die Z-Axe gelegten Schnitte liegen zwischen diesen beiden; denken wir uns zuerst den Schnitt XZ geführt und diesen allmählich um die Z-Axe gedreht, so geht der durch die erste der beiden Gleichungen gegebene Schnitt allmählich in den durch die zweite Gleichung gegebenen Schnitt über, indem der Werth von a allmählich in den von b übergeht, um den letztern zu erreichen, wenn der Schnitt parallel YZ geworden ist.

Hieraus folgt unmittelbar, dass die Schnitte der Elasticitätsfläche nach zwei bestimmten Richtungen Kreisschnitte sein müssen. Setzen wir voraus, es sei

$$a > b > c$$

und legen einen Schnitt durch Y und X, so sind die Axen dieses Schnittes b und a, drehen wir nun diesen Schnitt um Y, so bleibt die Axe b immer dieselbe, die dazu senkrechte zweite Axe wird immer kleiner und nimmt ab bis c, wenn der Schnitt um 90^0 gedreht ist. Nach unserer Voraussetzung, dass b einen zwischen a und c liegenden Werth habe, geht also

die zweite Axe von einem Werthe, der grösser ist als b, in einen kleinern Werth über, auf diesem Wege muss sie deshalb einmal den Werth b gehabt haben. Sind aber die beiden Axen eines Schnittes gleich, so sind es auch alle Halbmesser, denn die Gleichung dieses Schnittes wird dann

$$\varrho^2 = b^2 \cos^2 \chi + b^2 \sin^2 \chi = b^2,$$

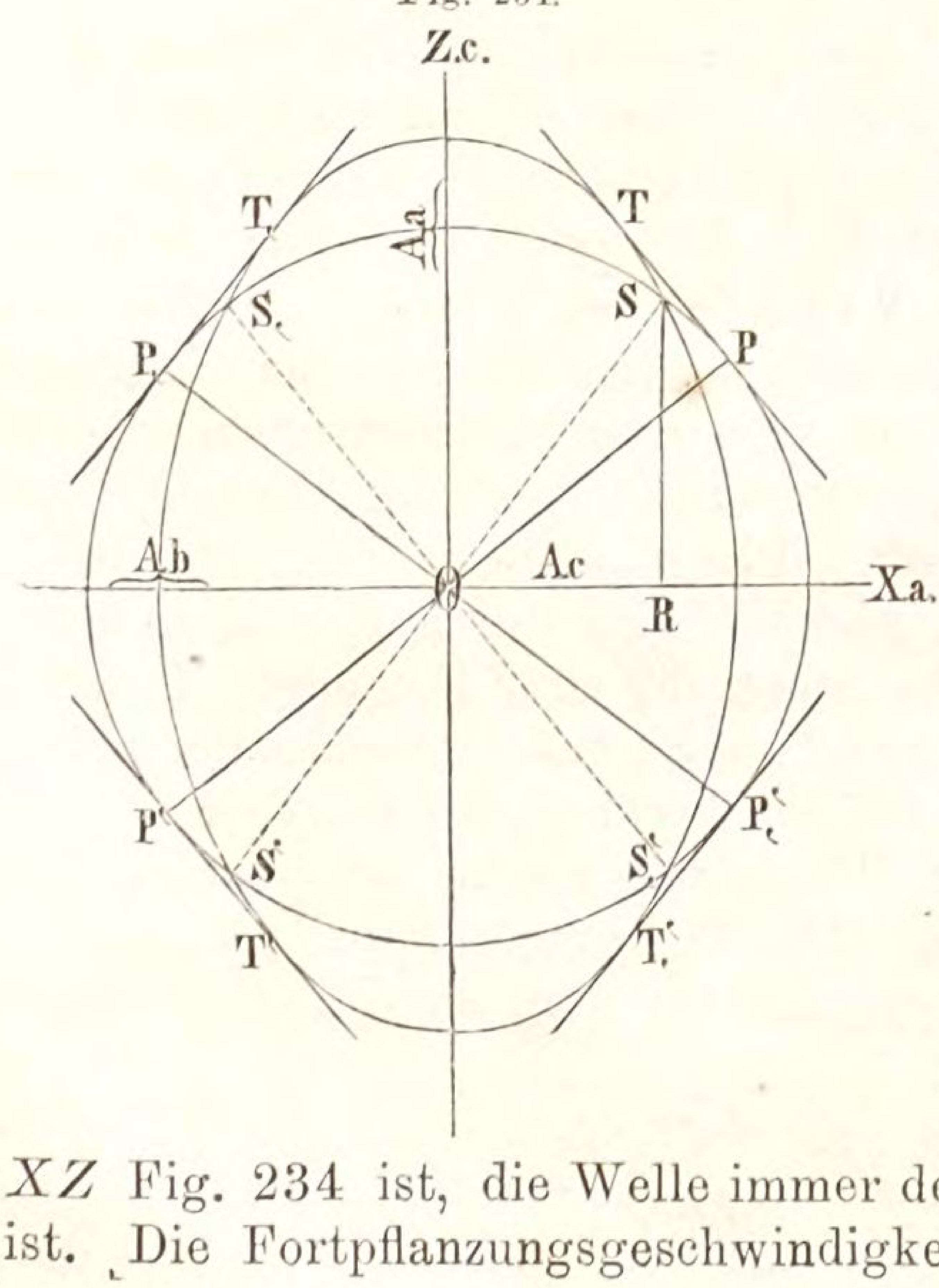
wenn wir mit χ den Winkel bezeichnen, welchen der Halbmesser in der Ebene des Schnittes mit der Axe Y bildet.

Derartige Kreisschnitte muss es nun zwei geben, welche symmetrisch zur Axe der Z liegen, denn wir gelangen durch Drehung des zunächst durch XY geführten Schnittes sowohl in dem einen als in dem entgegengesetzten Sinne zu dem Schnitte YZ.

Da in den Kreisschnitten die Elasticität nach allen Richtungen die gleiche ist, wird eine denselben parallele, also in der Richtung senkrecht zu den Kreisschnitten sich fortpflanzende Welle nicht in zwei zerlegt, eine solche Welle pflanzt sich somit ungetheilt durch den Krystall fort. Die zu diesen Kreisschnitten senkrechten Richtungen sind somit die optischen Axen; dieselben liegen in der Ebene der grössten und kleinsten Elasticitätsaxe. Der Winkel, den sie mit einander bilden, hängt ab von dem Verhältniss der drei Elasticitätsaxen, ist der Werth von b näher bei a als bei c, so liegen sie näher bei der Axe der grössten Elasticität, andernfalls näher bei der Axe der kleinsten Elasticität. Jene Axe, der die optischen Axen am nächsten liegen, die also den spitzen Winkel der beiden optischen Axen halbirt, nennt man die erste Mittellinie.

Um die vorher erwähnte Eigenschaft der sich nach der Richtung der Axe fortpflanzenden Welle, dass zu derselben unendlich viele Strahlen gehören, zu erkennen, müssen wir aus der Elasticitätsfläche die Form der Wellenfläche abzuleiten suchen, also die Grenze, bis zu welcher sich die in einem Punkte im Innern des Krystalls erregte schwingende Bewegung nach allen Seiten hin gleichzeitig ausbreitet. Es genügt, die parallel den Elastitätsaxen geführten Schnitte der Wellenfläche, also ihre Hauptschnitte zu betrachten.

Fig. 234.



Wir nehmen zunächst an, es pflanze sich die Lichtbewegung nach einer in der Ebene der grössten und kleinsten Elasticität, also der Ebene der optischen Axen liegenden Richtung fort. War die einfallende Lichtwelle unpolarisirt, so wird sie in ihre zwei Componenten zerlegt, deren eine immer parallel der Axe der mittlern Elasticität ihre Schwingungen vollführt, da, welches auch die Richtung der Fortpflanzung in der Ebene der XZ Fig. 234 ist, die Welle immer der Axe der mittlern Elasticität parallel ist. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit dieser Welle ist daher für alle in

dieser Ebene liegenden Richtungen dieselbe, und zwar, da die durch diese Schwingungen geweckte Elasticität proportional b^2 ist,

$$\beta = C \frac{b}{\sqrt{d}} = A \, . \, b.$$

Der Durchschnitt der Wellenfläche parallel dieser Ebene muss deshalb zunächst ein mit dem Radius AB beschriebener Kreis sein. Die Schwingungen der zweiten Welle liegen in der Ebene XZ. Pflanzt sich die Welle parallel Z fort, so sind die Schwingungen nach X gerichtet, die durch sie geweckte Elasticität ist proportional a^2, pflanzt sich die Welle parallel X fort, so geschehen die Schwingungen parallel Z, ihre Elasticität ist proportional c^2. Bildet die Fortpflanzungsrichtung mit der Axe Z den Winkel φ, so bildet die Schwingungsrichtung mit der Axe X den Winkel φ und ihre Elasticität ist

$$\varrho^2 = a^2 \cos^2 \varphi + c^2 \sin^2 \varphi,$$

ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit somit

$$\zeta = \sqrt{A^2 a^2 \cos^2 \varphi + A^2 c^2 \sin^2 \varphi} = \sqrt{\alpha^2 \cos^2 \varphi + \gamma^2 \sin^2 \varphi}.$$

Nach §. 178 und §. 181 folgt daraus, dass die Grenze, bis zu welcher sich gleichzeitig diese Schwingungen nach den verschiedenen in der XZ-Ebene liegenden Richtungen und in derselben Zeit, in welcher die anderen Schwingungen sich bis zum Kreise $A \, . \, b$ verbreiten, eine Ellipse ist, welche mit den Axen α und γ construirt ist. Der Durchschnitt der Wellenfläche für diese Schwingungen ist somit eine Ellipse mit den Axen α und β, deren erste, da $\zeta = \alpha$, wenn $\varphi = 0$, in die Axe der Z fällt, deren kleinere Axe γ somit in die Axe der X fällt. Da nun nach unserer Voraussetzung $\alpha > \beta > \gamma$ ist, so ist die grosse Axe grösser, die kleine Axe kleiner als der Radius des Kreises, Kreis und Ellipse müssen sich deshalb, wie Fig. 234 zeigt, schneiden.

Für diejenigen Wellen, welche den Kreisschnitten der Elasticitätsfläche parallel sind, ist die Elasticität proportional b^2, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit somit gleich β. Legen wir daher an die Ellipse eine den Kreisschnitten der Elasticitätsfläche parallele Tangente, so ist der Abstand derselben von dem Mittelpunkte der Wellenfläche gleich β. Der Abstand dieser Tangente ist somit gleich dem Radius des Kreises, die Tangente ist daher gleichzeitig Tangente des Kreises, sie berührt denselben in dem Punkte P_1 dort, wo die von dem Mittelpunkte O auf die Tangente gezogene Senkrechte die Tangente trifft. Da nun diese Tangente beide Durchschnitte der Wellenfläche trifft, und wie sich durch eine allgemeine Behandlung ergibt, die durch dieselbe senkrecht zu XZ gelegte Tangentialebene beide Schalen der Wellenfläche, welche uns die Grenze der Lichtbewegung in zweiaxigen Krystallen liefert, berührt, so folgt, dass sich nach der Richtung ihrer Normalen OP, wie wir vorhin schon ableiteten, überhaupt nur eine Welle fortpflanzt. Die Richtung OP und ebenso die in den andern Quadraten liegende Richtung OP_1 sind also die Richtungen der optischen Axen.

Dadurch lässt sich die Lage der optischen Axen durch die drei Fortpflanzungsgeschwindigkeiten α, β, γ unmittelbar erhalten. Nennen wir den Winkel, den die optischen Axen mit der Axe der Z bilden, Z, so ist der-

selbe durch die Gleichung gegeben, dass der diesem Werthe von φ entsprechende Werth von ζ gleich β ist, also

$$\zeta^2 = \alpha^2 \cos^2 Z + \gamma^2 \sin^2 Z = \beta^2$$

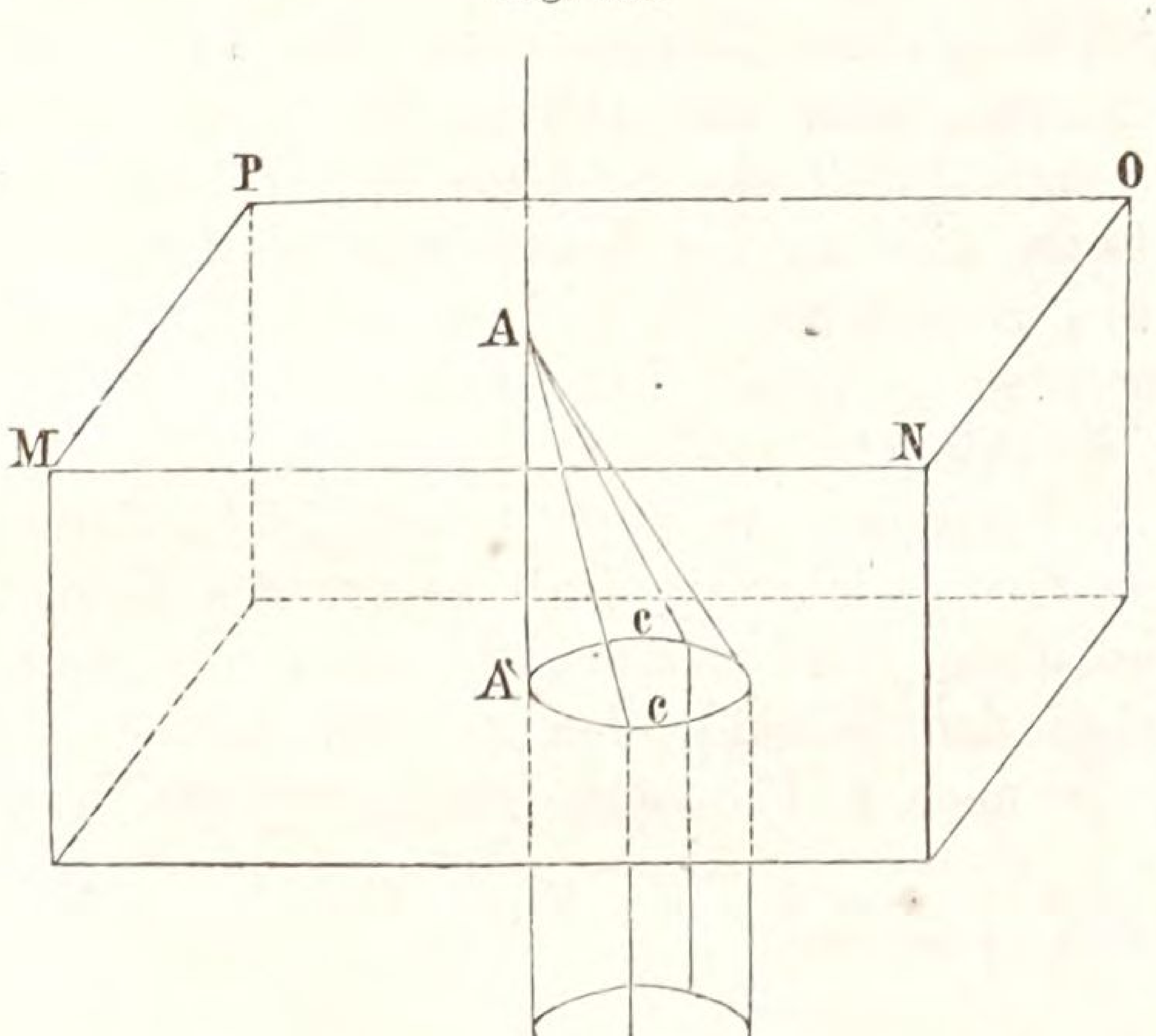
$$\cos^2 Z = \frac{\beta^2 - \gamma^2}{\alpha^2 - \gamma^2}.$$

Der Winkel, den die beiden optischen Axen mit einander bilden, ist dann $2\,Z$.

Da nach dem Huyghens'schen Princip der Strahl, nach welchem wir das Licht sich fortpflanzen sehen, die Verbindung des Wellenmittelpunktes mit dem Berührungspunkte der umhüllenden Fläche ist, so zeigt Fig. 234, dass in dem Durchschnitt XZ zu der nach der Richtung der optischen Axe fortschreitenden Welle zwei Strahlen gehören, der Strahl OP und der Strahl OT, da P und T Punkte der Wellenfläche sind, welche von der Welle PT berührt werden. Wie nun eine genauere von Hamilton durchgeführte Untersuchung über die Form der Wellenfläche gelehrt hat, besitzt dieselbe nicht nur in der Ebene der grössten und kleinsten Elasticität die Einbiegung PST, sie hat vielmehr bei S eine trichterförmige Vertiefung, indem von allen Seiten die Wellenfläche sich ähnlich wie in der Figur gegen den Punkt S vertieft. Daraus ergibt sich, dass die durch PT senkrecht zur Ebene der optischen Axen gelegte Tangentialebene die Wellenfläche in einem Kreise berührt. Alle von O aus zu diesem Kreise gezogenen Halbmesser der Wellenfläche sind demnach Strahlen, welche zu der Wellenebene gehören, oder es gehören zu der einen Wellenebene PT unendlich viele Strahlen, welche auf dem Mantel eines Kegels liegen, dessen Durchschnitt mit der Ebene der Zeichnung TOP ist.

Daraus folgt, dass wenn wir in die Platte $MNOP$ eines zweiaxigen Krystalls Fig. 235, welcher senkrecht zu einer der optischen Axen geschnitten ist, unter senkrechter Incidenz eine Lichtwelle eintreten lassen, dass dann dieselbe ungetheilt in der Richtung AA' den Krystall durchsetzt. In jedem Momente aber wird diese Wellenebene, die in dem Krystall um A als Einfallspunkt des Strahles beschriebene Wellenfläche in einem Kreise CC berühren, und die von dem Punkte A zu diesem Kreise gezogenen Linien sind die Strahlen, in welche sich der eintretende Strahl spaltet. Der eintretende Strahl geht deshalb im Innern des Krystalls in den Strahlenkegel ACC über, dessen Basis um so grösser ist, je dicker die Krystallplatte ist. An der untern Grenze der Platte angekommen, tritt die Lichtwelle, sich selbst parallel bleibend, aus dem Krystall heraus, da alle Punkte der Grenzfläche gleichzeitig von der Welle getroffen werden. Die Welle pflanzt sich also nach dem Austritte aus dem Krystall

Fig. 235.



in der Richtung AA' weiter fort. Jeder der in dem Krystalle zu dieser Welle gehörigen Strahlen gibt nun aber bei dem Uebergange der Welle in Luft zu einem gebrochenen Strahle Anlass, welcher auf der Wellenebene senkrecht ist, da jetzt die Welle sich in einem isotropen Mittel fortpflanzt. Aus dem Krystalle treten also ebenfalls an Stelle des einen eintretenden Strahls unendlich viele, welche auf dem Umfange eines Cylinders liegen, dessen Basis der Kreis CC in der zweiten Grenzfläche des Krystalles ist. In dem Innern des Cylinders treten keine Strahlen aus; dasselbe muss also dunkel sein, oder der eintretende Strahl muss den Krystall als ein Lichtring verlassen, dessen Durchmesser von der Grösse der Platte und den optischen Constanten des Krystalls abhängt.

In der That hat Lloyd diese Erscheinung am Arragonit beobachtet, einem zu dem rhombischen System gehörigen Krystalle; lässt man durch denselben parallel der einen optischen Axe ein recht dünnes Strahlenbündel hindurchgehen und dasselbe dann in das Auge treten, so sieht man an Stelle des Lichtpunktes, von dem das Strahlenbündel ausgeht, einen Lichtring wie Fig. 236, dessen Dicke gleich ist dem Durchmesser des Strahlenbündels. Dass das austretende Licht ein Strahlencylinder ist, erkennt man, wenn man das Auge in verschiedene Entfernungen von der Platte bringt. Der Durchmesser des Ringes bleibt dann immer derselbe.

Fig. 236.



In der Ebene der optischen Axen liegen gleichzeitig die beiden secundären optischen Axen, nach welchen sich in dem Krystall nur ein Strahl fortpflanzt, zu welchem indess eine unendliche Anzahl von Wellen gehören. Die Richtung dieser Axen ist die Verbindungslinie des Wellenmittelpunktes mit den Schnittpunkten S und S' von Kreis und Ellipse Fig. 234, denn diese Verbindungslinien sind gleichzeitig Halbmesser des Kreises und Halbmesser der Ellipse. Da man nun im Punkte S gleichzeitig eine Tangente an den Kreis und an die Ellipse legen kann, so erkennt man, dass OS als Strahl zu diesen beiden Wellen gehört. Da man nun durch alle Schnitte der Wellenfläche zwei solcher Tangenten legen kann, eine an die Schale der Wellenfläche, zu welcher der Kreis, eine an die, zu welcher die Ellipse gehört, so folgt, dass alle die durch diese Tangenten gelegten Tangentialebenen Wellenebenen sind, die zu dem einen Strahle OS gehören.

Die Lage dieser secundären optischen Axen lässt sich leicht daraus bestimmen, dass der Halbmesser OS gleichzeitig Halbmesser des Kreises und der Ellipse ist. Die Länge dieses Halbmessers OS ist somit gleich $A.b = \beta$. Nennen wir nun aber den Winkel, den der Halbmesser OS mit der Axe Z einschliesst, Z_1, so ist nach §. 178 seine Länge gegeben durch

$$OS^2 = \frac{\alpha^2\gamma^2}{\gamma^2\cos^2 Z_1 + \alpha^2\sin^2 Z_1} = \beta^2,$$

somit

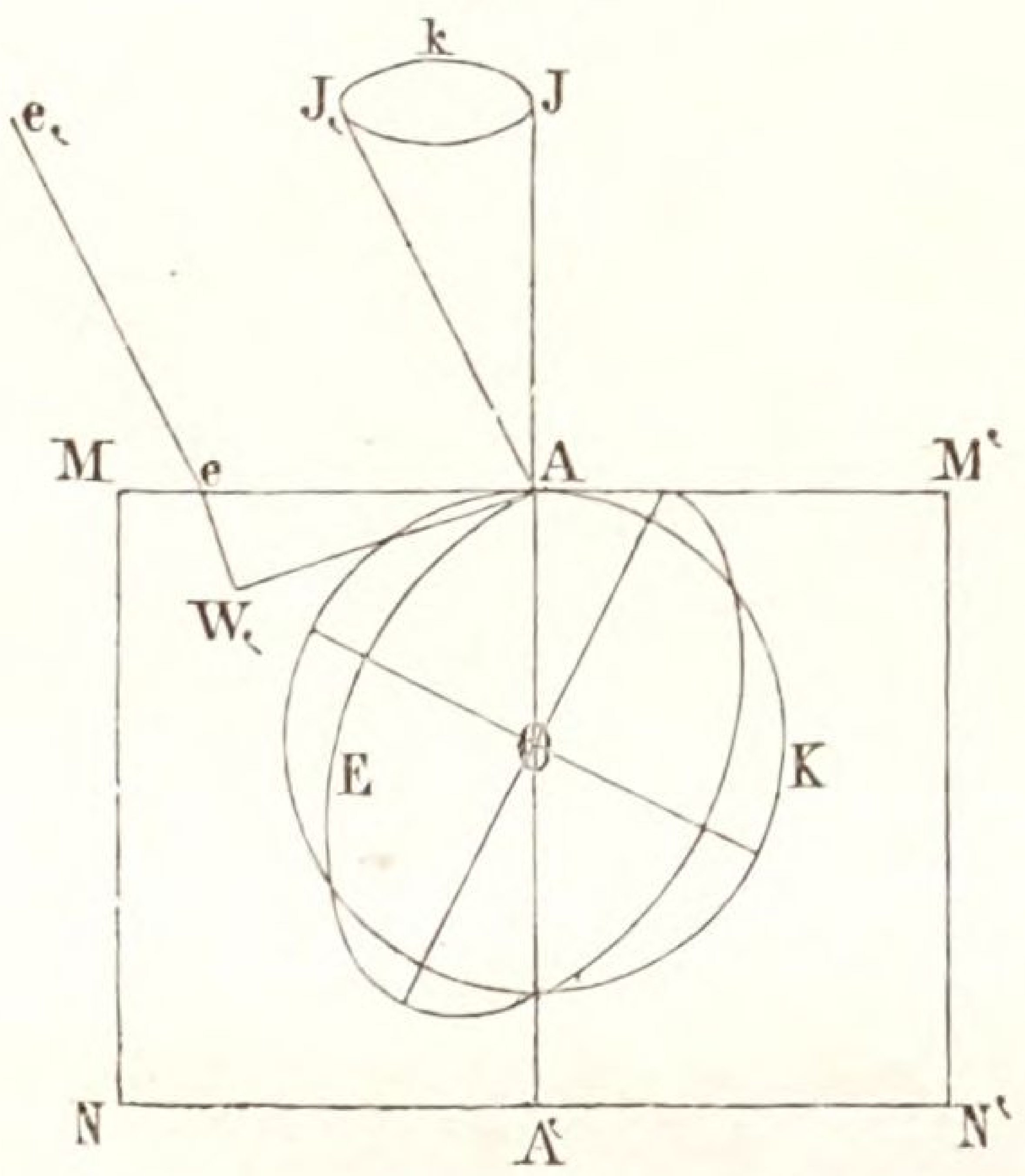
$$\cos Z_1 = \frac{\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{\gamma^2}}{\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\gamma^2}}.$$

Ein parallel den secundären optischen Axen durch den Krystall hindurchgehender Strahl muss, weil ihm eine unendliche Anzahl von Wellen

angehören, zu einer ähnlichen Brechungserscheinung Anlass geben, wie die parallel der optischen Axe sich fortpflanzende Welle, es muss aus dem Krystall ein Strahlenkegel hervortreten. Man bezeichnet diese Art der Brechung als äussere konische Refraction, da sich der Strahlenkegel bei dem Austritte aus dem Krystalle bildet.

Um diese Art der Brechung zu übersehen, denken wir uns auf irgend eine Weise im Innern eines zweiaxigen Krystalles MN Fig. 237 eine Lichtbewegung im Punkte O erregt; At' sei die Richtung einer secundären Axe senkrecht zur Grenzfläche MM'; ferner sei MN ein Schnitt, welcher der Ebene der optischen Axen parallel durch den Krystall gelegt ist. Der Durchschnitt der Wellenfläche mit der Ebene der optischen Axen EK zeigt die Grenze der Bewegung in dieser Ebene in dem Moment, in welchem dieselbe im Begriff ist, die Grenzfläche MM' zu durchschreiten. Dem Strahle OA gehört dann in diesem Hauptschnitte als Wellenebene an erstens die Ebene, welche durch die im Punkte A an den Kreis K gezogene Tangente senkrecht zur Schnittebene gelegt wird, und zweitens eine ebensolche Ebene, welche durch die im Punkte A an die Ellipse gezogene Tangente AW_1 gelegt wird. Jede dieser Wellenebenen tritt durch die Grenze MM' in das isotrope Mittel aus; die erstere, welche der Grenzfläche parallel ist, bleibt auch nach dem Durchtritt der Grenze parallel, sie pflanzt sich nach AJ fort, die zweite wird, da sie gegen die Grenzebene geneigt ist, in der Richtung W_1ee_1 gebrochen, sie pflanzt sich in der Luft nach AJ_1 fort. Diesen beiden Wellen entsprechen die beiden mit den Normalen der Wellen zusammenfallenden Strahlen AJ und AJ_1, welche von A aus divergiren. Gerade wie in diesem Durchschnitt durch den Strahl OA treten in jedem andern Durchschnitt zwei Strahlen aus, so dass ein Strahlenkegel entsteht, der seine Spitze in A hat und dessen Durchschnitt im Abstande AJ der Kreis k ist.

Fig. 237.



Auch diese von Hamilton aus der Form der Wellenfläche abgeleitete konische Refraction hat Lloyd beim Arragonit beobachtet; die austretenden Strahlen erscheinen dem Auge wie bei der innern konischen Refraction als ein Lichtring, der indess, wenn man das Auge von der Platte entfernt, stetig an Durchmesser zunimmt und sich dadurch als der Durchschnitt eines Lichtkegels zu erkennen gibt.

Diese eigenthümlichen Brechungserscheinungen in der Ebene der optischen Axen bilden den charakteristischen Unterschied zwischen der Brechung in zweiaxigen Krystallen und in einaxigen. In allen sonstigen Richtungen treten, wie bei den einaxigen Krystallen zwei Strahlen auf, und man erkennt den Unterschied nur durch eine Messung der Brechungsexponenten, welche zeigt, dass keiner der beiden Strahlen den gewöhnlichen Brechungsgesetzen folgt. Nur wenn man das Licht in den beiden andern Hauptschnitten der Elasticitätsfläche einfallen lässt, hat der eine der beiden

Strahlen einen von dem Einfallswinkel unabhängigen Brechungsexponenten, denn die Durchschnitte der Wellenflächen mit diesen Ebenen sind wieder Kreis und Ellipse, von denen der eine Schnitt den andern vollständig einschliesst, wie Fig. 238 und Fig. 239 zeigen. Fig. 238 gibt den Durch-

Fig. 238.

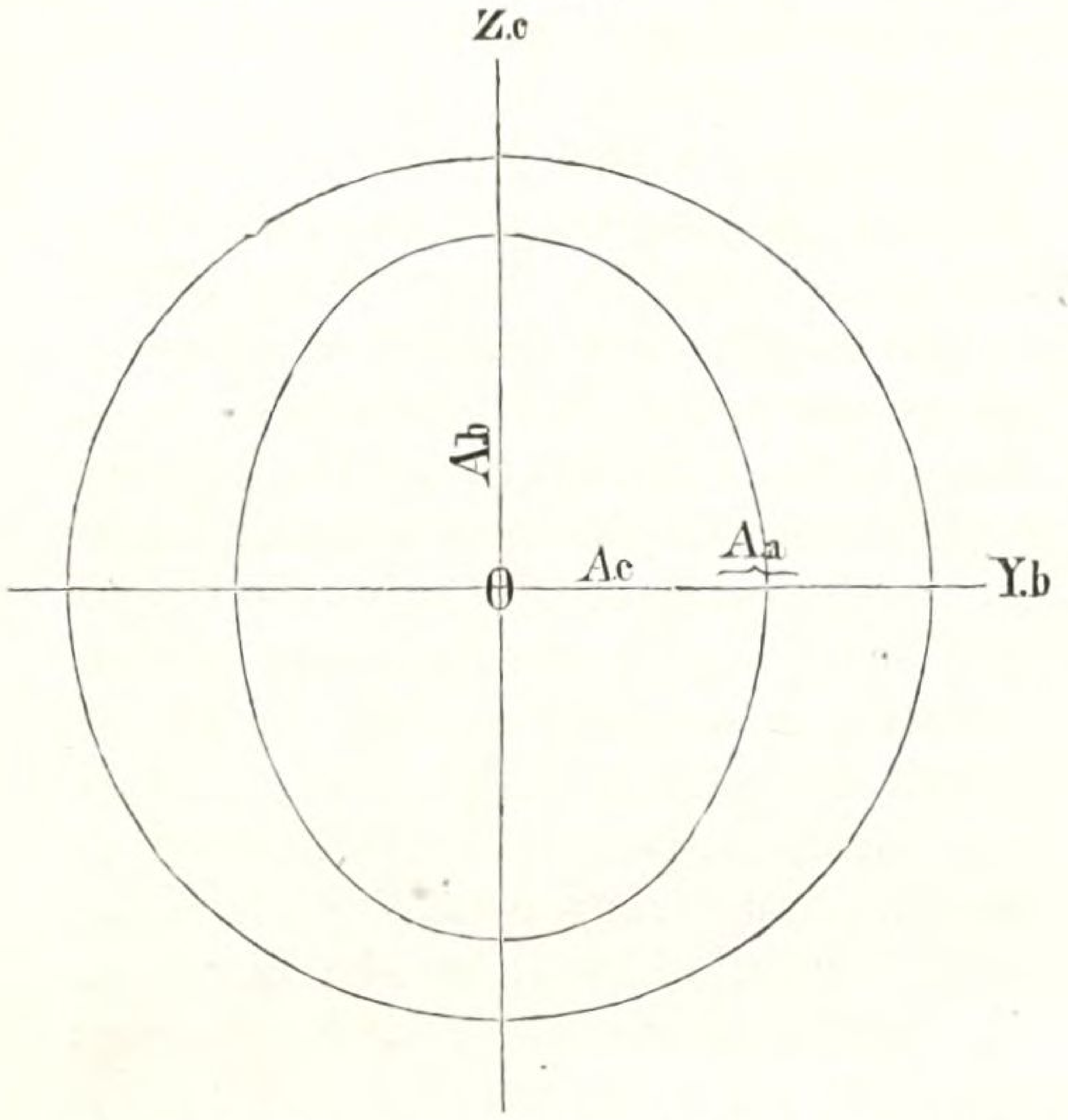
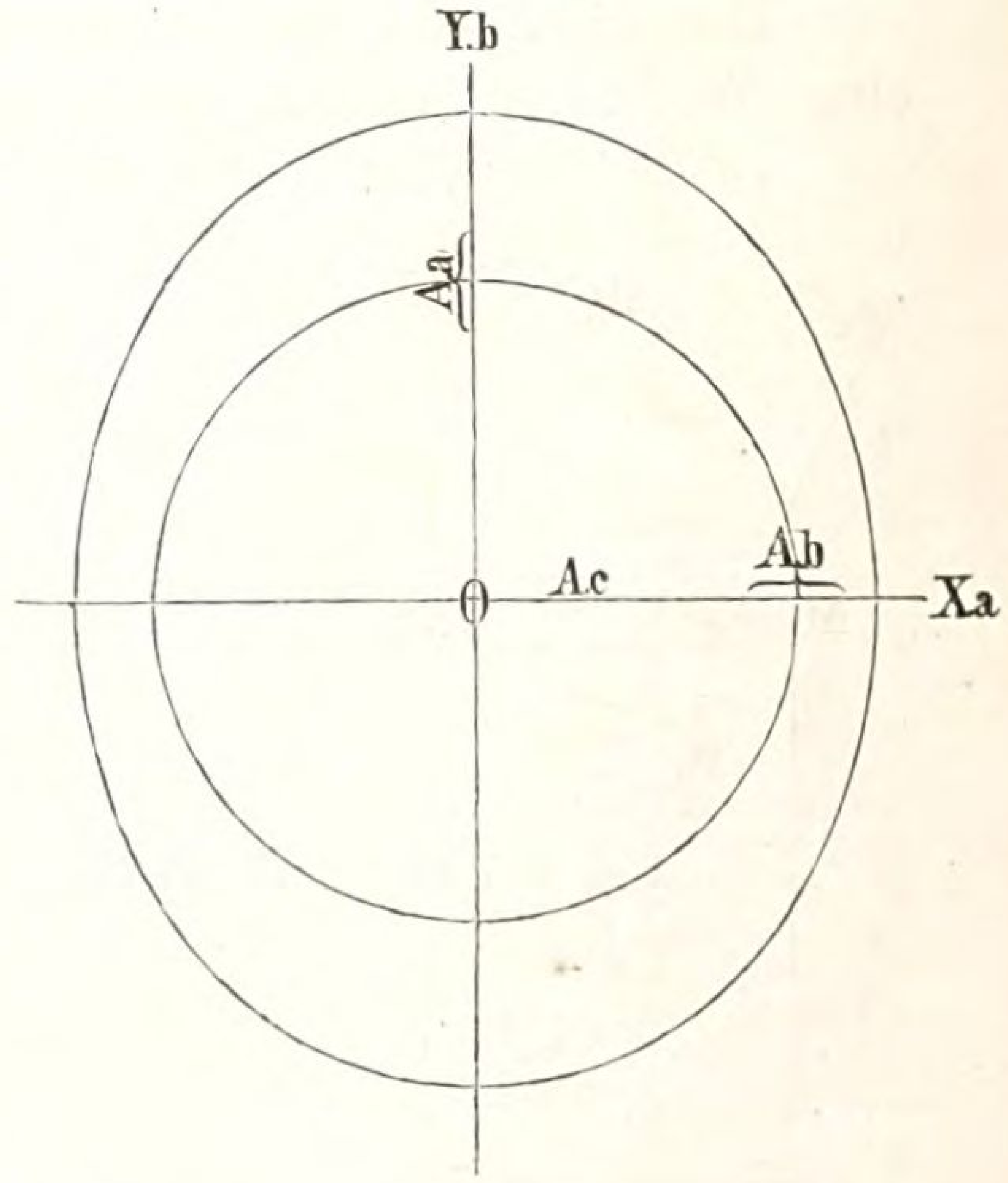


Fig. 239.



schnitt durch die Axe Y und Z. Eine in dieser Ebene sich fortpflanzende Welle zerfällt in zwei senkrecht polarisirte, deren eine ihre Schwingungen stets parallel der Axe der grössten Elasticität vollführt, deren Fortpflanzungsgeschwindigkeit somit immer gleich $\alpha = Aa$ ist, während die Schwingungen der andern in der Ebene der mittlern und kleinsten Elasticität erfolgen. Pflanzt sich die Welle parallel Z fort, so ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\beta = Ab$, pflanzt sie sich parallel Y fort, so ist die Geschwindigkeit $\gamma = Ac$. Die Durchschnitte sind somit der mit Aa beschriebene Kreis und die um die Axen Ab und Ac gelegte Ellipse. Der Kreis umschliesst die Ellipse, ohne dieselbe irgendwo zu berühren, es treten daher immer zwei Wellen auf. In dem Durchschnitte XY einfallend zerlegt sich eine Welle stets in eine, deren Schwingungen parallel der Axe der kleinsten Elasticität geschehen, welche sich somit mit der constanten Geschwindigkeit $Ac = \gamma$ fortpflanzt, und in eine zweite, deren Schwingungen in der durch die Axe der grössten und mittlern Elasticität gelegten Ebene erfolgen. Pflanzt sich die Welle parallel Y fort, so geschehen die Schwingungen parallel der Axe der grössten Elasticität, die Geschwindigkeit ist $\alpha = Aa$, pflanzt sich das Licht parallel X fort, so ist die Geschwindigkeit $Ab = \beta$. Die Durchschnitte der Wellenfläche sind somit der Kreis mit dem Radius Ac und die Ellipse mit den Axen Aa und Ab. Die Ellipse schliesst also den Kreis ganz und gar ein, ohne denselben irgendwo zu berühren, es entstehen also auch hier stets zwei Wellen.

Ein näheres Eingehen auf die Brechungserscheinungen in den zweiaxigen Krystallen würde uns hier zu weit führen.

Viertes Kapitel.

Interferenz des polarisirten Lichtes.

§. 184.

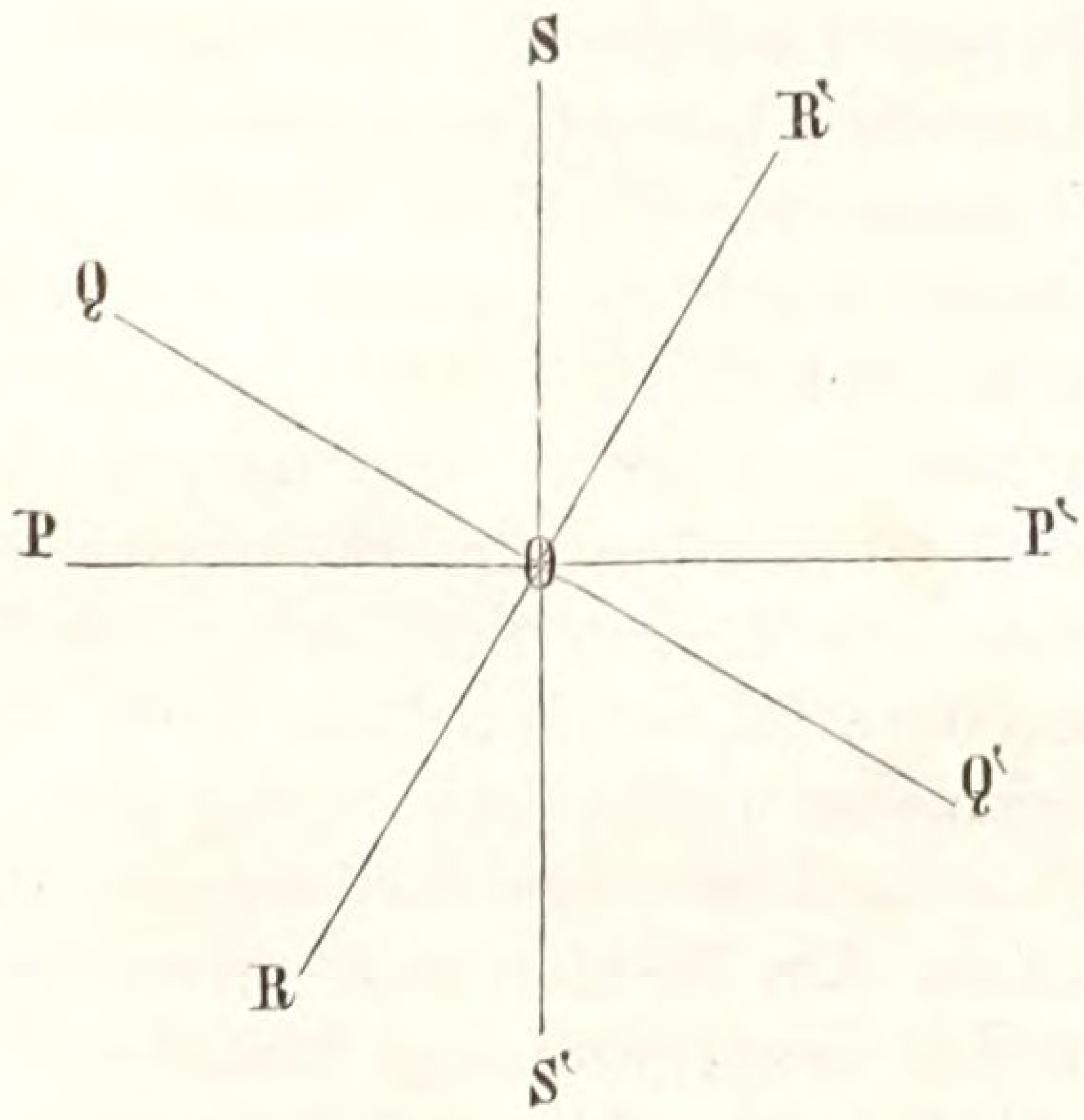
Fresnel-Arago's Gesetze der Interferenz des polarisirten Lichtes. Die beiden polarisirten Lichtstrahlen, in welche das Licht bei seinem Durchtritt durch einen doppelbrechenden Krystall zerfällt, können in vielen Fällen zur Interferenz gebracht werden, und geben dann zu den schönsten und mannigfaltigsten Farbenerscheinungen Anlass. Diese Erscheinungen lassen sich im Wesentlichen leicht ableiten mit Hülfe der Fresnel-Arago'schen Gesetze der Interferenz des polarisirten Lichtes, deren beide ersten wir §. 172 besprachen und zur Erklärung des Vorganges der Polarisation des Lichtes benutzten. Die zwei damals noch nicht erwähnten Gesetze sind:

1. Zwei senkrecht gegen einander polarisirte Lichtstrahlen können auf eine Polarisationsebene gebracht werden; sie interferiren dann mit einander, wenn sie ursprünglich eine Polarisationsebene besassen, wenn sie also durch Zerlegung eines polarisirten Lichtstrahles entstanden waren. Bei der Bestimmung der Interferenz muss dann unter Umständen der etwaigen Wegedifferenz der beiden Strahlen eine halbe Wellenlänge hinzugefügt werden, unter Umständen nicht.

2. Wenn zwei senkrecht zu einander polarisirte Lichtstrahlen aus nicht polarisirtem Licht entstanden sind, so setzen sie sich bei Zurückführung auf eine Polarisationsebene stets zu constanter Helligkeit zusammen.

Die beiden Gesetze folgen unmittelbar aus der Natur des polarisirten Lichtes. Es trete ein polarisirter Lichtstrahl, dessen Schwingungen parallel PP' Fig. 240 erfolgen, in eine Krystallplatte, deren Axe parallel QQ' sei; derselbe zerfällt dann in zwei senkrecht zu einander polarisirte, deren einer seine Schwingungen parallel QQ', deren anderer dieselben parallel RR' vollführt. Die beiden Strahlen durchsetzen dann die Krystallplatte mit verschiedener Geschwindigkeit, also auch verschiedener Wellenlänge, treten also mit einer gewissen Phasendifferenz aus derselben hervor, mit welcher sie dann in Luft weitergehen. Sie mögen dann durch ein Nicol'sches Prisma gehen, in welchem jeder der beiden Strahlen wieder in zwei zerlegt wird, dessen einer seine Schwingungen nach PP', dessen anderer dieselben nach SS' vollführen möge, und seien die letztern Schwingungen die des Strahles, welcher das Nicol'sche Prisma nicht durchsetzen kann. Die aus dem Nicol'schen Prisma austretenden parallel PP' gerichteten, aus beiden Strahlen entstandenen Componenten müssen sich dann zu einer Resultirenden zusammensetzen, welche der im Krystall entstandenen Phasendifferenz entspricht. Nehmen wir an, in einem bestimmten Momente schwinge das in den Krystall eintretende Licht nach OP,

Fig. 240.



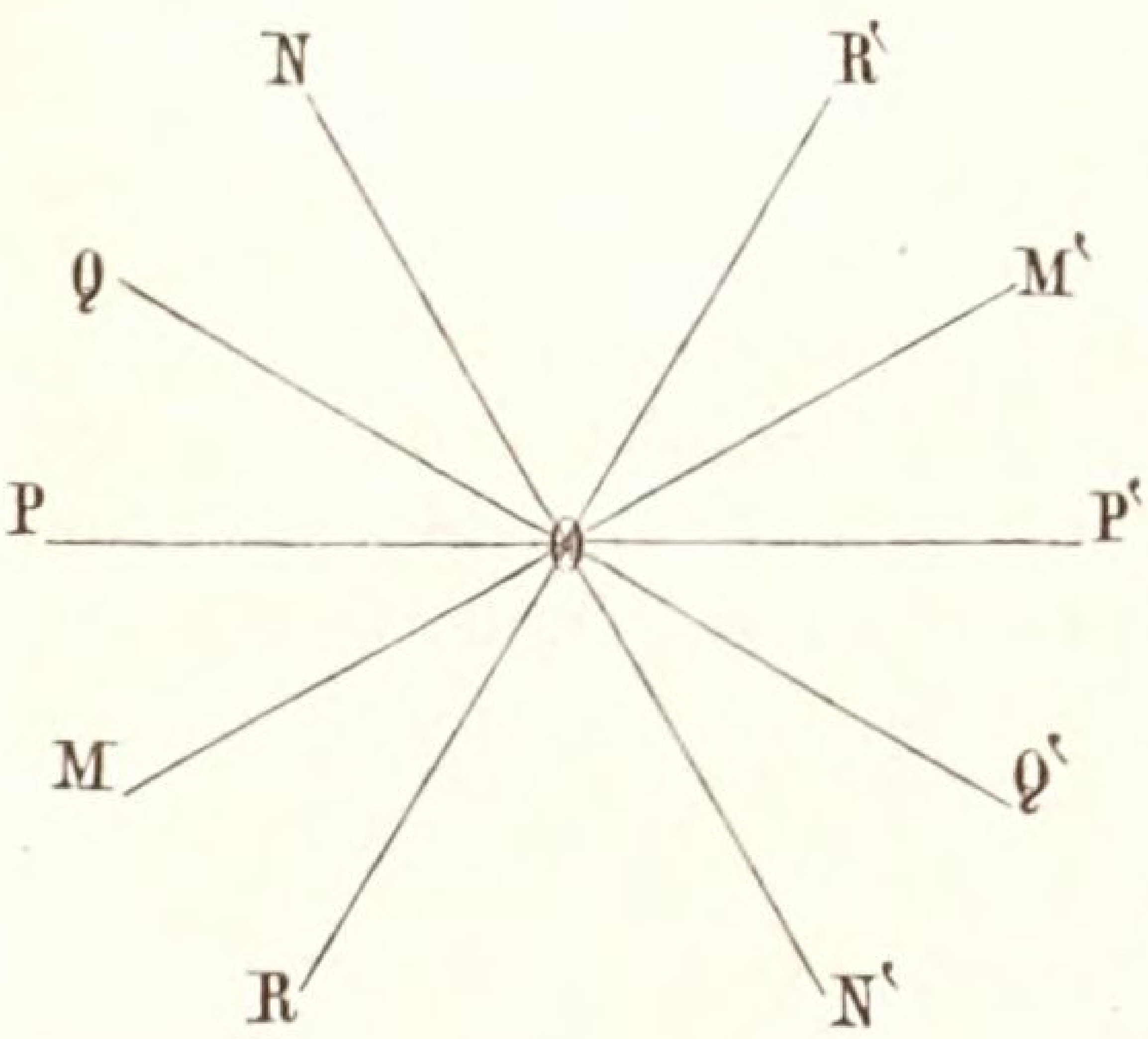
die aus ihm hervorgehenden Componenten schwingen dann nach OQ und OR; ist nun die Phasendifferenz, welche die Strahlen im Krystall erhalten, ein Vielfaches einer ganzen Wellenlänge, so schwingen die austretenden Strahlen wieder nach OQ und OR und die aus dem Nicol hervortretenden, parallel PP' gerichteten Schwingungen geschehen beide nach OP. Die resultirende Amplitude muss also die Summe der Theilamplituden sein. Ist aber die Phasendifferenz der aus dem Krystall hervortretenden Strahlen ein ungerades Vielfaches einer halben Wellenlänge, so geschehen die Schwingungen des austretenden Lichtes gleichzeitig nach OQ und OR', oder nach OQ' und OR. Die aus dem Nicol hervortretenden Schwingungen geschehen dann in dem einen der beiden Strahlen nach OP, in dem andern nach OP', die resultirende Amplitude ist also die Differenz der Theilamplituden. Die resultirende Amplitude hängt mithin von der im Krystall erhaltenen Phasendifferenz ab. Das ist so lange der Fall, als die Schwingungsebene des durch den Nicol hindurchgehenden Strahles in dem Quadranten ROQ liegt. Drehen wir den Nicol, so dass die Schwingungsebene des durch ihn hindurchtretenden Strahles in die Lage OQ kommt, so geht von den nach OR gerichteten Schwingungen nichts durch denselben hindurch, es findet also in dem austretenden Lichte gar keine Interferenz statt. Wird der Nicol weiter gedreht, so dass die Schwingungsebene des austretenden Lichtes in den Quadranten QOR' kommt, so muss zur Bestimmung der schliesslichen Phasendifferenz zu der im Krystall erhaltenen eine halbe Wellenlänge hinzu addirt werden. Nehmen wir z. B. an, die Schwingungsrichtung des den Nicol durchsetzenden Lichtes sei OS, so werden die Schwingungen, welche in dem Krystall eine Phasendifferenz von einem Vielfachen einer ganzen Wellenlänge erhalten haben, die also nach ihrem Austritt aus dem Krystall nach OQ und OR gehen, in dem Nicol Componenten liefern nach OS und OS', die resultirende Amplitude ist also die Differenz der Theilamplituden. Ist die Phasendifferenz im Krystall eine halbe Wellenlänge geworden, so sind die in den Nicol eintretenden Schwingungen OQ und OR', sie liefern beide Componenten nach OS, die resultirende Amplitude ist die Summe der Theilamplituden.

Es folgt somit, dass wenn die schliessliche Polarisationsebene, auf welche die im Krystall senkrecht zu einander polarisirten Strahlen zurückgeführt werden, in demselben Quadranten zwischen den zu einander senkrecht polarisirten Schwingungen liegt wie die ursprüngliche Polarisationsebene, die Interferenz mit der auf den von den beiden Strahlen zurückgelegten Wegen eingetretenen Phasendifferenz erfolgt. Wird dagegen ein polarisirter Strahl in zwei senkrecht zu einander polarisirte zerlegt, und werden diese dann auf eine gemeinsame Polarisationsebene zurückgebracht, welche in einem andern Quadranten zwischen den Ebenen der getrennten Strahlen liegt, wie die Polarisationsebene des ursprünglichen Strahles, so muss zu der auf den getrennten Wegen erhaltenen Phasendifferenz eine halbe Wellenlänge addirt werden.

Aus diesem Satze und der Beschaffenheit des natürlichen, als in unmessbar kurzer Zeit nach allen Azimuthen polarisirten Lichtes folgt nun auch unmittelbar das letzte Gesetz. Nehmen wir an, in die Krystallplatte, deren Axe parallel OQ Fig. 241 ist, trete natürliches Licht und PP' sei die Schwingungsebene des Nicols, in welchem die im Krystall zerlegten

Strahlen schliesslich wieder vereinigt werden. In dem natürlichen Lichte ist dann in einem gegebenen Momente die Schwingungsrichtung OM, die sich daraus ergebende schliessliche resultirende Amplitude ist die Summe der in den beiden polarisirten Strahlen vorhandenen Theilamplituden; eine unmessbar kleine Zeit später ist die eintretende Schwingung nach ON gerichtet, die resultirende Amplitude ist die Differenz der Theilamplituden u. s. f. Jeder Schwingung, die als resultirende die Summe der Theilamplituden gibt, entspricht eine andere, welche die Differenz gibt, welches auch die auf den getrennten Wegen erlangte Phasendifferenz ist. Die beiden Strahlen werden sich daher unter allen Umständen zu einer mittlern Helligkeit zusammensetzen.

Fig. 241.



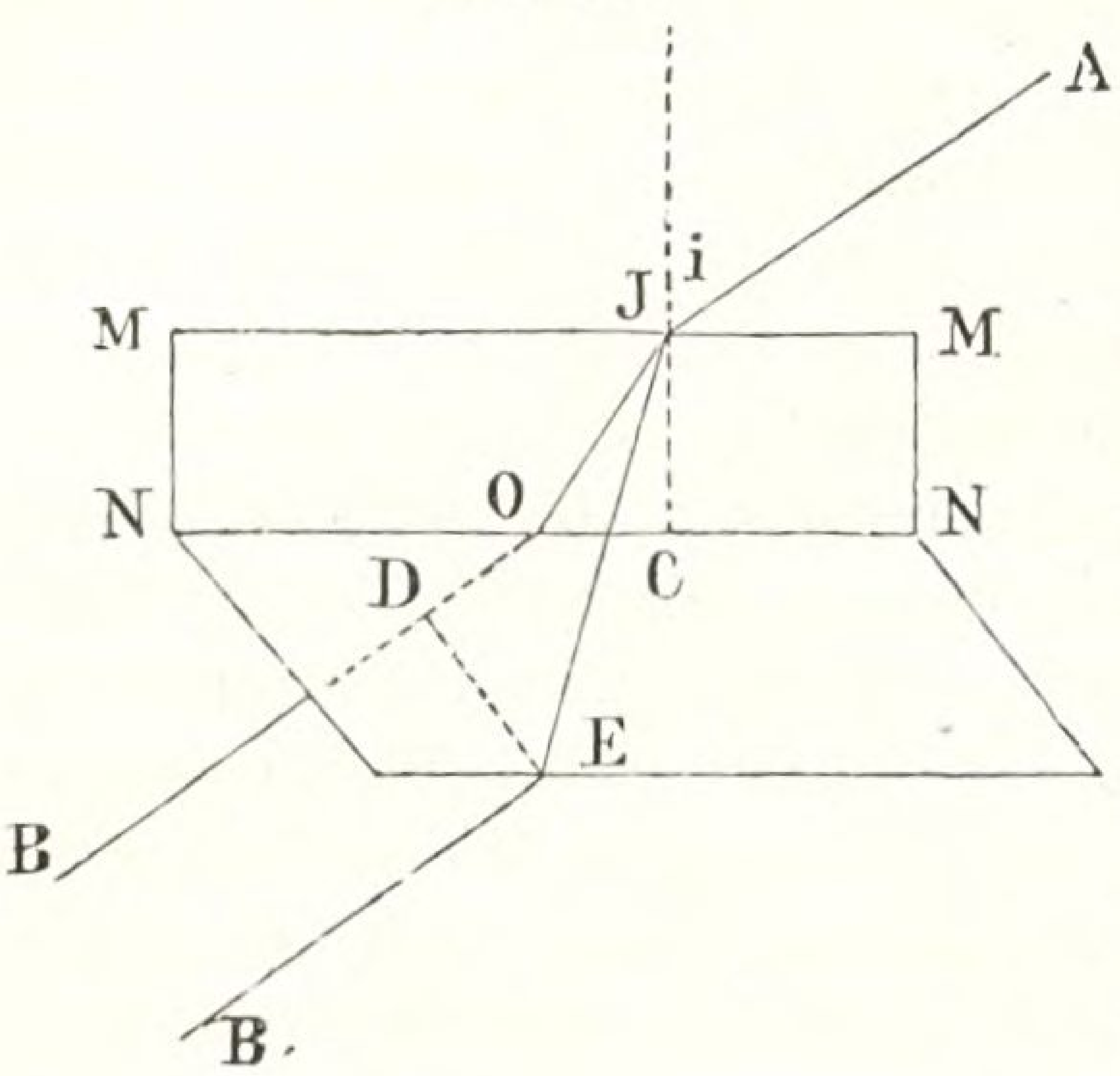
Das zweite der erwähnten Gesetze ist also nicht so zu verstehen, dass die Vibrationen, welche aus zwei zu einander senkrecht polarisirten Strahlen auf eine Polarisationsebene gebracht werden, überhaupt nicht auf einander einwirken, wenn sie aus natürlichem Lichte entstanden sind, sondern vielmehr so, dass die Wirkungen, weil sie von den einzelnen Schwingungen her entgegengesetzt sind, sich aufheben.

§. 185.

Farbenerscheinungen bei dem Durchgange polarisirten Lichtes durch Krystallplatten. Die im vorigen §. durchgeführte Betrachtung zur Ableitung des ersten der beiden dort besprochenen Gesetze von Fresnel und Arago lässt schon erkennen, dass wir, wenn ein polarisirter Lichtstrahl durch irgend eine Krystallplatte hindurchgeht, und dann von einem Nicol aufgenommen wird, Interferenzerscheinungen erhalten müssen, welche von der Dicke der Platte, der Lage der Axe des Krystalls gegen die Polarisationsebene des einfallenden Lichtes und der Lage der Polarisationsebene des letzten Nicols gegen die des einfallenden Lichtes abhängig sein müssen. Ehe wir die Erscheinungen in einzelnen speciellen Fällen betrachten, wollen wir die Bedingungen dieser Interferenz im Allgemeinen ableiten. Wir setzen voraus, dass irgend ein Bündel von Lichtstrahlen nach irgend einer Ebene polarisirt auf eine Krystallplatte falle, die irgendwie aus einem Krystalle herausgeschnitten sei, der einaxig oder zweiaxig ist. Sei AJ Fig. 242 ein Strahl dieses Bündels, der unter dem Einfallswinkel i die Platte treffe. Dieser Strahl wird dann im Allgemeinen in zwei zerlegt, von denen der eine JO in der Ebene MN, welche wenn der Krystall ein einaxiger ist, mit der Einfallsebene zusammenfällt, sich fortpflanzt, der andere JE in einer andern Ebene liegt; nach dem Austritte aus dem Krystall pflanzen sich dieselben parallel mit der bei diesen Brechungen erhaltenen Phasendifferenzen fort, welche sie auch behalten, wenn sie durch den zweiten Nicol auf eine und dieselbe Polarisationsebene zurückgeführt werden. Zur Bestimmung dieser Phasendifferenz legen wir durch die Austrittsstelle des Strahles JE eine zu den beiden austretenden Strahlen EB'

und OB senkrechte Ebene, von der aus dann die Strahlen parallel mit der Phasendifferenz weiter gehen, mit welcher sie in diese Ebene eintreten. Von dem Punkte J, in welchem sich die Strahlen getrennt haben, hat dann der eine im Krystall den Weg JO und in der Luft noch den Weg OD zurückgelegt, während der andere nur den Weg JE im Krystall zurückgelegt hat.

Fig. 242.



Es sei die Amplitude der einfallenden Welle gleich 1 und die Gleichung der Bewegung an der Eintrittsstelle J

$$Y = \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right).$$

Nun sei α der Winkel, den die Polarisationsebene des einfallenden Lichtes mit der Polarisationsebene des Strahles JO im Krystall bilde, und sei ferner λ_1 die Länge, welche auf dem Strahle JO der Länge einer Welle entspreche, welche sich nach den auch für zweiaxige Krystalle gültigen Bemerkungen des §. 178 bestimmen lässt; dann wird die Gleichung des Strahles JO im Punkte D

$$Y_1 = \cos\alpha \,.\, \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{JO}{\lambda_1} - \frac{OD}{\lambda}\right).$$

Nennen wir die Länge des Halbmessers der Wellenfläche, dem der Strahl JO entspricht, ϱ_1, so heisst das, der Strahl pflanzt sich in dem Krystall um die Länge ϱ_1 fort, während er sich in Luft um die Strecke 1 fortpflanzt. Die Strecke λ_1, die einer Wellenlänge der zum Strahl JO gehörigen Welle entspricht, verhält sich demnach zur Wellenlänge λ des Lichtes in der Luft, wie ϱ zu 1, denn in derselben Zeit, in der sich das Licht in der Luft um eine Wellenlänge fortpflanzt, pflanzt sich auch die Welle im Krystall um eine Wellenlänge fort. Wir erhalten daher

$$\lambda_1 : \lambda = \varrho_1 : 1; \qquad \lambda_1 = \varrho_1 \,.\, \lambda.$$

Bildet nun die Polarisationsebene des zweiten Nicols mit derjenigen der Polarisationsebene des Strahles JO den Winkel α', so wird die Gleichung des Strahles nach dem Durchtritte durch den zweiten Nicol in einem Abstande x' von D

$$Y_2 = \cos\alpha' \cos\alpha \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x + x'}{\lambda} - \left[\frac{JO}{\varrho_1 \lambda} + \frac{OD}{\lambda}\right]\right).$$

Da die Polarisationsebene des Strahles JE senkrecht zu derjenigen von JO ist, es würde JR Fig. 240 sein, wenn JQ diejenige von JO ist, so bildet dieselbe mit derjenigen des einfallenden Lichtes den Winkel $90^0 - \alpha$. Bezeichnen wir nun die Strecke, welche auf dem Strahle JE der Länge einer Welle entspricht, mit $\lambda_2 = \varrho_2 \lambda$, so ist die Gleichung des Strahles JE in der Austrittsstelle E

$$Z_1 = \sin\alpha \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} - \frac{JE}{\lambda \varrho_2}\right).$$

Rechnen wir nun den Winkel α' positiv, wenn die Polarisationsebene des

letzten Nicols auf derselben Seite der Polarisationsebene von JO liegt, wie die ursprüngliche Polarisationsebene, dagegen negativ, wenn sie auf der andern Seite liegt, so ist der Winkel, den die Polarisationsebene des zweiten Nicols mit der des Strahles JE bildet, gleich $90 - \alpha'$ und die Gleichung wird nach dem Durchtritt durch den zweiten Nicol

$$Z_2 = \sin\alpha' \sin\alpha \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x + x'}{\lambda} - \frac{JE}{\lambda\varrho_2}\right).$$

Da die Schwingungen Y_2 und Z_2 parallel gerichtet sind, so ist die aus ihnen resultirende Bewegung die Summe der Theilbewegungen; die resultirende Amplitude ist somit nach dem ersten Satze der Interferenz schwingender Bewegungen gegeben durch

$$R^2 = \cos^2\alpha' \cos^2\alpha + \sin^2\alpha' \sin^2\alpha + 2\sin\alpha' \cos\alpha' \sin\alpha \cos\alpha \cos 2\pi \frac{OD + \frac{JO}{\varrho_1} - \frac{JE}{\varrho_2}}{\lambda},$$

oder durch eine bekannte Umformung, wenn wir gleichzeitig

$$OD + \frac{JO}{\varrho_1} - \frac{JE}{\varrho_2} = \varDelta$$

setzen,

$$R^2 \cos^2(\alpha - \alpha') - \sin 2\alpha' \sin 2\alpha \,.\, \sin^2 \pi \frac{\varDelta}{\lambda}.$$

Anstatt des Winkels α' können wir den Winkel ψ einführen, welchen die Polarisationsebene des zweiten Nicols mit derjenigen des in den Krystall eintretenden Lichtes bildet. Rechnen wir dann alle Winkel von der ersten Polarisationsebene aus, so ist

$$\alpha' = \alpha - \psi,$$

da wir vorhin das Vorzeichen von α' so definirten, dass es positiv sein solle, wenn die neue Polarisationsebene an derselben Seite der Polarisationsebene des Strahls JO liegt, als die ursprüngliche. Setzen wir diesen Werth in die Gleichung für R^2 ein, so wird schliesslich

$$R^2 = \cos^2\psi - \sin 2\alpha \,.\, \sin(2\alpha - 2\psi) \sin^2 \pi \frac{\varDelta}{\lambda}.$$

Die für die resultirende Intensität massgebenden Grössen sind somit ψ, α und $\varDelta$. Die Werthe der Phasendifferenz $\varDelta$ hängen nun wesentlich von der Natur des Krystalles, ob einaxig oder zweiaxig, und von der Richtung ab, in welcher die Platte aus den Krystallen herausgeschnitten ist. Im Allgemeinen ist dieser Ausdruck periodisch, da $\varDelta$ von dem Einfallswinkel i abhängt; lassen wir also das Licht, nachdem es den zweiten Nicol verlassen hat, in unser Auge eindringen, oder fangen es auf einem Schirme auf, so werden wir im Allgemeinen bei Anwendung homogenen Lichtes helle und dunkle, bei weissem Licht farbige Curven erhalten. Die so berechnete Intensität gibt uns nämlich die Intensität jedes austretenden Strahles JA, wie folgende Ueberlegung zeigt. Die Intensität R^2 ist berechnet, wie wenn die aus dem einfallenden Strahl AJ entstehenden gebrochenen Strahlen EB' und OB vollständig zusammenwirkten, während sie in Wirklichkeit in einer gewissen Entfernung parallel neben einander gehen. Denken wir uns nun aber in Fig. 242 ein Strahlenbündel von unten her einfallen, so liegen in demselben jedenfalls zwei Strahlen so

zu einander, wie die beiden aus AJ entstehenden, wenn das Licht in dieser Richtung einfiele. Diese beiden Strahlen liefern dann aber aus ihren Componenten OJ und EJ den austretenden Strahl AJ, der somit genau die soeben berechnete Zusammensetzung hat.

Wir betrachten in den folgenden §§. die interessantesten Fälle der durch Krystallplatten bewirkten Interferenzerscheinungen.

§. 186.

Farbenringe in senkrecht zur Axe geschnittenen Platten einaxiger Krystalle. Bringt man zwischen zwei Nicol'sche Prismen oder zwischen zwei Turmalinplatten eine senkrecht zur Axe geschnittene planparallele Platte eines einaxigen Krystalls und sieht dann durch diese Combination nach einer hellen Fläche, so dass ein convergirendes Strahlenbündel in das Auge dringt, so sieht man, wenn die Polarisationsebene des zweiten Nicols derjenigen des ersten parallel ist, ein System farbiger Kreise, welches von einem hellen Kreuze durchsetzt ist. Färbt man das Licht homogen, so erhält man einfach helle und dunkle, von dem Kreuze durchsetzte Kreise, wie Fig. 243a zeigt. Die Mitte des Gesichtsfeldes ist hell, um die helle Mitte legt sich ein dunkler Ring, um diesen ein heller u. s. f.

Fig. 243 a.

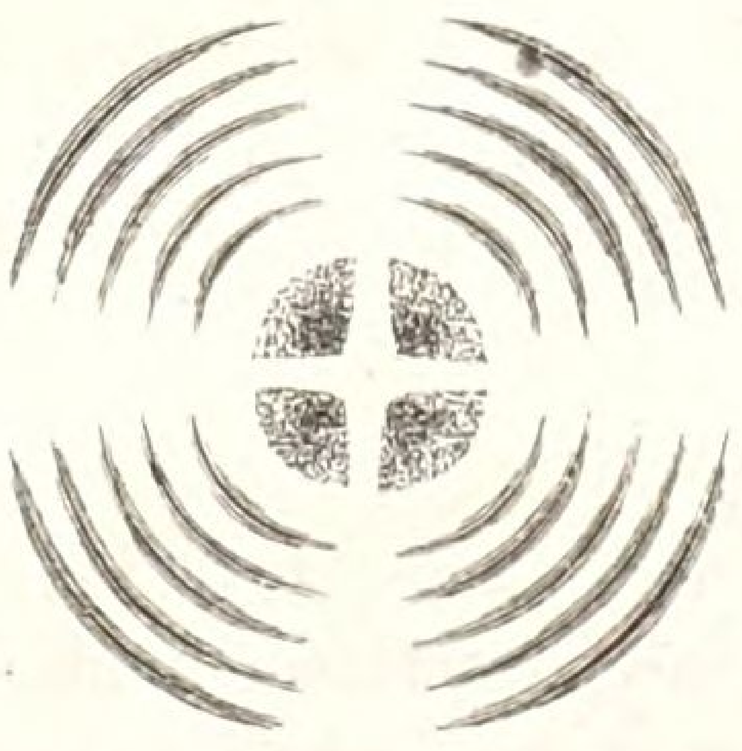
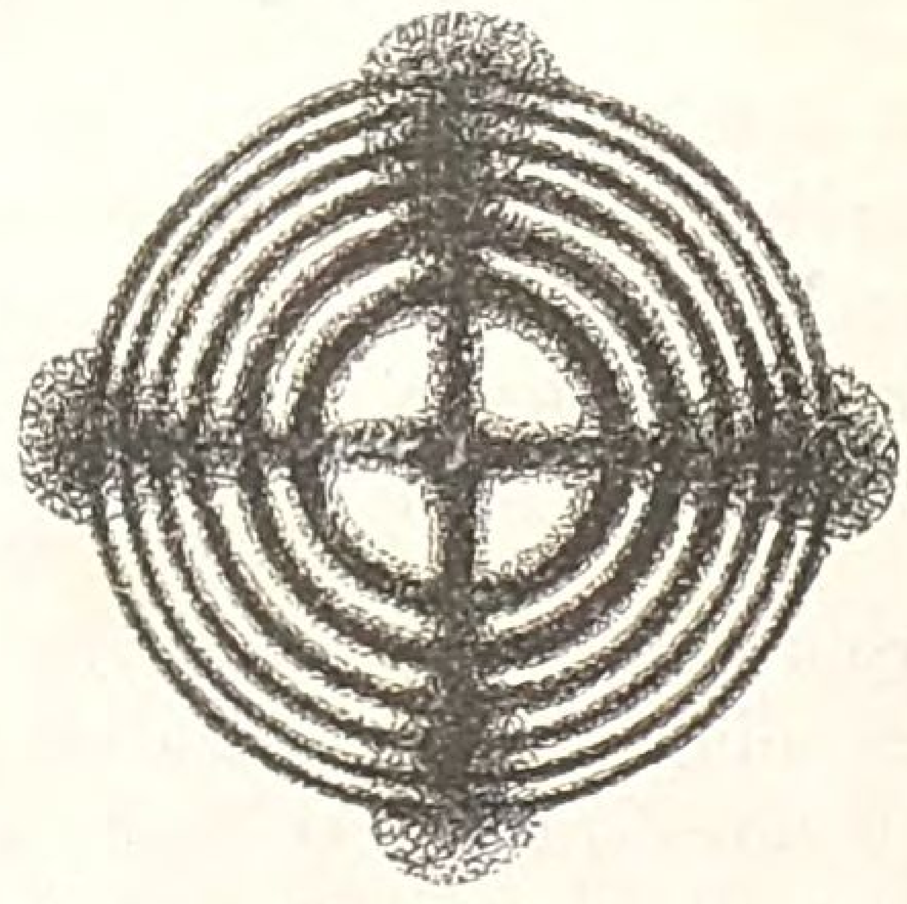


Fig. 243 b.



Ist dagegen die Polarisationsebene des zweiten Nicols zu derjenigen des ersten senkrecht, so sieht man bei homogenem Lichte das von einem dunklen Kreuze durchsetzte Ringsystem, Fig. 243b, die Mitte ist dunkel, um die dunkle Mitte legt sich ein heller Ring u. s. f. Die Kreuzesarme sind in beiden Fällen der Polarisationsebene des ersten Nicols parallel und zu derselben senkrecht.

Die Ringe werden enger, je kleiner die Wellenlängen des angewandten Lichtes sind; daraus erklären sich sofort die farbigen Ringe bei Anwendung weissen Lichtes. Die Farbenfolge ist dieselbe wie bei den Newton'schen Ringen, und zwar bei gekreuzten Nicols wie bei den Ringen im reflectirten, bei parallelen wie bei den Ringen im durchgelassenen Lichte. Im zweiten Falle sind also die Ringe complementär gefärbt zu denen im ersten.

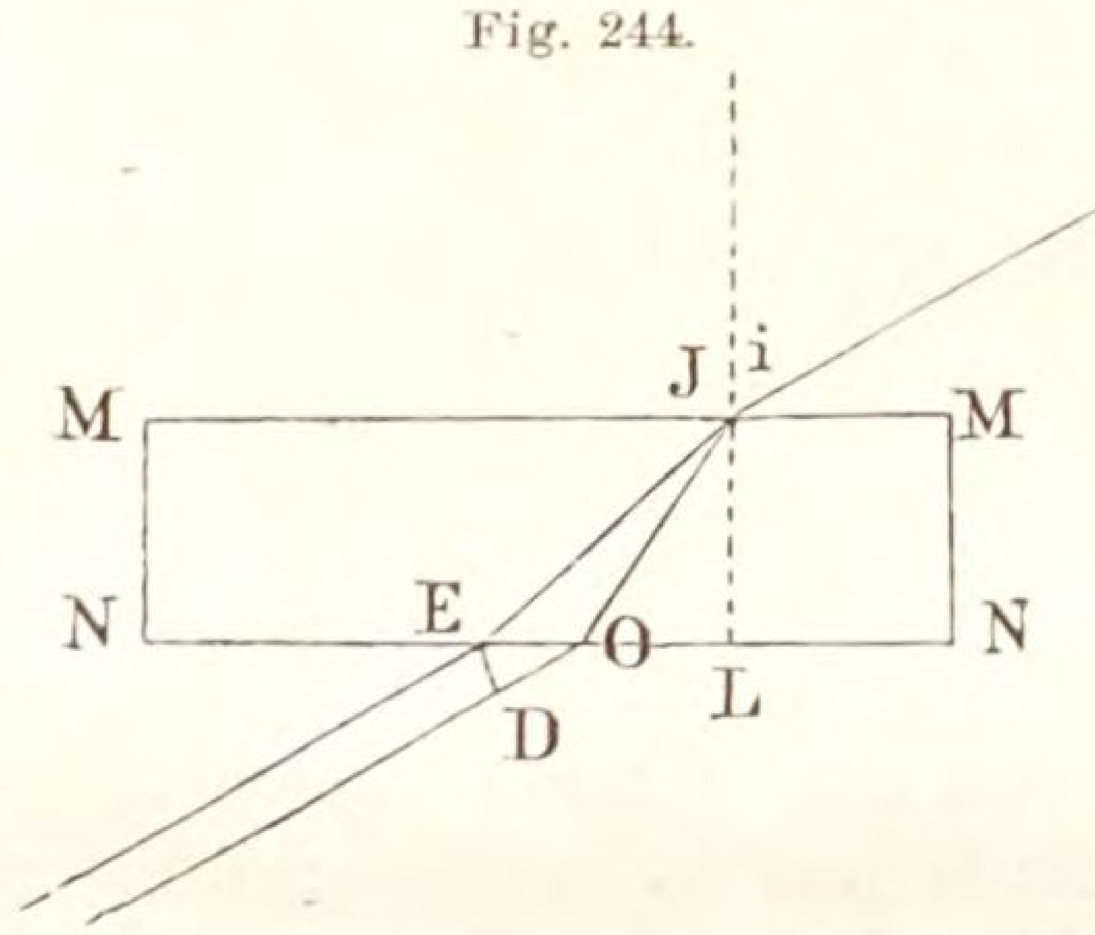
Die Ringe werden ferner enger mit zunehmender Dicke der Krystallplatte.

Schliesslich zeigt sich, dass die Helligkeitsunterschiede zwischen den hellen und dunklen Ringen um so grösser, dass deshalb bei weissem Lichte die Farben auch um so reiner werden, je weiter man sich auf den Ringen von den Kreuzesarmen entfernt.

Um gemäss den Entwicklungen des vorigen §. die Interferenzen in

diesem Falle zu bestimmen, haben wir zu beachten, dass wenn ein convergentes Strahlenbündel die Platte durchsetzt, die Einfallsebenen alle möglichen Lagen haben. Denken wir uns um den Punkt, wo die Axe des Strahlenbündels die Platte trifft, einen Kreis beschrieben, so erhalten wir die Einfallsebene des Strahles, der in irgend einem Punkte dieses Kreises einfällt, wenn wir den Radius zu diesem Punkte ziehen und durch denselben eine zur Platte senkrechte Ebene legen. Daraus folgt dann, da die Platte senkrecht zur Axe des Krystalls geschnitten ist, dass jede Einfallsebene ein Hauptschnitt des Krystalls ist. Bezeichnen wir dann den Winkel, welchen die so bestimmte Einfallsebene eines Strahles mit seiner Polarisationsebene bildet, mit α, so folgt, dass jeder Strahl beim Eintritt in den Krystall in einen ordentlichen gebrochen wird, JO, Fig. 244, dessen Amplitude proportional $\cos \alpha$, und in einen ausserordentlichen, JE, dessen Amplitude proportional $\sin \alpha$ ist, und der ganz in der Einfallsebene bleibt, da diese ein Hauptschnitt des Krystalles ist. Diese Doppelbrechung folgt unmittelbar daraus, dass jede in den Krystall eintretende Schwingung in ihre Componente parallel und senkrecht zum Hauptschnitt zerlegt wird. In unserm Ausdruck für die Phasendifferenz der Strahlen

Fig. 244.



$$\varDelta = OD + \frac{JO}{\varrho_1} - \frac{JE}{\varrho_2}$$

ist somit ϱ_1 die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des ordentlichen Strahles, die wir stets mit ω bezeichnet haben. Den Werth von ϱ_2 liefert uns die Huyghens'sche Construction des ausserordentlichen Strahles, nach welcher ϱ_2 der in die Richtung von JE fallende Halbmesser des Wellenellipsoides ist. Nennen wir den Winkel $LJE = r'$, so ist, da die Axe mit dem Einfallsloth zusammenfällt,

$$\varrho^2_2 = \frac{\omega^2 \varepsilon^2}{\varepsilon^2 \cos^2 r' + \omega^2 \sin^2 r'},$$

wenn ε die Fortpflanzungsgeschwindigkeit senkrecht zur Axe ist.

Nennen wir die Dicke der Krystallplatte d, den Brechungswinkel des ordentlichen Strahles r, so wird weiter

$$OD = EO \,.\, \cos DOE = EO \,.\, \sin i;$$

$$EO = \frac{OJ \,.\, \sin OJE}{\sin OEJ} = \frac{d}{\cos r} \, \frac{\sin (r' - r)}{\cos r'};$$

setzen wir diesen Werth von EO in den Ausdruck für OD, so wird

$$OD = d\,(\sin i \operatorname{tang} r' - \sin i \,.\, \operatorname{tang} r)$$

$$\frac{JO}{\varrho_1} = \frac{d}{\omega \,.\, \cos r}.$$

Nach §. 178 ist nun

$$\operatorname{tang} r' = \frac{\varepsilon^2 \sin i}{\omega \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 i}}.$$

Entwickeln wir darnach $\sin r'$ und $\cos r'$ und setzen die Werthe in die Gleichung für ϱ_2, so wird

$$\varrho_2 = \sqrt{\omega^2 + (\varepsilon^2 - \omega^2) . \varepsilon^2 \sin^2 i},$$

und

$$\frac{JE}{\varrho_2} = \frac{d}{\varrho^2 \cos r'} = \frac{d}{\omega \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 i}}.$$

Damit wird

$$\Delta = d \left(\sin i \frac{\varepsilon^2 \sin i}{\omega \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 i}} - \sin i \frac{\sin r}{\cos r} + \frac{1}{\omega \cos r} - \frac{1}{\omega \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 i}} \right).$$

Da ω die Geschwindigkeit des ordentlichen Strahles im Krystall, bezogen auf jene in Luft gleich 1 ist, so ist

$$\sin r = \omega \sin i \qquad \cos r = \sqrt{1 - \omega^2 \sin^2 i}.$$

Setzen wir diese Werthe in die Gleichung für Δ, so wird nach einigen leicht zu übersehenden Reductionen

$$\Delta = \frac{d}{\omega} \left(\sqrt{1 - \omega^2 \sin^2 i} - \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 i} \right),$$

oder die Phasendifferenz Δ hängt bei einem gegebenen Krystall nur ab vom Einfallswinkel i oder was dasselbe ist, von dem Winkel, welchen die Strahlen des den Krystall durchdringenden, nach dem Auge convergirenden Strahlenbündels mit der Axe des Bündels bilden. Die auf dem Mantel eines geraden Kreiskegels liegenden Strahlen bestehen aus je zwei, deren Phasendifferenz für den ganzen Kegelmantel denselben Werth hat. Da ein solcher Kreiskegel die Platte in einem Kreise schneidet, dessen Mittelpunkt dort liegt, wo die Axe des Bündels die Platte schneidet, so folgt, dass die in einem solchen Kreise austretenden Strahlen gleiche Phasendifferenz haben.

Unsere Gleichung für die resultirende Intensität war nun

$$R^2 = \cos^2 \psi - \sin 2\alpha \sin (2\alpha - 2\psi) \sin^2 \pi \frac{\Delta}{\lambda};$$

betrachten wir zuerst den Fall, dass die beiden Polarisationsebenen parallel sind, dass also ψ gleich Null ist, so wird

$$R^2 = 1 - \sin^2 2\alpha . \sin^2 \pi \frac{\Delta}{\lambda}.$$

Die Gleichung zeigt, dass zunächst für $\alpha = 0$ und $\alpha = 90^0$ das zweite Glied Null, somit $R^2 = 1$ ist. Parallel und senkrecht zur Polarisationsebene des einfallenden Lichtes sind also keine Maxima und Minima der Lichtstärke vorhanden, welches auch der Werth von Δ ist. Die ganze Erscheinung muss, wie es die Erfahrung zeigt, von einem weissen Kreuz durchsetzt sein. Ist α grösser als Null und kleiner als 90^0, so wird überall weiter $R^2 = 1$, wo Δ gleich Null oder einem Vielfachen von λ ist, dagegen wird

$$R^2 = 1 - \sin^2 2\alpha,$$

wo Δ ein ungerades Vielfaches von $\frac{1}{2}\lambda$ ist. Da wir nun sahen, dass die Phasendifferenz in Kreisen, welche um die Durchtrittsstelle der Axe des Strahlenbündels gelegt sind, dieselbe ist, so folgt, dass sich um diesen Punkt, der hell ist, dunkle und helle Kreise legen müssen, wenn homo-

genes Licht angewandt wird. Die dunklen Kreise werden um so dunkler, je näher α dem Werthe 45^0 kommt, dort ist sie gleich Null; nähert man sich von dort aus den Kreuzesarmen, so wächst die Helligkeit der dunklen Ringe bis 1. Die Ringe müssen also um so weniger deutlich werden, je mehr man sich den Kreuzesarmen nähert, oder das weisse Kreuz muss sich nach den Seiten ausbreiten.

Die Oeffnung des Kegels, dem ein bestimmter Kreis angehört, ist gleich $2\,i$, der Radius des betreffenden Kreises ist somit proportional tang i, oder auch, da es sich immer nur um kleine Einfallswinkel handelt, proportional sin i. Nehmen wir an, dass wir $\sin^4 i$ vernachlässigen können, so wird

$$\varDelta = \frac{d}{2\,\omega}\left(\varepsilon^2 - \omega^2\right) \sin^2 i,$$

somit für die dunklen Ringe, denen $\varDelta = (2\,n - 1)\,\frac{\lambda}{2}$ entspricht,

$$\sin^2 i = (2\,n - 1)\,\frac{\omega}{\varepsilon^2 - \omega^2}\,\frac{\lambda}{d}.$$

Der Radius der Ringe ist somit der Quadratwurzel aus der Dicke der Platte umgekehrt, und der Quadratwurzel aus der Länge der Wellen des angewandten Lichtes direkt proportional. Man sieht demnach, dass die Beziehung zwischen Ringdurchmesser und Wellenlänge dieselbe ist, wie bei den Newton'schen Ringen im durchgelassenen Lichte. Bei Anwendung weissen Lichtes müssen sich deshalb um die helle Mitte farbige Ringe in der Reihenfolge wie bei den Newton'schen Ringen im durchgelassenen Licht legen, deren Färbung um so reiner ist, je mehr man sich von den Kreuzesarmen der Mitte des Raumes zwischen den Kreuzesarmen nähert.

Sind die beiden Nicols gekreuzt, so ist $\psi = 90^0$ und

$$R^2 = \sin^2 2\,\alpha \sin^2 \pi\,\frac{\varDelta}{\lambda},$$

die Ringerscheinung muss der eben betrachteten complementär sein, anstatt von dem weissen muss sie von einem verbreiterten schwarzen Kreuze durchschnitten werden, die hellen Ringe erscheinen dort, wo vorher die dunklen Ringe waren, die Farbenfolge muss dieselbe sein wie bei den Newton'schen Ringen im reflectirten Lichte. Den Grund, dass hier an den Stellen, in welchen die Phasendifferenz ein Vielfaches von λ ist, Dunkelheit entsteht, erkennen wir in dem ersten der §. 184 besprochenen Gesetze, es muss, wenn die Nicols zu einander senkrecht stehen, zu der auf den verschiedenen Wegen erlangten Phasendifferenz eine halbe Wellenlänge hinzu addirt werden.

Bei senkrecht zur Axe geschnittenen Platten einaxiger Krystalle zeigen sich Interferenzerscheinungen nur, wenn man ein convergentes Strahlenbündel durch die Platte gehen lässt. Bei Anwendung parallelen Lichtes, welches man senkrecht zur Platte hindurchgehen lässt, ist $\sin i = 0$, somit $\varDelta = 0$ und die Intensität des austretenden Lichtes ist $\cos^2 \psi$. Lässt man paralleles Licht unter einem Einfallswinkel i durchgehen, so ist $\varDelta$ an allen Stellen der Platte dasselbe, auch dann können keine Curven auftreten.

§. 187.

Erscheinungen in Blättchen und Platten, welche parallel der Axe aus einaxigen Krystallen geschnitten sind. Wenn man Blättchen und Platten parallel der Axe aus einaxigen Krystallen herausschneidet, so tritt immer eine Doppelbrechung ein, sowohl wenn wir ein convergentes als wenn wir ein paralleles Strahlenbündel hindurchgehen lassen, vorausgesetzt, dass die Axe des Krystalls nicht der Polarisationsebene des einfallenden Lichtes parallel oder zu ihr senkrecht ist.

Man kann sehr leicht die Phasendifferenz der durch Doppelbrechung aus einem eintretenden Strahl entstehenden Strahlen erhalten, wenn man ein paralleles Strahlenbündel senkrecht zur Platte hindurchgehen lässt. Der eintretende Strahl zerfällt in den ordentlichen, der die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ω hat, und in den ausserordentlichen, der sich senkrecht zur Axe fortpflanzt. Da in dem Falle Welle und Strahl zusammenfallen, ist die Geschwindigkeit der Fortpflanzung des ausserordentlichen Strahles gleich ε. In dem §. 185 ganz allgemein für $\varDelta$ abgeleiteten Werthe ist somit $\varrho_1 = \omega$, $\varrho_2 = \varepsilon$. Der Weg JO sowohl als JE ist, da beide Strahlen senkrecht durch die Platte gehen, gleich der Dicke d des Krystalles, und aus demselben Grunde ist die in §. 185 mit OD bezeichnete Wegedifferenz der Strahlen ausserhalb des Krystalles gleich Null, somit ist

$$\varDelta = d\left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Die Polarisation des ordentlichen Strahles ist die Ebene, welche die Axe des Krystalls enthält; bildet also die zur Platte senkrechte, die Axe aufnehmende Ebene mit der untern Polarisationsebene den Winkel α, so ist die resultirende Intensität

$$R^2 = \cos^2\psi - \sin 2\alpha \sin 2(\alpha - \psi) \sin^2 \pi \frac{d}{\lambda}\left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Der Ausdruck zeigt, dass bei Anwendung homogenen Lichtes die Helligkeit überall die gleiche ist, und dass sie abhängt von dem Winkel ψ, dem Winkel α, den die Krystallaxe mit der Polarisationsebene bildet, ferner von der Dicke der Platten und den Constanten der Doppelbrechung. Zunächst sieht man, dass es ganz gleichgültig ist, ob eine Krystallplatte in den Weg des Lichtes gebracht wird oder nicht, wenn man die Platte so legt, dass $\alpha = 0$ oder $\alpha = 90^0$ ist, denn in beiden Fällen ist $R^2 = \cos^2\psi$, hängt also nur von dem Winkel ab, den die Polarisationsebenen der beiden Nicols mit einander bilden. Den grössten Einfluss hat das zweite Glied, wenn $\alpha = 45^0$ ist, da dann $\sin 2\alpha = 1$, somit

$$R^2 = \cos^2\psi - \cos 2\psi \sin^2 2\pi \frac{d}{\lambda}\left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Die Intensität wird dann für parallele Nicols, $\psi = 0$,

$$R^2 = 1 - \sin^2 \pi \frac{d}{\lambda}\left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\varepsilon}\right),$$

und für gekreuzte Nicols, $\psi = 90^0$,

$$R^2 = \sin^2 \pi \frac{d}{\lambda}\left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Die Erscheinungen sind somit complementär bei gekreuzten Nicols zu denen bei parallelen.

Bei gekreuzten Nicols ist Dunkelheit, wenn

$$d\left(\frac{1}{\omega}-\frac{1}{\varepsilon}\right)=n\lambda,$$

dagegen Helligkeit, wenn die Differenz ein ungerades Vielfaches von $\frac{1}{2}\lambda$ ist.

Wendet man weisses Licht an, so werden deshalb alle Farben ausgelöscht, für welche diese Differenz irgend ein Vielfaches der Wellenlänge ist, die Platte muss somit farbig erscheinen, in der Resultirenden aus den nicht ausgelöschten Farben.

Man findet alle diese Folgerungen bestätigt, wenn man zwischen die Nicols ein dünnes Krystallblättchen bringt, und das Gesichtsfeld so klein macht, dass nur centrale Strahlen in das Auge dringen. Bei Anwendung homogenen Lichtes erscheinen die Platten hell oder dunkel, bei weissem Lichte gefärbt, und zwar ist die Färbung bei parallelen Nicols complementär zu derjenigen bei gekreuzten Nicols. Die Färbung hängt ausserdem von der Dicke der Blättchen ab und von dem Grade der Doppelbrechung, also dem Unterschiede von ω und ε.

Diese Färbungen treten indess bei den Platten nur so lange auf, als die Dicke einen sehr kleinen Werth hat, der um so kleiner sein muss, je grösser die Differenz von ω und ε ist. Man sieht leicht, dass der Grund dieser Erscheinung derselbe ist, wie für die, dass bei den Newton'schen Farbenringen von einer gewissen Dicke der Schicht an keine farbigen Ringe mehr auftreten. Es können, wie eine einfache Ueberlegung ergibt, keine Färbungen mehr erscheinen, wenn

$$d\left(\frac{1}{\omega}-\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

gleich der doppelten Dicke der Luftschicht ist, bei welcher die Newton'schen Farbenringe verschwinden. Für eine Quarzplatte tritt das z. B. ein, wenn die Dicke 0,5 Mm. wird, für eine Kalkspathplatte noch früher.

Dass indess bei diesen Dicken die Interferenzen noch gerade so stattfinden, erkennt man ausser bei Anwendung homogenen Lichtes daran, dass wenn man ein schmales Bündel des durch eine solche Platte hindurchgegangenen Lichtes mit dem Prisma untersucht, in dem Spectrum für alle jene Wellenlängen, für welche unsere Gleichung die Intensität Null gibt, dunkle Streifen auftreten.

Wenn man durch mit der Axe parallele Platten ein convergentes Strahlenbündel gehen lässt, so sind die Phasendifferenzen der an den verschiedenen Stellen durch die Platte tretenden Strahlen nicht mehr dieselben, die verschiedenen Punkte der Platte müssen daher bei homogenem Lichte verschiedene Helligkeit zeigen.

Die Punkte gleicher Helligkeit liegen auch hier auf Curven, welche aber nicht Kreise, sondern Hyperbeln sind, wie Fig. 245. Es treten vier Hyperbelsysteme auf, deren Asymptoten mit der Richtung der durch die Axe des Krystalls gelegten Ebene Winkel von nahezu 45° bilden. Die Erscheinung ist auch hier am intensivsten, wenn die Axe des Krystalls mit der Polarisationsebene des einfallenden Lichtes einen Winkel von 45° bildet. Im weissen Lichte sind diese Curven farbig, aber wie sich aus

dem Vorigen ergibt, nicht mehr sichtbar, wenn die Platte so dick ist, dass bei parallelem Lichte keine Farben mehr erscheinen. Das Fig. 245 schwarz gezeichnete Kreuz, welches die Asymptoten der Hyperbeln darstellt, hat immer die Helligkeit und Färbung der Mitte, welche durch die Interferenz der centralen Strahlen bedingt wird. Da diese centralen Strahlen senkrecht zur Plattenebene sind, so folgt, dass Helligkeit und Färbung des Kreuzes zusammenfällt mit der, welche die Farbe bei parallelem Lichte zeigt.

Fig. 245.



Die Berechnung der Hyperbeln würde uns hier zu weit führen, wir begnügen uns damit zu erkennen, dass die Gestalt der Curven eine ähnliche sein muss. Denken wir uns durch die Platte zunächst einen Schnitt senkrecht zur Axe gelegt, so gehen in diesem Schnitte alle Strahlen, welches auch der Einfallswinkel i ist, senkrecht zur Axe des Krystalles hindurch, für alle Strahlen haben somit ϱ_1 und ϱ_2 denselben Werth ω und ε wie für die Mitte; eine Aenderung der Phasendifferenz für die unter verschiedener Neigung durch den Krystall tretenden Strahlen tritt aber dadurch ein, dass die von denselben in dem Krystall zurückgelegten Wege um so grösser sind, je grösser die Neigung der Strahlen gegen das Einfallsloth ist, und dass der nach dem Austritt in Luft zurückgelegte Weg etwas verschieden ist. Die Rechnung ergibt, dass nach dieser Richtung die Phasendifferenz wachsen muss. In dem zur Axe parallelen Schnitt muss dagegen die Phasendifferenz abnehmen. Denn wenn auch hier mit wachsender Neigung der Strahlen die Länge der im Krystall zurückgelegten Strecke wächst, so nimmt dagegen der Unterschied in der Brechung der ordentlichen und ausserordentlichen Strahlen ab, da die Richtung, in welcher das Licht den Krystall durchdringt, sich immer mehr der Axe nähert. Dass aber in Folge dessen die Phasendifferenz abnehmen muss, folgt schon daraus, dass wenn die Neigung so gross wird, dass das Licht parallel der Axe durch den Krystall geht, selbst eine unendliche Länge des im Krystall zurückgelegten Weges keine Phasendifferenz zwischen den beiden Strahlen erzeugt, da beide dann ordentlich gebrochen werden.

Da nun senkrecht zur Axe die Phasendifferenzen wachsen, parallel der Axe die Phasendifferenzen abnehmen, so muss es an jeder Seite der Axe eine Richtung geben, in welcher die Phasendifferenzen constant bleiben, gehen wir also von der Mitte nach diesen Richtungen fort, so muss die Beleuchtung dieselbe bleiben wie in der Mitte. Der Winkel, den diese Richtungen mit der Richtung der Axe bilden, ist gegeben durch

$$\sin^2 \chi = \frac{\omega}{\varepsilon + \omega};$$

da nun immer ε von ω nur wenig verschieden ist, so ist der Winkel nahe 45^0, bei den positiven Krystallen, in denen die Geschwindigkeit ω des ordentlichen Strahles die grössere ist, ist der Winkel etwas grösser, bei den negativen, bei denen $\varepsilon > \omega$, etwas kleiner als 45^0. Indem man den Winkel misst, den diese Richtungen, die Asymptoten der beiden Hyperbelsysteme, mit der Axe bilden, kann man die Krystalle als positive und negative unterscheiden.

Je mehr man sich von den Richtungen senkrecht und parallel zur Axe diesen Richtungen nähert, um so weiter müssen die Stellen, welche einer bestimmten Phasendifferenz entsprechen, die also auf einer Curve liegen, sich von der Mitte entfernen, die Curven müssen also gegen die Mitte convex sein und sich asymptotisch den Richtungen constanter Phasendifferenz nähern; man sieht, dass die Hyperbeln diesen Bedingungen entsprechen.

Aehnliche Farbencurven zeigen auch Platten, die nach andern Richtungen aus den Krystallen geschnitten sind; dieselben lassen sich ebenso durch die Bestimmung der jedem speciellen Falle entsprechenden Differenz Δ ableiten.

§. 188.

Farbenerscheinungen in zweiaxigen Krystallen. Die Farbenerscheinungen in dünnen Blättchen oder dickern Platten, welche aus zweiaxigen Krystallen geschnitten sind, lassen sich ganz in derselben Weise ableiten wie die in einaxigen Krystallen; unsere Gleichung für R^2 gilt hier ganz ebenso. Die grössere Schwierigkeit liegt für die Bestimmung hier nur darin, dass die Grössen ϱ_1 und ϱ_2 für beide Strahlen veränderlich sind.

Die wenigen Sätze über die Doppelbrechung in zweiaxigen Krystallen, die wir erwähnt haben, geben indess zu erkennen, dass ein merklicher Unterschied zwischen den Interferenzcurven ein- und zweiaxiger Krystalle sich hauptsächlich zeigen muss, wenn wir aus dem Krystalle Platten senkrecht zur Ebene der optischen Axen speciell senkrecht zur ersten Mittellinie schneiden. Anders, etwa parallel der Ebene der optischen Axen geschnittene Platten geben im parallelen Licht Farben, welche von der Dicke der Platten und der Stärke der Doppelbrechung abhängig sind, in convergentem Licht helle und dunkle, resp. im weissen Licht farbige Hyperbeln. Die im vorigen §. erhaltenen Resultate lassen sich auf solche Platten ganz direkt übertragen.

Bringt man Platten, welche senkrecht zur ersten, also den spitzen Winkel der optischen Axen halbirenden Mittellinie, geschnitten sind, zwischen zwei Nicol'sche Prismen, so sieht man, wenn der Winkel der optischen Axen klein genug ist, so dass man die parallel beiden optischen Axen durch den Krystall hindurchgehenden Strahlen übersehen kann, um

Fig. 246.

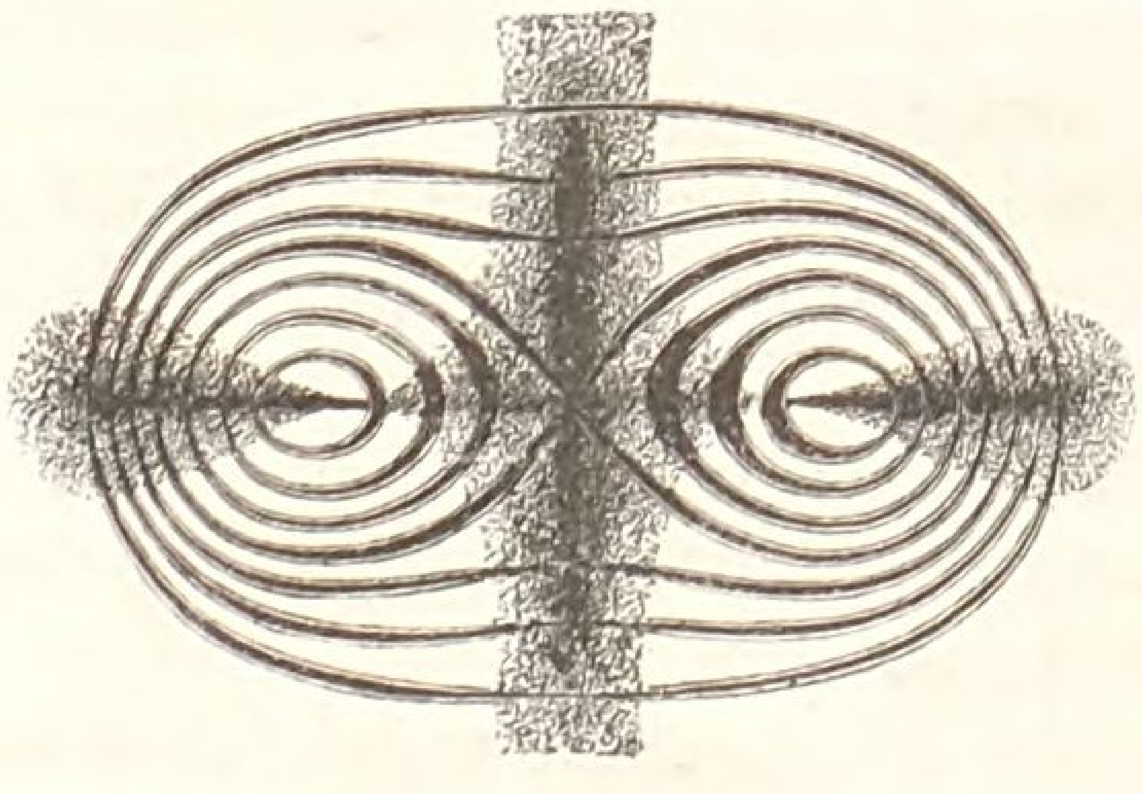
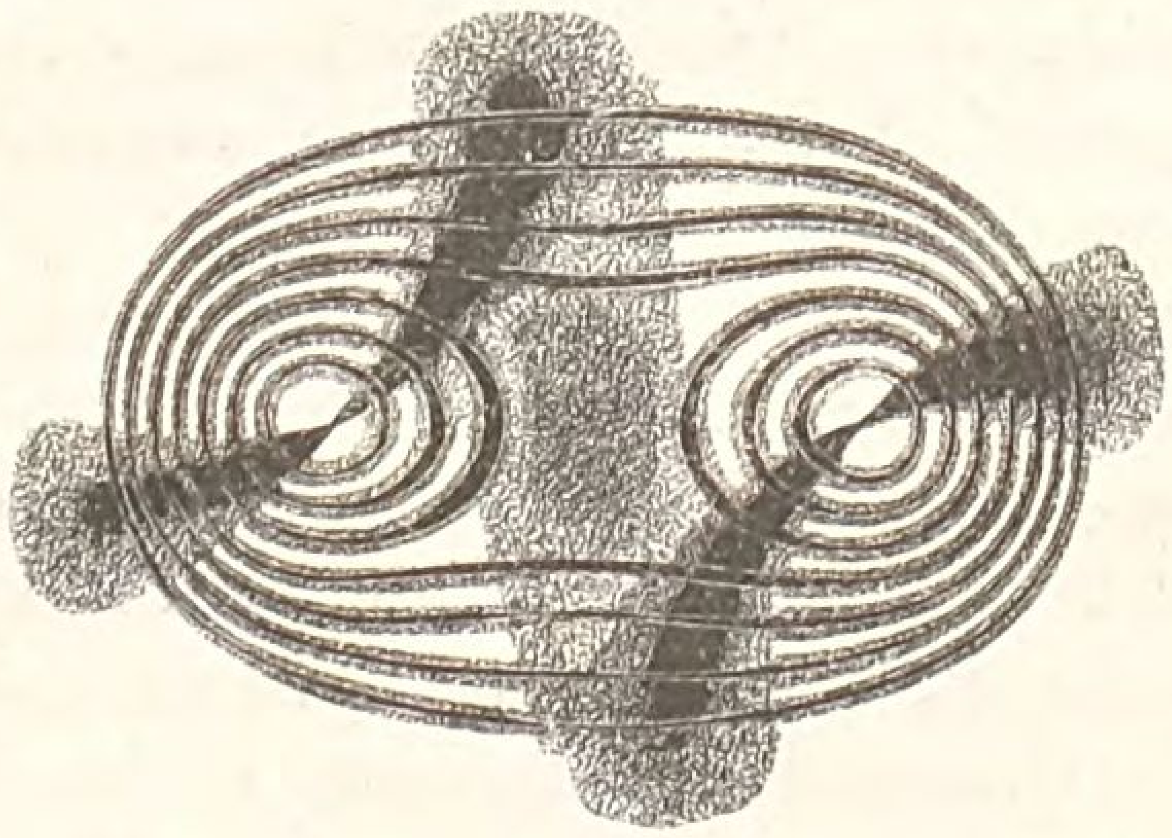


Fig. 247



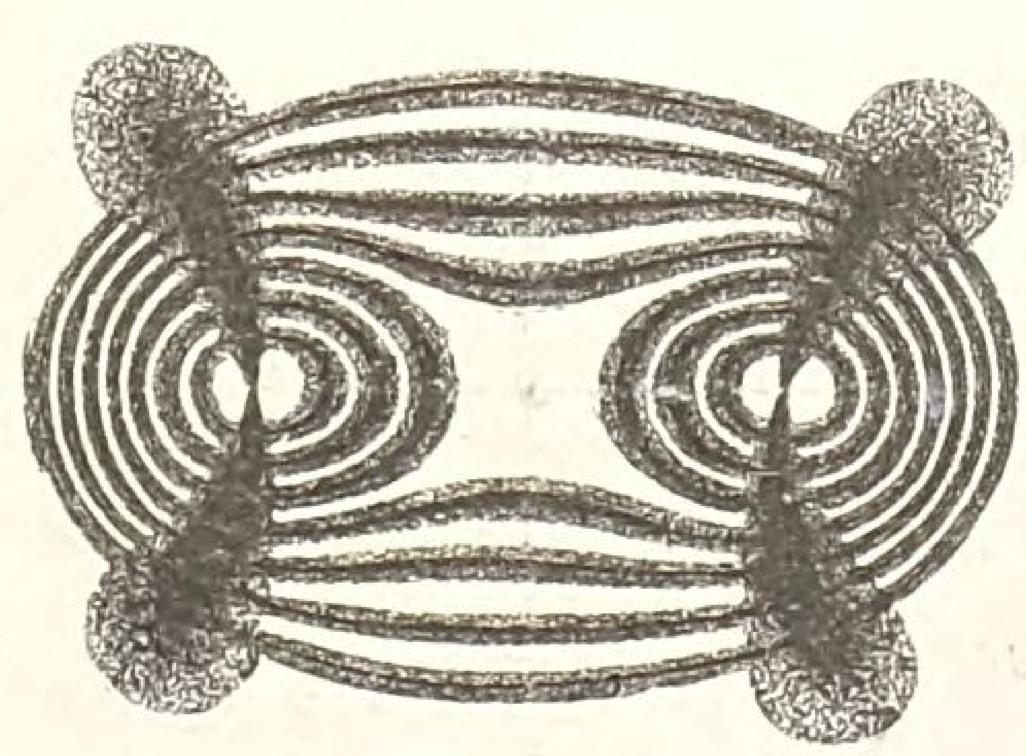
die Austrittspunkte der den Axen parallelen Strahlen helle und dunkle, im weissen Licht farbige Ringe, welche nahezu die Form von Lemniscaten

haben. Bei gekreuzten Nicols erscheint das Curvensystem Fig. 245, wenn die Ebene der optischen Axen der Polarisationsebene des eintretenden Lichtes parallel ist, durchsetzt von schwarzen Büscheln in Form eines geraden Kreuzes, dessen Arme parallel und senkrecht zur Ebene der optischen Axe sind. In homogenem Lichte sieht man zunächst um jeden Pol, wie wir kurz die Austrittsstelle der den Axen parallelen Strahlen bezeichnen wollen, eine Anzahl heller und dunkler Ovale, von denen das folgende immer grösser ist als das vorhergehende; weiterhin berühren sich die beiden Ovale, so dass beide Curven zusammen die Form einer liegenden 8 erhalten. Schliesslich vereinigen sich beide Ovale zu einer Curve, welche beide Pole umgibt. Bei Anwendung weissen Lichtes entstehen anstatt der hellen und dunklen Curven farbige.

Dreht man die Nicols aus der gekreuzten in die parallele Lage, so geht die Erscheinung in die complementäre über, die hellen Ringe werden dunkel, die dunklen hell, und ebenso geht das dunkle Kreuz in ein helles über.

Dreht man bei unveränderter Stellung der Nicols die Platte in ihrer Ebene, so bleibt die Gestalt der Ringe ungeändert, sie drehen sich einfach mit der Platte. Dagegen ändern die schwarzen Büschel ihre Gestalt, dieselben nehmen eine hyperbolische Form an, wobei sie aber stets durch die Pole gehen. Fig. 247 zeigt dieselben, wenn die Platte um wenige Grade gedreht ist, Fig. 248, wenn die Platte um 45^0 gedreht ist. Dreht man über 45^0 hinaus, so wiederholen sich die Büschelformen in umgekehrter Reihenfolge; ist die Drehung etwa 80^0, tritt wieder die Form Fig. 247 auf, beträgt sie einen rechten Winkel, so zeigt sich wieder die Form Fig. 245.

Fig. 248



Ist der Axenwinkel der Krystalle zu gross, so übersieht man nur eines der die beiden Pole umgebenden Curvensysteme.

Dass die Erscheinung die hier beschriebene sein muss, lässt sich im Grossen und Ganzen in folgender Weise übersehen.

Parallel den optischen Axen geht nur eine Welle durch die Platten, im Innern des Krystalls tritt keine Zerlegung der Schwingungen ein, es kann daher in dem in der Richtung austretenden Licht keine Interferenz stattfinden. Die Pole müssen daher stets dunkel sein, wenn die Nicols gekreuzt, hell, wenn dieselben parallel sind. Denken wir uns nun durch jeden der Pole eine Linie gelegt, so werden alle auf den verschiedenen Punkten dieser Linie austretenden Strahlen doppelt gebrochen; die beiden aus je einem hervortretenden Strahlen besitzen daher bei dem Austritte eine Phasendifferenz, welche um so grösser ist, je weiter man sich auf der betreffenden Linie von den Polen entfernt; in einem gewissen Abstande ist die Phasendifferenz $^1/_2\,\lambda$, in einem grössern λ u. s. f.

Dreht sich diese Linie in der Ebene der Platte um den Pol, so können wegen der verschiedenen Doppelbrechung an den verschiedenen Seiten des Poles die Abstände, in denen die Phasendifferenzen den Werth $^1/_2\,\lambda, \lambda \ldots$ haben, auf jener Linie in den verschiedenen Lagen nicht gleich sein.

Deshalb müssen die gleichen Phasendifferenzen entsprechenden Curven von der Kreisform abweichen, und die Rechnung ergibt in Uebereinstimmung mit der Beobachtung, dass die Ringe annähernd die Form von Lemniscaten annehmen.

Die dunklen Büschel rühren von denjenigen Strahlen her, welche im Krystall nur einfach gebrochen werden, weil die Polarisationsebene des einen der beiden im Krystall nach dieser Richtung sich fortpflanzenden Strahlen derjenigen des einfallenden Lichtes parallel ist, da, wie wir wissen, in dem Falle das eindringende Licht im Krystalle nicht in zwei Componenten zerlegt wird. Fällt die Ebene der optischen Axen mit der untern Polarisationsebene zusammen, so werden alle in dieser und in der darauf senkrechten Ebene einfallenden Strahlen nur einfach gebrochen. Denn die in der Ebene der optischen Axe einfallenden Strahlen werden in einem zweiaxigen Krystalle in zwei zerlegt, deren einer parallel, deren anderer senkrecht zur Ebene der optischen Axen polarisirt ist. Wenn demnach das eintretende Licht parallel der Ebene der optischen Axen polarisirt ist, kann die letztere Componente nicht auftreten, das Licht wird einfach gebrochen. Ganz ähnlich ist das Verhalten in einer zur Ebene der optischen Axe senkrechten Ebene, welche durch die erste Mittellinie und die Axe der mittlern Elasticität geht. Die in dieser Ebene einfallenden Strahlen zerfallen in zwei, deren einer parallel, deren anderer senkrecht zu dieser Ebene polarisirt ist. Wenn also das einfallende Licht senkrecht zu dieser Ebene polarisirt ist, kann auch für die in dieser Ebene einfallenden Strahlen keine Doppelbrechung eintreten.

Wird der Krystall gedreht, so tritt in diesen Ebenen Doppelbrechung ein; die Punkte, an welchen dann Strahlen austreten, deren Polarisationsebene im Krystall derjenigen des einfallenden Lichtes parallel ist, liegen dann nicht mehr auf geraden Linien, sondern wie die Rechnung zeigt, auf Hyperbeln, welche aber stets durch die Pole gehen, da die parallel den Axen durch den Krystall gehenden Wellen immer nur einfach gebrochen werden.

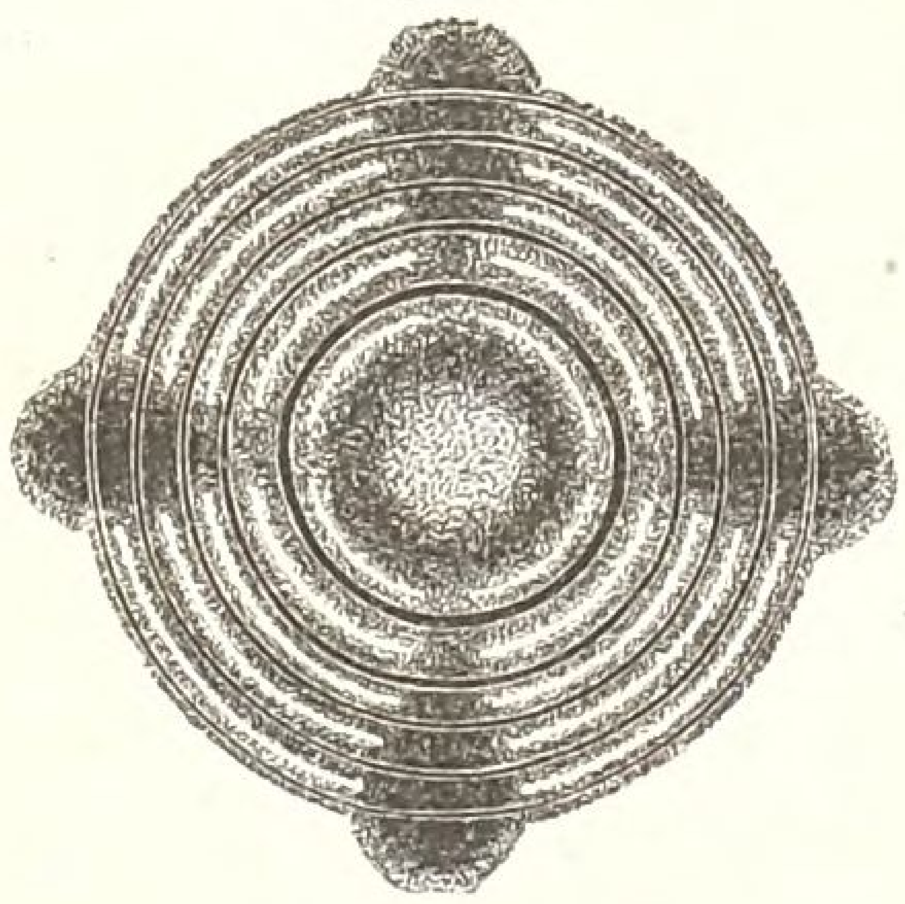
Die Büschel müssen hier gerade wie das Kreuz in Platten einaxiger Krystalle, welche senkrecht zur Axe geschnitten sind, und aus denselben Gründen in die Breite gezogen sein.

Da die Phasendifferenzen ebenso hier wie in allen Fällen von den Wellenlängen abhängen, so entstehen im weissen Lichte anstatt der hellen und dunklen farbige Ringe. Die Vertheilung der Farben ist aber oft eine sehr eigenthümliche, da in manchen zweiaxigen Krystallen die optischen Axen eine verschiedene Lage für die verschiedenen Farben haben. Diese verschiedene Lage der Axen gibt sich sofort an der Färbung der von den ersten Curven umgebenen Pole bei parallel gestellten Nicols zu erkennen. Dieselben sind dann spectral gefärbt, und zwar von innen nach aussen in der Reihenfolge, wie der Axenwinkel für die Farben grösser wird. Ist der Axenwinkel für Roth am kleinsten, für Violett am grössten, so ist der Pol innen roth, aussen violett gefärbt. Da sich nun die Curven einer bestimmten Farbe um den Pol dieser Farbe legen, muss damit das ganze Curvensystem in seiner Färbung von der Lage der Axen abhängig sein.

§. 189.

Drehung der Polarisationsebene im Quarz. Von den im §. 186 betrachteten Erscheinungen in senkrecht zur Axe geschnittenen Platten einaxiger Krystalle machen derartig aus Bergkrystallen geschnittene Platten eine auffallende Ausnahme, die sich am deutlichsten bei gekreuzten Nicols zeigt. Die Ringe beginnen, wie Fig. 249 zeigt, erst in einiger Entfernung von der Mitte, das schwarze Kreuz ist bis auf kleine Büschel in den äussersten Ringen verschwunden. Bei Anwendung weissen Lichtes ist die Mitte niemals dunkel, sondern je nach der Dicke der Platten verschieden gefärbt. Von da ab, wo die Ringe auftreten, sind sie nicht von denen anderer einaxiger Krystalle verschieden. Der Unterschied erstreckt sich also nur auf dasjenige Licht, welches annähernd parallel der Axe durch den Krystall gegangen ist.

Fig. 249.



Wenn man die Nicols aus der gekreuzten Stellung dreht, so erscheint die Mitte in keiner Stellung dunkel oder weiss, sie ist stets je nach den Winkeln, welche die Polarisationsebenen der beiden Nicols mit einander bilden, verschieden gefärbt. In Betreff der Reihenfolge, in welcher die Farben in Quarzplatten gleicher Dicke bei Drehung des obern Nicols auftreten, unterscheidet man die Bergkrystalle in zwei Arten, in rechtsdrehende und linksdrehende. Geht man bei den Krystallen der ersten Art von einer bestimmten Stellung des Nicols aus, so erscheinen die Farben in der Reihenfolge ihrer Brechbarkeit, wenn man den zweiten Nicol wie den Zeiger einer Uhr dreht. So erscheint bei parallelen Nicols eine Quarzplatte von 2 Mm. röthlich; dreht man dann bei rechtsdrehenden Quarzen den zweiten Nicol wie den Zeiger einer Uhr, so treten nach und nach gelbliche, grünliche, bläuliche Färbungen auf. Bei einer linksdrehenden Platte treten genau dieselben Farben bei umgekehrter Drehung auf. Die rechtsdrehenden Platten sind aus andern Quarzkrystallen geschnitten als die linksdrehenden. Gewisse krystallographische Kennzeichen geben schon an, welche Krystalle rechtsdrehend, welche linksdrehend sind.

Schon Biot hat gleich nach Entdeckung dieser Erscheinungen durch Untersuchung derselben bei homogenem Licht gezeigt, dass sie ihren Grund darin haben, dass in einem Quarzkrystall die Polarisationsebene des parallel der Axe durch denselben hindurchgehenden Lichtes gedreht wird, und zwar verschieden für die verschiedenen Farben. Lässt man homogenes Licht durch eine zwischen gekreuzten Nicols liegende Quarzplatte von 1 Mm. Dicke hindurchgehen, so ist die Mitte des Gesichtsfeldes nicht dunkel, es bedarf vielmehr einer je nach der Farbe des Lichtes verschiedenen Drehung des obern Nicols, damit das Gesichtsfeld dunkel erscheint, und zwar für Roth im Mittel 19^0, für Gelb 24^0, für Grün 28^0, für mittleres Blau 34^0 und Violett 40^0. Da nun das Gesichtsfeld dunkel erscheint, wenn die Polarisationsebene des am Nicol ankommenden Strahles senkrecht ist zur Polarisationsebene des durch den Nicol hindurchtretenden Strahles, so folgt, dass die Polarisationsebene des parallel der Axe durch den Quarz getretenen Lichtes um so viel gedreht

ist, als der Nicol aus der gekreuzten Stellung hat gedreht werden müssen, um das Gesichtsfeld zu verdunkeln.

Biot schloss aus seinen Versuchen, dass die Grösse der Drehungswinkel proportional sei der Dicke der Platten und umgekehrt proportional dem Quadrate der Wellenlänge des angewandten Lichtes; er zeigte weiter, dass die Grösse der Drehung in rechts und links drehenden Platten gleicher Dicke dieselbe sei.

Die Abhängigkeit der Drehung von der Wellenlänge ist später noch mehrfach, so besonders von Broch und Stefan untersucht worden; diese Versuche haben ergeben, dass das von Biot angegebene Gesetz nur ein angenähertes ist. Stefan leitete für die Beziehung zwischen dem Drehungswinkel und der Wellenlänge λ in einer Quarzplatte von 1 Mm. Dicke die Gleichung ab

$$\varrho = \frac{816,22}{\lambda^2} - 1,753,$$

wenn man in den Werthen der Wellenlängen die zehntausendstel Millimeter als Einheit setzt. Für die Drehungswinkel der hauptsächlichsten Fraunhofer'schen Linien liefert diese Gleichung nachstehende Werthe, die wir mit den von Broch und Stefan beobachteten zusammenstellen. Es ist

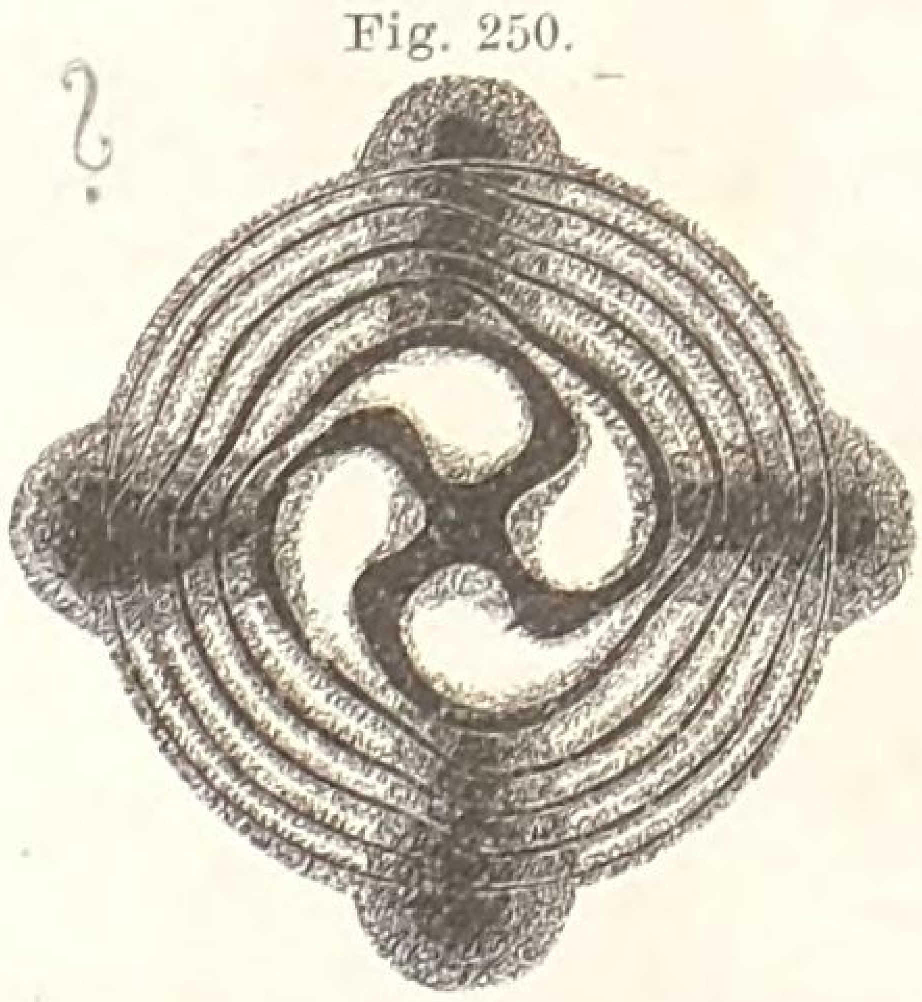
für	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*
ϱ nach der Gl.	$15^0,50$	$17^0,19$	$21^0,79$	$27^0,75$	$33^0,05$	$42^0,58$	$51^0,15$
ϱ beob. Stefan	$15^0,55$	$17^0,22$	$21^0,67$	$27^0,46$	$32^0,69$	$42^0,37$	$50^0,98$
ϱ „ Broch	$15^0,30$	$17^0,24$	$21^0,67$	$27^0,46$	$32^0,50$	$42^0,20$	—

Die Uebereinstimmung zwischen den berechneten und beobachteten Werthen ist nahezu die gleiche, wie zwischen den Beobachtungen von Stefan und Broch.

Dass durch die verschieden starke Drehung der verschiedenen Farben die Erscheinungen im weissen Lichte die vorhin beschriebenen werden müssen, bedarf kaum eines Nachweises, die bei einer bestimmten Stellung des Nicols auftretende Farbe ist eben die aus den Componenten der einzelnen Farben parallel der Polarisationsebene des obern Nicols resultirende Farbe.

Legt man eine rechtsdrehende und eine linksdrehende Platte über einander, so zeigen die parallel der Axe hindurchgegangenen Strahlen die Differenz der Drehungen in jeder derselben; sind die beiden Platten gleicher Dicke, so wird die Drehung aufgehoben. Lässt man aber durch zwei solcher Platten convergentes Licht hindurchgehen, so erhält man nicht die Ringfigur, wie in einem nicht drehenden Krystall gleicher Dicke, sondern bei gekreuzten Nicols die Ringfigur Fig. 250; die Ringe mit den Büscheln wie bei einer einfachen Quarzplatte gleicher Dicke, ausserdem aber die Airy'schen Spiralen, so genannt, weil Airy sie zuerst beschrieben hat. Dieselben gehen von einem kurzen, gegen die Polarisationsebene des einfallenden Lichtes etwas gedrehten Kreuz aus und durchschneiden dann die Ringe. Die Neigung der Kreuzesarme gegen die Polarisationsebene ist gleich der Hälfte des Winkels, um welchen die

Fig. 250.



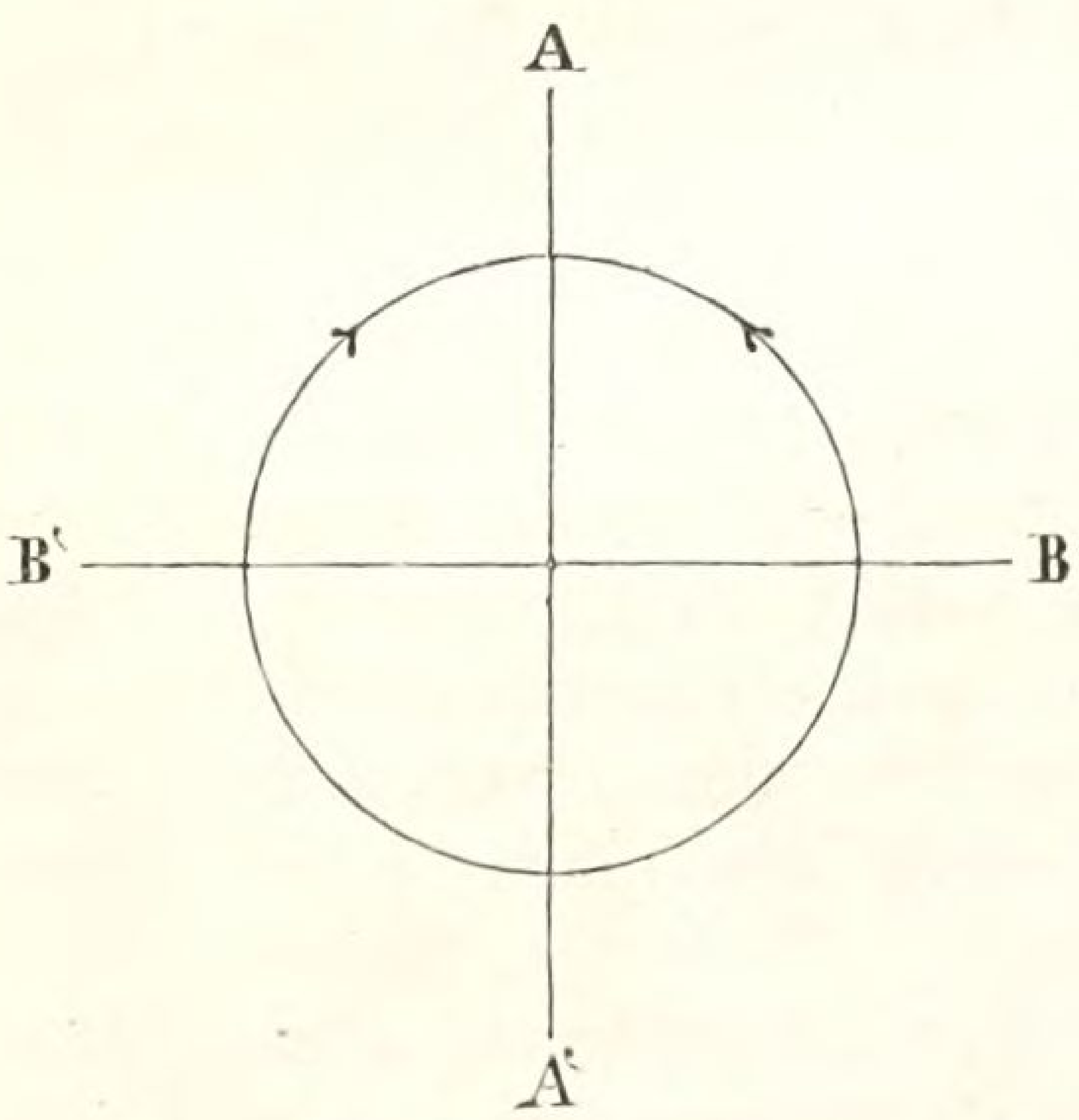
Polarisationsebene durch die eine der Platten gedreht wird; die Durchschnittspunkte der Spiralen und Ringe liegen in den Polarisationsebenen der beiden Nicols. Die Spiralen sind verschieden gewunden, je nachdem das Licht zuerst in den linksdrehenden oder den rechtsdrehenden Krystall eintritt; Fig. 250 zeigt sie so, wie sie erscheinen, wenn das Licht zuerst in den linksdrehenden Krystall eintritt.

§. 190.

Erklärung der Drehung der Polarisationsebene durch Circularpolarisation. Die eigenthümliche Eigenschaft des Bergkrystalls, die Polarisationsebene des parallel der Axe durch ihn hindurchgehenden Lichtes zu drehen, hat Fresnel aus einer Doppelbrechung besonderer Art abgeleitet, welche das Licht parallel der Axe im Bergkrystall erfährt. Er hat gezeigt, dass das Licht in zwei circular polarisirte Strahlen zerfällt, in deren einem die Aethertheilchen sich im Sinne der Bewegung des Uhrzeigers, in deren anderem sie sich entgegengesetzt rotirend bewegen, welche sich mit verschiedener Geschwindigkeit im Bergkrystall fortpflanzen.

Wie wir in §. 79 und §. 175 gesehen haben, resultirt ein circular polarisirter Strahl aus zwei geradlinig polarisirten gleicher Amplitude, welche eine Phasendifferenz von einer viertel Wellenlänge haben. Ebenso entsteht aus zwei circular polarisirten Strahlen, in welchen die Aethertheilchen in gleichen Kreisen, indess in einem rechts, im andern links herum sich bewegen, ein geradlinig polarisirter Strahl, dessen Polarisationsebene je nach der Phase, in welcher die Strahlen zusammentreffen, eine verschiedene Lage hat. Um das zu übersehen, seien AA, BB Fig 251 die Schwingungsrichtungen der beiden Componenten zweier circularpolarisirter Strahlen, welche sich senkrecht zur Ebene der Zeichnung gegen den Beschauer hin fortpflanzen. Der rechtscirculare Strahl bewegt sich dann in der Richtung $ABA'B'$, der andere umgekehrt. Die Richtung der y sei parallel AA' positiv nach oben hin, die Richtung der z parallel BB' positiv nach rechts hin.

Fig. 251.



Der rechtscirculare Strahl wird dann gebildet durch die beiden Componenten

$$y = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \qquad z = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} - \frac{1/_4 \lambda}{\lambda}\right)$$

und der linkscirculare durch

$$y = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \qquad z = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} + \frac{1/_4 \lambda}{\lambda}\right);$$

im ersten ist die Schwingung nach z hinter derjenigen nach y um eine viertel Schwingung zurück, im zweiten ist diejenige nach z der nach x um $1/_4$ Schwingung voraus. Die beiden Schwingungen nach z haben somit eine Phasendifferenz von einer halben Wellenlänge; pflanzen sich die

beiden Strahlen gleichzeitig fort, so heben sich die beiden Componenten parallel z auf, diejenigen parallel y als ohne Phasendifferenz summiren sich und geben einen resultirenden Strahl, dessen Gleichung ist

$$y = 2\,a \sin 2\,\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right).$$

Nennen wir also zwei entgegengesetzt circulare Strahlen von gleicher Phase, wenn die einen ihrer Componenten von gleicher Phase sind, so erkennt man, dass zwei entgegengesetzt circulare Strahlen gleicher Phase durch Zusammenwirken einen geradlinig polarisirten Strahl geben, dessen Schwingungsrichtung mit derjenigen gleicher Phase zusammenfällt.

Fresnel nimmt nun an, dass bei dem Eintritt in einen Bergkrystall parallel der Axe ein geradlinig polarisirter Strahl in zwei entgegengesetzt circular polarisirte zerfalle, welche aber in dem Bergkrystalle sich nicht mit gleicher Geschwindigkeit fortpflanzen, deren Wellenlängen somit, da die Schwingungsdauer bei dem Uebertritt in den Krystall nicht geändert wird, eine verschiedene ist. Nennen wir die Amplitude des eintretenden Strahles a, so ist nach dem Vorigen die Amplitude jeder der vier entstehenden Componenten $\frac{a}{2}$. Bezeichnen wir die Wellenlängen der beiden Componenten des rechtscircularen Strahles mit λ_1, die des linkscircularen Strahles mit λ_2, so wird die Gleichung der vier Componenten, nachdem sie die Dicke d des Krystalls durchlaufen haben, wenn wir gleichzeitig

$$\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} = \xi$$

setzen,

$$y = \frac{a}{2} \sin 2\pi \left(\xi - \frac{d}{\lambda_1}\right) \quad z = \frac{a}{2} \sin 2\pi \left(\xi - \frac{d}{\lambda_1} - \tfrac{1}{4}\right) = -\frac{a}{2} \cos 2\pi \left(\xi - \frac{d}{\lambda_1}\right)$$

$$y = \frac{a}{2} \sin 2\,\pi \left(\xi - \frac{d}{\lambda_2}\right) \quad z = \frac{a}{2} \cos 2\,\pi \left(\xi - \frac{d}{\lambda_2}\right).$$

Treten beide Strahlen dann aus, so setzen sie sich in der Weise zusammen, wie sie es in einem isotropen Mittel thun müssen, das heisst, der Aether erhält die aus diesen vier Componenten resultirende Bewegung. Dieselbe ist wieder eine geradlinige, welche indess mit der Richtung y einen Winkel φ bildet. Diesen Winkel φ erhalten wir aus der Bedingung, dass senkrecht zu der Richtung, welche mit y den Winkel φ bildet, es ist das die Richtung, welche mit z den Winkel φ bildet, keine Bewegung vorhanden ist. Wir haben also die Componenten der vier Bewegungen parallel der zur gesuchten senkrechten Richtung zu bilden und die algebraische Summe dieser Componenten gleich Null zu setzen. Da z mit dieser Richtung den Winkel φ, y den Winkel $90 + \varphi$ bildet, so ist die gleich Null zu setzende algebraische Summe der vier Componenten

$$u = -\sin\varphi\,\frac{a}{2}\left\{\sin 2\,\pi\left(\xi - \frac{d}{\lambda_1}\right) + \sin 2\,\pi\left(\xi - \frac{d}{\lambda_2}\right)\right\}$$
$$+ \cos\varphi\,\frac{a}{2}\left\{\cos 2\,\pi\left(\xi - \frac{d}{\lambda_1}\right) - \cos 2\,\pi\left(\xi - \frac{d}{\lambda_1}\right)\right\}.$$

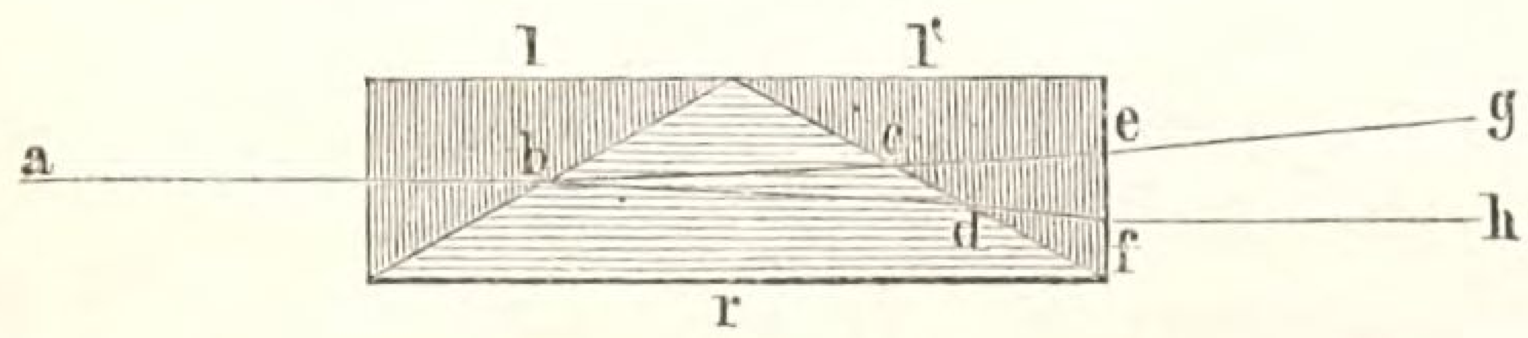
Für den Winkel φ ergibt sich dann

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\cos 2\pi\left(\xi - \frac{d}{\lambda_2}\right) - \cos 2\pi\left(\xi - \frac{d}{\lambda_1}\right)}{\sin 2\pi\left(\xi - \frac{d}{\lambda_2}\right) + \sin 2\pi\left(\xi - \frac{d}{\lambda_1}\right)} = \operatorname{tang}\pi d\left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1}\right).$$

Ein parallel y schwingender in den Bergkrystall eintretender Strahl muss darnach, wenn er in dem Krystall die Strecke d durchlaufen hat, nach einer Richtung schwingen, welche mit der ursprünglichen den Winkel φ bildet, oder was dasselbe ist, die Polarisationsebene muss um einen Winkel φ gedreht sein. Der Winkel φ ist proportional der Dicke der Schicht, welche die beiden entgegengesetzt circularen Strahlen durchlaufen haben und ausserdem proportional der Differenz der reciproken Werthe der Wellenlängen der getrennten Strahlen in dem Krystall. Die Drehung geschieht im Sinne der Bewegung des Strahles, der in dem Krystalle die grössere Wellenlänge hat, der also im Krystalle voreilt. Hat der rechtsgedrehte Strahl λ_1 die grössere Wellenlänge, so geschieht die Drehung im Sinne der Bewegung des Uhrzeigers, ist λ_2 grösser, im entgegengesetzten Sinne. In den rechtsdrehenden Krystallen ist also λ_1, in den linksdrehenden λ_2 grösser.

Daraus ergibt sich ein Mittel, die circulare Doppelbrechung direkt sichtbar zu machen, wie Fresnel sofort nach Entwicklung dieser Theorie der Drehung der Polarisationsebene erkannte. Man stellt, wie Fig. 252 im Durchschnitt zeigt, ein Parallelepiped her, welches aus drei Prismen zusammengesetzt ist; die beiden Prismen l und l' werden aus linksdrehenden, das mittlere r wird aus rechtsdrehendem Krystall geschnitten, so dass die Krystallaxe der Axe des aus den drei Prismen zusammengesetzten Parallelepipeds parallel ist. Lässt man nun einen Lichtstrahl a normal auf die eine Endfläche des Parallelepipeds eintreten, so zerfällt derselbe in dem ersten Halbprisma nach b sich fortpflanzend in den rascher sich fortpflanzenden linkscircularen und in den langsamern rechtscircularen. Bei b treten beide Strahlen in das rechtsdrehende Prisma; da in demselben der rechtscirculare der raschere ist, so ist das rechtsdrehende Prisma für diesen Strahl optisch dünner, er wird nach c hin gebrochen; für den linkscircularen ist der rechtsdrehende Krystall optisch dichter, er wird nach d hin gebrochen. Die beiden Strahlen werden also in dem zweiten Prisma getrennt; in dem Prisma l' werden sie dann noch weiter getrennt, indem l' für den linkscircularen wieder optisch dünner, für den rechtscircularen dichter ist. Der erstere wird also zur brechenden Kante hin nach f, der zweite von der brechenden Kante fort nach e hin gebrochen. Beide Strahlen verlassen dann getrennt, der eine nach eg, der andere nach fh das Prisma. Die so auftretende Doppelbrechung kann nur Folge der eigenthümlichen circularen Doppelbrechung sein, da das Licht parallel der Axe in den ersten Krystall eintritt, somit keine gewöhnliche Doppelbrechung eintreten kann. Ebenso wenig wie im ersten Prisma kann dann in den folgenden eine Zertheilung des Lichtes durch gewöhnliche Doppelbrechung eintreten.

Fig. 252.



Das Austreten der beiden Strahlen, die sich ausserdem als circularpolarisirte zu erkennen geben, beweist also direkt die von Fresnel zur Erklärung der Drehung der Polarisationsebene in Quarz angenommene Doppelbrechung.

§. 191.

Drehung der Polarisationsebene in andern Körpern. Saccharimetrie. Der Quarz hat die Eigenschaft, die Polarisationsebene zu drehen, nur in der Form des Bergkrystalls, im amorphen Zustande besitzt er dieselbe nicht. In ähnlicher Weise zeigen nach den Untersuchungen von Marbach mehrere zum regulären System gehörige Krystalle, wie chlorsaures Natron, bromsaures Natron und einige andere die Eigenschaft, die Polarisationsebene zu drehen; bei diesen zeigt sich die Drehung aber nicht nur, wenn das Licht durch den Krystall nach einer bestimmten Richtung hindurchgeht, sondern immer, nach welcher Richung auch das Licht durch den Krystall hindurchgesandt wird.

Einige andere Krystalle des hexagonalen Systems, Zinnober, überjodsaures Natron, sowie das im quadratischen System krystallisirende schwefelsaure Aethylendiamin verhalten sich gerade wie der Quarz, wie Descloizeaux, Ulrich und von Lang gezeigt haben; sie drehen nur die Polarisationsebene der parallel der Axe hindurchgehenden Lichtstrahlen; bei allen diesen Krystallen gibt es rechts- und linksdrehende.

Den Uebergang zu einer zweiten Gruppe von Körpern, welche die Polarisationsebene drehen, bildet das im quadratischen Systeme krystallisirende schwefelsaure Strychnin. Dasselbe dreht zunächst krystallisirt die Polarisationsebene des parallel der Axe durch dasselbe hindurchgehenden Lichtes. Das Salz behält aber auch die Fähigkeit, die Polarisationsebene zu drehen bei, wenn dasselbe gelöst ist. Daraus folgt, dass das schwefelsaure Strychnin die Polarisationsebene nicht in Folge der eigenthümlichen Anordnung der Moleküle, wie es bei den andern Substanzen der ersten Gruppe der Fall ist, dreht, sondern dass das Molekül des Strychnins selbst die Drehung bewirken muss.

Noch deutlicher tritt das an den übrigen Substanzen der zweiten Gruppe auf, welche nach den Versuchen von Biot, Seebeck und vielen andern im krystallisirten Zustande keine Drehung der Polarisationsebene erkennen lassen, sondern nur im festen amorphen Zustande oder in Lösung, so Rohrzucker, Campher, Weinsäure und alle weinsauren Salze. Alle diese Substanzen sind krystallisirt optisch zweiaxig, und in zweiaxigen Krystallen, in denen es keine einzige Richtung gibt, in welcher eine einfache Brechung stattfindet, werden die Erscheinungen der circularen Polarisation von der gewöhnlichen Doppelbrechung verdeckt. Giesst man aber eine mit ein wenig Essigsäure versetzte klare Lösung von Rohrzucker, welche bis zu syrupdicker Consistenz gebracht ist, auf eine kalte Marmorplatte, so trocknet dieselbe zu durchsichtigen Platten ein, und in diesen wird die Polarisationsebene gedreht, wie in den Zuckerlösungen.

Die in gelöster oder amorpher Gestalt die Polarisationsebene drehenden Substanzen sind theils rechtsdrehend, theils linksdrehend; zu den erstern gehören unter andern Rohrzucker, Milchzucker, Traubenzucker, Laurineencampher, Borneocampher etc., zu den letztern Aepfelsäure, Men-

thacampher, Chinin, Strychnin etc. Die Weinsäure kommt in drei Formen vor; die gewöhnliche Weinsäure ist inactiv, dieselbe lässt sich aber in eine rechtsdrehende und in eine linksdrehende spalten, welche dann, sowohl im reinen Zustande gelöst, als auch in allen ihren Salzen die Polarisationsebene dreht.

Zu den festen in gelöster Form die Polarisationsebene drehenden Substanzen treten dann noch einige Flüssigkeiten, so Citronenöl, welches rechts dreht, Lorbeeröl, welches links dreht, Terpentinöl, welches als rechtsdrehendes und als linksdrehendes vorkommt u. a. m.

Beim Terpentinöl haben Biot und Gernez, beim Campher, Pomeranzenöl und Bigaradenöl Gernez gezeigt, dass dieselben auch in der Form von Dämpfen die Polarisationsebene nicht merklich schwächer drehen als bei gleicher Temperatur im flüssigen Zustande. Dadurch ist der sicherste Beweis geliefert, dass bei diesen Substanzen die Structur des Moleküls selbst das Bedingende für die circulare Polarisation ist, dass also nicht wie beim Quarz es eine bestimmte Lagerung der Moleküle ist, welche die Drehung der Polarisationsebene bewirkt.

Dem entspricht es auch, dass bei den Flüssigkeiten und ebenso einer und derselben Lösung die Grösse der Drehung für eine und dieselbe Farbe der Länge der durchstrahlten Schicht proportional ist, da die Anzahl der Moleküle, welche der Lichtstrahl auf seinem Wege trifft, jedenfalls der Länge der durchstrahlten Schicht proportional ist.

Um das Drehungsvermögen verschiedener Substanzen zu vergleichen, führte Biot den Begriff des specifischen oder molekularen Drehungsvermögens ein. Er bezeichnet als solchen für die Flüssigkeiten wie Terpentinöl den Quotienten aus der für eine Schicht von der Dicke 1 beobachteten Drehung dividirt durch die Dichtigkeit der Flüssigkeit. Ist demnach der bei einer Schichtdicke l beobachtete Drehungswinkel einer Flüssigkeit, deren Dichte δ ist, gleich ϱ, so ist das molekulare Drehungsvermögen

$$[\varrho] = \frac{\varrho}{l\,\delta}.$$

Als Einheit der Schichtdicke nimmt man gewöhnlich nach dem Vorgange von Biot 1 Decimeter. Diesem Begriffe liegt die Auffassung zu Grunde, dass die Anzahl der Moleküle, welche der Lichtstrahl auf seinem Wege in der Schicht von der Dicke 1 trifft, der Dichtigkeit der betreffenden Flüssigkeit proportional sei. Der Quotient aus der in der Schicht von der Länge 1 beobachteten Drehung und der Dichtigkeit würde demnach den Drehungswinkel bedeuten, welchen die Polarisationsebene erhält, wenn der Lichtstrahl in den verschiedenen Flüssigkeiten die gleiche Anzahl Moleküle passirt hat.

Bei Lösungen glaubte Biot aus seinen Versuchen anfänglich den Schluss ziehen zu können, dass die Drehung der Menge der gelösten Substanz proportional sei. Darnach lässt sich auch für die gelösten Substanzen der Begriff des molekularen Drehungsvermögens leicht erhalten. Lösen wir p Gramme einer activen Substanz in q Grammen eines indifferenten Lösungsmittels und ist δ die Dichtigkeit der Lösung, so ist $\frac{p+q}{\delta}$ das Volumen der Lösung und die Menge der in der Volumeneinheit vorhandenen acti-

ven Substanz ist $\frac{p}{p+q}\delta$. Ist dann ϱ der Drehungswinkel, welchen diese Lösung in einer Schicht von der Länge l hervorbringt, so ist der Quotient

$$[\varrho] = \frac{\varrho}{l}\,\frac{p+q}{p\,\delta}$$

das molekulare Drehungsvermögen der gelösten Substanz in demselben Sinne, wie vorher für die Flüssigkeiten, denn dieser Quotient gibt unter der Voraussetzung, dass die Drehung der Menge der gelösten Substanz proportional ist, die Drehung in einer Schicht von der Länge 1, in welcher die gelöste Substanz die Dichtigkeit 1 hat.

Spätere Versuche, zum Theil schon von Biot selbst, haben indess gezeigt, dass die Drehung bei Lösungen einer und derselben Substanz nicht nur je nach dem Lösungsmittel bei gleicher Concentration verschieden, sondern auch bei einem und demselben Lösungsmittel nicht einfach der Concentration proportional ist. Oder wie es häufig bezeichnet wird, da wenn man in obiger Weise das molekulare Drehungsvermögen aus Lösungen verschiedener Concentration berechnet, der Werth desselben verschieden wird, das molekulare Drehungsvermögen ändert sich mit der Concentration der Lösung. In manchen Fällen ist diese Aenderung oder die Abweichung der Drehung von der Proportionalität mit der Menge der gelösten Substanz äusserst gering, so besonders beim Rohrzucker.

Die Drehung der Polarisationsebene hängt bei den Körpern der zweiten Gruppe in derselben Weise von der Wellenlänge des Lichtes ab, wie bei denen der ersten; diese Abhängigkeit lässt sich durch eine Gleichung derselben Form darstellen wie beim Quarz, bei dem Rohrzucker ist sogar die Dispersion bei der Drehung ganz dieselbe. Nach den Versuchen von Arndtsen ist das molekulare Drehungsvermögen des Zuckers für die Fraunhofer'schen Linien

	C	D	E	F
$[\varrho] =$	$53^0{,}41$	$67^0{,}07$	$85^0{,}406$	$101{,}38$

welches sich darstellen lässt durch die Gleichung

$$[\varrho]_z = \frac{2538}{\lambda^2} - 5{,}58.$$

Führen wir für Quarz auch das molekulare Drehungsvermögen ein, indem wir die im §. 189 mitgetheilte Gleichung mit 100 multipliciren und durch die Dichtigkeit des Quarzes 2,653 dividiren, so wird

$$[\varrho]_q = \frac{30766}{\lambda^2} - 66{,}1.$$

Beide Constanten dieser Gleichung sind fast genau 12,12 mal grösser als die Constanten der Gleichung für Zucker.

Die fast vollkommene Constanz des specifischen Rotationsvermögens von wässrigen Zuckerlösungen wird praktisch zur Bestimmung des Zuckergehaltes in solchen Lösungen benutzt, indem man mit Hülfe der sogenannten Saccharimeter die Drehung der Polarisationsebene durch eine Lösung bestimmter Länge beobachtet. Man wendet dazu am besten homogenes Licht und zwar das Licht der Natriumflamme an. Das specifische Drehungsvermögen des Zuckers für Natriumlicht ist nach Versuchen von Wild

$$[\varrho] = 66^0{,}417.$$

Ist nun die durch eine Lösungsschicht von l Decimeter Länge hervorgebrachte Drehung gleich ϱ, so ist nach dem Vorigen der Zuckergehalt, das heisst die Menge Zucker in einem Cubikcentimeter der Lösung in Grammen ausgedrückt

$$\frac{p}{p+q}\,\delta = c = \frac{1}{66{,}417}\,\frac{\varrho}{l} = 0{,}015064\,\frac{\varrho}{l}\,.$$

Bei dem einfachsten, dem Mitscherlich'schen Saccharimeter bringt man die Zuckerlösung in Röhren von meist 2 Decim. Länge zwischen gekreuzte Nicols und bestimmt den Winkel, um welchen man die Nicols aus der gekreuzten Stellung drehen muss, damit das Gesichtsfeld wieder dunkel wird.

§. 192.

Künstliche Doppelbrechung in gepressten und gekühlten Gläsern. Mit Hülfe der Interferenz des polarisirten Lichtes ist es Brewster und Seebeck gelungen, den innigen Zusammenhang zwischen den Elasticitätsverhältnissen der Körper und der Doppelbrechung auch an nicht krystallisirten Körpern nachzuweisen. Brewster fand, dass jeder Vorgang, der in einem amorphen durchsichtigen Körper die Elasticität nach verschiedenen Richtungen verschieden macht, in demselben Doppelbrechung hervorruft. Wir wissen, dass wenn wir einen Körper nach einer Richtung zusammenpressen, der Körper in dazu senkrechten Richtungen sich ausdehnt, dass er somit auch nach verschiedenen Richtungen verschiedene Elasticität annimmt. Dem entsprechend erhält man, wenn man eine quadratische Glasplatte zwischen zwei Nicol'sche Prismen bringt und dieselben dann in einer Richtung *ab* Fig. 253 zusammenpresst, sofort eine Inter-

Fig. 253

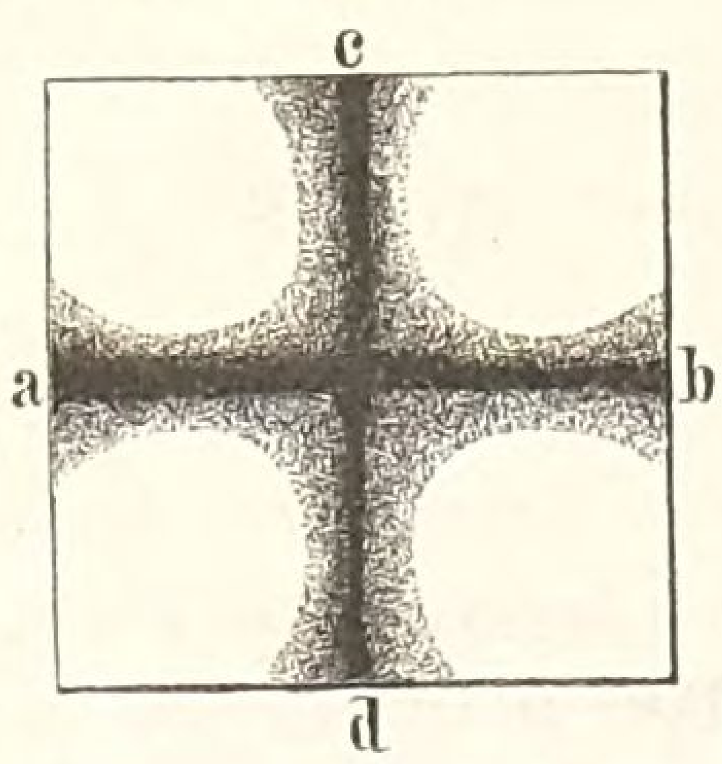
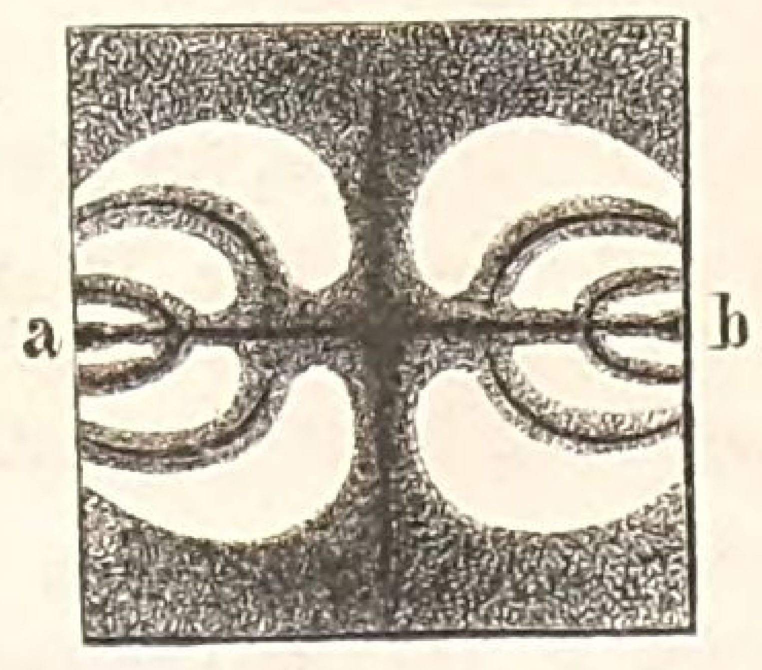


Fig. 254.

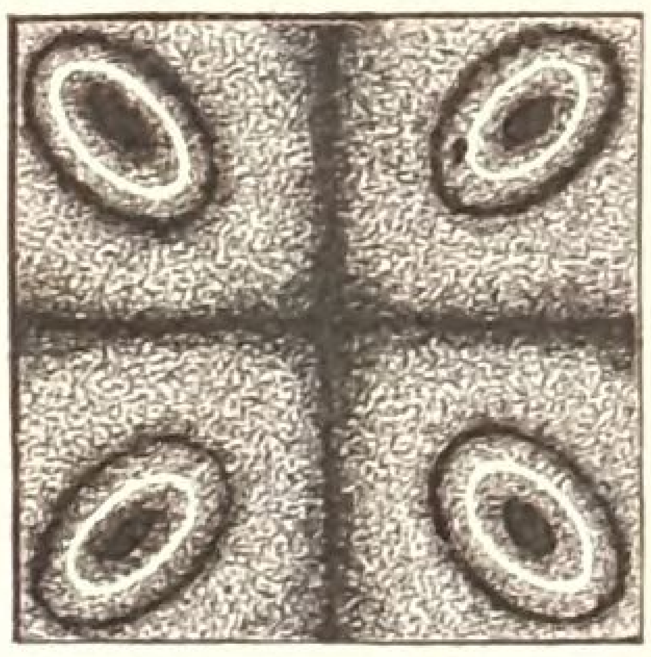


ferenzfigur, welche mit der Stärke des Druckes sich ändert. So tritt bei schwächerm Drucke zwischen gekreuzten Nicols, deren Polarisationsebenen den Richtungen *ab* und *cd* parallel sind, das schwarze Kreuz Fig. 252 und in den vier Eckfeldern eine schwache Färbung auf, bei stärkerm Drucke treten Ringe wie Fig. 254 hervor. Aehnliche Erscheinungen erhält man durch ungleichmässiges Erwärmen oder Abkühlen erhitzter Glaswürfel. Kühlt man z. B. einen stark erhitzten Glaswürfel rasch ab, wodurch in Folge der schlechten Wärmeleitungsfähigkeit des Glases im Innern desselben Spannungen auftreten, so zeigt derselbe zwischen gekreuzten Nicols die Fig. 255, wenn die Polarisationsebenen den Seiten des Würfels parallel sind.

In einer Beziehung unterscheidet sich die künstliche Doppelbrechung indess von der natürlichen, sie ist nicht in jedem Stückchen des Glases, in

welchem sie durch Pressen oder Erhitzen hervorgebracht ist, dieselbe, sondern haftet an dem bearbeiteten Glasstücke als solchem. Wenn man eine zur Axe senkrecht geschnittene Kalkspathplatte zwischen die Nicols bringt, so erhält man sofort die ganze Ringfigur, sobald nur ein kleines Stückchen der Platte im Gesichtsfeld ist, weil eben das kleinste Fragment des Kalkspaths die vollständige krystallinische Structur hat, somit in demselben die Doppelbrechung nach den früher entwickelten Gesetzen vollständig stattfindet. Anders bei dem Glase, dort tritt die Figur, wie schon Brewster fand, nur vollständig hervor, wenn das ganze Glas im Gesichtsfeld ist. Bringt man es nur theilweise in das Gesichtsfeld, oder bedeckt man es zum Theil, so sieht man auch nur den Theil der Figur, den der im Gesichtsfeld befindliche Theil des Glases bei unbedecktem Glase zeigen würde, der dem bedeckten Theile des Glases entsprechende Theil der Ringfigur ist verschwunden.

Fig. 255.



Berichtigungen zum I. Bande.

Seite 27 Zeile 18 v. o. lies B statt P.

„ 31 „ 18 „ u. „ $^1/_2\, gt^2$ statt $^1/_1\, gt^2$.

„ 44 „ 14 „ o. „ Diagonale des statt Diagonale der.

„ 44 „ 15 „ o. „ Vierecks; die „ Vierecks; des.

„ 44 „ 16 „ o. „ den von der „ den von dei.

„ 45 fülle in der Figur die Senkrechte EN auf OB.

„ 58 Zeile 15 v. u. lies Quotienten aus dem Gewichte eines

„ 63 „ 9 „ u. „ $(4n + 1)\frac{\pi}{2}$ statt $(4n + 1)\,\pi$.

„ 63 „ 6 „ u. „ $n = 0$ „ $n = 1$.

„ 69 „ 8 „ u. „ $P(a^2 + z'^2)$ „ $P(a^2 + z')$.

„ 80 „ 14 „ u. „ D und C „ D und O.

„ 93 „ 16 „ o. „ A und B „ a und b.

„ 110 „ 19 „ o. „ Druck- „ Zurück-.

„ 145 „ 6 „ o. „ 205, „ 255.

„ 153 „ 6 „ u. „ $v'd' - vd$ „ $vd - v'd'$.

„ 194 „ 14 „ o. schalte nach L die Länge ein, R der Radius.

„ 212 „ 7 „ u. lies $(\log b_0 - \log b)$ statt $(\log b_0 - \log b$,.

„ 213 „ 16 „ u. „ $(1 + 0{,}004\, \frac{t_0 + t_1}{2})\, (\log \ldots$

„ 221 „ 1 „ u. „ nur mit Luft statt nicht mit Luft.

„ 223 „ 1 „ o. „ 1,5 „ 15.

„ 241 „ 16 „ u. „ $\mu \frac{ds}{dt} v$ „ $\mu - \frac{ds}{dt} v$.

„ 259 „ 3 „ u. „ vom Anfang „ vom Abstand.

„ 264 „ 13 „ u. „ $y = 2\alpha \cos \ldots$ „ $y = 2 \cos \ldots$

„ 289 „ 11 „ u. „ DC' „ DC.

„ 304 „ 1 „ u. „ in welcher sich „ in welcher sie

„ 304 Fig. 105 ziehe die Linie δd senkrecht zu $\alpha\eta$.

„ 355 Zeile 1 v. u. lies Seiten statt Saiten.

„ 359 „ 6 „ u. „ Fig. 134 statt Fig. 132..

„ 440 „ 3 „ o. „ Grösse „ Messung.

„ 444 „ 12 „ o. „ $\sin JPJ_1$ „ $\sin JPJ'$.

„ 472 „ 17 „ u. „ $\sin i = {}^1/_2\left(\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} - \sqrt{4 - \frac{1}{n^2}}\right)$.

„ 484 „ 18 „ o. „ DS statt $D'S'$

„ 510 „ 3 „ o „ Fig. 181 statt Fig. 184.

„ 566 „ 18 „ u. „ $\lambda' = 1{,}00102\, \lambda$ statt $\lambda = 1{,}00102\, \lambda$.

„ 569 „ 3 „ o. „ $QBPP'$ „ $ABPP'$.

„ 576 „ 6 „ o. „ $A = \int_o^b \ldots$ „ $A = \int^b \ldots$

„ 577 „ 17 „ o. „ $\frac{b \,.\, \sin \alpha'}{\lambda} = {}^3/_2$; $\sin \alpha' = {}^3/_2 \frac{\lambda}{b}$.

„ 583 „ 3 „ u. im Nenner lies $\pi \,.\, \sin \alpha \,.\, e$ statt $\pi.\, \sin \alpha\, e$.

„ 601 „ 4 „ o. lies reflectirten statt natürlichen.

„ 623 „ 7 „ o. „ AOt „ Ast.

„ 630 „ 5 „ o. „ $A\,.\,b$ „ AB.

„ 633 „ 9 „ o. „ AA' „ At'.

„ 639 „ 15 „ o. „ $R^2 = \cos^2(\alpha - \alpha') \ldots\ldots$

„ 642 „ 5 „ o. „ $\frac{d}{\varrho_2 \cos r'}$, statt $\frac{d}{\varrho^2 \cos r'}$.

Fig. 1.

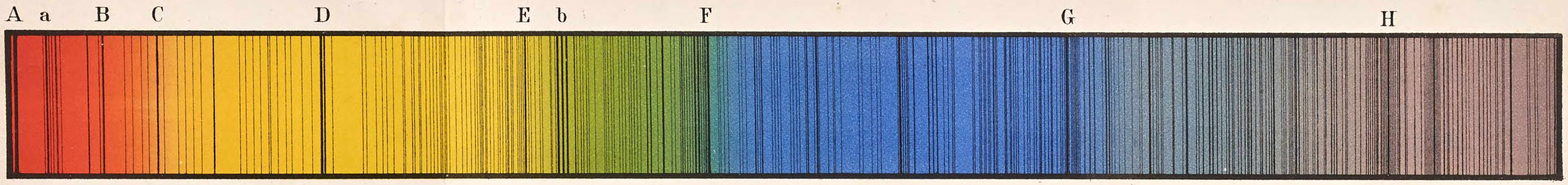


Fig. 2.

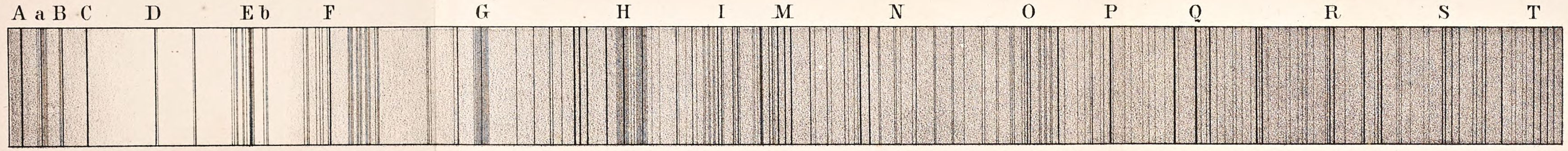


Fig. 3.

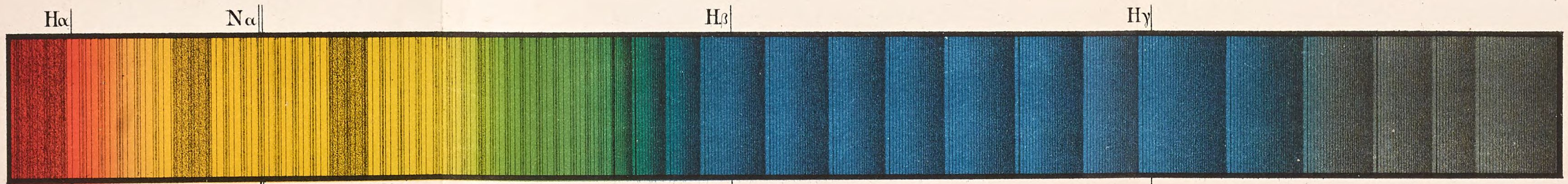
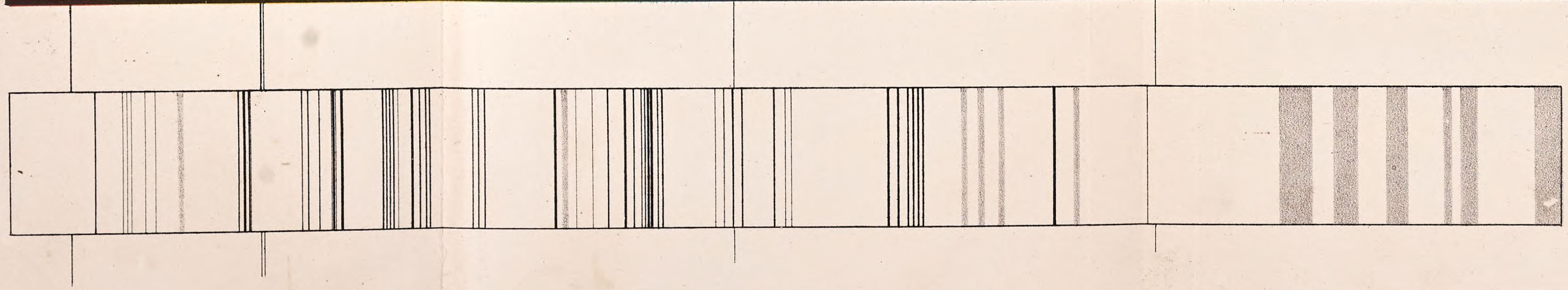
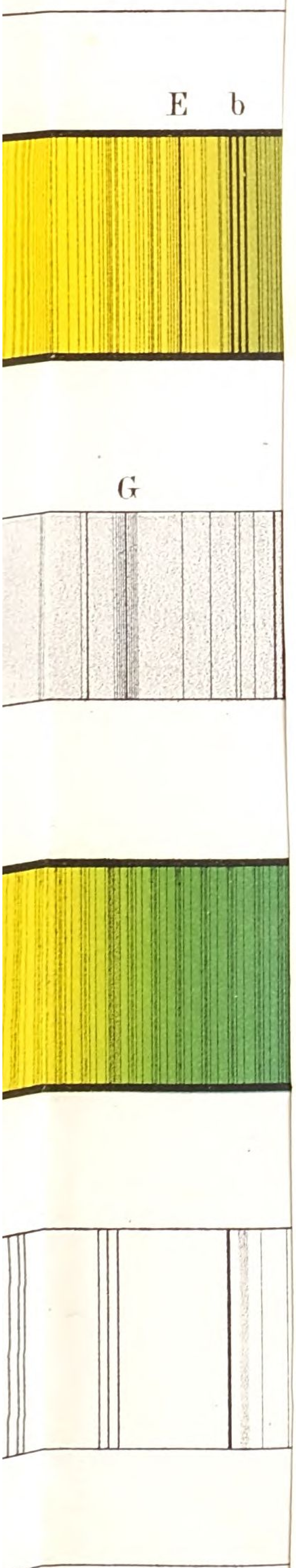


Fig. 4.



ESCHEBACH & SCHAEFER, LEIPZIG


E
b
G

Kötteritzsch, Th., Dr. phil., Lehrer am Gymnasium zu Grimma, Lehrbuch der Elektrostatik. (X u. 335 S.) gr. 8. 1872. geh. n. 7 Mk.

Dieses „Lehrbuch der Elektrostatik" ist das erste, welches überhaupt sein Gebiet vollständig beherrscht und ohne Zuhülfenahme irgend welcher, nicht ohne Weiteres durch das Experiment als richtig nachweisbarer, Annahmen auf rein mathematischem Wege alle Erscheinungen der Elektrostatik im Voraus berechnen lehrt. Die Influenzelektricität und die analytische Bedingung für das elektrische Gleichgewicht erscheinen hier als einfache Forderung des mechanischen Princips, dass im Falle des stabilen Gleichgewichtes die verrichtete Arbeit ein Maximum sein muss. Die allgemeine Lösung des elektrostatischen Problemes, die noch vor kurzer Zeit von anerkannten Autoritäten für wahrscheinlich unausführbar erklärt wurde, ist in diesem Lehrbuche auf mehrfache und immer durchführbare Weise zu Ende geführt.

Krebs, Dr. G., Lehrer der Physik und Chemie an der höheren Gewerbe- und Handelsschule zu Frankfurt a/M., Einleitung in die mechanische Wärmetheorie. Mit 52 Holzschnitten im Text. (VI u. 218 S.) gr. 8. 1874. n. 4 Mk.

Nachdem die theoretische Wärmelehre durch die Aufstellung der mechanischen Wärmetheorie, welche nunmehr die Zustimmung aller Männer von Fach sich erworben, sowie durch die Erforschung der Gesetze der strahlenden Wärme hinreichende Sicherheit erlangt und das allgemeinste Interesse erregt hat, dürfte ein Buch erwünscht sein, welches die hauptsächlichsten Gesichtspunkte dieser Theorien von rein wissenschaftlichem Standpunkte aus, jedoch in solcher Fassung vorträgt, dass jeder, dem die gewöhnlichsten Lehren der Experimentalphysik, sowie die Elemente der Mathematik bekannt sind, ohne Schwierigkeit das Gegebene zu erfassen vermag.

Da in einem besonderen Capitel die innige Verknüpfung dieser Theorien mit den übrigen Theilen der Physik dargelegt wird, so wird das Buch, zu welchem der Verfasser durch Maxwell's Theory of the heat die Anregung erhielt, dem Anfänger als Richtschnur für tiefer gehende Studien dienen und jedem Freund der Naturwissenschaft überhaupt einen Ueberblick über die Bestrebungen der „neueren Physik" gewähren können.

„Dem eben gegebenen Inhaltsverzeichniss, welches die gleichmässige Berücksichtigung des rein Theoretischen, des Experimentellen und Technischen, wie schon früher erwähnt wurde, erkennen lässt, füge ich zur Charakteristik des Buches noch hinzu, dass man bei der mathematischen Behandlung, welche hier bekanntlich nicht elementar sein kann, sondern von Differentialgleichungen mehrerer Variablen und einfachen Integrationen ohne Nachtheil nicht absehen darf, einer gefälligen Darstellung begegnet. Ferner mögen zahlreiche Citate nicht unerwähnt bleiben, welche auf die Originalarbeiten oder andere bemerkenswerthe Arbeiten hinweisen.

In Anbetracht der eben hervorgehobenen Vorzüge und unter nochmaligem Hinweis auf den billigen Preis verdient das Werkchen von Krebs die wärmste Empfehlung an Diejenigen, welche einen verständnissvollen Ueberblick über die mechanische Wärmetheorie anstreben oder einen Ausgangspunkt für tiefer eingehende Studien in dieser jungen, aber so wichtigen Wissenschaft suchen."

[E. Kahl in der Zeitschrift für Mathematik u. Physik.]

Lorberg, Dr. H., Oberlehrer am kais. Lyceum zu Strassburg, Lehrbuch der Physik für höhere Lehranstalten. Mit zahlreichen Holzschn. und 1 lithographirten Tafel. (XVI u. 320 S.) gr. 8. 1877. geh. n. 4 Mk.

Das vorliegende Lehrbuch unterscheidet sich von andern seiner Art hauptsächlich durch das Gewicht, welches auf strenge logische Entwickelung und mathematische Beweisführung gelegt ist. In demjenigen Theil der Physik, in welchem sich alle Gesetze vollständig aus den fundamentalen Eigenschaften der Materie herleiten lassen, der Mechanik, ist dieser Gang consequent eingehalten und dem Experiment nur die Rolle einer nachträglichen Verification der abgeleiteten Gesetze zuertheilt worden; der Verf. ist dabei von der Ueberzeugung ausgegangen, dass dieser wichtigste Theil der Physik seine eigentliche Bedeutung für den Jugendunterricht darin findet, angewandte Logik sowie angewandte Mathematik und damit die naturgemässe Krönung des mathematischen Unterrichts, zugleich neben der Mathematik das einzige der Jugend zugängliche Beispiel einer sich mit vollkommener Consequenz aufbauenden deductiven Wissenschaft, ja von Wissenschaft überhaupt zu sein; und dass ferner die in der logischen Folgerichtigkeit liegende Ueberzeugungskraft durch keine noch so sorgfältig ausgewählte Reihe einzelner Erfahrungsthatsachen in gleichem Masse gewährt werden kann. In der strengen elementar-mathematischen Behandlung auch schwierigerer Gegenstände der Mechanik, z. B. der Pendelschwingungen als Grundlage der gesammten Wellenlehre, ferner der Wellenlehre selbst, der allgemeinen Bedingungen des Gleichgewichts und des Satzes von der Erhaltung der Energie, dürfte das Buch wohl mehr leisten als seine dem Verfasser bekannten Vorgänger; was sich nicht auf elementar-mathematischem Wege zu genügendem Verständniss bringen liess, ist weggelassen worden; doch dürfte dieses Schicksal von wichtigeren Gegenständen der Mechanik wohl nur die Rotations-Erscheinungen, die Theorie des innern Gleichgewichts der Körper und die allgemeinen Gesetze der Bewegung eines Punktsystems betroffen haben.

In den übrigen Theilen der Physik verlangte die Natur des Gegenstandes eine Abweichung von diesem rein deductiven Wege; aber auch hier ist sorgfältig der Schein — welcher nur auf Selbsttäuschung des Lehrers und Täuschung der Schüler beruhen könnte — vermieden worden, als könne die Physik im Schulunterricht in Form einer inductiven Wissenschaft behandelt werden, als könne dem Schüler zugemuthet werden, in der dem physikalischen Unterricht zu Gebote stehenden beschränkten Zeit den tausendjährigen Entwickelungsgang der Wissenschaft in sich durchzumachen. Weiteres über den Plan des Buches siehe: B. G. Teubner's Mittheilungen 1877. No. 3.

Lorenz, L., die Lehre vom Licht. Vorlesungen in der obersten Klasse der Offizierschule zu Kopenhagen gehalten. Autor. deutsche Ausg. Mit zahlr. Holzschn. im Text. (203 S.) gr. 8. 1877. geh. n. 4 Mk.

Die populäre Darstellung macht das vorliegende Buch vorzugsweise für das grössere Publikum geeignet, es enthält aber auch in wissenschaftlicher Beziehung viele neue Gesichtspunkte, die ihm auch das Interesse der Fach-Gelehrten zuwenden werden.

Matthiessen, Dr. Ludwig, ord. Professor der Physik an der Universität zu Rostock, Grundriss der Dioptrik geschichteter Linsensysteme. Mathematische Einleitung in die Dioptrik des menschlichen Auges. (VIII u. 276 S.) gr. 8. 1877. geh. n. 8 Mk.

Dies Werk hat sich die Aufgabe gestellt, mit Berücksichtigung aller seit dem Erscheinen von Gauss, „Dioptrische Untersuchungen" auf diesem Gebiete gewonnenen wichtigsten Resultate eine kurze streng wissenschaftlich begründete, in den mathematischen Symbolen möglichst einfache Darlegung der Dioptrik geschichteter Linsensysteme mit specieller Anwendung auf die Dioptrik des menschlichen Auges zu liefern.

Narr, Dr. F., Docent der Physik an der Universität München, Einleitung in die theoretische Mechanik. Mit 35 Figuren in Holzschnitt. (XII u. 350 S.) gr. 8. 1875. geh. n. 6 Mk.

Dieses Buch wird zunächst eine geeignete Vorschule für die grösseren Werke über die Mechanik, vor Allem für die in dem gleichen Verlage erschienenen Werke von Kirchhoff und Schell bilden, der eigenthümliche Aufbau desselben, die genaue Ausführung der Details, die theilweise zu klareren, theilweise zu neuen Anschauungen führte, endlich die sorgfältige Benutzung der Literatur in den Anwendungen wird demselben aber auch Interesse in weiteren Kreisen sichern.

Neumann, Dr. Carl, die elektrischen Kräfte. Darlegung und Erweiterung der von A. Ampère, F. Neumann, W. Weber, G. Kirchhoff entwickelten mathematischen Theorien. I. Theil. Die durch die Arbeiten von A. Ampère und F. Neumann angebahnte Richtung. (XV u. 272 S.) gr. 8. 1873. geh. n. 7 Mk. 20 Pf.

„„Lentement, petit à petit, croissent les Sciences, et tard on parvient à la vérité par mainte erreur. Tout doit avoir été préparé par un long et constant effort pour l'apparition d'une vérité nouvelle; alors il vient un moment où elle jaillit d'elle-même, comme par une nécessité divine." " Ces mots de Jacobi, que M. Carl Neumann a mis en guise d'épigraphe au frontispice de son livre sur les Forces électriques, sont admirablement en situation, lorsqu'on songe à la rapidité avec laquelle la théorie de l'électromagnétisme s'est développée entre les mains d'Ampère, immédiatement après la découverte de l'action des courants fermés sur l'aiguille aimantée, découverte à laquelle se bornent les droits du Danois Oersted. Aujourd'hui nous sommes de nouveau dans la période d'élaboration, de préparation patiente qui précède les grandes découvertes; car il s'agit maintenant de frayer la voie à celui qui trouvera la théorie mécanique de l'électricité, qui réunira dans une synthèse simple et générale les faits épars et les formules isolées".

„„L'établissement d'une théorie satisfaisante des phénomènes électriques"" dit M. C. Neumann „„est peut-être un problème réservé aux siècles à venir. Tout ce qui pour le moment, peut être fait dans cette direction, c'est de nous appliquer à explorer le terrain de ces phénomènes en tous sens, et en l'abordant des côtés les plus divers. Dans la partie de mon Ouvrage que je publie aujourd'hui, je me suis efforcé de poursuivre la route indiquée par les travaux d'Ampère et par ceux de mon père. Plus tard je tâcherai d'explorer avec le même soin celle qui a été tracée par Weber et Kirchhoff.""

„Voici en peut de mots le plan de l'important travail que nous avons sous les yeux, et qui, loin de se borner à un simple exposé des recherches d'Ampère et de Franz Neumann, nous fait faire un pas de plus vers la connaissance des lois qui régissent les phénomènes, encore si obscurs, de l'induction électrique." — — — — — —

„La marche suivie par M. Neumann pour établir ses formules est un modèle de circonspection et de rigueur mathématique; il ne fait pas un pas en avant sans s'être assuré de la solidité du terrain, et l'on ne perd jamais des yeux un seul instant la ligne qui sépare les hypothèses plausibles des vérités démontrées. Des tentatives comme celle qu'il vient de mener à bonne fin ont une grande importance, parce qu'elles coordonnent et relient entre eux les résultats d'une foule de recherches dont on n'aperçoit toute la fécondité que lorsqu'elles se trouvent rapprochées de manière à s'éclairer mutuellement." [Bulletin des sc. math. et astr., réd. par Darboux.]

——— Vorlesungen über die mechanische Theorie der Wärme. (XVI u. 240 S.) gr. 8. 1875. geh. n. 7 Mk. 20 Pf.

„Während lange Zeit hindurch die Deutsche Literatur auffällig arm an Werken war, welche dazu geeignet schienen, in systematischer Weise in die eigenthümlichen Betrachtungsweisen der mechanischen Wärmetheorie einzuführen und mit ihren Resultaten bekannt zu machen, hat sich dieser Zustand in neuerer Zeit in erfreulichster Weise geändert."

„Zu den bedeutendsten Erscheinungen auf diesem Gebiete gehört, neben der systematischen Umarbeitung der classischen Abhandlungen von Clausius, ohne Zweifel das vorliegende Werk C. Neumann's. — — —"

„Die Reichhaltigkeit und strenge Systematik des Inhalts, die seltene Klarheit und Schärfe des Ausdrucks weisen dieser Arbeit eine ganz hervorragende Stellung unter den verwandten Erscheinungen an."

[Rühlmann in Schlömilch's Zeitschrift für Mathematik und Physik.]

BUCHBINDEREI
VON
AUGUST WERZ
MÜNCHEN

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Wüllner, Adolf,

Compendium der Physik für Studirende an Universitäten und Technischen Hochschulen

Bd.: 1

Leipzig 1879

Phys.g. 529 th-1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11392814-9